МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ УКРАИНЫ

ХАРЬКОВСКИЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
К РЕШЕНИЮ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ
В КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

ХАРЬКОВ 1993

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ УКРАИНЫ
ХАРЬКОВСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

для студентов-иностранцев подготовительного факультета

Утверждено
редакционно-издательским
советом института.
Протокол № 2 от 02.04.93.

Харьков ХПИ 1993

Методичні вказівки до рішення алгебраїчних рівнянь в курсі математики для студентів-іноземців підготовчого факультету / Упоряд.О.М.Лапузіна. - Харків: ХПІ, 1993. - 28 с. - Рос.мовою.

Упорядник О.М.Лапузіна

Кафедра природничих наук підготовчого факультету для іноземних громадян

УРАВНЕНИЯ С ОДНИМ НЕИЗВЕСТНЫМ

Корень уравнения

Буквенные величины, входящие в равенство двух выражений A и B ($A = B$), по условию могут быть неравноправными. Одни из них считаются известными (параметрами), они могут принимать все свои допустимые значения. Другие буквенные величины являются неизвестными (переменными).

Уравнение – это равенство с переменными, которое является верным числовым равенством только при определенных значениях переменных.

П р и м е р. $4x = 12$ – это уравнение;

$(x+2)(x-1)(x-7) = 0$ – это тоже уравнение.

В зависимости от числа неизвестных (переменных), входящих в уравнение, рассматривают уравнения с одним, двумя и т.д. неизвестными. Неизвестные величины в уравнении обычно обозначают буквами $x, y \ldots z$, а известные (параметры) буквами $a, b, c \ldots$

Будем рассматривать сначала уравнение с одним неизвестным x.

$$A(x) = B(x).$$

Выражения, стоящие слева и справа от знака равенства, называются левой и правой частями уравнения. Каждое слагаемое части уравнения называется членом уравнения.

Областью допустимых значений (ОДЗ) или областью определения уравнения $A(x) = B(x)$ называется множество всех числовых значений неизвестного x, при каждом из которых имеют смысл выражения $A(x)$ и $B(x)$ одновременно.

Корень (решение уравнения) – это значение переменной (неизвестной), при котором уравнение есть верное числовое равенство. Корни уравнения должны принадлежать ОДЗ уравнения.

Решить уравнение – это значит найти все его корни или установить, что их нет.

1-2206

П р и м е р

1) уравнение $2x = 2$ имеет единственный корень $x = 1$;
2) уравнение $x^2 + 1 = 0$ не имеет корней (для любого действительного числа x всегда $x^2 + 1 > 0$);
3) уравнение $x = |x|$ имеет бесконечное множество корней.

Равносильные (эквивалентные) уравнения - это уравнения, у которых множества их решений совпадают.
Если уравнения $A = B$ и $A_1 = B_1$ равносильны, то пишут

$$A = B \Longleftrightarrow A_1 = B_1 .$$

П р и м е р:

$$(x+2)(x-3) = 0 \quad (а) \to S = \{-2; 3\}$$
$$x(x+2)(x-3) = 0 \quad (б) \to S = \{0; -2; 3\}$$
$$x(x+2) = 3(x+2) \quad (в) \to S = \{-2; 3\}$$

(а) и (в) - равносильны.

Из свойств числовых равенств и понятий равносильных уравнений вытекают следующие основные свойства уравнений.

I. Уравнение $A = B$ равносильно уравнению $A + C = B + C$, где C - число или несколько выражений, имеющие смысл на множестве допустимых значений (т.е. на ОДЗ) уравнения $A = B$.

С л е д с т в и е. Любое слагаемое можно перенести из одной части уравнения в другую с противоположным знаком.
П р и м е р: $A = B \Longleftrightarrow A - B = 0$.

2. Уравнение $A = B$ равносильно уравнению $A \cdot C = B \cdot C$, где C - число или некоторое выражение, которое имеет смысл на множестве допустимых значений уравнения $A = B$ и не обращается на нем в нуль.

С л е д с т в и е. Обе части уравнения можно сокращать на общий множитель, не равный нулю.

$$A \cdot C = B \cdot C \Longleftrightarrow A = B \qquad (C \neq 0).$$

3. Уравнение $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$ равносильно уравнению $A_1 \cdot B_2 = A_2 \cdot B_1$, если $A_2 \neq 0$, $B_2 \neq 0$ (на ОДЗ).

Эти свойства используют при решении уравнений.

Чтобы решить уравнение, нужно заменить его на более простое, эквивалентное уравнение. Это делают при помощи различных преобразований. При этом возможны два случая.

I. При переходе к новому уравнению может произойти потеря корня.

П р и м е р: при переходе от уравнения $x(2x-1)=x^2$ к уравнению $2x-1=x$ (мы сократили на неизвестное "x") происходит потеря корня $x=0$.

2. Новое уравнение может содержать корни, которые не являются корнями данного уравнения (посторонние корни).

П р и м е р: при переходе от уравнения $\sqrt{2x-1} = \sqrt{x-1}$ к уравнению $2x-1=x-1$ получаем $x=0$ – посторонний корень этого уравнения. Поэтому часто делают проверку корней, подставив их в данное уравнение.

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ С ОДНИМ НЕИЗВЕСТНЫМ

Уравнение вида $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0 \ (a_n \neq 0)$ (I) называют алгебраическим степени n относительно неизвестного x. Коэффициенты – это a_i, где 0, I, 2, 3, ... – известные числа.

I. Линейные уравнения

В выражении (I) при n = I имеем уравнение вида $ax+b=0 \ (a_0=b;\ a_1=a)$. Это частный случай алгебраического уравнения. Это уравнение называется линейным.

Определение. Уравнением первой степени с одним неизвестным называется уравнение вида

$$ax+b=0, \qquad (2)$$

где a, b – заданные числа, $a \neq 0$, а x – неизвестное. При этом число a называется коэффициентом при неизвестном x, а b – свободным членом уравнения.

