

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ МОДЕЛИ MAXWELL ELEMENT ПРИ АНАЛИЗЕ ДИНАМИЧЕСКИХ НАПРЯЖЕНИЙ В КОНВЕЙЕРНОЙ ЛЕНТЕ

О.М. Пигнастый, С.Н. Чернявская

Рассмотрены особенности распространения динамических напряжений в конвейерной ленте, свойства материала которой соответствуют модели Maxwell element. Приведен обзор публикаций с использованием моделей вязкоупругого элемента для описания процесса распространения динамических напряжений в конвейерной ленте. Представлены выражения для расчета динамического модуля упругости, модуля потерь и угла механических потери в зависимости от частоты продольных колебания в конвейерной ленте. Дано обоснование области применения модели Maxwell element. Показано, что при достаточно высоких частотах продольных колебаний в конвейерной ленте взаимосвязь между напряжением и деформацией элемента конвейерной ленты соответствует закону Гука. Для анализа динамического процесса распространения динамических напряжений введены безразмерные параметры, которые могут быть рассмотрены в качестве критериев подобия процесса распространения динамических напряжений в конвейерной ленте. Проведен качественный анализ продолжительности времени релаксации для материала конвейерной ленты, свойства которого соответствуют модели Maxwell element. Выполнен анализ распространения динамических напряжений для характерных режимов функционирования транспортного конвейера. Особое внимание уделяется анализу процесса, когда к элементу ленты внезапно приложена постоянная по величине или мгновенная нагрузка. Определены и проанализированы условия, при которых модель Maxwell element может быть заменена моделью Hooke element.

Ключевые слова: Maxwell element, Hooke element, транспортный конвейер, динамический модуль упругости, динамический модуль потерь, конвейерная лента

1. Введение

Одной из характеристик транспортного конвейера, определяющей его эксплуатационные возможности, является прочность конвейерной ленты [1,2]. Механическая прочность ленты – это способность ленты противостоять разрушению под действием динамических нагрузок, возникающих при транспортировке материала. Распространенной характеристикой прочности ленты является напряжение, при котором происходит ее разрушение (предел прочности материала ленты σ_p). Предел прочности зависит как от свойств материала, скорости деформации, температуры материала ленты [3, 4]. При определенных условиях разрушение конвейерной ленты происходит под действием напряжения, значительно меньшего, чем предел прочности материала ленты σ_p . Решающим фактором в данном случае является продолжительность периода времени, в течение которого конвейерная лента находилась под

нагрузкой. Для транспортных конвейеров, работающих продолжительное время в непрерывном режиме, разрушение ленты происходит напряжениях, значительно меньших, чем предел прочности материала ленты σ_p . Поэтому долговечность конвейерной ленты является не менее важной характеристикой, чем предел прочности ленты σ_p , для твердых тел связана зависимостью с приложенным напряжением σ зависимостью $\tau_F \sim \exp(-\alpha\sigma)$, где α - коэффициент, характеризующий свойства материала. Динамическая усталость материала конвейерной ленты представляется временной зависимостью прочности материала конвейерной ленты при динамической периодической нагрузке на элемент ленты. Поведение материала ленты в момент разрушения определяется величиной максимальной относительной деформации, которая зависит от скорости деформации и свойств материала. Между релаксационными и прочностными свойствами материала конвейерной ленты существует взаимосвязь [5]. Разрушение конвейерной ленты можно рассматривать как вязкоупругий процесс. Вязкоупругие свойства материала конвейерной ленты, обусловленные релаксационными процессами, оказывают влияние на скорость процесса разрушения конвейерной ленты [6,7]. Интенсивное молекулярное движение, типичное для эластичного состояния материала конвейерной ленты, приводит к рассеиванию упругой энергии в конвейерной ленте.

2. Анализ литературных данных и постановка проблемы

Одной из отличительных особенностей материалов конвейерных лент является то, что они обладают выраженными вязкоупругими свойствами [8], которые обусловлены физико-механическими характеристиками полимеров. Для большинства твердых лент при наличии малых деформаций выполняется закон Гука

$$\sigma(t, S) = E\varepsilon(t, S), \quad (1)$$

где $\sigma(t, S)$, $\varepsilon(t, S)$ - напряжение и деформация ленты в точке сечения конвейера с координатой $S \in [0, S_d]$ в момент времени t ; E - модуль упругости материала [9]. В работе [10] представлен анализ основных моделей упругих элементов: (Hookean element, Newtonian element, Maxwell element, Kelvin element, Venant element, CDI geometric beam element, CDI five-element), характеризующих свойства материала, используемого для изготовления конвейерной ленты. Продемонстрирован расчет двух транспортных систем (длина конвейера девять километров) для режимов старта и остановки с моделью CDI five-element composite. Расчетная схема основана на finite element method (FEM). В работе [8] проанализировано распространение динамических возмущений напряжения в конвейерных лентах, изготовленных из материалов, характеристики которых соответствуют моделям упругих элементов: Voigt element и Maxwell element. Для основных режимов функционирования конвейера выполнен расчет скорости конвейерной ленты, ускорения и напряжений в конвейерной ленте. В работе [11] для транспортной системы, материал ленты которой соответствует модели

упругого элемента Maxwell element и модели транспортной системы Winkler foundation произведен расчет скорости ленты конвейера. В работе [5] для конвейерной ленты длиной 1500 метров, изготовленной из материала, характеристики которого соответствуют модели упругого элемента Kelvin-Voigt element, анализируется растяжение ленты в установившемся и переходном режиме, которое составило десять и семнадцать метров соответственно. Для расчета использована система уравнения Лагранжа. Динамическое напряжение в конвейерной ленте, характеристики материала которой соответствуют модели Kelvin-Voigt element, комбинация Hooke и Kelvin-Voigt element исследовано P. Kulinowski в [13]. Сегмент ленты конвейера представлен двухпараметрической реологической моделью. Распространение длинноволновых колебаний в конвейерной ленте транспортной системы для модели упругого элемента Hooke element проанализированы в [9]. Механические свойства композиционных материалов конвейерной ленты с картриджами из полиэстера и полиамида приведены в [6]. Экспериментальных исследований композиционных материалов резиновой конвейерной ленты с картриджами из полиэстера и полиамида позволяют оценить значение предела прочности при растяжении и значение модуля упругости материала конвейерной ленты.

