



Міністерство освіти і науки України
УКРАЇНЬСЬКА ІНЖЕНЕРНО-ПЕДАГОГІЧНА АКАДЕМІЯ

Кафедра вищої та прикладної математики

О. М. Литвин, Ю. І. Першина, О. О. Литвин, О. П. Нечуйвітер

Інноваційні технології: нові інформаційні оператори

Навчально-методичний посібник

Харків

2018

Міністерство освіти і науки України
УКРАЇНСЬКА ІНЖЕНЕРНО-ПЕДАГОГІЧНА АКАДЕМІЯ
Кафедра вищої та прикладної математики

О. М. Литвин, Ю. І. Першина, О. О. Литвин, О. П. Нечуйвітер

ІННОВАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ: НОВІ ІНФОРМАЦІЙНІ ОПЕРАТОРИ

Навчально-методичний посібник

*Для студентів освітнього ступеня «магістр»
денної та заочної форм навчання спеціальності
113 Прикладна математика*

Затверджено
Науково-методичною радою
Української інженерно-
педагогічної академії
протокол № 7
від 03.05.2018 р.

Харків
2018

УДК 004.42:51(075.8)

Литвин О.М.

Інноваційні технології: нові інформаційні оператори : навч.-метод. посіб. для студ. ОС «магістр» денної та заоч. форми навч. спец. 113 Прикл. матем / О. М. Литвин, Ю. І. Першина, О. О. Литвин, О. П. Нечуйвітер; Укр. інж.-пед. акад. – Харків : [б. в.], 2018. – 330 с.

Цей посібник містить конспект лекцій з курсу «Інноваційні технології: нові інформаційні оператори»; розв'язання типових прикладів; може бути використаний аспірантами, магістрами та спеціалістами всіх інженерних та інженерно- педагогічних спеціальностей

Рецензент: О. О. Литвин, д-р фіз.-мат. наук, доц.

Відповідальний за випуск: О. М. Литвин, д-р фіз.-мат. наук, проф.

Зміст

Передмова	8
Глава 1. Приклади інженерних задач, які приводять до інтерлінації та інтерфлетації	11
1.1. Означення інтерлінації та інтерфлетації	11
1.2. Приклади інженерних задач, які приводять до інтерлінації	12
1.2.1. Картографія дна моря за даними гідролокації	12
1.2.2. Наближене відтворення поверхні космічного тіла за даними радіолокації	13
1.2.3. Планування експерименту для відновлення $f(x, y)$	14
1.2.4. Проектування корпусів літаків, суден, автомобілів	15
1.3. Приклади інженерних задач, які приводять до інтерфлетації	16
1.3.1. Наближення функцій трьох змінних за допомогою проєкцій або томограм, що надходять з комп'ютерного томографа	16
1.3.2. Картографія поверхні космічного тіла за її зображенням на системі смуг	17
Запитання і вправи для самостійної роботи	18
Глава 2. Інтерлінація функцій двох змінних на M ($M \geq 2$) прямих зі збереженням класу $C^r(\mathbf{R}^2)$	19
2.1. Узагальнена формула Даламбера	19
2.2. Інтерполяційні оператори Лагранжа та Ерміта	30
2.2.1. Інтерполяційні оператори Лагранжа та Ерміта однієї змінної	30
2.2.2. Інтерполяційний оператор Ерміта для $f(\bar{x}, y)$ за змінною y	31
2.3. Інтерлінація функцій на M ($M \geq 2$) паралельних прямих в \mathbf{R}^2 зі збереженням класу $C^p(\mathbf{R}^2)$	35
2.4. Раціональна інтерлінація $f(x, y)$ на системі прямих зі збереженням класу $C^r(\mathbf{R}^2)$	40
2.5. Узагальнена формула Даламбера для функцій трьох змінних	44
Запитання і вправи для самостійної роботи	48
Глава 3. Інтерлінація функцій двох змінних на M ($M \geq 2$) прямих без збереження класу $C^r(\mathbf{R}^2)$	49
3.1. Раціональна інтерлінація на M перетинних прямих без збереження класу $C^r(\mathbf{R}^2)$	49
3.2. Поліноміальна інтерлінація на системі взаємно перпендикулярних прямих	55

