МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
для самостійної роботи за темою
«Границя функції однієї змінної»

з навчальної дисципліни «Вища математика»
для студентів технічних спеціальностей ВІТВ

Затверджено
редакційно-видавничою
радою університету,
протокол №3 від 26.10.22

Харків
НТУ «ХПІ»
2022

Методичні вказівки для самостійної роботи за темою «Границя функції однієї змінної» з навчальної дисципліни «Вища математика» для студентів технічних спеціальностей ВІТВ/уклад.: В. В. Веретельник, Г. М. Тимченко, О. В. Веретельник. — Харків: НТУ «ХПІ», 2022. — 66 с.

Укладачі: В. В. Веретельник, Г. М. Тимченко, О. В. Веретельник.

Рецензент доц. С. М. Решетнікова.

Кафедра прикладної математики

Вступ

Методичні вказівки відповідають навчальним (робочим) програмам з дисципліни «Вища математика». Головна мета — надати студентам певний мінімум теоретичного матеріалу, а також практичних навиків з основних питань для розв'язання задач за темою «Границя функції однієї змінної», допомогти студентам в їх самостійній роботі.

У кожному розділі наведено достатня кількість розв'язаних задач та прикладів, пояснюючих та закріплюючих теоретичний матеріал. Серед розв'язаних задач чимало таких, які можна назвати типовими; в будь-якому випадку ознайомлення з ними дозволяє студенту при мінімальній допомозі з боку викладача оволодіти основними методами розв'язання задач даного розділу. Наприкінці наведено добірку індивідуальних завдань. Також розібрані зразки виконання індивідуальних завдань.

1. Передмова

1.1. Область визначення функції

Означення 1. Змінна величина y називається *функцією* змінної величини x, якщо кожному значенню величини x з певної множини D за певним правилом або законом поставлено у відповідність дійсне число y.

Позначають функцію символом:

$$y = f(x),$$

читають «*ігрек дорівнює еф від ікс*».

Означення 2. Сукупність усіх значень незалежної змінної величини x, при яких функція визначена, називається *областю визначення функції*.

Звичайно область визначення — це інтервал або відрізок.

Коли функція задається за допомогою формули область визначення функції зазвичай не вказують, розуміючи під нею множину значень аргументу, для якої ця формула має сенс (*природна область визначення функції*).

Приклад 1. Знайти область визначення функції

$$y = \sqrt{1 - x^2}.$$

Розв'язання. Ця функція має сенс, коли вираз під коренем невід'ємний, тобто

$$1 - x^2 \geqslant 0.$$

Звідси випливає

$$x^2 \leqslant 1, \quad |x| \leqslant 1.$$

Таким чином, область визначення цієї функції є відрізок $[-1, 1]$, який можна задати нерівністю:

$$-1 \leqslant x \leqslant 1.$$

□

Приклад 2. Знайти область визначення функції

$$y = \sqrt{x-1} + \sqrt{4-x}.$$

Розв'язання. Область визначення даної функції складається з тих спільних значень x, для яких обидва доданки набувають дійсних значень. Для цього мають одночасно виконуватися нерівності:

$$\begin{cases} x - 1 \geqslant 0, \\ 4 - x \geqslant 0. \end{cases}$$

Звідси випливає

$$x \geqslant 1, \quad \text{і} \quad x \leqslant 4.$$

Поєднуючи ці нерівності, дістанемо

$$1 \leqslant x \leqslant 4.$$

Таким чином, область визначення даної функції є відрізок $[1, 4]$.

□

Якщо з області визначення функції вибрати будь-яке число,

$$x = c,$$

то йому буде відповідати *значення функції в точці* c, тобто $f(c)$.

Приклад 3. Для функції

$$f(x) = x(2 - x)$$

знайти значення в точках $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$.

Розв'язання. Послідовно підставляючи замість x числа -1, 0, 1, одержимо такі значення функції:

$$f(-1) = -1 \cdot (2 - (-1)) = -1 \cdot 3 = -3,$$
$$f(0) = 0,$$
$$f(1) = 1 \cdot (2 - 1) = 1$$

□

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти область визначення функцій:

1. $y = \lg(x+3)$.

2. $y = \sqrt{5-2x}$.

3. $y = \arccos \dfrac{1-2x}{4}$.

4. $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-x-2}}$.

5. $y = \sqrt{x+2}$.

6. $y = \sqrt{9-x^2}$.

7. $y = \sqrt{4x-x^2}$.

2. Знайти значення $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, якщо

$$f(x) = \begin{cases} 1+x, & \text{при} \quad -\infty < x \leqslant 0, \\ 2^x, & \text{при} \quad 0 < x < +\infty. \end{cases}$$

3. Обчислити значення $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(x+1)$ функцій:

$$\text{а)} f(x) = x^2 - 3x + 2, \quad \text{б)} f(x) = \frac{1-x}{1+x}, \quad \text{в)} f(x) = x^3 - 1.$$

1.2. Складна функція

Найбільш поширеним є аналітичний спосіб завдання функції. Він полягає в тому, що за допомогою аналітичного виразу, який називається *формулою*, описується *алгоритм* обчислення значення функції для кожного зі значень аргументу.

Наприклад, алгоритм обчислення функції

$$y = \sin\sqrt{1-x^2}$$

можна представити у вигляді послідовності (ланцюжка) дій:

$$x \to x^2 \to 1-x^2 \to \sqrt{1-x^2} \to y = \sin\sqrt{1-x^2}.$$

Цей алгоритм інакше можна записати як послідовність таких дій:

1. Надамо аргументу x певне значення;
2. Підносимо x до другого степеня;
3. Обчислимо многочлен $1-x^2$;
4. Добудемо корінь другого степеня;
5. Обчислимо синус.

Означення 3. Накладання двох або більше функцій називається *складною функцією.*

Функція у наведеному прикладі складна, вона складається з послідовного обчислення трьох функцій:

— обчислюється многочлен

$$u = 1 - x^2,$$

— обчислюється корінь

$$v = \sqrt{u},$$

— обчислюється синус

$$y = \sin v.$$

Цю складну функцію символічно можна позначити таким чином:

$$y = f(v(u(x))).$$

Завдання для самостійної роботи

I. Представити у вигляді послідовності (ланцюжка) елементарних функцій складні функції

1. $y = \sin^3 x$.
2. $y = \sqrt[3]{(1+x)^2}$.
3. $y = \lg \operatorname{tg} x$.
4. $y = \sin^3 (2x+1)$.
5. $y = 5^{(3x+1)^2}$.

II. Представити складні функції у вигляді композиції (накладання) елементарних функцій

1. $y = 2^{\sin \sqrt[3]{x}}$.
2. $y = \operatorname{tg} \sqrt[5]{\lg x}$.
3. $y = \sqrt[3]{\lg \sin x^3}$.
4. $y = \operatorname{arctg} \sqrt{2^{x^4}}$.

1.3. Модуль дійсного числа

Означення 4. *Модулем* або *абсолютною величиною* дійсного числа x називається таке невід'ємне число, яке позначається символом $|x|$, що

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases} \qquad (1.1)$$

Графік функції $y = |x|$ наведено на рис.1.1.

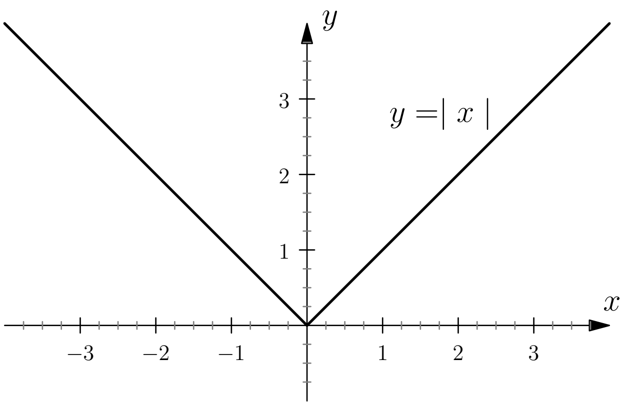

Рис. 1.1. Модуль

Очевидно, для кожного дійсного числа x виконується рівність

$$|-x| = |x|.$$

Наприклад, $|4| = 4$, $|-3| = 3$.

На числовій осі модуль $|x|$ кожного дійсного числа x зображає відстань від початку координат O до певної точки A, яка має координату x (рис.1.2). Звідси випливає, якщо модуль числа x задовольняє нерівності

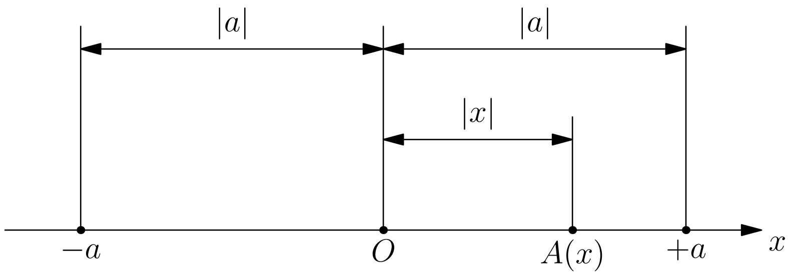

Рис. 1.2. Геометричний зміст модуля

$$|x| < a,$$

то виконується умова

$$-a < x < a, \tag{1.2}$$

тобто число x належить інтервалу $(-a, a)$.

Справді, точка $A(x)$ лежить на відстані $|x|$ від початку координат O, але цю відстань можна відкладати як в додатному, так і у від'ємному напряму від початку координат і ця відстань менше a. Таким чином, точка x належить інтервалу $(-a, a)$.

Нерівність (1.2) також можна одержати за формулою (1.1). Насправді за визначенням модуля маємо: якщо $x \geqslant 0$, то $|x| = x < a$.
Але якщо $x < 0$, тоді $|x| = -x < a$ або $x > -a$.
Поєднуючи ці нерівності, одержимо

$$-a < x < a.$$

Можна розглянути більш загальну нерівність. Нехай

$$|x - x_0| < a, \tag{1.3}$$

де x_0 — певне число (точка), тоді число x задовольняє нерівність:

$$x_0 - a < x < x_0 + a. \tag{1.4}$$

Дійсно, відстань між точками x та x_0 дорівнює $|x - x_0|$ і ця відстань менше a (рис.1.3).

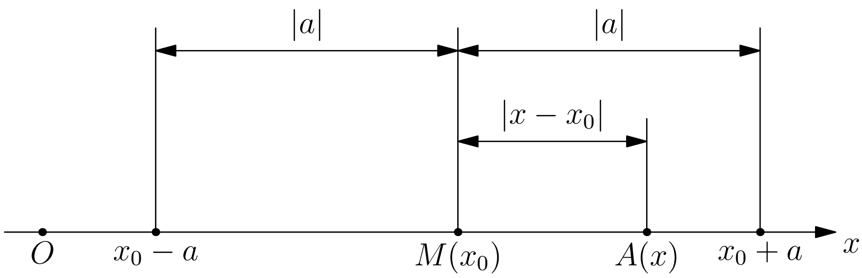

Рис. 1.3. Геометричний зміст модуля

Властивості модуля:
1. Модуль суми двох чисел менше або дорівнює сумі модулів цих чисел:

$$|x + y| \leqslant |x| + |y|. \tag{1.5}$$

2. Модуль різниці двох чисел більше або дорівнює різниці модулів цих чисел:

$$|x - y| > |x| - |y|. \tag{1.6}$$

3. Модуль добутку двох чисел дорівнює добутку модулів цих чисел:

$$|xy| = |x||y|. \tag{1.7}$$

4. Модуль частки двох чисел дорівнює частки модулів цих чисел:

$$\left|\frac{y}{x}\right| = \frac{|y|}{|x|}. \tag{1.8}$$

5. Модуль цілого степеня дійсного числа дорівнює відповідному степеню модуля цього числа:

$$|x^n| = |x|^n. \tag{1.9}$$

Зауваження 1. Відзначимо корисну рівність, яка випливає з визначення модуля

$$\sqrt{x^2} = |x|.$$

Приклад 4. Розв'язати рівняння $\quad |3x - 4| = \dfrac{1}{2}.$

Розв'язання. За означенням модуля маємо

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Отже, треба розглянути два випадки.

1. Якщо $3x - 4 \geqslant 0$, то $|3x - 4| = 3x - 4$.

Звідси випливає

$$3x - 4 = \frac{1}{2}, \quad \text{або} \quad 3x = \frac{9}{2}.$$

Таким чином, маємо $x = \dfrac{3}{2}$, якщо $x \geqslant \dfrac{4}{3}$.

2. Якщо $3x - 4 < 0$, то $|3x - 4| = -(3x - 4)$.

Тоді

$$-3x+4=\frac{1}{2},\quad -3x=-\frac{7}{2},\quad x=\frac{7}{6}\quad \left(\text{якщо}\quad x<\frac{4}{3}\right).$$

Відповідь: $x=\frac{3}{2}$, $x=\frac{7}{6}$. $\square$

Приклад 5. Розв'язати нерівність $|x-2|\geqslant 1$.