3. Цель и задачи исследования

Материалы, из которых изготовлены конвейерные ленты обладают как упругими, так и вязкими свойствами, что приводит к специфической связи между напряжением в конвейерной ленте $\sigma(t, S)$ и ее деформацией $\varepsilon(t, S)$. Цель настоящей работы заключается в изучении зависимости между напряжением в конвейерной ленте $\sigma(t, S)$ и ее деформацией $\varepsilon(t, S)$ для материала конвейерной ленты, характеристики материала которого соответствуют модели Maxwell element. Для достижения цели были поставлены следующие задачи: исследовать зависимость между напряжением в конвейерной ленте $\sigma(t, S)$ и ее деформацией $\varepsilon(t, S)$ для основных режимов функционирования транспортного конвейера и обосновать область применения модели Maxwell element для описания процесса деформации элемента конвейерной ленте.

4. Материалы и методы исследования

4.1. Напряжение и деформация конвейерной ленты

Связь между напряжением $\sigma(t, S)$ и деформацией $\varepsilon(t, S)$ может быть представлена в общем виде

$$\sigma(t, S) = E_c \varepsilon(t, S), \quad E_c = E_1 + iE_2, \quad |E_c| = \sqrt{E_1^2 + E_2^2}, \quad \operatorname{tg} \delta = E_2 / E_1, \quad (2)$$

где E_c - комплексный модуль упругости материала. Действительная часть комплексного модуля упругости материала $\operatorname{Re}(E_c) = E_1$ представляет собой динамический модуль упругости, характеризует процесс передачи энергии через элемент конвейерной ленты. Мнимая часть комплексного модуля упругости

материала $\text{Im}(E_c) = E_2$ есть модуль потерь, характеризующий процесс диссипации энергии колебаний в вязкоупругом теле, при котором происходит нагрев конвейерной ленты.

Если в точке S_0 конвейерной ленты существует динамическое, периодически меняющееся во времени напряжение $\sigma(t, S_0) = \sigma_0 \cos(\omega t)$, то принимая во внимание соотношения $E_c = |E_c|(\cos \delta + i \sin \delta)$, $\varepsilon(t, S_0) = \varepsilon_0(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ и, используя формулу Муавра, запишем

$$\sigma(t, S_0) = \sigma_0 \cos(\omega t) = |E_c| \varepsilon_0 \cos(\delta + \varphi), \quad (3)$$

$$\varepsilon(t, S_0) = \frac{\sigma_0}{|E_c|} \cos(\omega t - \delta). \quad (4)$$

Для вязкоупругого элемента конвейерной ленты наблюдается сдвиг фаз между напряжением и деформацией, который задается тангенсом угла δ механических потерь. Динамический модуль упругости и модуль потерь являются основными параметрами, определяющими распространение продольных колебаний в конвейерной ленте. Одной из важных задач анализа распространений возмущений является установление зависимости динамического модуля упругости E_1 и модуля потерь E_2 от частоты колебаний ω . Получим указанные зависимости для моделей, используемых при описания процесса распространения продольных колебаний в конвейерной ленте.

4.2. Maxwell element модель конвейерной ленты

Уравнение, определяющее связь напряжения $\sigma(t, S)$ и деформации $\varepsilon(t, S)$ в точке S_0 конвейерной ленты имеет вид

$$\frac{1}{E} \frac{d\sigma(t, S_0)}{dt} + \frac{\sigma(t, S_0)}{\eta} = \frac{d\varepsilon(t, S_0)}{dt}, \quad (5)$$

где E –модуль упругости элемента; η –вязкость элемента.

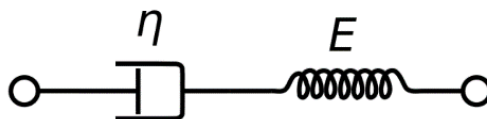


Fig. 1. Maxwell element

Будем искать решение уравнения (5) в виде

$$\sigma(t, S_0) = \sigma_0 e^{i\omega t}. \quad (6)$$

Принимая во внимание соотношения (2), после подстановки выражения (6) в (5), получим уравнение

$$\frac{i\omega}{E} + \frac{1}{\eta} = \frac{i\omega}{E_c}, \quad (7)$$

которое используем для определения динамического модуля упругости E_1 и модуля потерь E_2 :

$$\begin{cases} \frac{\omega}{E} E_1 + \frac{1}{\eta} E_2 = \omega, \\ \frac{1}{\eta} E_1 - \frac{\omega}{E} E_2 = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Введем безразмерные параметры

$$\chi = \omega\eta/E, \quad \varepsilon_1 = E_1/E, \quad \varepsilon_2 = E_2/E, \quad (9)$$

с учетом которых система уравнений (8) примет вид

$$\begin{cases} \chi\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \chi, \\ -\varepsilon_1 + \chi\varepsilon_2 = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Решение системы уравнений (10) дает зависимость для безразмерных динамического модуля упругости ε_1 и модуля потерь ε_2 от параметра χ , имеет вид (рис.2)

$$\varepsilon_1 = \frac{\chi^2}{1 + \chi^2}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\chi}{1 + \chi^2}, \quad \operatorname{tg} \delta = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{1}{\chi}. \quad (11)$$

Параметр χ имеет смысл безразмерной частоты колебаний

$$\chi = \omega \frac{\eta}{E} = \omega t_0 = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad t_0 = \frac{\eta}{E} = 1/\omega_0. \quad (12)$$

где t_0 - характерное время затухания колебаний для вязкоупругого элемента.