3.2.1.	Поліноміальна інтерлінація на системі взаємно перпендикулярних прямих	55
3.2.2.	Приклади	61
3.2.3.	Найкраща в $L_1[-1, 1]^2$ лагранжева поліноміальна інтерлінація на системі взаємно перпендикулярних прямих	64
3.3.	Поліноміальна інтерлінація на M довільних прямих. Приклади	67
3.4.	Кусково-поліноміальна інтерлінація	71
3.4.1.	Сплайн-інтерлінація. Загальні твердження . . .	71
3.4.2.	Сплайн-інтерлінація на лініях ректангуляції . .	79
3.4.3.	Сплайн-інтерлінація на лініях триангуляції . . .	85
3.4.4.	Інтерлінація на прямокутному трикутнику з криволінійною гіпотенузою. Приклади	92
3.4.5.	Інтерлінація на прямих, паралельних координатним осям та на границі довільної області $G \subset \mathbf{R}^2$	98
3.5.	Тригонометрична інтерлінація	100
3.5.1.	Оператори тригонометричної інтерлінації	100
3.5.2.	Періодична сплайн-інтерлінація	106
3.6.	Інтерлінація за допомогою R -функцій	111

Запитання і вправи для самостійної роботи **115**

Глава 4. Метод зведення до систем звичайних лінійних (ЛІДР) та нелінійних (НІДР) інтегродиференціальних рівнянь **116**

4.1.	Метод ЛІДР. Перша крайова задача для еліптичного оператора $2m$ -го порядку	116
4.1.1.	Область G -квадрат	117
4.1.2.	G – складена область	126
4.2.	Застосування інтерлінації на лініях триангуляції до розв'язання задачі Діріхле для рівняння Пуассона . . .	128
4.2.1.	Структура наближеного розв'язку задачі	128
4.2.2.	Рівняння Ейлера. Випадок $a = 1, b = 1, c = 0, f = 2$	134
4.2.3.	Приклади наближених розв'язків	138
4.3.	Оцінка швидкості збіжності методу ЛІДР	143
4.4.	Про чисельну реалізацію методу ЛІДР	147
4.4.1.	Сплайн-інтерполяція на основі інтерлінації . . .	147
4.4.2.	Схеми МСЕ, що мають точність методу ЛІДР .	150
4.5.	Метод НІДР. Задача Діріхле для рівняння Пуассона. .	154
4.6.	Метод НІДР. Бігармонійне рівняння. 1-ша крайова задача	165