Розв'язання. За ознакою модуля маємо:

1. Якщо $x-2\geqslant 0$, то $|x-2|=x-2\geqslant 1$. Звідси випливає, що $x\geqslant 3$.

2. Якщо $x-2<0$, то $|x-2|=-(x-2)\geqslant 1$, $-x\geqslant -1$ або $x\leqslant 1$.

Поєднуючи ці нерівності, одержимо $x\in(-\infty;1]\cup[3;+\infty)$.

$\square$

Завдання для самостійної роботи

1. Розв'язати рівняння $\left|-x^2+2x-3\right|=1$.

Відповідь.: $\varnothing$.

2. Розв'язати рівняння $\left|\dfrac{2x-1}{x+1}\right|=1$.

Відповідь.: $x=0, x=2$.

3. Розв'язати нерівність $\left|x^2-7x+12\right|>x^2-7x+12$.

Відповідь.: $x\in(3;4)$.

1.4. Рівність нулю

Розглянемо таку задачу: знайти число a, модуль якого менше будь–якого додатного числа ε, тобто

$$|a| < \varepsilon. \tag{1.10}$$

Розглянемо умови задачи: ε довільне число, тому йому можна надати будь–яке значення:

– якщо візьмемо $\varepsilon = 100$, то a за модулем буде менше 100, тобто

$$|a| < 100;$$

– якщо візьмемо $\varepsilon = 1$, то a за модулем буде менше 1, тобто

$$|a| < 1;$$

– якщо візьмемо $\varepsilon = 0,01$, то a за модулем буде менше $0,01$, тобто

$$|a| < 0,01.$$

Можно припустити, що $a = 0$. Доведемо це припущення. Доведення будемо будувати *від протилежного.* Припустимо, що

$$a \neq 0.$$

Це дозволяє надати таке значення числу ε:

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\,|a|.$$

Нагадаємо, що ε є довільне додатне число. Тоді за умовами задачи маємо:

$$|a| < \frac{1}{2}\,|a|, \quad \text{або} \quad 1 < \frac{1}{2}.$$

Але це не можливо. Одержана суперечність доводить, що *число a повинно дорівнювати нулю.*

Таким чином, *якщо будь–яке число a по модулю менше довільного додатного числа ε, то число a дорівнює нулю.*

Ця задача має велике значення. Справа в тому, що не можливо виміряти нуль, але є властивість — якщо число по модулю менше довільного додатного числа, то це число дорівнює нулю і можна перевірити цю властивість.

2. Границя функції неперервного аргументу

Розглянемо функцію неперервного аргументу. Її аргумент змінюється *неперервно*, тобто пробігає всі точки певного проміжку, крім, можливо, деяких внутрішніх точок, в яких *функція невизначена*.

В точках, в яких функція визначена, можна обчислити значення функції, але в точках невизначеності це неможливо і виникає питання: *до якого числа наближаєтьзя значення функції, коли її аргумент необмежено наближується до точки невизначеності*? Ця задача розв'язується обчисленням *границі функції* в цій точці.

Приклад 6. Розглянемо функцію

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

Ця функція визначена на всій числовій осі, крім точки $x = 0$ (ділення на нуль). Таким чином, маємо таку область визначення:

$$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty).$$

Функція $\dfrac{\sin x}{x}$ парна, тобто

$$f(-x) = \frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x} = f(x).$$

Отже, можна розглядати цю функцію тільки при додатних значеннях аргументу x.

Обчислимо декілька значень функції в околі точці $x = 0$ і результати наведемо в таблицю:

Таблиця 1. Збіжність функції $\dfrac{\sin x}{x}$

x	$0,500$	$0,400$	$0,300$	$0,250$	$0,200$	0.150	$0,100$	$0,050$	0
$\sin x$	$0,479$	$0,389$	$0,296$	$0,247$	$0,199$	$0,149$	$0,100$	$0,050$	0
$\dfrac{\sin x}{x}$	$0,959$	$0,973$	$0,985$	$0,989$	$0,993$	$0,996$	$0,998$	$0,999$	не визн.

З цієї таблиці випливає, що коли аргумент функції x наближається до нуля, то значення функції $\dfrac{\sin x}{x}$ наближається до одиниці (рис. 2.1). Цей факт позначається символом границі функції:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Нагадаємо, що при $x=0$ функція не визначена і тому обчислити її значення в точці $x=0$ неможливо.

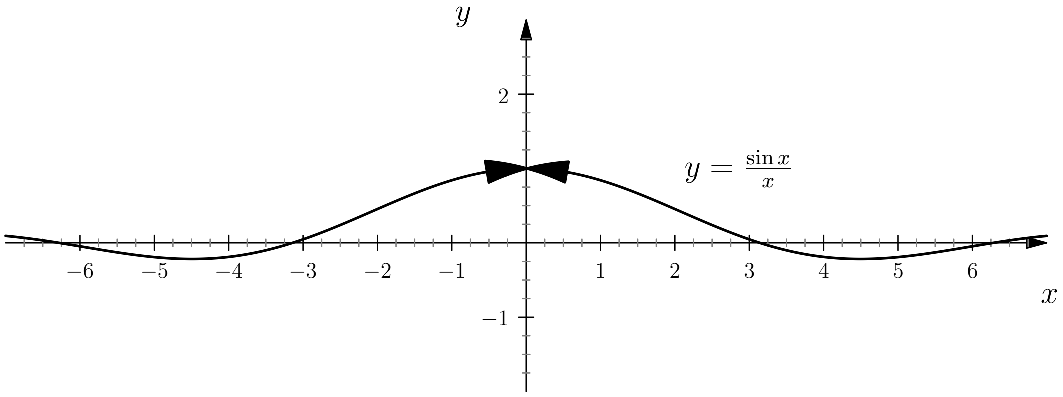

Рис. 2.1. Функция $\dfrac{\sin x}{x}$

Далі, ми будемо користуватися такими поняттями, як окіл точки (або ε-окіл точки).

Означення 5. *Околом точки* a називається будь-який інтервал, що містить точку a.

Іноді необхідно явно вказати довжину околу точки. У цьому випадку говорять про ε-окіл.

Означення 6. Інтервал $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ називається *ε-околом* точки a.

Геометрично ε-окіл точки a — це відрізок числової осі завдовжки 2ε з серединою в точці a.

2.1. Нескіченно мала функція

Нагадаємо *умову* того, що *стала величина дорівнює нулю*: якщо стала величина по модулю менше будь–якого додатного числа, то вона дорівнює нулю.

Розглянемо функцію неперервного аргументу, яка визначена на певному проміжку. Така функція може дорівнювати нулю у будь–якій точці цього проміжка причому в інших точках набувати значення, які відрізняються від нуля. Наприклад, функція $y = x^2$ дорівнює нулю в точці $x = 0$ і більш ніде не дорівнює нулю. Функція $y = (x-1)^2$ дорівнює нулю в точці $x = 1$.

Розглянемо, як для функції $y = x^2$ неперервного аргументу x, яка при $x = 0$ дорівнює нулю, буде виконуватися *умова рівности нулю*:

– нехай $\varepsilon = 4$, тоді умова $y = x^2 < \varepsilon = 4$ буде виконуватися для всіх x, які задовольняють нерівність $|x| < 2$;

– нехай $\varepsilon = 1$, тоді умова: $y = x^2 < \varepsilon = 1$ буде виконуватися для всіх x, які задовольняють нерівність $|x| < 1$;

– нехай $\varepsilon = 0,01$, тоді умова: $y = x^2 < \varepsilon = 0,01$ буде виконуватися для всіх x, які задовольняють нерівність $|x| < 0,1$.

Таким чином, умова $x^2 < \varepsilon$ виконується не тільки у точці $x = 0$, а і в *певному її околі*, який залежить від цього ε.

Означення 7. Нехай функція $f(x)$ визначена в деякому околі точки $x = a$ крім, можливо, самій точки $x = a$.

Функція $f(x)$ називається *нескінченно малою* в точці $x = a$, якщо для будь–якого додатного числа ε існує таке додатне число δ, що для всіх x, які належать δ–околу точки $x = a$, виконується умова $|f(x)| < \varepsilon$.

Якщо функція $f(x)$ в точці $x = a$ є нескінченно малою, тоді записують:

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0. \tag{2.1}$$

Нагадаємо, що δ–окіл точки $x = a$, це інтервал $(a-\delta, a+\delta)$. Цей інтервал має довжину 2δ і містить точку $x = a$. Тому іноді дають інше означення.

Означення 8. Нехай функція $f(x)$ визначена в деякому околі точки $x = a$ крім, можливо, точки $x = a$.

Функція $f(x)$ називається *нескінченно малою* в точці $x = a$, якщо для будь–якого додатного числа ε існує таке додатне число δ, що для всіх x, які задовольняють нерівность

$$|x - a| < \delta, \tag{2.2}$$

виконується умова

$$|f(x)| < \varepsilon. \tag{2.3}$$

Приклад 7. Функція $f(x) = (x-1)^2$ є нескінченно мала в точці $x = 1$ величина. Насправді, функція $f(x)$ визначена в точці $x = 1$ і в будь–якому околі точці $x = 1$. Крім того, для довільного числа ε нерівність

$$(x-1)^2 < \varepsilon$$

задовільняється для всіх x таких, що

$$|x-1| < \sqrt{\varepsilon}.$$

Зауваження 2. Функція $f(x)$ може бути нескінченно малою в точці $x = a$ і не бути нескінченно малою в інших точках, тобто $f(x)$ в інших точках може набувати будь–які значення.

2.2. Нескінченно велика функція

Функція $f(x)$ неперервного аргументу x при $x \to a$ може необмежено зростати або спадати. В цьому разі функція має *невласну границю* $+\infty$ або $-\infty$.

Означення 9. Нехай функція $f(x)$ визначена в деяком околі точки $x = a$ крім, можливо, точки $x = a$.

Якщо для будь–якого додатного числа M існує таке додатне число δ, що для всіх x, які належать δ–околу точки $x = a$, виконується умова

$$f(x) > M,$$

то кажуть, що функція $f(x)$ при $x \to a$ має *невласну границю* $+\infty$ і записують

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty. \tag{2.4}$$

Аналогічно означається невласна границя $-\infty$.

Означення 10. Нехай функція $f(x)$ визначена в деякому околі точки $x = a$ крім, можливо, точки $x = a$.

Якщо для будь–якого від'ємного числа M існує таке додатне число δ, що для всіх x, які належать δ–околу точки $x = a$, виконується умова

$$f(x) < M,$$

то кажуть, що функція $f(x)$ при $x \to a$ має *невласну границю* $-\infty$ і записують

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty. \tag{2.5}$$

Означення 11. Функція $f(x)$, яка має в точці $x = a$ невласну границю

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \quad \text{або} \quad \lim_{x \to a} f(x) = -\infty, \tag{2.6}$$

називається *нескінченно великою* в точці $x = a$.

Тут символом ∞ позначено *невласне* число «нескінченність», яке більше будь–якого додатного числа і для якого існує власна алгебра:

$$\infty + \infty = \infty, \qquad c + \infty = \infty,$$
$$\infty \cdot \infty = \infty, \qquad c \cdot \infty = \infty,$$

де c — стала обмежена величина.

Приклад 8. Функція $y = 1/\left(x - 2\right)$ є нескінченно велика в точці $x = 2$ величина.

Зауважимо, що існує зв'язок між нескінченно малими та нескінченно великими величинами в точці. Нехай функція $f(x)$ є нескінченно великою величиною в точці $x = a$, тобто

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty. \tag{2.7}$$

Тоді функція $g(x) = 1/f(x)$ є нескінченно малою величиною:

$$\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = 0. \tag{2.8}$$

І навпаки, якщо функція $g(x)$ є нескінченно малою в точці $x = a$ і вона ніде в околі точки $x = a$ не дорівнює нулю, то функція $f(x) = 1/g(x)$ в цій точці є величиною нескінченно великою, тобто

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \frac{1}{g(x)} = \infty. \tag{2.9}$$

Символічно це можна позначити таким чином:

$$\frac{C}{0} = \infty, \quad \frac{C}{\infty} = 0 \quad (C = \text{const}). \tag{2.10}$$

2.3. Границя функції

Означення 12. Нехай функція $f(x)$ визначена в деякому околі точки $x = x_0$ крім, можливо, точки $x = x_0$.

Число B називається *границею функції* $f(x)$ в точці $x = x_0$, якщо для будь–якого додатного числа ε існує таке додатне число δ, що для всіх x, які належать δ–околу точки $x = x_0$, виконується умова $|f(x) - B| < \varepsilon$.

Границя функції позначається символом:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = B. \tag{2.11}$$

Зауваження 3. В самій точці $x = x_0$ функція $f(x)$ може бути невизначена. Цей факт дозволяє за допомогою границі дослідити поведінку функції в околі точки, в якій функція невизначена, тобто з'ясувати до якого числа наближається значення функції, коли її аргумент прямує до точки невизначеності.