I. Если $a \neq 0$, то линейное уравнение имеет единственное решение:

$$x=-\frac{b}{a}; \quad a \in R, \quad b \in R.$$

2. Если $a=0$, $b \neq 0$, то уравнение не имеет решений, т.к. b будет равно нулю ($b=0$).

3. Если $a=0$ и $b=0$, уравнению удовлетворяет любое значение: $x \in R$. Уравнение имеет бесконечное множество корней.

2*

Чтобы решить линейное уравнение, нужно привести его к стандартному виду, а именно:

привести все члены уравнения к наименьшему общему знаменателю (НОЗ);

раскрыть скобки;

привести подобные члены;

найти корни уравнения.

П р и м е р I. Решить уравнение

$$\frac{2x-3}{5}+4(x-1)-5=0.$$

Р е ш е н и е

I. Приводим все члены уравнения к НОЗ

$$\frac{2x-3+20(x-1)-25}{5}=0 \Leftrightarrow 2x-3+20(x-1)-25=0.$$

2. Раскрываем скобки

$$2x-3+20x-20-25=0.$$

3. Приводим подобные члены

$$22x-48=0.$$

4. Находим корни уравнения

$$x=\frac{24}{11}=2\frac{2}{11}.$$

Ответ: $x=2\frac{2}{11}$ (уравнение имеет единственный корень).

П р и м е р 2. Решить уравнение $a^2x=a(x+2)-2$.

Р е ш е н и е

Это уравнение содержит параметр a (переменную, которая в условии задачи сохраняет одно и то же значение). Переносим члены с неизвестными в одну часть уравнения, а известные члены – в другую, получаем равносильное уравнение

$$a(a-1)x=2(a-1).$$

Если $a(a-1)\neq 0$, т.е. $a\neq 0$, $a\neq 1$, то имеем уравнение первой степени, и $x=\frac{2}{a}$ – это единственный корень.

Если $a=0$, то данное линейное уравнение принимает вид $0\cdot x=-2$, и значит не имеет корей.

Если $a=1$; то уравнение принимает вид $0\cdot x=0$, и его корнем является любое число.

Пример 3. Решить уравнение

$$\frac{3ax-5}{(a-1)(x+3)}+\frac{3a-11}{a-1}=\frac{2x+7}{x+3}.$$

Решение

1. После приведения дробей к общему знаменателю $(a-1)(x+3)$ получаем линейное уравнение $3ax-5+(3a-11)(x+3)=(a-1)(2x+7)$, равносильное исходному, при условии, что

$$(a-1)(x+3)\neq 0\ ,\ \text{т.е.}\ a\neq 1,\ x\neq -3.$$

2. После приведения подобных членов и сведения полученного уравнения к стандартному для линейного уравнения виду $kx=b$ имеем $(4a-9)x=31-2a$ (*)

3. А) если $4a-9\neq 0\Rightarrow a\neq 2\frac{1}{4}$, то $x=\frac{31-2a}{4a-9}$.

Теперь необходимо исключить те значения параметра a, при которых найденное значение x равно -3, чего не может быть по области определения (ОДЗ) исходного уравнения. Приравняем дробь $\frac{31-2a}{4a-9}$ к -3: $\frac{31-2a}{4a-9}=-3$, $31-2a=-12a+27$;

$$10a=-4;\ \Rightarrow a=-\frac{2}{5}.$$

Таким образом, при $a=-\frac{2}{5}$ полученное в результате преобразования линейное уравнение имеет корень $x=-3$, посторонний для исходного уравнения.

Б) Если $a=2\frac{1}{4}$, то уравнение (*) примет вид

$0\cdot x=31-2\cdot\frac{9}{4}$, или $0=26\frac{1}{2}$ – не верное равенство, т.е. уравнение (*) не имеет корней.

Вообще если уравнение не имеет корней, то говорят также, что множество корней пустое, и обозначают $\varnothing$.

Ответ: 1. При $a\neq 1$, $a\neq 2\frac{1}{4}$ и $a\neq -\frac{2}{5}$ уравнение имеет единственное решение $x=\frac{31-2a}{4a-9}$; 2. при $a=-\frac{2}{5}$ и $a=1$ данное уравнение не имеет смысла; 3. при $a=2\frac{1}{2}$

3-2206

нет решений. Ответ можно записать короче:

если $a \neq -\frac{2}{5};\ 1;\quad 2\frac{1}{4}$, то $x = \frac{31-2a}{4a-9}$;

если $a = -\frac{2}{5};\ 1;\quad 2\frac{1}{4}$, то $\varnothing$.

Уравнение прямой имеет вид $y = ax + b$. Если прямая проходит через точку с координатами x_0 и y_0, то эти координаты удовлетворяют уравнению прямой $y_0 = ax_0 + b$.

2. Квадратные уравнения

При $n = 2$ уравнение (I) принимает вид $ax^2 + bx + c = 0$, $(a_2 = a \neq 0;\ a_1 = b)$. Это квадратное уравнение, или уравнение второй степени, где a - первый коэффициент;

b - второй коэффициент;

c - свободный член.

Квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ называется неполным, если хотя бы один из коэффициентов (b или c) равен нулю.

Неполное квадратное уравнение - это уравнение следующих видов:

$$ax^2 = 0 \qquad (a \neq 0);$$
$$ax^2 + c = 0 \qquad (a \neq 0;\ c \neq 0);$$
$$ax^2 + bx = 0 \qquad (a \neq 0;\ b \neq 0).$$

Неполные квадратные уравнения решаются так:

1. Уравнение $ax^2 = 0\ (a \neq 0)$ имеет единственный корень $x = 0$.
2. Уравнение $ax^2 + c = 0\ (a \neq 0,\ c \neq 0)$ равносильно уравнению $x^2 = -\frac{c}{a}$. Возможны два случая:

а) если $\frac{c}{a} > 0$, то $-\frac{c}{a} < 0$, тогда корни уравнения $x^2 = -\frac{c}{a}$ не являются действительными числами.