Запитання і вправи для самостійної роботи **172**

Глава 5. Задача радонівської комп'ютерної томографії	173
5.1. Деякі особливості томографічних методів	173
5.2. Явні формули для поліномів, що відновлюють функції за допомогою даних Радона (проекцій)	181
5.2.1. Поліноми, що відновлюють функції $f(x_1, x_2)$ за їхніми проекціями на M ($M \geq 2$) прямих	181
5.2.2. Поліноми, що відновлюють $f(x)$, $x \in [0, 1]^3$ за їхніми проекціями на M ($M \geq 3$) прямих у \mathbf{R}^3	185
5.3. Оператори з коефіцієнтами Фур'є $a_0(f), \dots, a_n(f)$, які інтерполюють функцію $f(x)$ у точках $x = x_1, \dots, x = x_r$	188
5.4. Оператори з коефіцієнтами Фур'є $a_{ij}(f)$, $i, j \in \{0, \dots, n\}$, які інтерполюють функцію $f(x, y)$ у r^2 точках $x = x_k, y = y_l, k, l \in \{1, \dots, r\}$	190
5.5. Оператори сплайн-інтерлінації із заданими проекціями на системі прямих, паралельних осям координат	191
5.5.1. Загальні твердження	191
5.5.2. Оператори сплайн-інтерлінації з даними проекціями на прямих, паралельних осям координат	193
Запитання і вправи для самостійної роботи	196
Глава 6. Кубатурні формули	197
6.1. Кубатурні формули на основі інтерлінації функцій	197
6.1.1. Кубатурні формули на основі сплайн-інтерполяції підінтегральної функції	197
6.1.2. Кубатурні формули для складених областей на основі інтерлінації підінтегральної функції	202
6.2. Кубатурні формули для коефіцієнтів Фур'є з використанням інтерлінації функцій	206
6.2.1. Квадратурні формули для коефіцієнтів Фур'є	206
6.2.2. Кубатурні формули для коефіцієнтів Фур'є на основі операторів сплайн-інтерлінації	208
6.3. Приклади.	210
Запитання і вправи для самостійної роботи	214
Глава 7. Інтерфлетация функцій	215
7.1. Раціональна інтерфлетация на M площинах в \mathbf{R}^n , $n \geq 3$	215
7.1.1. Інтерфлетация функцій. Означення	215
7.1.2. Раціональна інтерфлетация на M площинах без збереження класу $C^r(\mathbf{R}^n)$, $n \geq 3$	216
7.2. Поліноміальна інтерфлетация функцій n , $n \geq 3$ змінних зі слідами на системі площин, паралельних координатним	219
7.2.1. Інтерфлетация на системі n ($n \geq 3$) площин, паралельних координатним	219
7.2.2. Лагранжева інтерфлетация на системі площин, паралельних координатним	225

7.3. Оператори сплайн-інтерфлетації функцій n , $n \geq 3$ змінних зі слідами на системі площин, паралельних координатним	226
7.4. Економні схеми сплайн-інтерполяції функцій трьох змінних, побудовані за допомогою інтерфлетації	227
7.5. Інтерфлетація на симплексі в \mathbf{R}^3	237
7.6. Інтерфлетація на симплексі в \mathbf{R}^3 з однією криволінійною гранню	238
7.7. Інтерфлетація на паралелепіпеді в \mathbf{R}^3 з однією криволінійною гранню	240
7.8. Інтерфлетація на системі площин, паралельних координатним, та на границі довільної області $G \subset \mathbf{R}^3$	240
7.9. Картографія поверхні за даними її радіолокації на системі смуг.	242
7.10. Рациональна інтерфлетація $f(x, y, z)$ на системі площин зі збереженням класу $C^r(\mathbf{R}^3)$	245
Запитання і вправи для самостійної роботи	247
Глава 8. Блендинг-апроксимація функцій	248
8.1. Апроксимація функцій двох змінних операторами, що діють на одну змінну. Загальні твердження	248
8.2. Апроксимація періодичних функцій двох змінних операторами Фур'є, що діють на одну змінну	252
8.2.1. Класична та мішана апроксимації сумами Фур'є	252
8.2.2. Блендинг-апроксимація з використанням коефіцієнтів Фур'є	257
8.3. Мішана апроксимація операторами Фейєра	260
8.4. Мішана апроксимація поліномами Бернштейна	264
8.5. Наближення $g(x, y) \in C[0, 1]^2$ кусково-сталими	268
8.5.1. Кусково-сталі сплайни інтерполяційного типу двох змінних	268
8.5.2. Апроксимація $g(x, y)$ кусково-сталими з використанням середніх	277
8.5.3. Нелінійна апроксимація $g(x, y)$ кусково-сталими	286
8.6. Класична та мішана апроксимації вейвлетами Хаара	287
8.7. Оператори двосторонньої апроксимації	293
8.8. Узагальнений метод найменших квадратів	296
8.8.1. Похибка наближення диференційовних функцій лійними сплайнами в нормі $W_2^1[0, 1]$	296
8.8.2. Узагальнений метод найменших квадратів для наближення функцій двох змінних	302
Запитання і вправи для самостійної роботи	304