2.4. Обчислення границі функції

Для функцій неперервного аргументу виконуються такі *теореми про границю.*

Теорема 1. *Границя неперервної функції в будь–якої точці неперервності дорівнює значенню функції в цій точці.*

Отже, якщо у точці x_0 функція $f(x)$ неперервна, тоді

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \tag{2.12}$$

Можна довести, що *що всі елементарні функції неперервні у своїх областях визначення.*

Теорема 2. *Якщо функція $f(x)$ стала, тобто $f(x) = C = \mathrm{const}$, то вона має границю, яка дорівнює цій сталій:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} C = C. \tag{2.13}$$

Теорема 3. *Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ мають скінченні границі в точці $x = x_0$:*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A, \qquad \lim_{x\to x_0} g(x) = B.$$

Тоді сума функцій $f(x) \pm g(x)$ має границю, яка дорівнює сумі границь цих функцій:

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right) \pm \left(\lim_{x\to x_0} g(x)\right) = A \pm B. \tag{2.14}$$

Теорема 4. *Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ мають скінченні границі в точці $x = x_0$:*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A, \qquad \lim_{x\to x_0} g(x) = B.$$

Тоді добуток функцій $f(x)\cdot g(x)$ має границю, яка дорівнює добутку границь цих функцій:

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right) \cdot \left(\lim_{x\to x_0} g(x)\right) = A \cdot B. \tag{2.15}$$

Наслідок 1. *Сталий множник можна виносити за знак границі:*

$$\lim_{x\to x_0} (C \cdot f(x)) = C \cdot \lim_{x\to x_0} f(x) \quad (C = \text{const}). \tag{2.16}$$

Теорема 5. *Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ мають скінченні границі в точці $x = x_0$*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A, \qquad \lim_{x\to x_0} g(x) = B,$$

причому $g(x) \neq 0$. Тоді частка функцій $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ має границю, яка дорівнює частці границь цих функцій:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} = \frac{A}{B}. \tag{2.17}$$

Зауважимо, що теореми про границі доводяться в припущенні, що функції мають скінченні границі. Але, коли виникають невизначені вирази

$$\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|, \quad \left\|\frac{0}{0}\right\|, \quad \|0\cdot\infty\|, \quad \|\infty - \infty\|,$$

знання границь функцій $f(x)$ і $g(x)$ недостатньо і необхідно враховувати закон їх зміни.

З теорем про границі випливає, що в кожній точці числової вісі існують границі многочленів і нескоротних дробів, які рівні значенню цих функцій у даній точці.

Приклад 9. Знайти $\lim\limits_{x\to a} x^3$.

Розв'язання. За теоремою про границю добутку, знайдемо:

$$\lim_{x\to a} x^3 = \lim_{x\to a}(x\cdot x\cdot x) = \left(\lim_{x\to a} x\right)\cdot\left(\lim_{x\to a} x\right)\cdot\left(\lim_{x\to a} x\right) = a\cdot a\cdot a = a^3.$$

Очевидно, що

$$\lim_{x\to a} x^n = a^n. \tag{2.18}$$

□

Приклад 10. Знайти $\lim\limits_{x\to 2}\left(x^3-5x+7\right)$.

Розв'язання. За теоремою про границю суми та наслідку теореми про границю добутку, одержимо:

$$\lim_{x\to 2}\left(x^3-5x+7\right) = \lim_{x\to 2}\left(x^3\right) - \lim_{x\to 2}(5x) + \lim_{x\to 2} 7 = 2^3 - 5\lim_{x\to 2} x + 7 = 8 - 5\cdot 2 + 7 = 15 - 10 = 5.$$

□

З розглянутих прикладів випливає, *щоб знайти границю многочлена необхідно замість аргументу x підставити його граничне значення.*

Приклад 11. Знайти $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-3x-4}{x^3-4x+1}$.

Розв'язання. Враховуючи теорему про границю частки, окремо обчислимо границю знаменника та границю чисельника:

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2-3x-4}{x^3-4x+1} = \frac{\lim\limits_{x\to -2}\left(x^2-3x-4\right)}{\lim\limits_{x\to -2}\left(x^3-4x+1\right)} = \frac{(-2)^2-3(-2)-4}{(-2)^3-4(-2)+1} = \frac{4+6-4}{-8+8+1} = \frac{6}{1} = 6.$$

$\square$

Приклад 12.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-5x^2+8x-4}{x^3-3x^2+5}=$$
$$=\frac{2^3-5\cdot 2^2+8\cdot 2-4}{2^3-3\cdot 2+5}=\frac{8-20+16-4}{8-12+5}=\frac{0}{1}=0.$$

Приклад 13.

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x^2+7x-4}{x^3-5x}=\frac{5\cdot 0+7\cdot 0-4}{0-5\cdot 0}=\frac{0+0-4}{0-0}=\frac{-4}{0}=-\infty.$$

Тут було використовано зв'язок нескінченно малої та нескінченно великої величин (2.10).

У випадку невизначеності вигляду $\left\|\frac{0}{0}\right\|$ необхідно виконати тотожні перетворення чисельника та знаменника дробу, метою якого буде виділення множника, що наближається до нуля. Для цього можна скористатися:

1) наслідком теореми Безу: якщо x_0 — корінь многочлена $P_n(x)$, тобто $P_n(x_0)=0$, то $P_n(x)$ ділиться на двочлен $(x-x_0)$ без залишку, тоді його можна подати у такому вигляді:

$$P_n(x)=(x-x_0)\,Q_{n-1}(x),$$

де $Q_{n-1}(x)$ — многочлен степеня $n-1$;

2) квадратний тричлен $P_2(x)=ax^2+bx+c$, у якого дискримінант

$$D=b^2-4ac>0$$

може бути подано у вигляді такого добутку:

$$ax^2+bx+c=a\,(x-x_1)\,(x-x_2)\,,$$

де x_1, x_2 — корені квадратного тричлена.

Приклад 14. Знайти $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-9}$.

Розв'язання. Підставимо замість x його граничне значення 3:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9}=\frac{3-3}{9-9}=\left\|\frac{0}{0}\right\|.$$

Одержали невизначеність вигляду $\left\|\frac{0}{0}\right\|$.

У цьому випадку необхідно усунути невизначеність, тобто у чисельнику і знаменнику треба виділити множник, що наближається до нуля.

Тому що $x\to 3$, то $(x-3)\to 0$. Таким чином, $(x-3)$ є нескінченно мала величина.

У чисельнику такий множник є. Виділимо множник $(x-3)$ у знаменнику, для цього перетворимо знаменник за формулою різниці квадратів:

$$x^2-9=(x-3)(x+3).$$

Тоді, скорочуючи дріб на множник $(x-3)$, одержимо:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9}=\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)(x+3)}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{x+3}=\frac{1}{3+3}=\frac{1}{6}.$$

Звернемо увагу, що вихідна функція $\frac{x-3}{x^2-9}$ невизначена в точці $x=3$, але знайдена границя вказує, що коли аргумент x наближується до 3, то значення функції прямує до $\frac{1}{6}$. □

Приклад 15. Знайти $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2+2x-3}$.

Розв'язання. Підставляючи замість x його граничне значення, одержимо:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2+2x-3}=\frac{1^2-1}{1+2\cdot 1-3}=\left\|\frac{0}{0}\right\|$$

Маємо невизначеність $\left\|\frac{0}{0}\right\|$. Тому що $x\to 1$, необхідно в чисельнику і знаменнику виділити множник $(x-1)$, який при $x\to 1$ наближується до нуля.

Чисельник зображує різницю квадратів:

$$x^2-1=(x-1)(x+1).$$

За теоремою Вієта одержимо корені знаменника:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -3.$$

Тоді знаменник можна подати у такому вигляді:

$$x^2 + 2x - 3 = (x-1)(x+3).$$

Врахуємо ці перетворення та скоротимо дріб на множник $(x-1)$, тоді за теоремою про границю частки одержимо:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^2+2x-3} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+3)} = \lim_{x\to 1} \frac{x+1}{x+3} = \frac{1+1}{1+3} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

□

Приклад 16. Знайти $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2x^3-5x^2-2x-3}{x^2+2x-15}$.

Розв'язання. Обчислимо границю чисельника та знаменника для цього скористаємося теоремою про границю частки. Тоді маємо:

$$\lim_{x\to 3} \frac{2x^3-5x^2-2x-3}{x^2+2x-15} = \frac{2\cdot 3^3 - 5\cdot 3^2 - 2\cdot 3 - 3}{3^2+2\cdot 3-15} = \\ = \frac{2\cdot 27 - 5\cdot 9 - 6 - 3}{9+6-15} = \frac{54-45-9}{15-15} = \left\|\frac{0}{0}\right\|.$$

Отже, границі чисельника і знаменника існують, але скористатися теоремою про границю частки не можна тому, що маємо невизначеність. Щоб усунути цю невизначеність необхідно виділити у чисельнику та знаменнику множник $(x-3)$, що наближається до нуля.

Тому, що $x = 3$ є коренем чисельника і знаменника, то за наслідком теореми Безу ці многочлени діляться на $(x-3)$ без залишку:

$$\begin{array}{r|l} 2x^3-5x^2-2x-3 & x-3 \\ \cline{2-2} \underline{2x^3-6x^2} & 2x^2+x+1 \\ x^2-2x & \\ \underline{x^2-3x} & \\ x-3 & \\ \underline{x-3} & \\ 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} x^2+2x-15 & x-3 \\ \cline{2-2} \underline{x^2-3x} & x+5 \\ 5x-15 & \\ \underline{5x-15} & \\ 0 & \end{array}$$

Зауваження 4. Для ділення одного многочлена на інший потрібно обидва многочлена записати у порядку спадання степенів.

Тепер кожен многочлен може бути подано у такому вигляді:

$$2x^3 - 5x^2 - 2x - 3 = (x-3)\left(2x^2 + x + 1\right), \tag{2.19}$$

$$x^2 + 2x - 15 = (x-3)(x+5). \tag{2.20}$$

Враховуючи (2.19) і (2.20), скоротимо множник $(x-3)$ і обчислимо границю функції:

$$\lim_{x\to 3} \frac{2x^3 - 5x^2 - 2x - 3}{x^2 + 2x - 15} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)\left(2x^2 + x + 1\right)}{(x-3)(x+5)} =$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{2x^2 + x + 1}{x+5} = \frac{2\cdot 3^2 + 3 + 1}{3+5} = \frac{22}{8} = \frac{11}{4}.$$

□

Приклад 17. Знайти $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{4}{x^2-4} - \dfrac{1}{x-2}\right)$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{4}{x^2-4} - \frac{1}{x-2}\right) = \frac{4}{2^2-4} - \frac{1}{2-2} = \frac{4}{0} - \frac{1}{0} = \|\infty - \infty\|.$$

Маємо невизначеність вигляду $\|\infty - \infty\|$. Для розкриття невизначеності вигляду $\|\infty - \infty\|$ потрібно виконати тотожні перетворення, щоб звести таку невизначеність до вигляду $\left\|\dfrac{\infty}{\infty}\right\|$ або $\left\|\dfrac{0}{0}\right\|$.

Наведемо різницю дробів до спільного знаменника:

$$\frac{4}{x^2-4} - \frac{1}{x-2} = \frac{4-(x+2)}{x^2-4} = \frac{2-x}{x^2-4}.$$

Якщо обчислити границю цієї функції, то одержимо невизначеність $\left\|\dfrac{0}{0}\right\|$, її можна усунути, скоротивши множник $(x-2)$, який прямує до нуля:

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{4}{x^2-4} - \frac{1}{x-2}\right) = \lim_{x\to 2}\frac{2-x}{x^2-4} = \left\|\frac{0}{0}\right\| =$$

$$= -\lim_{x\to 2}\frac{1}{x+2} = -\frac{1}{2+2} = -\frac{1}{4}.$$

□

2.5. Границя функції на нескінченності

Означення 13. Нехай функція $f(x)$ визначена на множині усіх додатних чисел, тобто

$$x \in (0, +\infty)\,.$$

Число B називається *границею функції* $f(x)$ при $x \to +\infty$, якщо для будь–якого додатного числа ε існує таке додатне число M, що з нерівності $x > M$ випливає нерівність $|f(x) - B| < \varepsilon$. Цей факт позначається символом:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = B. \tag{2.21}$$

Аналогічно визначається границя функції при $x \to -\infty$.

Означення 14. Нехай функція $f(x)$ визначена на множині всіх від'ємних чисел, тобто

$$x \in (-\infty, 0)\,.$$

Число B називається *границею функції* $f(x)$ при $x \to -\infty$, якщо для будь–якого додатного числа ε існує таке від'ємне число M, що для всіх $x < M$ випливає нерівність $|f(x) - B| < \varepsilon$. Це записують так:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = B. \tag{2.22}$$

Обчислення границі при $x \to \pm\infty$ необхідно враховувати знак «нескінченості», тобто потрібно обчислювати дві границі: і при $x \to +\infty$, і при $x \to -\infty$.

Приклад 18. Знайти $\lim\limits_{x \to \infty} (3x - 2)$.