П р и м е р: корни уравнения $x^2 + 4 = 0$;

б) если $\frac{c}{a} < 0$, то $-\frac{c}{a} > 0$, и уравнение $x^2 = -\frac{c}{a}$ имеет два корня: $x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}$; $x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$ $\left(-\frac{c}{a} > 0\right)$.

Ответ записываем в виде: $x_{12} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$, где $\left(-\frac{c}{a} > 0\right)$.

П р и м е р: решить неполное квадратное уравнение $x^2 = 4$.

Р е ш е н и е

$$|x| = \sqrt{4} = 2 \Rightarrow x_1 = 2\ ;\ x_2 = -2\ ;\ x_{1,2} = \pm 2\ .$$

Вообще уравнение вида $x^2 = a\ (a > 0)$ имеет корни $x_{1,2} = \pm\sqrt{a}$. Действительно, $x^2 = a \Leftrightarrow x^2 - (\sqrt{a})^2 = 0$, или $(x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a}) = 0$, откуда и следует справедливость утверждения.

Это уравнение можно решить по-другому. Разложим левую часть на множители:

$$(x-2)(x+2) = 0 \Rightarrow x_1 = 2\ ;\quad x_2 = -2\ .$$

Ответ: $x_{1,2} = \pm 2$.

3. Уравнение $ax^2 + bx = 0\ (a \neq 0;\ b \neq 0)$ можно решить с помощью разложения его левой части на множители.

$$ax^2 + bx = 0 \Rightarrow x(ax + b) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0;\ x_2 = -\frac{b}{a}.$$

П р и м е р: $3x^2 + 8x = 0 \Rightarrow x(3x + 8) = 0 \Rightarrow$

$$x_1 = 0\ ;\quad x_2 = -\frac{8}{3}\ .$$

В общем случае для решения квадратных уравнений применяется метод выделения полного квадрата. Применение этого метода объясним сначала на примерах.

П р и м е р 1. Решить квадратное уравнение $x^2 - 4x - 5 = 0$.

Р е ш е н и е

Запишем левую часть уравнения в виде

$$x^2 - 4x - 5 = (x^2 - 2\cdot 2x + 2^2) - 5 - 2^2 = (x-2)^2 - 9.$$

Мы выделили полный квадрат $(x-2)^2$. Исходное уравнение запишем в виде $(x-2)^2 - 3^2 = 0$ или $((x-2)-3)((x-2)+3) = 9$. Следовательно, $x - 2 - 3 = 0$ или $x - 2 + 3 = 0$, откуда $x_1 = 5, x_2 = -1$.

П р и м е р 2. Решить квадратное уравнение $3x^2 + 2x - 5 = 0$.

Р е ш е н и е

Разделим обе части уравнения на 3: $x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{5}{3} = 0$;

$$x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{5}{3} = \left(x^2 + 2\cdot x\cdot\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2\right) - \frac{5}{3} = \left(x + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{16}{9}.$$

3*

Получим $\left(x+\frac{1}{3}\right)^2-\frac{16}{9}=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{3}\right)^2=\frac{16}{9}$,

откуда $x+\frac{1}{3}=\pm\frac{4}{3}$.

Следовательно, $x_1=\frac{4}{3}-\frac{1}{3}=1$; $x_2=-\frac{4}{3}-\frac{1}{3}=-\frac{5}{3}$.

Рассмотрим теперь квадратное уравнение общего вида

$$ax^2+bx+c=0 \qquad (a\neq 0). \tag{3}$$

Выделим полный квадрат. Для этого запишем левую часть уравнения так: $ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c=a\left(x^2+2\cdot x\cdot\frac{b}{2a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right)+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c.$

Поэтому, $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c=0$ или $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$. (4)

Дальнейшее решение зависит от знака правой части полученного уравнения (4). Так как $4a^2>0$ $(a\neq 0)$, то знак правой части совпадает со знаком выражения b^2-4ac.

Выражение b^2-4ac называется дискриминантом квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ и обозначается буквой D.

$$D=b^2-4ac.$$

Рассмотрим три случая: $D>0$, $D=0$, $D<0$.

1. $D=b^2-4ac>0$.

В этом случае (4) можно записать так:

$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2 \Rightarrow x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$,

откуда $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ или $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$. (5)

Это формула для вычисления корней квадратного уравнения.

Таким образом, если $D>0$, то уравнение (3) имеет два различных корня, которые находим по формуле (5).

2. $D=b^2-4ac=0$.

В этом случае (4) принимает вид $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0$, откуда $x+\frac{b}{2a}=0$, т.е. $x=-\frac{b}{2a}$.

Таким образом, если дискриминант равен нулю, то уравнение имеет единственный корень.

3. $D=b^2-4ac<0$.

В этом случае в правой части уравнения (5) стоит отрицательное число, а в левой части неотрицательное (положительное или равное нулю). Следовательно, если $b^2-4ac<0$, то корни уравнения (5), а значит и корни уравнения $ax^2+bx+c=0$ не являются действительными числами.

Итак, квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет действительные корни только при дискриминанте $D\geq 0$; если $D>0$, то корни различные, если $D=0$, то корни равные. Формула корней квадратного уравнения имеет вид (5).

Замечание 1. Если коэффициент b - четное число, т.е. $b=2k$, то формула корней квадратного уравнения примет вид

$$x_{1,2}=\frac{-2k\pm\sqrt{4k^2-4ac}}{2a}=\frac{-k\pm\sqrt{k^2-ac}}{a}.$$

Пример. Вычислите корни уравнения

$$3x^2-6x-5=0 \qquad (D>0)$$

$$x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9+15}}{3}=\frac{3\pm\sqrt{24}}{3}=\frac{3\pm2\sqrt{6}}{3},$$

Замечание 2. Если коэффициент $a=1$, то квадратное уравнение примет вид $x^2+px+q=0$. Такое квадратное уравнение называется приведенным квадратным уравнением. Любое квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ можно привести к виду $x^2+px+q=0$ делением обеих частей уравнения на $a\neq 0$.

Найдем корни приведенного квадратного уравнения. В формуле (5) полагаем $a=1$, $b=p$, $c=q$, тогда $x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$, формула корней приведеного квадратного уравнения $x^2+px+q=0$.