Используя решение (11), выполним анализ зависимости динамического модуля упругости ε_1 и модуля потерь ε_2 от безразмерной частоты χ колебаний напряжений в конвейерной ленте. При больших значениях частот колебаний ($\chi \rightarrow \infty$), решение уравнения (11) может быть представлено в виде

$$\varepsilon_1 \approx 1 - \frac{1}{\chi^2} + \dots \rightarrow 1, \quad \varepsilon_2 \approx \frac{1}{\chi} - \frac{1}{\chi^3} + \dots \rightarrow 0, \quad \operatorname{tg} \delta = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{1}{\chi} \rightarrow 0. \quad (13)$$

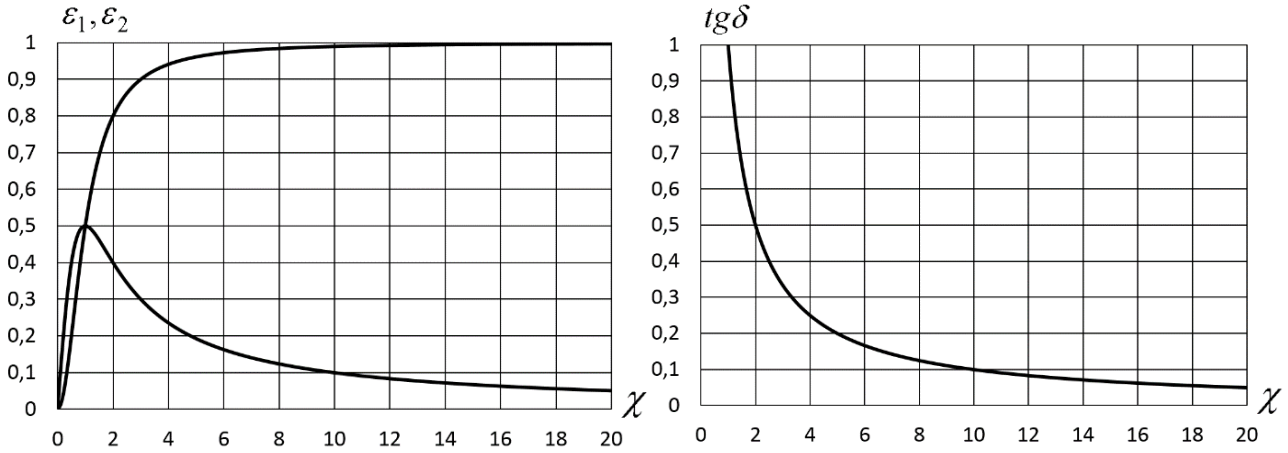


Fig.2. Изменение динамического модуля упругости ε_1 , модуля потерь ε_2 и угла потерь δ в зависимости от частоты χ

При больших значениях безразмерных частот $\chi \rightarrow \infty$ значение динамического модуля упругости E_1 стремится к значению модуля Юнга E , потери, характеризуемые модулем E_2 отсутствуют (рис.2). Сдвиг фазы δ между напряжением $\sigma(t, S)$ и деформацией $\varepsilon(t, S)$ в точке S_0 конвейерной ленты отсутствует. Таким образом, решение (2) для уравнение (5) можно представить в форме закона Гука(1). При больших значениях частот поведение вязкоупругого элемента конвейерной ленты соответствует закону Гука. Введем безразмерные параметры

$$\sigma_\chi = \sigma(t, S_0) / \sigma_0, \quad \varepsilon_\chi = \varepsilon(t, S_0) / \varepsilon_0, \quad \tau = t\omega, \quad (14)$$

и запишем уравнение (5) в безразмерном виде

$$\frac{\omega}{E} \sigma_0 \frac{d\sigma_\chi}{d\tau} + \sigma_0 \frac{\sigma_\chi}{\eta} = \omega \varepsilon_0 \frac{d\varepsilon_\chi}{d\tau}. \quad (15)$$

Так как выбор масштабных множителей σ_0, ε_0 является произвольным, то положив $\sigma_0 = E\varepsilon_0$, с учетом (12) получим уравнение (5) в окончательной форме

$$\frac{d\sigma_\chi}{d\tau} + \frac{1}{\chi} \sigma_\chi = \frac{d\varepsilon_\chi}{d\tau}. \quad (16)$$

Принимая во внимание то, что при отсутствии деформации элемента ($\varepsilon_\chi = 0$) напряжение равно нулю, при $\chi \rightarrow \infty$ уравнение (16) может быть представлено в форме (1). Для больших частотах колебаний зависимость между напряжением и деформацией в модели Maxwell element соответствует закону Гука.

При малых значениях параметра $\chi \rightarrow 0$ решение уравнения (11) может быть представлено в виде

$$\varepsilon_1 \approx \chi^2 - \chi^4 + \dots \rightarrow 0, \quad \varepsilon_2 \approx \chi - \chi^3 + \dots \rightarrow 0, \quad \operatorname{tg} \delta = \varepsilon_2 / \varepsilon_1 = \chi^{-1} \rightarrow \infty. \quad (17)$$

Полученные результаты для случая малых частотах колебаний ($\chi \rightarrow 0$) не согласуются с экспериментальными данными. При $\varepsilon_1 \rightarrow 0$, $\varepsilon_2 \rightarrow 0$ следует, что напряжение будет стремиться к нулю при произвольном значении деформации вязкоупругого элемента.

Выполним качественную оценку величины характерного время затухания колебаний t_0 в вязкоупругом элементе. Для этого воспользуемся результатами исследований Т.Rudolphi и А.Reicks [14], в которой представлены экспериментальные эталонные зависимости storage $G_1(\omega) \sim E_1(\omega)/3$ and loss modules $G_2(\omega) \sim E_2(\omega)/3$ для материалов конвейерной ленты (Table 1).