Розв'язання. Скористаємося теоремою про границю суми та винесемо сталу за знак границі. Тоді одержимо:

$$\lim_{x \to \infty} (3x - 2) = \lim_{x \to \infty} (3x) - \lim_{x \to \infty} (2) = 3 \lim_{x \to \infty} (x) - 2 = 3 \cdot \infty - 2 = \infty - 2 = \infty.$$

Тут також було враховано, що для невласного числа ∞ діє власна алгебра (див. стр. 17). $\square$

Приклад 19. Знайти $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3}{2x + 1}$.

Розв'язання. За теоремою про границю частки маємо

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3}{2x+1} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty} 3}{\lim\limits_{x\to\infty}(2x+1)} = \frac{3}{\infty} = 0.$$

Тут враховано зв'язок нескінченно малих і нескінченно великих величин (див. стр. 17). □

Приклад 20. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\big(3x^2-2x+5\big)$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to\infty}\big(3x^2-2x+5\big) = \|\infty-\infty\|.$$

Маємо невизначенність вигляду $\|\infty-\infty\|$. Ця невизначенність виникла тому, що перший додаток прямує до $+\infty$, а другий прямує до $-\infty$. Щоб усунити невизначенність, потрібно з'ясувати який додаток, перший або другий, швидче зростає. Очевидно, що x^2 зростає швидче за x, тому винесимо x^2 за дужки.

$$3x^2-2x+5 = x^2\left(3-\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}\right).$$

Тоді у дужках перший доданок — стала, а другий та третій доданки є нескінченно малі величини; множник x^2 є величина нескіченно велика. Отже маємо

$$\lim_{x\to\infty}\big(3x^2-2x+5\big) = \lim_{x\to\infty} x^2\left(3-\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}\right) =$$
$$= \infty\left(3-\frac{2}{\infty}+\frac{5}{\infty}\right) = \infty\,(3-0+0) = \infty\cdot 3 = \infty.$$

Зауваження 5. Усунення невизначенності $\|\infty-\infty\|$ шляхом перетворення даного типа використовується досить часто, причому при порівнянні нескінченно великих величин завжди виносимо величину, яка зростає швидче за інших.

□

Приклад 21. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-4x+3}{3x^2+7x+1}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2-4x+3}{3x^2+7x+1}=\left\|\frac{\infty-\infty}{\infty}\right\|.$$

Для розкриття невизначенності перетворимо кожен многочлен, як це було зроблено у пепередньому прикладі. Тоді одержимо:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2-4x+3}{3x^2+7x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(5-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}{x^2\left(3+\frac{7}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{5-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}{3+\frac{7}{x}+\frac{1}{x^2}}=$$

$$=\frac{5-\frac{4}{\infty}+\frac{3}{\infty}}{3+\frac{7}{\infty}+\frac{1}{\infty}}=\frac{5-0+0}{3+0+0}=\frac{5}{3}.$$

Звернемо увагу на те, що тут було скорочено на x^2. Цей множник давав нескінченне зростання як чисельника, так і знаменника. □

Приклад 22. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-2x+3}{3x^3-6x+5}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+3}{3x^3-6x+5}=\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}{x^3\left(3-\frac{6}{x^2}+\frac{5}{x^3}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}{x\left(3-\frac{6}{x^2}+\frac{5}{x^3}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}{3-\frac{6}{x^2}+\frac{5}{x^3}}=$$

$$=\frac{1}{\infty}\cdot\frac{1-\frac{2}{\infty}+\frac{3}{\infty}}{3-\frac{6}{\infty}+\frac{5}{\infty}}=0\cdot\frac{1-0+0}{3-0+0}=0\cdot\frac{1}{3}=0.$$

Зауважимо, що в цьому прикладі при $x\to\infty$ чисельник зростає як x^2, а знаменник — як x^3. □

Приклад 23. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^2+x-3}{-5x+7}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x^2+x-3}{-5x+7} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\| = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(4+\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{x^2}\right)}{x\left(-5+\dfrac{7}{x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x\left(4+\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{x^2}\right)}{-5+\dfrac{7}{x}} = \frac{\infty\left(4+\dfrac{1}{\infty}-\dfrac{3}{\infty}\right)}{-5+\dfrac{7}{\infty}} = \frac{\infty\,(4+0-0)}{-5+0} = \infty.$$

□

Приклад 24. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right) = \|\infty-\infty\|\,.$$

Невизначеність вигляду $\|\infty-\infty\|$ шляхом алгебраїчних перетворень звичайно зводять до невизначенності типу $\left\|\dfrac{\infty}{\infty}\right\|$ або $\left\|\dfrac{0}{0}\right\|$.

Функція, що розглядається, містить нескінченно велику величину x під знаком квадратного кореня. Тому для розкриття невизначеності позбавимося ірраціональності у чисельнику, скориставшись формулою різниці квадратів:

$$a^2-b^2=(a-b)\,(a+b)\,.$$

Отже, помноживши чисельник і знаменник на $\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)$, у чисельнику одержимо різницю квадратів, а в знаменнику — суму коренів, які невизначенності не утворюють:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{x+1}\right)^2-\left(\sqrt{x}\right)^2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

□

Приклад 25. Знайти $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)$.

Розв'язання. В цьому випадку необхідно розглянути дві границі: першу — при $x\to+\infty$ і другу — при $x\to-\infty$.

Розглянемо першу границю:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)=\|\infty-\infty\|=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+x+1}+x}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x+1-x^2}{\sqrt{x^2+x+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x}=\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\dfrac{1}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+1}=\frac{1}{2}.$$

Знайдемо іншу границю:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-x\right)=$$
$$=\left(\infty\cdot\sqrt{1+\frac{1}{-\infty}+\frac{1}{\infty^2}}-(-\infty)\right)=\infty+\infty=\infty.$$

Звернемо увагу, що дана функція має при $x\to+\infty$ і при $x\to-\infty$ різні границі. $\square$

Завдання для самостійної роботи

Знайти границю функції.

1. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+5}{x^2-3}$.

2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2-3x+1}{x-4}$.

3. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x}{1-x}$.

4. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-1}$.

5. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1}$.

6. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}$.

7. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}$.

8. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3+3x^2+2}{x^2-x-6}$.

9. $\lim\limits_{x\to 1/2} \dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$.

10. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$.

11. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x^2}$.

12. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$.

13. $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$.

14. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{5x^2-3x+2}{2x^2+4x+1}$.

15. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{3x-1}{x^2-x+1}$.

16. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{3x\sqrt{x}+1}{\sqrt{3x^2+1}}$.

17. $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.

18. $\lim\limits_{x\to \pm\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.

2.6. Перша важлива границя

Перша важлива границя має такий вигляд:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \tag{2.23}$$

Звернемо увагу на те, що функція $\dfrac{\sin x}{x}$ в точці $x = 0$ невизначена. Тому що $\sin x$ в цій точці дорівнює нулю, то маємо невизначеність типу $\left\|\dfrac{0}{0}\right\|$. Таким чином, перша важлива границя використовується для розкриття невизначеності, якщо невизначені вирази містять тригонометричні функції.

Перша важлива границя має такі *наслідки*:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=1, \tag{2.24}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1. \tag{2.25}$$

Границя відношення функцій $\sin x$ і x при $x\to 0$ дорівнює одиниці. Це означає, що функція $y=\sin x$ у малому околі точці $x=0$ змінюється, як лінійна функція $y=x$. Такі функції називаються *еквівалентними*.

Означення 15. Нехай $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ є нескінченно малі функції в точці $x=x_0$. Якщо границя їх відношення при $x\to x_0$ дорівнює одиниці, то $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ точці $x=x_0$ називаються *еквівалентними*.

Позначаються еквівалентні функції так: $\alpha(x)\sim\beta(x)$.

Таким чином, якщо

$$\lim_{x\to x_0}\alpha(x)=0, \quad \lim_{x\to x_0}\beta(x)=0 \quad \text{і} \quad \lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1, \quad \text{то} \quad \alpha(x)\sim\beta(x).$$

Теорема 6. *При обчисленні границі відношення двох нескінченно малих ці нескінченно малі функції можна замінити їх еквівалентами, тобто якщо* $\alpha(x)\sim\beta(x)$ *і* $\gamma(x)\sim\delta(x)$, *то виконується рівність*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\gamma(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\beta(x)}{\delta(x)}. \tag{2.26}$$

Наведемо еквівалентні при $x\to 0$ функції:

$$\begin{aligned}
&\sin x\sim x, && \arcsin x\sim x,\\
&\operatorname{tg} x\sim x, && \operatorname{arctg} x\sim x,\\
&1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2, && \ln(1+x)\sim x,\\
&e^x-1\sim x, && a^x-1\sim x\ln a,\\
&(1+x)^k-1\sim kx, && \sqrt[k]{1+x}-1\sim\frac{1}{k}x.
\end{aligned}$$

Приклад 26. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}$.

Розв'язання. Скористатися границею (2.23) неможливо, тому що аргумент синуса дорівнює $5x$ і не збігається зі знаменником x. Але можна помножити чисельник і знаменник на число 5, тоді одержимо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x} = \left\|\frac{0}{0}\right\| = \lim_{x\to 0}\frac{5\sin 5x}{5x} = 5\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x} = 5\lim_{t=5x\to 0}\frac{\sin t}{t} = 5\cdot 1 = 5.$$

Можна цю задачу розв'язати інакше: тому, що x прямує до нуля, скористаємось еквівалентними величинами:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x} = \left\|\begin{array}{l}\sin x \sim x,\\ \sin 5x \sim 5x,\end{array}\right\| = \lim_{x\to 0}\frac{5x}{x} = \lim_{x\to 0} 5 = 5.$$

$\square$

Означення 16. Нехай $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ є нескінченно малі функції в точці $x = x_0$. Якщо їх відношення при $x \to x_0$ має скінченну границю, яка не дорівнює нулю, тобто

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C \neq 0,$$

то $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ точці $x = x_0$ називаються *нескінченно малими однакового порядку.*

Означення 17. Нехай $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ є нескінченно малі функції в точці $x = x_0$. Якщо границя відношення двох нескінченно малих при $x \to x_0$ є нескінченно малою величиною, тобто

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0,$$

то $\alpha(x)$ називається *нескінченно малою вищого порядку малості*, ніж $\beta(x)$. При цьому $\beta(x)$ називається *нескінченно малою нижчого порядку малості*, ніж $\alpha(x)$.

Приклад 27. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$.

Розв'язання. Чисельник $\operatorname{tg} x - \sin x$ є різниця двох нескінченно малих одного порядку малості

$$\operatorname{tg} x \sim x, \quad \sin x \sim x \quad \text{при} \quad x \to 0$$

і якщо скористатися еквівалентними величинами, то буде втрачена нескінченно мала більшого порядку. Тому спочатку зробимо такі перетворення:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\,(1-\cos x)}{x^3\cos x}=$$

$$=\left\|\begin{array}{l}\sin x\sim x,\\ 1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2,\end{array}\right\|=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\,(1-\cos x)}{x^3}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\dfrac{x^2}{2}}{x^3}\cdot 1=\frac{1}{2}.$$

Зауваження 6. З розглянутого прикладу випливає, що різниця двох нескінченно малих $\operatorname{tg}x-\sin x\sim\dfrac{x^3}{2}$ при $x\to 0$, тобто є нескінченно мала більшого порядку малості.

□

Приклад 28. Знайти $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\operatorname{tg}x$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\operatorname{tg}x=\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}=\|0\cdot\infty\|.$$

Для розкриття невизначеності скористатися першою важливою границею тут не можна, тому що тут немає нескінченно малих величин. Виконаємо таку заміну змінної:

$$y=\frac{\pi}{2}-x.$$

Очевидно, що $y\to 0$ при $x\to\dfrac{\pi}{2}$. Тоді маємо:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\operatorname{tg}x=\lim_{y\to 0}y\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-y\right)=\lim_{y\to 0}y\,\frac{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-y\right)}{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-y\right)}=$$

$$=\lim_{y\to 0}y\,\frac{\cos y}{\sin y}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y}\cdot\lim_{y\to 0}\cos y=1.$$

Зауваження 7. При обчисленні границі функції іноді корисно розглядати тангенс як відношення синуса та косинуса:

$$\operatorname{tg} y = \frac{\sin y}{\cos y}.$$

Крім того були використано формули зведення:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \cos y, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \sin y.$$

$\square$

2.7. Друга важлива границя

Для розкриття невизначеності виду $\|1^\infty\|$ звичайно користуються *другою важливою границею*:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e. \tag{2.27}$$

Цю формулу можна записати інакше, якщо врахувати, що $\dfrac{1}{x} \to 0$ при $x \to \infty$. Нехай $x \to \infty$. Позначимо нескінченно малу величину $\alpha(x) = \dfrac{1}{x}$, тоді з (2.27) випливає така формула:

$$\lim_{\alpha\to 0}(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e. \tag{2.28}$$

Наслідки другої важливої границі:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = e^k, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1 + x)}{x} = \log_a e,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1 + x)}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x} = \ln a,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{(1 + x)^\alpha - 1}{x} = \alpha.$$

Звідси випливають такі еквівалентні нескінченно малі:

$$\log_a(1 + x) \sim x\log_a e = \frac{x}{\ln a}, \qquad \ln(1 + x) \sim x,$$

$$a^x - 1 \sim x\ln a, \qquad e^x - 1 \sim x,$$

$$(1 + x)^\alpha - 1 \sim \alpha x.$$

Приклад 29. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{2+x}\right)^{3x}$.