Пример. Решим уравнение $x^2+4x-5=0$.

$$x_{1,2}=-2\pm\sqrt{4-(-5)}=-2\pm\sqrt{9}=-2\pm3,$$

откуда $x_1=1$, $x_2=-5$.

4 2206

Алгоритм решения любого квадратного уравнения:
привести к НОЗ;
раскрыть скобки;
привести подобные члены;
сделать необходимые преобразования;
привести к стандартному виду $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$;
найти корни уравнения по формулам (5);
проверить, принадлежат ли найденные корни ОДЗ уравнения;
записать ответ в соответствии с ОДЗ исходного уравнения.

П р и м е р. Решить уравнение

$$\frac{2}{x^2-4}+\frac{x-4}{x^2+2x}=\frac{1}{x^2-2x}.$$

Р е ш е н и е

Разложим знаменатель на множители, получим

$$\frac{2}{(x+2)(x-2)}+\frac{x-4}{x(x+2)}=\frac{1}{x(x-2)}.$$

Приведем к НОЗ, $x(x^2-4)$, получим уравнение $2x+(x-4)(x-2)=x+2$ или $x^2-5x+6=0$, равносильное исходному уравнению, при условии $x(x^2-4)\neq0$, т.е. $x\neq0$, $x\neq\pm2$. Находим корни приведенного квадратного уравнения:

$$x_{1,2}=\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{25}{4}-6}=\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{5}{2}\pm\frac{1}{2},$$

откуда $x_1=3$, $x_2=2$. Так как $x_2=2$ не удовлетворяет ограничению $x\neq2$ (не входит в ОДЗ исходного уравнения), то, следовательно, исходное уравнение имеет единственный корень $x=3$.

Т е о р е м а В и е т а. Если квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет действительные корни x_1 и x_2, то их сумма равна $-\frac{b}{a}$ и произведение равно $\frac{c}{a}$:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2=\frac{c}{a}. \qquad (6)$$

Формулы (6) называются формулами Виета.

Доказательство

По условию дискриминант квадратного уравнения $D = b^2 - 4ac \geq 0$. Тогда по формуле (5) уравнение имеет два корня:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}; \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}.$$

Найдем сумму и произведение корней

$$x_1 + x_2 = \frac{b + \sqrt{D} - b - \sqrt{D}}{2a} = -\frac{b}{a}; \qquad (7)$$

$$x_1 x_2 = \frac{(-b+\sqrt{D})(-b-\sqrt{D})}{2 \cdot 2a^2} = \frac{b^2 - D}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

Теорема Виета устанавливает связь между корнями квадратного уравнения и его коэффициентами.

Для приведенного квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ с дискриминантом $D = p^2 - 4q \geq 0$ формулы (6) принимает вид

$$x_1 + x_2 = -p, \quad x_1 \cdot x_2 = q.$$

Полученные для приведенного квадратного уравнения формулы Виета читаются так: сумма корней приведенного квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену.

Если корни квадратного уравнения действительные $(D \geq 0)$, то формулы Виета позволяют по знакам коэффициентов уравнения определить знаки корней.

Пример. Если $a > 0,\ b > 0,\ c > 0$ (и, следовательно, $D = b^2 - 4ac > 0$), то $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} > 0$, и корни имеют разные знаки. Так как при этом $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} < 0$, то отсюда следует, что больший по модулю корень отрицателен (сумма двух чисел разных знаков отрицательная). Мы можем сказать следующее:

если $q > 0,\ p > 0$, то оба корня отрицательны;

если $q > 0,\ p < 0$, то оба корня положительны;

если $q < 0,\ p > 0$, то уравнение имеет корни разных знаков, причем отрицательный корень по абсолютной величине больше положительного;

если $q < 0,\ p < 0$ то уравнение имеет корни разных знаков, причем отрицательный корень по абсолютной величине меньше положительного.

Теорема (обратная теореме Виета). Если числа x_1, x_2, p, q таковы, что $x_1+x_2=-p$ и $x_1x_2=q$, то x_1 и x_2 - корни уравнения $x^2+px+q=0$. Другими словами, если для чисел x_1, x_2, p, q справедливы формулы (7), то x_1 и x_2 корни приведенного квадратного уравнения.

Доказательство

Рассмотрим $(x-x_1)(x-x_2)$, получим $(x-x_1)(x-x_2)=$
$=x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=x^2+px+q.$
Очевидно, что x_1 и x_2 - корни уравнения $(x-x_1)(x-x_2)=0$ и, значит, уравнения $x^2+px+q=0.$
Теорема Виета и теорема, обратная ей, часто применяется при решении различных задач.

Пример. Не решая уравнения $x^2-452x+987=0$, определить знаки его корней.

Решение

Дискриминант этого уравнения положителен, так как $D/4=226^2-987>0.$ Следовательно, уравнение имеет действительные корни x_1 и x_2. По теореме Виета $x_1x_2=987>0$ корни имеют одинаковые знаки. Так как по теореме Виета $x_1+x_2=$ $=452>0$, то корни x_1 и x_2 - положительные.

Пример. Составить приведенное квадратное уравнение, корни которого $x_1=2,\ x_2=3.$

Решение

По обратной теореме Виета

$$p=-(x_1+x_2)=-5;\quad q=x_1\cdot x_2=6.$$

Искомое уравнение $x^2-5x+6=0$.

Пример. Не вычисляя корни x_1 и x_2 уравнения $3x^2-2x-6=0$, найти: а) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$; б) $x_1^2+x_2^2$; в) $x_1^3+x_2^3$.

Решение

Дискриминант $D=2^2-4\cdot3\cdot(-6)>0.$ По формулам Виета

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}=\frac{2}{3};\quad x_1x_2=\frac{c}{a}=-2$$

а) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{2}{3}:(-2)=-\frac{1}{3}$;

б) $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=\left(\frac{2}{3}\right)-2\cdot(-2)=\frac{40}{9}$;

в) $x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)(x_1^2-x_1x_2+x_2^2)=(x_1+x_2)((x_1+x_2)^2-3x_1x_2)=$
$=\frac{2}{3}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^2-3(-2)\right)=\frac{116}{27}$.