Table 1. Характерные значения параметров вязкоупругого элемента [14]

$G_1(\omega)$, МПа	$E_1(\omega)$, МПа	$G_1(\omega)$, МПа	$E_2(\omega)$, МПа	f, Hz	ω , rad/sec
5,2	15,6	0,9	2,7	10^{-9}	$2\pi 10^{-9}$
11,2	33,6	1,4	4,2	10^{-5}	$2\pi 10^{-5}$
20,0	60,0	2,8	8,4	10^{-1}	$2\pi 10^{-1}$
22,0	66,0	3,0	9,0	$1/2\pi$	1
27,0	81,0	3,8	11,4	10^0	$2\pi 10^0$
33,0	99,0	5,0	15,0	10^1	$2\pi 10^1$
40,0	120,0	6,0	18,0	10^2	$2\pi 10^2$
170,0	510,0	90,0	270,0	10^5	$2\pi 10^5$
1700,0	5100,0	100,0	300,0	10^{10}	$2\pi 10^{10}$
1720,0	5160,0	20,0	60,0	10^{11}	$2\pi 10^{11}$

Чтобы определить характерное время затухания колебаний t_0 воспользуемся безразмерным выражением (11), запишем значение $E_1(\omega)$ для произвольного значения частоты ω и $E_1(1)$ для частоты $\omega = 1$:

$$E_1(\omega) = E \frac{\omega^2 t_0^2}{1 + \omega^2 t_0^2}, \quad E_1(1) = E \frac{t_0^2}{1 + t_0^2}. \quad (18)$$

Разделим первое уравнение на второе уравнение, получим уравнение

$$\frac{E_1(\omega)}{E_1(1)} = \omega^2 \frac{1+t_0^2}{1+\omega^2 t_0^2}, \quad (19)$$

которое решим относительно характерного времени затухания колебаний

$$t_0 = t_0(\omega) = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{E_1(\omega)/E_1(1) - \omega^2}{1 - E_1(\omega)/E_1(1)}}. \quad (20)$$

Подставим в последнее уравнение значения $E_1(\omega)$, $E_1(1)$, ω , получим качественную зависимость характерного время затухания колебаний $t_0(\omega)$ [sec] для модели вязкоупругого Maxwell element в зависимости от частоты ω [rad/sec] (рис.3).

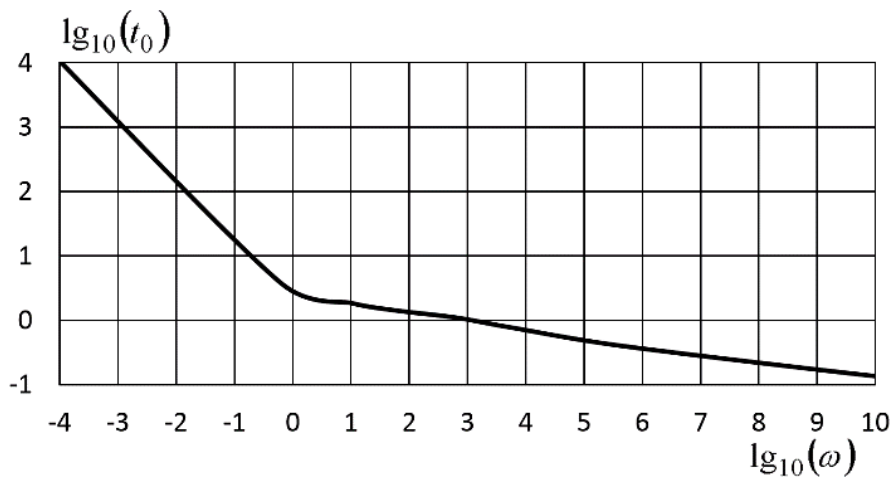


Fig.3. Характерное время затухания колебаний t_0 [sec] для модели вязкоупругого Maxwell element в зависимости от частоты ω

Время, которое требуется для переходного режима ускорения конвейерной ленты составляет несколько минут [15,16,17], что значительно превышает характерное время затухания высокочастотных колебаний t_0 в вязкоупругом элементе. Для низких частот колебаний характерное время затухания колебаний t_0 превышает характерное время процесса ускорения конвейерной ленты при переключении скоростных режимов. Для предельного случая малых частот колебаний ($\omega \rightarrow 0$) характерное время затухания колебаний t_0 в вязкоупругом элементе в соответствии с формулами (11), (20), неограниченно растет.

5. Анализ Maxwell element модели конвейерной ленты

Рассмотрим решение уравнения (16) для некоторых распространенных случаев функционирования транспортного конвейера с использованием конвейерных лент, изготовленных из материала, характеристики которого соответствуют модели вязкоупругого элемента Maxwell element.

5.1. Случай постоянной скорости деформации конвейерной ленты

Данный режим функционирования транспортной системы характерен для начального натяжения конвейерной ленты при старте транспортного конвейера. При наличии постоянной скорости деформации $d\varepsilon_\chi/d\tau = v_\varepsilon \approx const$ уравнение (16) принимает вид:

$$\frac{d\sigma_\chi}{d\tau} + \frac{1}{\chi}\sigma_\chi = v_\varepsilon, \quad \sigma_\chi(0) = 0, \quad \frac{d\varepsilon_\chi}{d\tau} = v_\varepsilon, \quad \varepsilon_\chi(0) = 0. \quad (21)$$

Решение уравнений (21) запишем в виде (рис.4):

$$\sigma_\chi = \chi v_\varepsilon (1 - \exp(-\tau/\chi)), \quad \varepsilon_\chi = v_\varepsilon \tau, \quad \tau/\chi = t/t_0. \quad (22)$$

$$\sigma_\chi / \varepsilon_\chi = \frac{\chi}{\tau} (1 - \exp(-\tau/\chi)) = \frac{\sigma(t, S_0)}{E\varepsilon(t, S_0)} = \frac{E_c}{E}. \quad (23)$$

При $\tau/\chi \gg 1$ следует, что напряжение σ_χ для случая постоянной скорости деформации стремится к значению χv_ε ($\sigma_\chi \rightarrow \chi v_\varepsilon$). Величина деформации растет неограниченно (рис.4).