Розв'язання. Обчислимо границю основи:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{2+x}=\frac{\infty}{2+\infty}=\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x\left(1+\dfrac{2}{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\dfrac{2}{x}}=\frac{1}{1+\dfrac{2}{\infty}}=\frac{1}{1+0}=1.$$

Обчислимо границю показника:

$$\lim_{x\to\infty}3x=\infty.$$

Отже, маємо невизначеність $\|1^{\infty}\|$.

Виділемо в основі одиницю: додамо і віднімемо з основи одиницю:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{2+x}\right)^{3x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x}{2+x}-1\right)^{3x}=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x-2-x}{2+x}\right)^{3x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-2}{2+x}\right)^{3x}=$$

Останні два доданки було приведено до спільного знаменника. Помножимо і поділимо показник на одержану нескінченно малу $\dfrac{-2}{2+x}$:

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-2}{2+x}\right)^{\frac{2+x}{-2}\frac{-2}{2+x}3x}=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{-2}{2+x}\right)^{\frac{2+x}{-2}}\right\}^{\frac{-6x}{2+x}}=$$

Величина у дужках прямує до числа e:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-2}{2+x}\right)^{\frac{2+x}{-2}}=\lim_{t=\frac{-2}{2+x}\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e.$$

Враховуючи що
$$\lim_{x\to\infty}\frac{-6x}{2+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{-6}{1+\dfrac{2}{x}}=-6,$$
остаточно одержимо
$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{2+x}\right)^{3x}=e^{-6}.$$
$\square$

Приклад 30. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x+1}\right)^{2x-1}$.

Розв'язання. Обчислимо границю показника й основи:
$$\lim_{x\to\infty}(2x-1)=\infty,$$
$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+2}{3x+1}=\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(3+\dfrac{2}{x}\right)}{x\left(3+\dfrac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\dfrac{2}{x}}{3+\dfrac{1}{x}}=\frac{3+\dfrac{2}{\infty}}{3+\dfrac{1}{\infty}}=\frac{3+0}{3+0}=1.$$

Таким чином, маємо невизначеність $\|1^\infty\|$.
Виділемо в основі одиницю:
$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+2}{3x+1}\right)^{2x-1}=\|1^\infty\|=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3x+2}{3x+1}-1\right)^{2x-1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x+1}\right)^{2x-1}=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{3x+1}\right)^{3x+1}\right\}^{\frac{2x-1}{3x+1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x-1}{3x+1}}=e^{2/3}.$$
Тут враховано такі границі:
$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x+1}\right)^{3x+1}=\lim_{t=\frac{1}{3x+1}\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e,$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{3x+1}=\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(2-\dfrac{1}{x}\right)}{x\left(3+\dfrac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\dfrac{1}{x}}{3+\dfrac{1}{x}}=\frac{2}{3}.$$

$\square$

Приклад 31. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{3x+1}\right)^{2x}$.

Розв'язання. Обчислимо границю показника й основи:

$$\lim_{x\to\infty}(2x)=\infty,$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+2}{3x+1}=\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(1+\dfrac{2}{x}\right)}{x\left(3+\dfrac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\dfrac{2}{x}}{3+\dfrac{1}{x}}=\frac{1+\dfrac{2}{\infty}}{3+\dfrac{1}{\infty}}=\frac{1+0}{3+0}=\frac{1}{3}.$$

Звідси випливає

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{3x+1}\right)^{2x}=\left(\frac{1}{3}\right)^{\infty}=0.$$

$\square$

Приклад 32. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2}{x+1}\right)^{x}$.

Розв'язання. Обчислимо границю показника й основи:

$$\lim_{x\to\infty}(x)=\infty,$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+2}{x+1}=\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(3+\dfrac{2}{x}\right)}{x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\dfrac{2}{x}}{1+\dfrac{1}{x}}=\frac{3+\dfrac{2}{\infty}}{1+\dfrac{1}{\infty}}=\frac{3+0}{1+0}=3.$$

Звідси випливає

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{3x+1}\right)^{2x}=3^{\infty}=\infty.$$

$\square$

Завдання для самостійної роботи

Знайти границю функції.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}3x}{\sin 2x}$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{x\sin 3x}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 7x}-1}{x^2+3x}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}5x}{\ln(1+x)}$.

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^{2x+1}$.

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+5}{x^2-5}\right)^{x^2}$.

7. $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\ln(1+x)-\ln x\right)$.

8. $\lim\limits_{x\to 0}x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$.

3. Неперервність функції

3.1. Односторонні границі

При означенні границі функції $f(x)$ використовується поняття δ–околу точці $x = a$, тобто припускається, що аргумент функції може наближатися до точки $x = a$ довільно — як ліворуч, так і праворуч. Іноді потрібно обмежити характер наближення аргументу x, тому розглядають *праву та ліву границі функції.*

Означення 18. Число B називається *правою границею функції* $f(x)$ у точці $x = a$, якщо для будь–якого додатного числа ε існує таке додатне число δ, що для всіх x, які задовольняють нерівності

$$a < x < a + \delta, \tag{3.1}$$

виконується умова

$$|f(x) - B| < \varepsilon. \tag{3.2}$$

Позначається права границя функції так:

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = B. \tag{3.3}$$

Тут символ $x \to a + 0$ означає: коли обчислюється права границя функції $f(x)$ у точці $x = a$, аргумент функції x, наближуючись до точки a, завжди залишається більше ніж a, тобто виконується умова $x > a$. Тому іноді праву границю позначають так:

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = B. \tag{3.4}$$

Означення 19. Число B називається *лівою границею функції* $f(x)$ у точці $x = a$, якщо для будь–якого додатного числа ε існує таке додатне число δ, що для всіх x, які задовольняють нерівності

$$a - \delta < x < a, \tag{3.5}$$

виконується умова

$$|f(x) - B| < \varepsilon. \tag{3.6}$$

Позначається ліва границя функції так:

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = B. \tag{3.7}$$

Коли обчислюється ліва границя, аргумент x завжди лишається менше a, тому можна ліву границю позначити так:

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = B. \tag{3.8}$$

У певній точці $x = a$ можливі такі випадки:

– функція в точці може мати ліву та праву границі і вони рівні між собою;

– функція в точці має односторонні границі і вони різні.

Очевидно, якщо *функція $f(x)$ в точці $x = a$ має ліву та праву границі і вони рівні між собою, то функція у точці $x = a$ має границю, яка дорівнює лівій та правій границям, і навпаки, якщо функція у точці $x = a$ має границю, то в цій точці існують ліва та права границі і вони рівні.*

Приклад 33. Обчислити ліву та праву границі в точці $x = 0$ функції

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 \quad \text{при} \quad x > 0; \\ 0 \quad \text{при} \quad x = 0; \\ -1 \quad \text{при} \quad x < 0. \end{cases}$$

Ця функція називається *знак числа x*, читається «сигнум икс» (рис. 3.1).

Розв'язання. Функція $\operatorname{sgn} x$ визначена на всій числовій осі, тобто

$$x \in (-\infty, +\infty),$$

але на різних проміжках вона визначена різними формулами.

При $x > 0$ функція $\operatorname{sgn} x$ є стала, яка дорівнює одиниці, тому її права границя в точці $x = 0$ також дорівнює цій сталій, тобто одиниці:

$$\lim_{x \to 0+0} \operatorname{sgn} x = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \operatorname{sgn} x = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} 1 = 1.$$

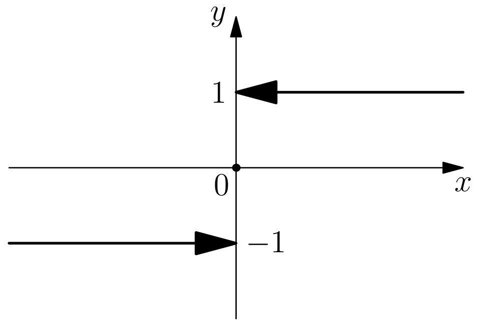

Рис. 3.1. Функція *sgnx*

Аналогічно знаходиться ліва границя:

$$\lim_{x\to 0-0} \operatorname{sgn} x = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \operatorname{sgn} x = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} (-1) = -1.$$

Тут наведено оба позначення односторонньої границі. Звичайно користуються першим позначенням односторонньої границі, причому мають на увазі друге позначення.

Звернемо увагу, що тут ліва і права границі не рівні між собою, отже, функція $\operatorname{sgn} x$ в точці $x = 0$ границі немає. Крім того, ліва та права границі не дорівнюєть значенню функції в точці $x = 0$:

$$\operatorname{sgn}(0) = 0.$$

□

3.2. Неперервність функції

Означення 20. Функція $f(x)$ називається *неперервною в точці* $x = x_0$, якщо вона задовольняє таким умовам:

1) функція $f(x)$ визначена в точці $x = x_0$ і певному її околі;

2) в точці $x = x_0$ існують ліва та права границі функції і вони рівні між собою:

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x);$$

3) ліва та права границі дорівнюють значенню функції в точці $x = x_0$:

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0).$$

Якщо хоч одна з цих умов не виконується, то функція $f(x)$ називається *розривною* в точці $x = x_0$.

Означення 21. Якщо в точці $x = x_0$ існують скінченні ліва та права границі функції $f(x)$ і вони рівні між собою, але функція $f(x)$ невизначена в точці $x = x_0$ або візначена, но її значення не дорівнює цим границям, тоді точка $x = x_0$ називається *точкою усувного розриву.*

Приклад 34. Функція $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ невизначена у точці $x = 0$, але в цій точці існує границя функції (перша важлива границя):

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Отже, у точці $x = 0$ існують скінченні ліва та права границі функції і вони рівні між собою (див. рис. 2.1 на стр. 14). Таким чином, точка $x = 0$ — це *точка усувного розриву.*

Якщо доповнити цю функцію значенням $f(0) = 1$, одержимо неперервну функцію:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{якщо} \quad x > 0, \\ 1, & \text{якщо} \quad x = 0, \\ \dfrac{\sin x}{x}, & \text{якщо} \quad x < 0. \end{cases}$$

Приклад 35. Дослідити на неперервність функцію $\quad f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}.$

Розв'язання. При $x \neq 1$ функцію $f(x)$ можна переписати у такому вигляду:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)\,(x + 1)}{x - 1} = x + 1.$$

Таким чином, фунція при будь–якому значенні $x \neq 1$ є неперервною, як елементарна функція. Але при $x = 1$ функція невизначена, тобто має розрив.

Знайдемо односторонні границі у точці $x = 1$:

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} (x + 1) = 1 + 1 = 2.$$

$$\lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} (x+1) = 1+1 = 2.$$

Отже, у точці $x = 1$ існують скінченні ліва та права границі функції і вони рівні між собою. Таким чином, точка $x = 1$ — це *точка усувного розриву* (рис. 3.2). □

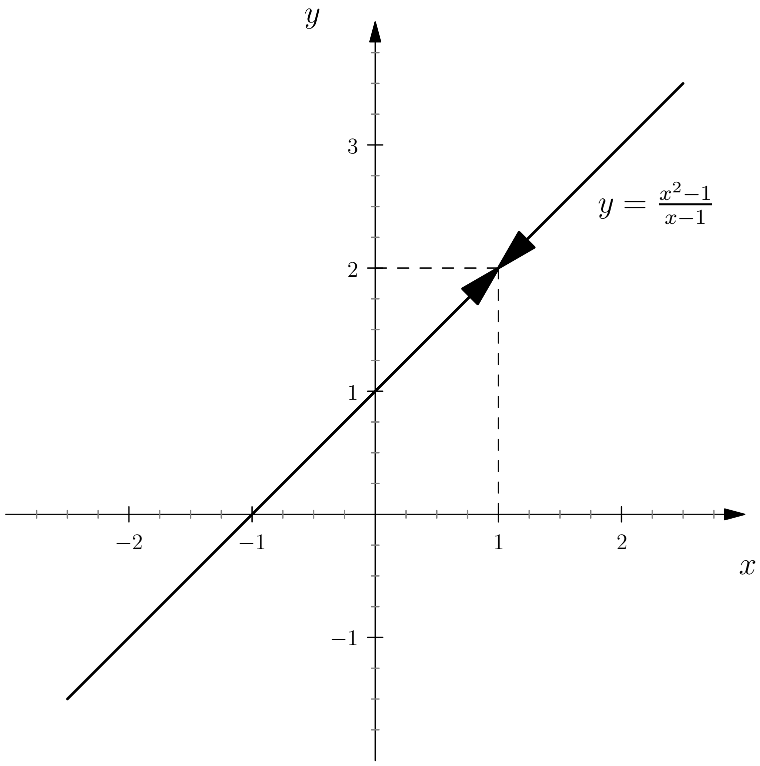

Рис. 3.2. Усувний розрив

Означення 22. Якщо в точці $x = x_0$ існують скінченні ліва та права границі функції $f(x)$ але вони не рівні між собою, то точка $x = x_0$ називається *точкою розриву першого роду.*

Приклад 36. Дослідити на неперервність функцію

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x^2 & \text{при} \quad x < 1; \\ 4 - x & \text{при} \quad x \geqslant 1. \end{cases}$$

Розв'язання. Дана функція визначена на всій числовій осі, тобто

$$x \in (-\infty, +\infty),$$

але на різніх проміжках вона визначена різними аналітичними виразами, причому функції $1 + x^2$ і $4 - x$ неперервні всюди, як елементарні функції. Тому точкою розриву може бути тільки точка $x = 1$, в якій змінюється аналитичний віраз. Знайдемо односторонні границі у цих точках.