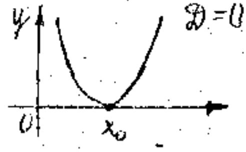
Пример. Найти p, если сумма квадратов корней уравнения $x^2+px-3=0$ равна 10.

Решение

Дискриминант $\mathcal{D}>0$. По формулам Виета для приведенного уравнения $x_1+x_2=-p$, $x_1x_2=-3$.
Так как $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=p^2+6$, то $p^2+6=10$, откуда $p^2=4$, и, следовательно, $p=2$ или $p=-2$.

Квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ можно решить графически. Для этого нужно построить параболу $y=ax^2+bx+c$ и найти точки пересечения графика с осью абсцисс. Абсциссы этих точек пересечения и есть корни уравнения.
Для решения квадратного уравнения следует вычислить дискриминант

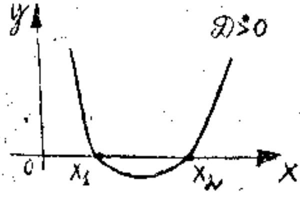
$$\mathcal{D}=b^2-4ac.$$



Если $\mathcal{D}=0$, то квадратное уравнение имеет единственное решение $x_0=-\frac{b}{2a}$.

Если $\mathcal{D}<0$, то уравнение не имеет действительных корней.

Если $\mathcal{D}>0$, то уравнение имеет два корня x_1 и x_2.



УРАВНЕНИЯ, ПРИВОДИМЫЕ К КВАДРАТНЫМ

I. Биквадратные уравнения

Уравнение вида $ax^4+bx^2+c=0$, где $a\neq 0$, называется биквадратным. Такие уравнения решаются методом введения новой переменной: если $x^2=y$, получится квадратное уравнение $ay^2+by+c=0$, которое имеет действительные корни только тогда, когда его дискриминант $\mathcal{D}=b^2-4ac$ неотрицательный. Тогда возможны следующие случаи (в зависимости от корней y_1, y_2 вспомогательного квадратного уравнения $ay^2+by+c=0$):

1. $y_1 \geq 0$; $y_2 \geq 0$; биквадратное уравнение имеет четыре действительных корня: $x_{1,2} = \pm\sqrt{y_1}$; $x_{3,4} = \pm\sqrt{y_2}$;

2. $y_1 \geq 0$; $y_2 < 0$; биквадратное уравнение имеет два действительных корня: $x_{1,2} = \pm\sqrt{y_1}$.

Аналогично и при $y_1 < 0$, $y_2 \geq 0$.

3. $y_1 < 0$; $y_2 < 0$; корни биквадратного уравнения не являются действительными числами.

П р и м е р. Решить уравнение $x^4+4x^2-21=0$.

Р е ш е н и е

Пусть $x^2=y$, тогда $y^2+4y-21=0$. Отсюда находим $y_1=-7$; $y_2=3$. Теперь решим $x^2=-7$, $x^2=3$. Корни уравнения $x^2=-7$ не являются действительными числами. А из уравнения $x^2=3$ находим $x_1=\sqrt{3}$; $x_2=-\sqrt{3}$, которые являются корнями заданного биквадратного уравнения.

2. Трехчленные уравнения

Уравнение вида $ax^{2n}+bx^n+c=0$ называется трехчленным уравнением. Подстановкой $x^n=y$ оно сводится к квадратному.

П р и м е р. Решить уравнение $x^6-5x^3+4=0$.

Р е ш е н и е

Обозначим $y=x^3$, тогда исходное уравнение будет $y^2-5y+4=0$, решив которое, получаем $y_1=1$; $y_2=4$. Таким образом, исходное уравнение эквивалентно совокупности уравнений: $x^3=1$ или $x^3=4$, т.е. $x=1$ или $x=\sqrt[3]{4}$.

Ответ: $1, \sqrt[3]{4}$.

Уравнение $a_n x^n + a_{n-1}x + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ называется симметричным или возвратным, если $a_{n-k}=a_k$ для всех $k=0,1,2\ldots n$. При его решении группируют по 2 члена, равноудаленных от начала и конца и тогда приходят к естественной замене $x+\frac{1}{x}=y$, которая приводит данное уравнение к вспомогательному уравнению степени "меньше" n относительно неизвестного y.

П р и м е р. Решить уравнение $x^5-1=0$.

Р е ш е н и е

$$x^5-1=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^4+x^3+x+1)=0$$

$$x=1; \quad x^4+x^3+x+1=0.$$

Это симметричное уравнение 4-й степени. Сгруппируем его члены, как сказано выше: $(x^4+1)+(x^3+x)+x^2=0$.

Очевидно, $x \neq 0$. Разделив обе части уравнения на x, получим равносильное уравнение $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)+1=0$.

Тогда $x+\frac{1}{x}=y \Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$ и, следовательно,

$$y^2+y-1=0 \Rightarrow y_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

Теперь имеем: $\left[\begin{array}{l} x+\frac{1}{x}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ x+\frac{1}{x}=\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^2+(-1+\sqrt{5})x+2=0 \\ 2x^2-(1+\sqrt{5})x+2=0. \end{array}\right.$

Дискриминанты этих уравнений отрицательные, поэтому корни уравнений не являются действительными числами.

Рассмотрим несколько уравнений, которые можно решить методом подстановки.