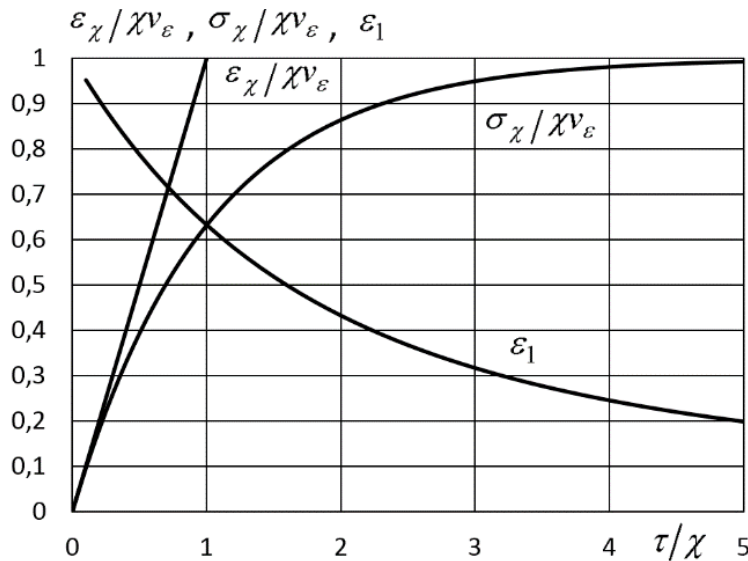


Fig. 4. Напряжение σ_χ , деформация ε_χ и динамический модуль упругости ε_1 при постоянной скорости деформации конвейерной ленты

Так, как $\text{Im}(\sigma_\chi / \varepsilon_\chi) = 0$ (23), то потери, характеризуемые безразмерным модулем ε_2 отсутствуют. Сдвиг фазы δ между напряжением $\sigma(t, S)$ и деформацией $\varepsilon(t, S)$ равен нулю. Для времени процесса деформации t , значительно превышающего время релаксации t_0 ($\tau/\chi \gg 1$), из равенства (23) следует, что $\varepsilon_1 \rightarrow 0$. Таким образом, при значениях $\tau/\chi \gg 1$ напряжение σ_χ

стремится к постоянному значению ($\sigma_\chi \rightarrow \chi v_\varepsilon$), модуль упругости ε_1 стремится к нулю ($\varepsilon_1 \rightarrow 0$), а величина деформации ε_χ растет неограниченно.

Если характерное время процесса деформации t значительно меньше времени релаксации t_0 ($\tau/\chi \rightarrow 0$), следует

$$\lim_{\tau/\chi \rightarrow 0} (\sigma_\chi / \varepsilon_\chi) = \lim_{\tau/\chi \rightarrow 0} \varepsilon_1 = \lim_{\tau/\chi \rightarrow 0} \frac{(1 - \exp(-\tau/\chi))}{\tau/\chi} = 1. \quad (24)$$

При малых значениях безразмерного параметра τ/χ ($\tau/\chi \rightarrow 0$) поведение вязкоупругого Maxwell element конвейерной ленты подчиняется закону Гука (1).

5.2. Случай постоянной скорости изменения напряжения в элементе dS конвейерной ленты

При равномерном распределении материала вдоль конвейерной ленты и постоянной силе первичного сопротивления, напряжение в ленте линейно изменяется по длине секции. Если конвейерная лента движется с постоянной скоростью, то скорость изменения напряжения $d\sigma_\chi/d\tau = v_\sigma$ в элементе dS при его перемещении в результате транспортировки материала будет также постоянной по величине, $v_\sigma \approx const$. При постоянной скорости изменения напряжения v_σ уравнение (16) принимает вид:

$$v_\sigma + \frac{1}{\chi} \sigma_\chi = \frac{d\varepsilon_\chi}{d\tau}, \quad \varepsilon_\chi(0) = \varepsilon_{\chi 0}, \quad \frac{d\sigma_\chi}{d\tau} = v_\sigma, \quad \sigma_\chi(0) = \sigma_{\chi 0}, \quad (25)$$

где значение $\sigma_{\chi 0}$ определяется напряжением натяжения ленты для устранения ее провисания во время транспортировки материала. Решение уравнений (25) представив в форме:

$$\varepsilon_\chi = \frac{v_\sigma \tau^2}{2 \chi} + \sigma_{\chi 0} \frac{\tau}{\chi} + v_\sigma \tau + \varepsilon_{\chi 0}, \quad \sigma_\chi = v_\sigma \tau + \sigma_{\chi 0}. \quad (26)$$

При $\tau/\chi \rightarrow 0$ ($t \ll t_0$) из решения (26) следует линейный рост величины деформации элемента dS со временем

$$\varepsilon_\chi \sim v_\sigma \tau + \varepsilon_{\chi 0} \sim \sigma_\chi - \sigma_{\chi 0} + \varepsilon_{\chi 0}. \quad (27)$$

Поведение вязкоупругого Maxwell element конвейерной ленты соответствует закону Гука. Для случая $\tau/\chi \gg 1$, когда характерное время процесса значительно превышает время релаксации ($t \gg t_0$), следует нелинейный рост величины деформации ε_χ со временем

$$\varepsilon_{\chi} \sim \frac{v_{\sigma}}{2} \frac{\tau^2}{\chi} + \sigma_{\chi 0} \frac{\tau}{\chi}.$$

5.3. Элемент dS конвейерной ленты внезапно подвергся нагрузке $\sigma_{\chi 0}$, постоянной по величине