Знайдемо ліву границю:

$$\lim_{x \to 1-0} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} 1 + x^2 = 1 + 1 = 2.$$

Аналогічно знаходиться права границя:

$$\lim_{x \to 1+0} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} 4 - x = 4 - 1 = 3.$$

Зауважимо, що права границя функції у точці $x = 1$ дорівнює частинному значенню функції у цієї точці:

$$f(1) = (4 - x)\big|_{x=1} = 4 - 1 = 3.$$

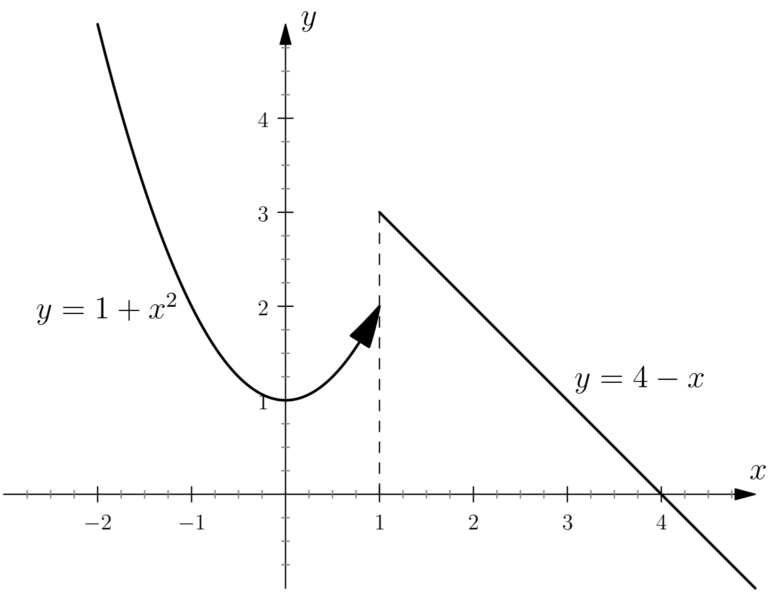

Рис. 3.3. Розрив першого роду

Отже, у точці $x = 1$ існують скінченні ліва та права границі функції і вони не рівні між собою. Таким чином, точка $x = 1$ — це *точка розриву першого роду* (рис. 3.3).

□

Приклад 37. Дослідити на неперервність функцію

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{при} \quad x < 0; \\ 1 - x & \text{при} \quad 0 < x \leqslant 1; \\ (x-1)^2 & \text{при} \quad 1 < x. \end{cases}$$

Розв'язання. Дана функція визначена на всій числовій осі, тобто

$$x \in (-\infty, +\infty),$$

але на різніх проміжках вона визначена різними аналітичними виразами, причому функції x, $1 - x$ і $(x-1)^2$ неперервні всюди, як елементарні функції. Тому точками розриву може бути тільки точки $x = 0$ і $x = 1$, в яких змінюється аналитичний віраз. Графік цієї функції наведено на рис. 3.4. Знайдемо односторонні границі у цих точках.

Розглянемо точку $x = 0$. Знайдемо ліву границю:

$$\lim_{x \to 0-0} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} x = 0.$$

Аналогічно знаходиться права границя:

$$\lim_{x \to 0+0} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} (1 - x) = 1 - 0 = 1.$$

Таким чином, у точці $x = 0$ існують скінченні ліва і права границі функції і вони не рівні між собою, отже, точка $x = 0$ це *точка розриву першого роду* функції $f(x)$, тому що в цій точці функція має скінченний стрибок.

Розглянемо точку $x = 1$:

$$\lim_{x \to 1-0} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} (1 - x) = 1 - 1 = 0.$$

$$\lim_{x \to 1+0} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} (x-1)^2 = (1-1)^2 = 0.$$

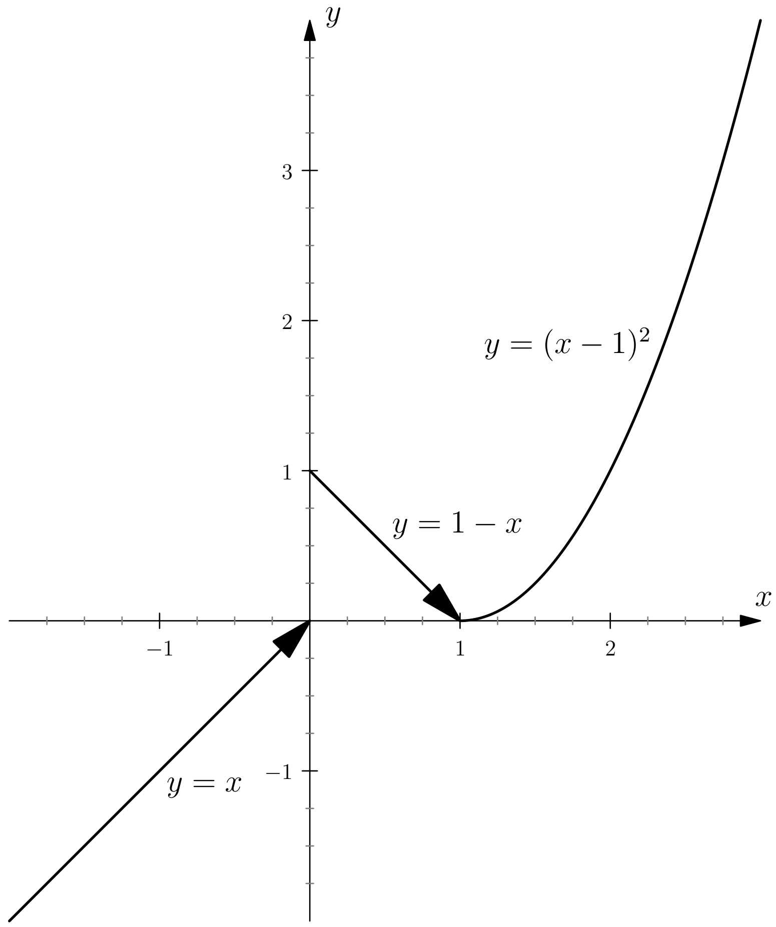

Рис. 3.4. Розрив першого роду

Звідси випливає, що функція $f(x)$ *неперервна* у точці $x = 1$.

$\square$

Означення 23. Точка $x = x_0$ називається *точкою розриву другого роду*, якщо в цій точці не існує або дорівнює нескінченности хоча б одна з односторонніх границь.

Приклад 38. Розглянемо функцію $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Ця функція невизначена в точці

$x = 0$. Обчислимо односторонні границі в цій точці:

$$\lim_{x \to +0} \frac{1}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = \frac{1}{+0} = +\infty,$$

$$\lim_{x \to -0} \frac{1}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = \frac{1}{-0} = -\infty.$$

Таким чином, функція $f(x) = \dfrac{1}{x}$ має в точці $x = 0$ розрив другого роду (рис. 3.5).

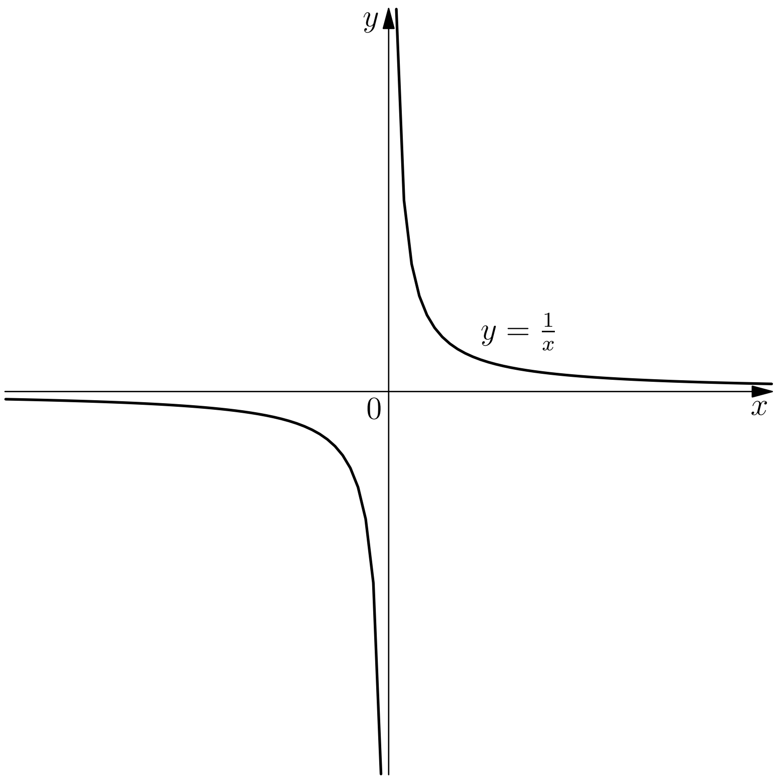

Рис. 3.5. Розрив другого роду

Приклад 39. Дослідити на неперервність функцію $f(x) = e^{1/x-2}$.

Розв'язання. Ця функція визначена скрізь крім точки $x = 2$. Обчислимо ліву та праву границі в цій точці.

$$\lim_{x\to 2-0} f(x) = \lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} e^{1/x-2} = \left\| \begin{matrix} x\to 2 \\ x<2 \\ x-2<0 \end{matrix} \right\| =$$

$$= e^{1/-0} = \frac{1}{e^{\infty}} = 0.$$

$$\lim_{x\to 2+0} f(x) = \lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} e^{1/x-2} = \left\| \begin{matrix} x\to 2 \\ x>2 \\ x-2>0 \end{matrix} \right\| =$$

$$= e^{1/+0} = e^{\infty} = \infty.$$

Отже, функція має в точці $x = 2$ розрив другого роду (рис. 3.6).

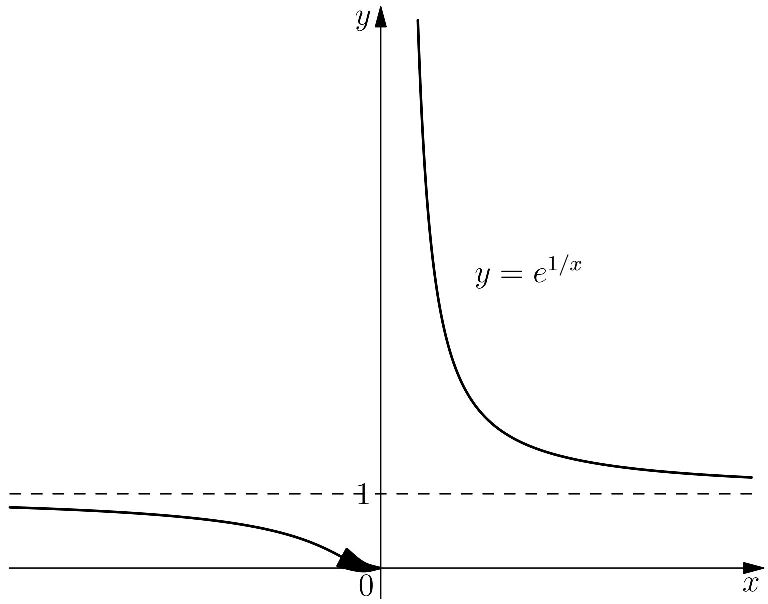

Рис. 3.6. Розрив другого роду

$\square$

Завдання для самостійної роботи

Дослідити функції на неперервність.

1. $f(x) = -\dfrac{3}{x}$.

2. $f(x) = \dfrac{3}{4 - x^2}$.

3. $f(x) = 2^{1/x}$.

4. $f(x) = \dfrac{1}{1 + 2^{1/x}}$.

5. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2}, & x < 2, \\ 0, & x \geqslant 2, \end{cases}$.

6. $f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \leqslant 1, \\ 3 - x^2, & x > 1. \end{cases}$.

7. $f(x) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ \cos x, & 0 \leqslant x < \dfrac{\pi}{2}, \\ 1 - x, & x \leqslant \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$.

4. Індивідуальні завдання

1. Знайти границі функцій.

1.1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-2x+1}{x^2+4x+1}$.

1.2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x-2}$.

1.3. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{2x^2-5x+1}$.

1.4. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{x^2-4x-5}$.

1.5. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+3x+1}{2x^2-3x-5}$.

1.6. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+5x+1}{x^2+2x-3}$.

1.7. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-x-2}{x^2-5x-4}$.

1.8. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+x-2}{2x^2-x+1}$.

1.9. $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2-16}{x^2+5x+2}$.

1.10. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x-3}{x^2-4}$.

1.11. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+x-3}{x^2+x-2}$.