П р и м е р. Решить уравнение $\frac{x^2+x-5}{x}+\frac{3x}{x^2+x-5}=4.$

Р е ш е н и е

Обозначим $y=\frac{x^2+x-5}{x}$, тогда получим уравнение $y+\frac{3}{y}=4$. Преобразуем его: $y+\frac{3}{y}-4=0$; $\frac{y^2-4y+3}{y}=0$,

отсюда $\left\{\begin{array}{l} y^2-4y+3=0 \\ y \neq 0. \end{array}\right.$

Квадратное уравнение $y^2-4y+3=0$ имеет корни $y_1=1$; $y_2=3$ (оба входят в ОДЗ). Таким образом, исходное уравнение эквивалентно совокупности уравнений:

$$\frac{x^2+x-5}{5}=1 \quad \text{или} \quad \frac{x^2+x-5}{x}=3.$$

Преобразуем их

$$\frac{x^2+x-5}{x}-1=0 \quad \text{или} \quad \frac{x^2+x-5}{x}-3=0.$$

$$\begin{cases} x^2-5=0 \\ x\neq 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x^2-2x-5=0 \\ x\neq 0 \end{cases}$$

$$x_1=\sqrt{5};\quad x_2=-\sqrt{5} \quad \text{или} \quad x_3=1+\sqrt{6};\quad x_4=1-\sqrt{6}$$

(все найденные корни входят в ОДЗ).

Ответ: $-\sqrt{5}$; $\sqrt{5}$; $1-\sqrt{6}$; $1+\sqrt{6}$.

П р и м е р. Решить уравнение $x(x+2)(x+3)(x+5)=72$.

Р е ш е н и е

Перегруппируем сомножители и преобразуем полученное уравнение

$$(x+2)(x+3)(x+5)x=72$$

$$(x^2+5x+6)(x^2+5x)=72.$$

Обозначим $y=x^2+5x$, тогда получим уравнение $(y+6)\cdot y=72$ или $y^2+6y-72=0$. Корни этого уравнения: $y_1=6$; $y_2=-12$.

Таким образом, исходное уравнение эквивалентно совокупности уравнений

$$x^2+5x=6 \quad \text{или} \quad x^2+5x=-12.$$

Первое уравнение имеет корни $x_1=1$, $x_2=-6$. Второе уравнение корней не имеет, т.к. $D=25-48=-23<0$.

Ответ: -6; 1.

П р и м е р. Решить уравнение $4x^2+12x+\frac{12}{x}+\frac{4}{x^2}=47$.

Р е ш е н и е

Сгруппируем слагаемые: $4\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+12\left(x+\frac{1}{x}\right)=47$.

Обозначим $y=x+\frac{1}{x}$, при этом $y^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+2+\frac{1}{x^2}$.

Отсюда $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$. Тогда получаем уравнение

$$4(y^2-2)+12y=47 \Leftrightarrow 4y^2+12y-55=0.$$

Это квадратное уравнение имеет корни: $y_1=\frac{5}{2}$; $y_2=-\frac{11}{2}$.

Исходное уравнение эквивалентно совокупности уравнений:

$$x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2} \quad \text{или} \quad x+\frac{1}{x}=-\frac{11}{2}.$$

Решим их:

$$x+\frac{1}{x}-\frac{5}{2}=0 \qquad \text{или} \qquad x+\frac{1}{x}+\frac{11}{2}=0$$

$$\begin{cases} 2x^2-5x+2=0 \\ x\neq 0 \end{cases} \qquad \text{или} \qquad \begin{cases} 2x^2+11x+2=0 \\ x\neq 0 \end{cases}$$

$$x_1=2;\quad x_2=\frac{1}{2} \qquad\qquad x_3=\frac{-11+\sqrt{105}}{4};\ x_4=\frac{-11-\sqrt{105}}{4}$$

(все найденные корни входят в ОДЗ).

Ответ: $2;\ \frac{1}{2};\ \frac{-11+\sqrt{105}}{4};\ \frac{-11-\sqrt{105}}{4}$.

РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рациональным алгебраическим уравнением называется уравнение вида

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=0, \qquad (I)$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ - многочлены. Будем говорить, что $P(x)$ - это многочлен m-й степени, а $Q(x)$ - многочлен n-й степени. Множество допустимых значений рационального алгебраического уравнения (I) определяется условием $Q(x)\neq 0$, откуда следует, что $x\neq 0_1$, $x\neq c_2,\ldots, x\neq c_n$, где $c_1, c_2\ldots c_n$ - корни многочлена $Q(x)$.

Метод решения уравнения (I) заключается в следующем. Решаем уравнения $P(x)=0$, корни которого обозначим через $x_1, x_2\ldots x_m$. Сравниваем множества корней многочленов $P(x)$ и $Q(x)$. Те корни многочлена $P(x)$, которые не являются корнями многочлена $Q(x)$, являются корнями (решениями) рационального уравнения (I).

П р и м е р. Найти действительные корни уравнения

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=0,$$

где $P(x)=x^4-1,\quad Q(x)=x-1.$

Многочлен $P(x)$ имеет два действительных корня (оба простые): $x_1=1,\ x_2=-1$; многочлен $Q(x)$ имеет один корень $c_1=1 \Rightarrow$, уравнение имеет один действительный корень $x=-1$.

П р и м е р. Решить уравнение $\frac{2x-3}{x^2-3x+2}=\frac{4x-5}{x^2-x-2}$.

Р е ш е н и е

Данное уравнение эквивалентно такому:

$$\frac{2x-3}{(x-1)(x-2)}=\frac{4x-5}{(x+1)(x-2)} \Rightarrow \frac{(2x-3)(x+1)-(4x-5)(x-1)}{(x-2)(x^2-1)}=0$$

$$\begin{cases}(2x-3)(x+1)-(4x-5)(x-1)=0\\ (x-2)(x^2-1)\neq 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}x^2-4x+4=0\\ x\neq 1;\ x\neq -1;\ x\neq 2\ .\end{cases}$$

Корень уравнения $x^2-4x+4=0$ это $x=2$, но исходное уравнение не имеет решений, ОДЗ: $x\neq 1;\ x\neq -1;\ x=2.$

ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Уравнение, содержащее неизвестное под знаком корня, называют иррациональным уравнением. В элементарной математике иррациональные уравнения решаются в множестве действительных чисел. Любое иррациональное уравнение с помощью преобразований (умножение, деление, возведение в целую степень обеих частей уравнения) может быть сведено к рациональному алгебраическому уравнению. Вычислив корни полученного алгебраического уравнения, необходимо проверить, будут ли все они также и корнями исходного иррационального уравнения. Кроме того, при решении иррациональных уравнений, необходимо исследование ОДЗ неизвестных.