Элемент конвейерной ленты довольно часто подвергается внезапному изменению величины нагрузки в результате повреждения элементов конструкции транспортного конвейера, что приводит к резкому повышению значения первичного сопротивления движению ленты. Постоянное по величине напряжение $\sigma_{\chi 0}$, внезапно приложенное к элементу dS конвейерной ленты, представим в следующем виде

$$\sigma_{\chi}(\tau) = H(\tau)\sigma_{\chi 0}, \quad H(\tau) = \int_{-\infty}^{\tau} \delta(\alpha) d\alpha, \quad H(\tau) = \begin{cases} 1, & \text{if } \tau \geq 0, \\ 0, & \text{if } \tau < 0, \end{cases} \quad (28)$$

где $H(\tau)$, $\delta(\tau)$ - функция Хевисайда и функция Дирака соответственно. Подставим выражение для внезапно приложенного напряжения (28) в уравнение (16), получим уравнение для определения величины деформации элемента ленты

$$\delta(\tau)\sigma_{\chi 0} + \frac{1}{\chi} H(\tau)\sigma_{\chi 0} = \frac{d\varepsilon_{\chi}}{d\tau}. \quad (29)$$

Проинтегрировав последнее уравнение, запишем решение для нагрузки, приложенной в момент времени $\tau = 0$, в виде (рис. 5):

$$\varepsilon_{\chi}(\tau) = H(\tau)\sigma_{\chi 0} + \int_{-\infty}^{\tau} \frac{1}{\chi} H(\alpha)\sigma_{\chi 0} d\alpha, \quad (30)$$

$$\varepsilon_{\chi}(\tau) = 0, \quad \tau < 0; \quad \varepsilon_{\chi}(\tau) = \sigma_{\chi 0}, \quad \tau = 0; \quad \varepsilon_{\chi}(\tau) = \sigma_{\chi 0} + \sigma_{\chi 0} \frac{\tau}{\chi}, \quad \tau > 0.$$

Для произвольного момента времени приложения нагрузки $\tau = \tau_s$ решение уравнения (29) принимает форму

$$\varepsilon_{\chi}(\tau) = H(\tau - \tau_s)\sigma_{\chi 0} + \int_{-\infty}^{\tau} \frac{1}{\chi} H(\alpha - \tau_s)\sigma_{\chi 0} d\alpha.$$

С увеличением времени приложения нагрузки деформация линейно увеличивается.

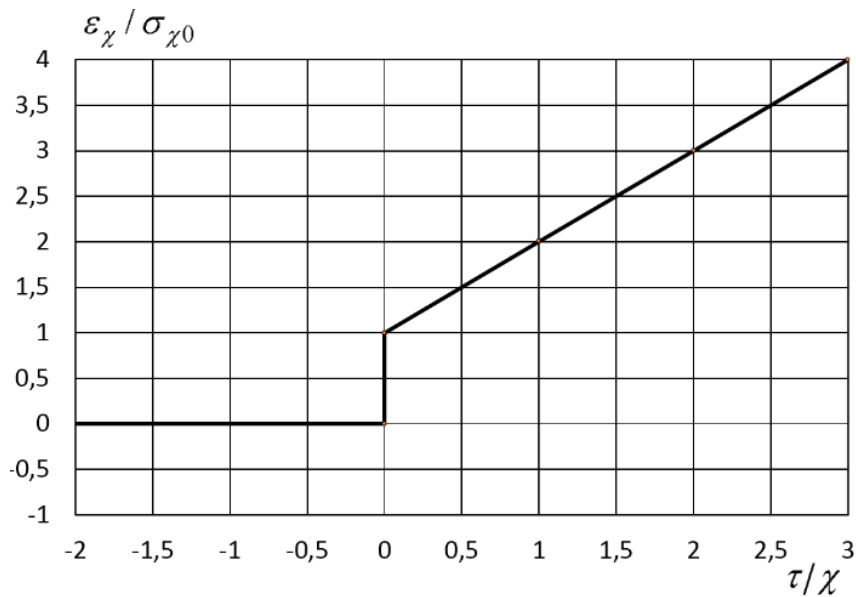


Fig.5. Деформация элемента конвейерной ленты при внезапно приложенной нагрузке $\sigma_{\chi 0}$

Если нагрузка приложена длительное время (даже при небольших ее значениях), для случая $\tau/\chi \gg 1$, когда характерное время процесса значительно превышает время релаксации ($t \gg t_0$), величина деформации превышает предельно допустимое значение. Процесс деформации становится необратимым. Для больших значений τ/χ модель Maxwell element не может быть применена, в связи с тем, что полученные результаты не согласуются с практическими результатами продолжительного использования транспортного конвейера.

5.4. Элемент dS конвейерной ленты при мгновенно действующей силой сопротивления движению ленты

Мгновенная нагрузка может быть вызвана мгновенным торможением элемента ленты толщиной b и шириной h в результате мгновенного резкого заклинивания движущихся или вращающихся частей конструкции конвейера. Возникшее мгновенное напряжение $\sigma_\chi(\tau)$, вызванное мгновенно действующей силой сопротивления движению ленты P_χ определим следующим способом

$$\sigma_\chi(\tau) = \delta(\tau)\sigma_{\chi\tau}, \quad \sigma_{\chi\tau} = const, \quad P_\chi(\tau) = \sigma_\chi(\tau)bh. \quad (31)$$

В момент заклинивания наблюдается резкое увеличение силы сопротивления движению ленты P_χ , действие которой является мгновенным, что приводит к мгновенному торможению ленты с последующим восстановлением функционирования транспортной системы (наличие эффекта рывков). Подставим (31) в уравнение (16), получим уравнение для определения изменения деформации элемента dS в зависимости от времени

$$\sigma_{\chi\tau} \frac{d\delta(\tau)}{d\tau} + \frac{1}{\chi} \delta(\tau) \sigma_{\chi\tau} = \frac{d\varepsilon_{\chi}}{d\tau}. \quad (32)$$