1.12. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-3x-2}{x^2-3x+2}$.

1.13. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2-10x+3}{x^2-3x-3}$.

1.14. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3x^2-14x+5}{x^2-6x+5}$.

1.15. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2x^2-13x-7}{x^2-9x+14}$.

1.16. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2-5x-3}{x^2-5x+6}$.

1.17. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x^2-11x+5}{x^2-7x+10}$.

1.18. $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{2x^2-9x-18}{x^2-7x+6}$.

1.19. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{3x^2-17x-28}{x^2-9x+14}$.

1.20. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2-8x-3}{x^2-x-6}$.

1.21. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-x-6}{2x^2+x-6}$.

1.22. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-4}{x^2+x-6}$.

1.23. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{3x^2+x-2}{3x^2+4x+1}$.

1.24. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2x^2-5x-7}{3x^2+x-2}$.

1.25. $\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{x^2+2x-15}{2x^2+7x-15}$.

1.26. $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{2x^2+9x+4}{x^2-x-20}$.

1.27. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^2-5x+2}{x^2-4x+3}$.

1.28. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2+3x+2}{2x^2+5x+2}$.

1.29. $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-x-12}{x^2-2x-8}$.

1.30. $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2-x-12}{x^2+5x+6}$.

2. Знайти границі функцій.

2.1. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{2x^2+3x-2}{3x^2+2x-8}$.

2.2. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^2-5x+2}{2x^2-x-1}$.

2.3. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{-3x^2+10x-8}{3x^2-8x+4}$.

2.4. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2-x-3}{x^2-3x-4}$.

2.5. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{-x^2+7x-12}{2x^2-11x+15}$.

2.6. $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{-3x^2-8x+3}{x^2+x-6}$.

2.7. $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{2x^2-17x+35}{x^2-x-20}$.

2.8. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2-x-1}{-3x^2-x+4}$.

2.9. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2x^2-16x+1}{3x^2+5x-2}$.

2.10. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{3x^2+2x-1}{x^2-1}$.

2.11. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2+x-3}{3x^2+x+2}$.

2.12. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{4x^2+2x-3}{x^2+x-2}$.

2.13. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{3x^2-10x+8}{x^2-3x+2}$.

2.14. $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{3x^2-14x-5}{2x^2+6x+5}$.

2.15. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{3x^2-6x+2}{x^2+5x+6}$.

2.16. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{4x^2+9x+2}{x^2-3x-10}$.

2.17. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{5x^2+4x+1}{x^2-6x-7}$.

2.18. $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2+x-6}{2x^2+3x-7}$.

2.19. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{3x^2-4x-3}$.

2.20. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-6x+5}{2x^2-7x-18}$.

2.21. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-x-12}{x^2-4x+3}$.

2.22. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4x^2-7x-2}{x^2-7x+10}$.

2.23. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-x-12}{x^2+16}$.

2.24. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2+x+4}{2x^2+x-3}$.

2.25. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-3x+2}{-3x^2+4x-1}$.

2.26. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2+x-2}{x^2-2x+3}$.

2.27. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2+3x-14}{3x^2-7x+2}$.

2.28. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-10x+8}{2x^2-3x-2}$.

2.29. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2-2x-5}{x^2+5x+4}$.

2.30. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-3x-9}{3x^2-5x-10}$.

3. Знайти границі функцій.

3.1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3x-2}-2}{x^2-4}$.

3.2. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x+3}{\sqrt{3-2x}-3}$.

3.3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{3x^2}$.

3.4. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{x+6}-2}{x^2-4}$.

3.5. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{\sqrt{x+13}-4}$.

3.6. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{\sqrt{2x+1}-3}$.

3.7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4-x}-2}{x}$.

3.8. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-16}$.

3.9. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2-x}{1-\sqrt{x+3}}$.

3.10. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{5-\sqrt{x^2+9}}{x-4}$.

3.11. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{5x+1}-4}{x^2-9}$.

3.12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+3x}-\sqrt{4-3x}}{7x}$.

3.13. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{5x-1}-3}{x^2-2x}$.

3.14. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{2x-1}-1}$.

3.15. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{\sqrt{4x+1}-3}$.

3.16. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x^2-25}$.

3.17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{9+x}-3}{x^2+3x}$.

3.18. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3x+10}-4}{x^2-4}$.

3.19. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{9-x^2}{\sqrt{4x-3}-3}$.

3.20. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2-49}{\sqrt{2x+11}-5}$.

3.21. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{1+3x^2}-2}{x^2-x}$.

3.22. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x-2}-2}{x-3}$.

3.23. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{2x+6}}{x^2-5x}$.

3.24. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2x}-2}{x^3-8}$.

3.25. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{6x+1}-5}{x-4}$.

3.26. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt{2}}{x-3}$.

3.27. $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{2x-2}-4}{x^2-81}$.

3.28. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+25}-5}$.

3.29 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{3+x}}{5x}$.

3.30. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{\sqrt{5x+5}-5}$.

4. Знайти границі функцій.

4.1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-3x+1}{4+2x^2-3x^3}$.

4.2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-x^2+4}{5x^4+4x^2+1}$.

4.3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-2x+6}{2x^2-3x+6}$.

4.4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3x+2}{4+2x-6x^2}$.

4.5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^4-3x^3+1}{4+2x^2-3x^4}$.

4.6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+3x+7}{10x^3+5x^2-3}$.

4.7. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^5-2x+7}{3x^3+x^2-1}$.

4.8. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-4x^2+5}{7x^4-3x^2+3}$.

4.9. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-13x^2+7}{11x^3+5x-3}$.

4.10. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+2x-5}{x^4+5x^2-1}$.

4.11. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2 + x - 3}{x^2 - 3x - 2}$.

4.12. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2 - 4x + 1}{x^3 + 5x^2 - 7}$.

4.13. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3 - 8x + 2}{3x^3 - x - +4}$.

4.14. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^3 - 4x + 3}{2x^3 + x^2 - 1}$.

4.15. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3 + x - 5}{4 - x - 3x^3}$.

4.16. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3 - 5x + 1}{9x^5 + 5x^3 - 3x}$.

4.17. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^2 + 3x - 4}{2x^2 - 3x + 8}$.

4.18. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3 - 3x + 5}{7x^2 - 5x - 3}$.

4.19. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2 + 3x - 1}{3x^2 + 5x - 1}$.

4.20. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^5 + 4x + 7}{3x^5 - 5x^3 - 3}$.

4.21. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3 - 4x^2 + 7}{2x^2 - 5x - 6}$.

4.22. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4 - 2x - x^3}{3x^3 - 7x^2 + 1}$.

4.23. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^3 - 2x^2 + 7}{10x^2 + 5x - 4}$.

4.24. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{7x^4 + 3x^2 - 7}{4 + 3x - 5x^2}$.

4.25. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4 - 2x - 3x^2}{5x^2 - 3x + 1}$.

4.26. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^2 + 3x - 1}{2x^2 - 5x - 4}$.

4.27. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3 + 3x^2 + 5}{4 - 3x - 2x^3}$.

4.28. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2 - 6}{3x^2 - 7x + 1}$.

4.29. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2 - 2x + 1}{2x^3 + 3x^2 - 4}$.

4.30. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4 + 5x^2 - 7}{4 + 3x - 5x^4}$.

5. Знайти границі функцій.

5.1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{4 + 2x^2 - 3x^3}$.

5.2. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^3 - x^2 + 4}{5x^4 + 4x^2 + 1}$.

5.3. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2 - 2x + 6}{2x^3 - 3x + 6}$.

5.4. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3 - 3x + 2}{4 + 2x - 6x^2}$.

5.5. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{6x^3 - 3x^2 + 1}{4 + 2x^2 - 3x^4}$.

5.6. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2 + 3x + 7}{10x^3 + 5x^2 - 3}$.

5.7. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3-2x+7}{3x^4+x^2-1}$.

5.8. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4-4x^2+5}{7x^4-3x^2+3}$.

5.9. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3-13x^2+7}{11x^4+5x-3}$.

5.10. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^4+2x-5}{x^4+5x^2-1}$.

5.11. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3+x-3}{x^2-3x-2}$.

5.12. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^3-4x+1}{x^3+5x^2-7}$.

5.13. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3-8x+2}{3x^2-x-+4}$.

5.14. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2-4x+3}{2x^3+x^2-1}$.

5.15. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2+x-5}{4-x-3x^3}$.

5.16. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^5-5x+1}{9x^5+5x^3-3x}$.

5.17. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^3+3x-4}{2x^2-3x+8}$.

5.18. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-3x+5}{7x^2-5x-3}$.

5.19. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2+3x-1}{3x^3+5x-1}$.

5.20. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+4x+7}{3x^5-5x^3-3}$.

5.21. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3-4x^2+7}{2x^4-5x^2-6}$.

5.22. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4-2x-x^2}{3x^3-7x^2+1}$.

5.23. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^3-2x^2+7}{10x^4+5x^2-4}$.

5.24. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{7x^4+3x^2-7}{4+3x-5x^4}$.

5.25. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4-2x-3x^3}{5x^2-3x+1}$.

5.26. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^4+3x-1}{2x^2-5x-4}$.

5.27. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3+3x^2+5}{4-3x-2x^4}$.

5.28. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3-6}{3x^2-7x+1}$.

5.29. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4-2x^2+1}{2x^3+3x-4}$.

5.30. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4+5x^2-7}{4+3x-5x^3}$.

6. Знайти границі функцій.

6.1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4-3x+1}{4+2x^2-3x^3}$.

6.2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-x^2+4}{5x^3+4x^2+1}$.

6.3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-2x+6}{2x^2-3x+6}$.

6.4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3x+2}{4+2x-6x^3}$.

6.5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^4-3x^3+1}{4+2x^2-3x^3}$.

6.6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+3x+7}{10x^2+5x-3}$.

6.7. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-2x+7}{3x^3+x^2-1}$.

6.8. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5-4x^2+5}{7x^4-3x^2+3}$.

6.9. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-13x^2+7}{11x^3+5x-3}$.

6.10. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+2x-5}{x^2+5x-1}$.

6.11. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+x-3}{x^3-3x-2}$.

6.12. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-4x+1}{x^2+5x-7}$.

6.13. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-8x+2}{3x^3-x-+4}$.

6.14. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-4x^2+3}{2x^2+x-1}$.

6.15. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x-5}{4-x-3x^2}$.

6.16. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-5x+1}{9x^2+5x-3}$.

6.17. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+3x-4}{2x^3-3x+8}$.

6.18. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-3x+5}{7x^3-5x-3}$.

6.19. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+3x-1}{3x^2+5x-1}$.

6.20. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5+4x+7}{3x^2-5x-3}$.

6.21. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-4x^2+7}{2x^3-5x^2-6}$.

6.22. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4-2x-x^3}{3x^4-7x^2+1}$.

6.23. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3-2x^2+7}{10x^3+5x-4}$.

6.24. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2+3x-7}{4+3x^2-5x^4}$.

6.25. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4-2x-3x^2}{5x^3-3x+1}$.

6.26. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+3x-1}{2x^3-5x-4}$.

6.27. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4+3x^2+5}{4-3x-2x^3}$.

6.28. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-6}{3x^3-7x+1}$.

6.29. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3-2x^2+1}{2x^3+3x-4}$.

6.30. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+5x-7}{4+3x^2-5x^4}$.

7. Знайти границі функцій.

7.1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 5x}{\cos x-1}$.

7.2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 3x-1}{x\sin x}$.

7.3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 3x}{5x}$.

7.4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\sin x}{\operatorname{tg}^2 x}$.

7.5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} 2x}{5x}$.

7.6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\arcsin 2x}{\sin^2 x}$.

7.7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 4x}{x\operatorname{tg} 2x}$.

7.8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x}{\arcsin 2x}$.

7.9. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}^2 3x}{1-\cos 4x}$.

7.10. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin^2 x}{2x\sin x}$.

7.11. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}^2 4x}{\sin^2 3x}$.

7.12. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\sin 5x}{1-\cos 3x}$.

7.13. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x}{\operatorname{arctg} 2x}$.

7.14. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 4x}{\operatorname{tg}^2 5x}$.

7.15. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 3x}{4x}$.

7.16. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\sin^2 3x}{1-\cos 3x}$.

7.17. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{arctg}^2 5x}$.

7.18. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} 7x}{\operatorname{tg} 3x}$.

7.19. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 2x-1}{x\operatorname{tg} 2x}$.

7.20. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5x^2}{\sin 3x\operatorname{tg} 5x}$.

7.21. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 7x}{\operatorname{arctg} 3x}$.

7.22. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\operatorname{tg} 6x}{1-\cos 3x}$.

7.23. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 4x}{1-\cos 2x}$.

7.24. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\sin 2x}{1-\cos 4x}$.

7.25. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin^2 5x}{3x\sin 2x}$.

7.26. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\,\mathrm{tg}\,3x}{1-\cos 3x}$.

7.27. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 5x}{\mathrm{tg}^2\,6x}$.

7.28. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{arctg}^2\,3x}{3x\sin 3x}$.