П р и м е р. Решить уравнение $\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{1-x}=0.$

Р е ш е н и е

ОДЗ левой части находим из условий:

$$\begin{cases}x-2\geq 0\\ 1-x\geq 0.\end{cases}$$

Это пустое множество, поэтому ОДЗ также пустое множество – решений нет.

Итак, чтобы решить иррациональное уравнение, нужно:

освободиться от иррациональности в левой и правой частях уравнения;

решить полученное уравнение;

сделать проверку.

Существуют некоторые стандартные методы решения иррациональных уравнений.

I. Метод возведения обеих частей уравнения в соответствующую натуральную степень.

П р и м е р. Решить уравнение $\sqrt{x^2-3x}=\sqrt{2x-6}$.

Р е ш е н и е.

Исходное уравнение эквивалентно системе:

$$\begin{cases} x^2-3x=2x-6 \\ x^2-3x\geq 0 \\ 2x-6\geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2-3x=2x-6 \\ 2x-6\geq 0 \end{cases}$$

Ответ: $x=3$.

Здесь мы нашли решение с учетом ОДЗ $\Rightarrow$ проверка не нужна.

П р и м е р. Решить уравнение $\sqrt[3]{5x+7}-\sqrt[3]{5x-12}=1$.

Такие уравнения решаем, используя формулы

$$(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b);$$

$$(a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b).$$

Возведем обе части уравнения в куб: $\left(\sqrt[3]{5x+7}-\sqrt[3]{5x-12}\right)^3=1^3$;

$$(5x+7)-(5x-12)-3\sqrt[3]{(5x+7)(5x-12)}\cdot 1=1;$$

$$5x+7-5x+12-3\sqrt[3]{25x^2-25x-84}=1;$$

$$3\sqrt[3]{25x^2-25x-84}=18;\ \sqrt[3]{25x^2-25x-84}=6.$$

Еще раз возведем обе части уравнения в куб:

$$25x^2-25x-84=216;\ \ 25x^2-25x-300=0$$

$$x^2-x-12=0;\ \ x_1=-3;\ \ x_2=4.$$

П р о в е р к а

Первый корень: $x_1=-3$.

Левая часть: $\sqrt[3]{-15+7}-\sqrt[3]{-15-12}=\sqrt[3]{-8}-\sqrt[3]{-27}=-2-(-3)=1$.

Правая часть: 1.

Левая и правая части равенства равны, получаем верное числовое равенство.

Второй корень: $x_2=4$.

Левая часть: $\sqrt[3]{20+7}-\sqrt[3]{20-12}=\sqrt[3]{27}-\sqrt[3]{8}=1$.

Правая часть: I.

Левая и правая части равенства равны, получаем верное числовое равенство.

Ответ: $S = \{-3; 4\}$.

2. Метод введения новых переменных.

Уравнения вида $af(x) + \frac{b}{f(x)} + c = 0$, где $f(x) \neq 0$, решаются введением новой переменной.

Пусть $f(x) = y$, тогда, подставив y в данное уравнение, получим

$$ay + \frac{b}{y} + c = 0; \quad ay^2 + cy + b = 0.$$

Найдем y и затем решим уравнение вида $f(x) = y_{1,2}$. Этот метод называют методом введения новых переменных.

П р и м е р. Решить уравнение $(3-x)^3\sqrt{\frac{3-x}{x-1}} + (x-1)\sqrt[3]{\frac{x-1}{3-x}} = 2.$

Находим ОДЗ: $\frac{3-x}{x-1} \geq 0 \Rightarrow (3-x)(x-1) \geq 0 \quad x \in]-\infty; 1[\cup]1; 3[\cup [3; +\infty[$.

Пусть $y = \sqrt[3]{\frac{3-x}{x-1}}$, тогда после подстановки получим уравнение

$$(3-x)y + \frac{x-1}{y} = 2 \Leftrightarrow (3-x)y^2 - 2y + x - 1 = 0.$$

Это уравнение можно рассматривать как квадратное уравнение относительно y. Решая его, получим $y_1 = 1; \ y_2 = \frac{x-1}{3-x}$

Множество решений исходного иррационального уравнения представляют собой объединение множеств решений следующих двух уравнений:

$$\sqrt[3]{\frac{3-x}{x-1}} = 1; \quad \sqrt[3]{\frac{3-x}{x-1}} = \frac{x-1}{3-x}.$$

Возведя обе части каждого из этих уравнений в куб, получим два рациональных алгебраических уравнения

$$\frac{3-x}{x-1} = 1; \quad \frac{3-x}{x-1} = \left(\frac{x-1}{3-x}\right)^3.$$

Решая эти уравнения, находим, что данное иррациональное уравнение имеет единственный корень: $x = 2$, он принадлежит ОДЗ.

Уравнения вида $a(mx^2+nx+k)^2+b(mx^2+nx+k)=0$ также решаются при помощи введения новой переменной.
Пусть $mx^2+nx+k=y$. Получим уравнение $ay^2+by+c=0$.
Найдем y_1, y_2. Затем решим уравнение $mx^2+nx+k=y_{1,2}$.
П р и м е р. Решить уравнение $(x^2+5x)^2-2x^2-10x-24=0$.

Р е ш е н и е

$$(x^2+5x)^2-2(x^2+5x)-24=0.$$

Пусть $x^2+5x=y$. Тогда $y^2-2y-24=0$; $y_{1,2}=1\pm5$; $y_1=-4$; $y_2=6$.

Отсюда $x^2+5x=-4$, $x^2+5x+4=0$; $x_1=-4$; $x_2=-1$;
$x^2+5x=6$; $x^2+5x-6=0$; $x_3=-6$; $x_4=1$;

Ответ: $S=\{-6;\ -4;\ -1;\ 1\}$.