Проинтегрировав последнее уравнение, запишем решение в виде (рис.6)

$$\varepsilon_{\chi}(\tau) = \int_{-\infty}^{\tau} \frac{1}{\chi} \delta(\alpha) \sigma_{\chi\tau} d\alpha + \int_{-\infty}^{\tau} \sigma_{\chi\tau} \frac{d\delta(\alpha)}{d\alpha} d\alpha, \quad (33)$$

$$\varepsilon_{\chi}(\tau) = \sigma_{\chi\tau} \delta(\tau) + \frac{1}{\chi} H(\tau) \sigma_{\chi\tau},$$

$$\varepsilon_{\chi}(\tau) = 0, \quad \tau < 0, \quad \varepsilon_{\chi}(\tau) = \frac{1}{\chi} \sigma_{\chi\tau}, \quad \tau > 0,$$

где

$$\int_{-\infty}^{\tau} \sigma_{\chi\tau} \frac{d\delta(\alpha)}{d\alpha} d\alpha = \sigma_{\chi\tau} \delta(\alpha) \Big|_{-\infty}^{\tau} - \int_{-\infty}^{\tau} \delta(\alpha) \frac{d\sigma_{\chi\tau}}{d\alpha} d\alpha = \sigma_{\chi\tau} \delta(\tau), \quad \int_{-\infty}^{\tau} \frac{\delta(\alpha)}{\chi} \sigma_{\chi\tau} d\alpha = \frac{H(\alpha)}{\chi} \sigma_{\chi\tau}.$$

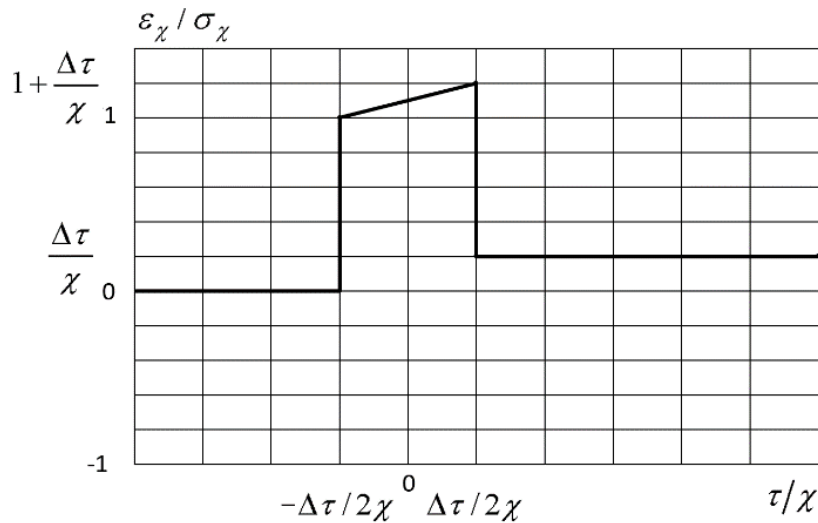


Fig.6. Деформация элемента конвейерной ленты при мгновенной приложенной нагрузке $\sigma_{\chi}(\tau) = \delta(\tau) \sigma_{\chi\tau}$

Проанализируем решение (33) для значений времени $\tau \rightarrow 0$. Представив функции Дирака $\delta(\tau)$ и Хевисайта $H(\tau)$ следующим образом

$$\delta(\tau) = \begin{cases} 1/\Delta\tau, & \text{if } |\tau| \leq \Delta\tau/2, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases} \quad H(\tau) = \int_{-\infty}^{\tau} \frac{1}{\Delta\tau} d\alpha, \quad (35)$$

запишем решение (33) в форме

$$\varepsilon_{\chi}(\tau) = \frac{\sigma_{\chi\tau}}{\Delta\tau} + H(\tau) \frac{1}{\chi} \sigma_{\chi\tau} = \frac{\sigma_{\chi\tau}}{\Delta\tau} \left(1 + H(\tau) \frac{\Delta\tau}{\chi} \right) = \sigma_{\chi} \left(1 + H(\tau) \frac{\Delta\tau}{\chi} \right).$$

$$\lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \varepsilon_{\chi}(\tau) = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \sigma_{\chi} \left(1 + H(\tau) \frac{\Delta\tau}{\chi} \right) = \sigma_{\chi}. \quad (36)$$

Поведение вязкоупругого элемента для рассмотренного случая соответствует модели Гука.

7. Заключение

Стоимость транспортировки материала для предприятий горнодобывающей промышленности составляет значительную часть в себестоимости добычи материала. Один из способов снижения транспортных затрат заключается в использовании системы управления скоростью ленты конвейера [17]. Переключение скоростных режимов приводит к ускорению или торможению конвейерной ленты, и соответственно, к возникновению в ленте динамических напряжений, которые могут стать причиной повреждений ленты. Это накладывает дополнительные ограничения на скоростные режимы транспортной системы. Для глубокого анализа указанных ограничений, заключающемся в определении зависимости величины напряжения от величины скорости и ускорения ленты, требуется решение волнового уравнения. Для модели Нооке-элемент решение волнового уравнения получено в аналитическом виде. Для более сложных моделей упругого элемента решение волнового уравнения связано с дополнительными трудностями.