7.29. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\,\mathrm{tg}\,2x}{1-\cos 4x}$.

7.30. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x\arcsin 2x}{\mathrm{arctg}^2\,2x}$.

8. Знайти границі функцій.

8.1. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{2x}$.

8.2. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+2}{2x-1}\right)^{2+x}$.

8.3. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+3}{x-3}\right)^{3x}$.

8.4. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+4}{4x-4}\right)^{x-4}$.

8.5. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{5x+1}{5x-1}\right)^{2x-1}$.

8.6. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+6}{6x-5}\right)^{3x+2}$.

8.7. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+5}{7x-1}\right)^{7x}$.

8.8. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{8x-1}{8x+3}\right)^{x-2}$.

8.9. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x-4}{9x+5}\right)^{-9x+1}$.

8.10. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x-1}{10x+3}\right)^{7-10x}$.

8.11. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+11}{11x-2}\right)^{x-3}$.

8.12. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{12x-3}{12x+5}\right)^{4x-1}$.

8.13. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x-7}{13x-2}\right)^{2-3x}$.

8.14. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x-14}{2x+7}\right)^{14x-1}$.

8.15. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x-3}{3x+8}\right)^{2-15x}$.

8.16. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2-3x}{7-5x}\right)^{16x}$.

8.17. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+2x}{5-2x}\right)^{7-2x}$.

8.18. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2-3x}{1+3x}\right)^{18x-2}$.

8.19. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5-19x}{7+19x}\right)^{x-4}$.

8.20. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{20x-9}{20+11}\right)^{7-3x}$.

8.21. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+21}{3x-7}\right)^{-5x}$.

8.22. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{11-2x}{2x-3}\right)^{22x+1}$.

8.23. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{6x-1}{6x-23}\right)^{2-3x}$.

8.24. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5-3x}{7+x}\right)^{5x-24}$.

8.25. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{x+25}\right)^{3x-7}$.

8.26. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{6-2x}{6x+5}\right)^{7x-1}$.

8.27. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-7}{2x+5}\right)^{3-2x}$.

8.28. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{8-7x}{5x+2}\right)^{3x-28}$.

8.29. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{7x+9}{2-5x}\right)^{6x-5}$.

8.30. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1-x}{9x-4}\right)^{3x+1}$.

Зауваження. При обчисленні границі функції мати на увазі таке:

1) границя *неперервної функції* дорівнює значенню цієї функції в розглянутій точці;

2) границя *суми*, *різниці*, *добутка* та *частки* функцій дорівнює відповідно суммі, різниці, добутку та частки *границь* цих функцій.

Ці правила можна використовувати завжди, якщо не виникає невизначеність. У випадку невизначеності необхідно врахувати поведінку функцій в околі разглянутій точці.

Наприклад, у випадку невизначеності типу $\left\|\frac{0}{0}\right\|$ необхідно вилучити нескінченно малу величину. Якщо агумент функції x прямує до певного значення a, то така нескінченно мала набуває вигляду $x-a$.

Для розкриття невизначеності типу $\left\|\frac{0}{0}\right\|$ у формулах, які містять тригонометричні функції зручно користуватися еквівалентними нескінченно малими.

Невизначенність $\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|$ або $\|\infty-\infty\|$ розкривається шляхом винесення за дужки величини, яка зростає найбільш швидко.

Приклад виконання індивідуального завдання

1.30. Знайти границю функції $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-x-12}{x^2+5x+6}$.

Розв'язання. Підставимо замість аргументу функції x число -3:

$$\lim_{x\to -3}\frac{x^2-x-12}{x^2+5x+6}=\frac{(-3)^2-(-3)-12}{(-3)^2+5(-3)+6}=\frac{9+3-12}{9-15+6}=\left\|\frac{0}{0}\right\|.$$

Одержали невизначеність $\left\|\dfrac{0}{0}\right\|$. Тому що x прямує до -3, то нескінченно малою є величина

$$x-(-3)=x+3.$$

Цей множник міститься у чисельнику і знаменнику досліджуємої функції. Виділимо цей множник у чисельнику і знаменнику:
Число $x=-3$ є коренем виразів, які містяться у чисельнику та знаменнику, тоді за наслідком теореми Безу ці многочлени діляться на $(x{+}3)$ без залишку:

$$\begin{array}{rl}
x^2 \;\; -x\;-12 & \big|\, x+3 \\
\underline{x^2+3x\qquad\quad} & \big|\,\overline{x-4} \\
-4x-12 & \\
\underline{-4x-12} & \\
0 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
x^2+5x+6 & \big|\, x+3 \\
\underline{x^2+3x\qquad} & \big|\,\overline{x+2} \\
2x+6 & \\
\underline{2x+6} & \\
0 &
\end{array}$$

Тепер кожен многочлен може бути подано у такому вигляді:

$$x^2-x-12=(x+3)\,(x-4)\,,$$
$$x^2+5x+6=(x+3)\,(x+2)\,.$$

Підставляючи ці розклади і скорочуючи на множник $(x+3)$, одержимо

$$\lim_{x\to -3}\frac{x^2-x-12}{x^2+5x+6}=\lim_{x\to -3}\frac{(x+3)\,(x-4)}{(x+3)\,(x+2)}=\lim_{x\to -3}\frac{(x-4)}{(x+2)}=\frac{-3-4}{-3+2}=\frac{-7}{-1}=7.$$

□

2.30. Знайти границю функції $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-3x-9}{3x^2-5x-10}$.

Розв'язання. Підставимо число 3 замість x:

$$\lim_{x\to 3}\frac{2x^2-3x-9}{3x^2-5x-10}=\frac{2\cdot 3^2-3\cdot 3-9}{3\cdot 3^2-5\cdot 3-10}=\frac{18-9-9}{19-15-10}=\frac{0}{-6}=0.$$

$\square$

3.30. Знайти границю функції $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{\sqrt{5x+5}-5}$.

Розв'язання. Підставемо число 4 замість x:

$$\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{5x+5}-5}=\frac{4-4}{\sqrt{5\cdot 4+5}-5}=\frac{0}{\sqrt{20+5}-5}=\frac{0}{5-5}=\left\|\frac{0}{0}\right\|.$$

Одержали невизначеність. Тут нескінченно малою є величина $(x-4)$. Але вона знаходиться під знаком радикалу. Щоб виділити множник $x-4$, скористуємося формулою різниці квадратів:

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b),$$

Тоді маємо

$$\left(\sqrt{5x+5}-5\right)\left(\sqrt{5x+5}+5\right)=\left(\sqrt{5x+5}\right)^2-5^2=5x+5-25=5x-20=5(x-4).$$

Таким чином, помноживши чисельник і знаменник на спряженне $\left(\sqrt{5x+5}+5\right)$, одержимо

$$\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)\left(\sqrt{5x+5}+5\right)}{\left(\sqrt{5x+5}-5\right)\left(\sqrt{5x+5}+5\right)}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)\left(\sqrt{5x+5}+5\right)}{5(x-4)}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{\left(\sqrt{5x+5}+5\right)}{5}=\frac{\left(\sqrt{5\cdot 4+5}+5\right)}{5}=\frac{\left(\sqrt{25}+5\right)}{5}=\frac{5+5}{5}=2.$$

$\square$

4.30. Знайти границю функції $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4+5x^2-7}{4+3x-5x^4}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^4+5x^2-7}{4+3x-5x^4} = \left\|\frac{\infty}{\infty}\right\| = \lim_{x\to\infty} \frac{x^4\left(1+\dfrac{5}{x^2}-\dfrac{7}{x^4}\right)}{x^4\left(\dfrac{4}{x^4}+\dfrac{3}{x^3}-5\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1+\dfrac{5}{x^2}-\dfrac{7}{x^4}}{\dfrac{4}{x^4}+\dfrac{3}{x^3}-5} = \frac{1+\dfrac{5}{\infty}-\dfrac{7}{\infty}}{\dfrac{4}{\infty}+\dfrac{3}{\infty}-5} = \frac{1+0-0}{0+0-5} = -\frac{1}{5}.$$

$\square$

5.30. Знайти границю функції $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4+5x^2-7}{4+3x-5x^3}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^4+5x^2-7}{4+3x-5x^3} = \left\|\frac{\infty}{\infty}\right\| = \lim_{x\to\infty} \frac{x^4\left(1+\dfrac{5}{x^2}-\dfrac{7}{x^4}\right)}{x^3\left(\dfrac{4}{x^3}+\dfrac{3}{x^2}-5\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} x \cdot \frac{1+\dfrac{5}{x^2}-\dfrac{7}{x^4}}{\dfrac{4}{x^3}+\dfrac{3}{x^2}-5} = \lim_{x\to\infty} x \cdot \lim_{x\to\infty} \frac{1+\dfrac{5}{x^2}-\dfrac{7}{x^4}}{\dfrac{4}{x^3}+\dfrac{3}{x^2}-5} =$$

$$= \infty \cdot \frac{1+\dfrac{5}{\infty}-\dfrac{7}{\infty}}{\dfrac{4}{\infty}+\dfrac{3}{\infty}-5} = \infty \cdot \frac{1+0-0}{0+0-5} = \infty \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) = -\infty.$$

$\square$

6.30. Знайти границю функції $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+5x-7}{4+3x^2-5x^4}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+5x-7}{4+3x^2-5x^4}=\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(1+\dfrac{5}{x}-\dfrac{7}{x^2}\right)}{x^4\left(\dfrac{4}{x^4}+\dfrac{3}{x^2}-5\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1+\dfrac{5}{x}-\dfrac{7}{x^2}}{\dfrac{4}{x^4}+\dfrac{3}{x^2}-5}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{1+\dfrac{5}{x}-\dfrac{7}{x^2}}{\dfrac{4}{x^4}+\dfrac{3}{x^2}-5}=$$

$$=\frac{1}{\infty}\cdot\frac{1+\dfrac{5}{\infty}-\dfrac{7}{\infty}}{\dfrac{4}{\infty}+\dfrac{3}{\infty}-5}=0\cdot\frac{1+0-0}{0+0-5}=0\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)=0.$$

□

7.30. Знайти границю функції $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x\arcsin 2x}{\operatorname{arctg}^2 2x}$.

Розв'язання. Підставимо замість аргументу функції x число 0:

$$\lim_{x\to0}\frac{3x\arcsin 2x}{\operatorname{arctg}^2 2x}=\frac{3\cdot0\cdot\arcsin(2\cdot0)}{\operatorname{arctg}^2(2\cdot0)}=\frac{0\cdot\arcsin 0}{\operatorname{arctg}^2 0}=\left\|\frac{0}{0}\right\|.$$

тому що $x\to0$, тоді скористуємось еквівалентними нескінченно малими:

$$\arcsin x\sim x,$$
$$\operatorname{arctg} x\sim x.$$

Тоді

$$\arcsin 2x\sim 2x,$$
$$\operatorname{arctg} 2x\sim 2x.$$

Таким чином, маємо

$$\lim_{x\to0}\frac{3x\arcsin 2x}{\operatorname{arctg}^2 2x}=\lim_{x\to0}\frac{3x\cdot2x}{(2x)^2}=\lim_{x\to0}\frac{3}{2}=\frac{3}{2}.$$

□

8.30. Знайти границю функції $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1-x}{9x-4}\right)^{3x+1}$.

Розв'язання. Обчислимо границю показника й основи:

$$\lim_{x\to\infty}(3x+1)=\infty,$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1-x}{9x-4}=\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(\dfrac{1}{x}-1\right)}{x\left(9-\dfrac{4}{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{x}-1}{9-\dfrac{4}{x}}=\frac{\dfrac{1}{\infty}-1}{9-\dfrac{4}{\infty}}=\frac{0-1}{9-0}=-\frac{1}{9}.$$

Звідси випливає

$$\lim_{x\to\infty}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1-x}{9x-4}\right)^{3x+1}=\left(-\frac{1}{9}\right)^{\infty}=0.$$

$\square$

Список літератури

[1] Шкіль М. І. Математичний аналіз: У 2 ч. Ч. 1/ М. І. Шкіль. — К.: Вища шк., 2005. — 447 с.

[2] Тимченко Г. М. Стислий курс вищої математики, частина 1: навч.посіб./ Г. М. Тимченко, О. В. Одинцова, Н. О. Кириллова, О. С. Мазур. — Київ: «Кондор», 2022. — 188 с.

Зміст

Навчальне видання

Методичні вказівки для самостійної роботи за темою «Границя функції однієї змінної» з навчальної дисципліни «Вища математика» для студентів технічних спеціальностей ВІТВ

Укладачі:
ВЕРЕТЕЛЬНИК Віктор Володимирович
ТИМЧЕНКО Галина Миколаївна
ВЕРЕТЕЛЬНИК Олег Вікторович

Відповідальний за випуск проф. В. Н. Бурлаєнко
Роботу до видання рекомендовав проф. Д. В. Бреславський

В авторській редакції

План 2022 р., поз. 355

Гарнітура Times New Roman Ум. друк. арк. 4.

Видавничий центр НТУ “ХПІ”
Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 5478 від 21.08.2017 р.
61002, Харків, вул. Кирпичова, 2.

Електронна версія