УРАВНЕНИЯ СО ЗНАКОМ МОДУЛЯ

Чтобы решить уравнение, которое содержит переменную под знаком модуля, используют его определение:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0 \\ -x & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

На практике это делается так:

Находят критические точки, т.е. значения переменной, при которых выражения, стоящие под знаком модуля, обращаются в нуль;

разбивают ОДЗ переменной на промежутки, на каждом из которых выражения, стоящие под знаком модуля, сохраняют знак;

на каждом из найденных промежутков решают уравнение без знака модуля.

Совокупность (объединение) решений указанных промежутков составляет все решения рассматриваемого уравнения.

П р и м е р. Решить уравнение $|x+3|=2x-1$.

Р е ш е н и е

Критическая точка находится после решения уравнения
$x+3=0$; $x=-3$.

I. При $x<-3$ получаем уравнение $-x-3=2x-1$, откуда $x=-\frac{2}{3}$. Но найденное значение не входит в рассматриваемый промежуток.

2. При $x \geqslant 3$ получаем уравнение $x+5=2x-1$, откуда $x=4$. Найденное значение входит в рассматриваемый промежуток.
Ответ: $x=4$.

Пример. Решить уравнение $|x+2|+|x+3|=x$.

Решение

Найдем критические точки

$$x+2=0 \quad \text{или} \quad x+3=0$$
$$x=-2 \quad \text{или} \quad x=-3.$$

Решаем задачу на каждом промежутке:

1) $x<-3$; $-x-2-x-3=x$; $-3x=5$; $x=-\frac{5}{3}$ (не входит в рассматриваемый промежуток);

2) $-3 \leq x < -2$; $-x-2+x+3=x$; $x=1$ (не входит в рассматриваемый промежуток);

3) $x \geqslant -2$; $x+2+x+3=x$; $x=-5$ (не входит в рассматриваемый промежуток).

Ответ: $\varnothing$.

Пример. Решить уравнение $|x+5|-|x-3|=8$.

Решение

Найдем критические точки

$$x+5=0 \quad \text{или} \quad x-3=0$$
$$x=-5 \quad \text{или} \quad x=3.$$

Решаем задачу на каждом промежутке:

1) $x<-5$; $-x-5-(-x+3)=8$; $-x-5+x-3=8$; $-8 \neq 8$ ложно. На рассматриваемом промежутке решений нет;

2) $-5 \leq x < 3$, $x+5-(-x+3)=8$; $x+5+x-3=8$; $x=3$ – не входит в рассматриваемый промежуток;

3) $x \geqslant 3$; $x+5-(x-3)=8$, $8=8$ верно. Уравнение выполняется при всех x из рассматриваемого промежутка.

Ответ: $[3; +\infty[$.

Пример. Решить уравнение $x^2-2|x|-3=0$.

Решение

Поскольку $x^2=|x|^2$, то уравнение примет вид

$$|x|^2-2|x|-3=0,$$

тогда $|x|=\frac{2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\frac{2\pm4}{2}$.

Если $|x|=3$, то $x_1=3$; $x_2=-3$.

Если $|x|=-3$, то это невозможно, т.к. модуль числа – число положительное.

Ответ: $x=3$.

Задачи для самостоятельной работы

Решить уравнения

I. $0{,}2(x-1)+0{,}5(3x-9)=\frac{x}{3}-2$ — $x=1\frac{40}{41}$

2. $\dfrac{\sqrt[3]{9^2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^6}{\left(\sqrt[3]{3}\right)^{-1}\cdot 27^{-\frac{2}{3}}}=\dfrac{x}{3\left(\sqrt[3]{3}\right)^4}$ — $x=1$

3. $\dfrac{3}{2-\dfrac{3}{2-\frac{5}{2-x}}}=\dfrac{21}{8}$ — $x=4$

4. $\dfrac{x^2-x-2}{x^2-3x+2}=0$ — $x=-1$

5. $\dfrac{x^2+x+2}{x^2+x+1}+\dfrac{x^2+x+6}{x^2+x+3}=4$ — $x=-1$

6. $(x-5)(x+2)\sqrt{x-7}=0$ — $x=7$

7. $\sqrt[4]{x}+\sqrt[8]{x}-2=0$ — $x=1$

8. $x^2+5x+4-3\sqrt{x^2+5x+2}=6$ — $x=2;\ -7$

9. $\sqrt[3]{x+34}-\sqrt[3]{x-3}=1$ — $x=30;\ -61$

I0. $\sqrt{1-x\sqrt{x^2-1}}=x-1$ — $x=\frac{5}{4}$

II. $|x-6|=|x^2-5x+9|$ — $x=1;\ 3$

I2. $\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|=1$ — $x=0$

I3. $\dfrac{5}{3-|x-1|}=|x|+2$ — $x=3;\ -3;\ -2+\sqrt{5}$

14. $|x-4{,}2|(x-4{,}2)=-1$ $\qquad x=3{,}2$

15. Вычислить $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$, где x_1 и x_2 – корни уравнения $3x^2-2x-6=0.$

Ответ: $-\frac{1}{3}$.

16. Вычислить $x_1^3+x_2^3$, где x_1 и x_2 – корни уравнения $x^2-2x-9=0.$

Ответ: 62.

Навчальне видання

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
ДО РІШЕННЯ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ
В КУРСІ МАТЕМАТИКИ

для студентів-іноземців підготовчого факультету

Упорядник ЛАПУЗІНА Олена Миколаївна

Відповідальний випусковий А.І.Лобода

Редактор Т.Л.Мельникова

Технічний редактор Л.К.Меренкова
Коректор Є.Б.Бланк

План 1993, поз.294

Підп.до друку 04.10.93. Формат 60х84 1/16. Папір друк.№2.
Друк офсетний. Умовн.друк.арк.1,63. Умовн.фарбо-відб. 1,86.Облік.-
вид.арк.1,33. Вид.№ 1198. Тираж 500 прим. Зам.№ 2206. Безплатно.

ХПІ. 310002 Харків, вул.Фрунзе, 21.

Харківське орендне поліграфічне підприємство.
310093 Харків, вул.Свердлова,115.

Бесплатно

Зак. 2206