Проведенный анализ характерных режимов функционирования протяженного транспортного конвейера, свойства материала ленты которого соответствует модели Maxwell element, позволил определить для ряда случаев достаточно простую взаимосвязь между напряжением и деформацией, а также обосновать область применения модели Maxwell element. Важным выводом настоящего исследования является то, что при больших значениях частот $\omega \gg \omega_0$, при которых период колебания значительно меньше времени релаксации t_0 , поведение вязкоупругого Maxwell element соответствует закону Гука. Следующий, существенный вывод, заключается в том, что для малых частот $\omega \ll \omega_0$ распространения возмущений вдоль конвейерной ленты, результаты, полученные с использованием модели Maxwell element не согласуются с экспериментальными данными. Анализ основных режимов функционирования транспортного конвейера позволил сделать дополнительные выводы: 1) для случай постоянной скорости деформации конвейерной ленты, при характерном времени процесса t , значительно превышающим время релаксации напряжений t_0 в модели Maxwell element ($t \gg t_0$) напряжение в

конвейерной ленте стремится к постоянному значению при неограниченном росте величины деформации, что не согласуется с экспериментальными данными. При малых значениях характерного времени процесса по сравнению со временем релаксации ($t \ll t_0$) модель Maxwell element может быть заменена моделью Hooke element. Аналогичная ситуация проявляется и для случай постоянной скорости изменения напряжения в элементе конвейерной ленты. 2) практический интерес представляет анализ функционирования транспортного конвейера для случаев, когда к элементу ленты внезапно приложена постоянная по величине или мгновенная нагрузка. Особое значение в данном случае принимает анализ переходного процесса с характерным временем процесса $t \ll t_0$. В этом случае, с достаточной степенью точностью модель Maxwell element может быть заменена моделью Hooke element.

Новизна полученных результатов заключается в возможности для рассмотренных, довольно распространенных случаев функционирования транспортной системы, выполнить замену модели Maxwell element моделью Hooke element, что значительно упрощает решение волнового уравнения, позволяет получить решение уравнения в аналитическом виде. При этом критерии χ , τ/χ следует рассматривать в качестве критериев подобия для процесса распространения динамических напряжений в конвейерной ленте.

Перспективой дальнейших исследований является анализ распространения динамических возмущений в конвейерной ленте, материал которой соответствует модели Kelvin-Voigt element.

References

1. Zeng, F., Yan, C., Wu, Q., Wang, T. (2020). Dynamic behaviour of a conveyor belt considering non-uniform bulk material distribution for speed control. Appl. Sci., 10, 4436, 1–19. <https://doi.org/10.3390/app10134436>
2. Yao Y, Zhang B. (2020) Influence of the elastic modulus of a conveyor belt on the power allocation of multi-drive conveyors. PLoS ONE, 15(7), e0235768, 1–19. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0235768>.
3. Woźniak, Dariusz, (2020) Laboratory tests of indentation rolling resistance of conveyor belts. Measurement, 150, 107065, 1–19. <https://doi.org/10.1016/j.measurement.2019.107065>
4. Blazej, R., Jurdziak, L., Kirjanow-Blazej, A. et al. (2021). Identification of damage development in the core of steel cord belts with the diagnostic system. Sci Rep 11, 12349. <https://doi.org/10.1038/s41598-021-91538-z>
5. Sanjay G. Sakharwade, Shubharata Nagpal, (2019). Analysis of transient belt stretch for horizontal and inclined belt conveyor system, International Journal of Mathematical, Engineering and Management Sciences, 4(5), 1169–1179, <https://dx.doi.org/10.33889/IJMEMS.2019.4.5-092>
6. Manjgo, M., Piric, E., Vuherer, T., Burzic, M., (2018) Determination of mechanical properties of composite materials-the rubber conveyor belt with cartridges made of polyester and polyamide. Annals of the Faculty of Engineering Hunedoara, 16(1), 141–144. <http://annals.fih.upt.ro/pdf-full/2018/ANNALS-2018-1-22.pdf>

7. Ferry, J. (1980) *Viscoelastic Properties of Polymers*. Wiley, New York, p.672
8. Yang, G., (2014). Dynamics analysis and modeling of rubber belt in large mine belt conveyors. *Sensors & Transducers*, 81(10), 210–218, https://www.sensorsportal.com/HTML/DIGEST/P_2492.htm
9. Pihnastyi, O., Khodusov, V. (2020). Hydrodynamic model of transport system. *East European Journal of Physics*, 1, 121-136. <https://doi.org/10.26565/2312-4334-2020-1-11>
10. Nordell, L., Ciozda, Z., (1984) Transient belt stresses during starting and stopping: elastic response simulated by finite element methods, *Bulk Solids Handling*, 4(1), 99–104. <http://www.ckit.co.za/secure/conveyor/papers/troughed/transient/transient-belt-stresses.htm>
11. Lu, Y., Lin, F., Wang, Yu., (2015). Investigation on influence of speed on rolling resistance of belt conveyor based on viscoelastic properties. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 45(3), 53–68. <https://doi.org/10.1108/JEDT-04-2015-0026>
12. Pihnastyi, O., Cherniavska, S., (2021). Analysis of stress in the conveyor belt (Maxwell–element model). *Naukovyi Visnyk Natsionalnoho Hirnychoho Universytetu*, 4 74–81. <https://doi.org/10.33271/nvngu/2021-4/074>
13. Kulinowski, P., (2014) Simulation method of designing and selecting tensioning systems for mining belt conveyors. *Archives of Mining Sciences*, 59(1), 123–138. <https://doi.org/10.2478/amsc-2014-0009>
14. Rudolphi, T., Reicks, A., (2006). Viscoelastic Indentation and Resistance to Motion of Conveyor Belts using a Generalized Maxwell Model of the Backing Material. *Rubber Chemistry and Technology*, 79(2), 307–319. <https://doi.org/10.5254/1.3547939>
15. He, D., Pang, Y., Lodewijks, G., Liu, X., (2016). Determination of Acceleration for Belt Conveyor Speed Control in Transient Operation. *International Journal of Engineering and Technology* 8(3), 206–211. <http://dx.doi.org/10.7763/IJET.2016.V8.886>
16. Pascual, R. Meruane, V.& Barrientos, G. (2005). Analysis of transient loads on cable-reinforced conveyor belts with damping consideration, in: *XXVI Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering*, CIL0620, 1–15, <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.494.34&rep=rep1&type=pdf>
17. Pihnastyi, O. (2019) Control of the belt speed at unbalanced loading of the conveyor. *Naukovyi Visnyk Natsionalnoho Hirnychoho Universytetu*, 6 122–129. <https://doi.org/10.29202/nvngu/2019-6/18>