Глава 9. Оптимальні координатні функції в методі скінченних елементів	305
9.1. Задача Діріхле для рівняння Пуассона. Прямокутні елементи	305
9.2. Задача Діріхле для рівняння Пуассона. Трикутні елементи	308
Запитання і вправи для самостійної роботи	319
Список рекомендованої літератури	320
Умовні позначення	329

Передмова

Аналіз сучасної спрямованості досліджень у галузі обчислювальної математики дає змогу дійти такого висновку: дедалі більше учених присвячують свої дослідження обчислювальним методам у теорії функцій двох і більше змінних. При цьому значна увага приділяється оптимізації методів наближення функцій багатьох змінних заданих явно, або таких, що є розв'язками диференціальних рівнянь. Інформація, яка при цьому використовується для побудови операторів наближення, включає: значення наближуваної функції та її частинних похідних до фіксованого порядку в заданій системі точок; сліди наближуваної функції та сліди деякого набору диференціальних операторів від неї (зокрема, її частинних похідних, її нормальних похідних) до фіксованого порядку на заданій системі ліній (для функцій двох і більшого числа змінних) та поверхонь (для функцій трьох і більшого числа змінних); дані Радона, які надходять з компютерного томографа (наприклад, лінійні інтеграли вздовж заданої системи ліній або поверхонь від об'ємної щільності досліджуваного тіла) тощо.

У задачах, які при цьому виникають, треба вміти обробляти математично серію малюнків (експериментальних даних), отриманих тим чи іншим способом, які можуть бути: слідами функції двох і більше змінних на заданій системі ліній; рентгенівськими знімками тривимірного об'єкта, отриманими в тих чи інших напрямках; зображеннями внутрішньої структури об'єкта в заданій системі площин, що перетинають цей об'єкт (наприклад, такі малюнки - томограми - використовують лікарі, які діагностують захворювання за допомогою комп'ютерного томографа); зображеннями приповерхневого шару планети Земля за сейсмічного методу її дослідження тощо. Мета такої обробки - отримання значень деяких характеристик досліджуваного об'єкта в точках, що не лежать на лініях, площинах, поверхнях, використаних дослідником при отриманні експериментальних даних.

Отже, існує важливе з практичного та теоретичного погляду коло задач, які без сумніву повинні бути включені в сучасні курси методів обчислень. Коротко їх можна схарактеризувати так: у цих задачах нетрадиційною є не тільки вхідна інформація, а й способи її отримання, зберігання і надання. Ефективне розв'язання цих задач потребує нових математичних підходів, які б враховували не тільки існуючі математичні методи, а й можливості їх реалізації на ПЕОМ і навіть те, в якому вигляді задається вхідна інформація (у вигляді слідів функцій, знімків, томограм тощо).

У цьому посібнику досліджуються в основному методи обчислень, що не увійшли в жоден з підручників з методів обчислень і які з високою точністю дають розв'язок деяких з наведених вище задач.

Основою цієї книги є побудова, дослідження та деякі застосування операторів, що відновлюють (можливо наближено) функції n ($n \geq 2$) змінних за їхніми слідами та слідами їхніх нормальних похідних до заданого порядку N на M ($M > 1$) m -вимірних ($0 \leq m < n$) поверхнях в \mathbf{R}^n . За $m = 0$ ці оператори називають інтерполяційними, за $m = 1$

- інтерлінаційними (від англ. *inter* – між, *line* – лінія), за $m > 1, n \geq 3$
 - інтерфлетаційними (від англ. *inter* – між, *flat* – плоска поверхня).
 Операцію побудови зазначених операторів називатимемо, відповідно, інтерлінацією або інтерфлетацією. Відмінності між інтерполяцією, інтерлінацією та інтерфлетацією наведені в табл.1:

Таблиця 1.

Метод наближення	Спосіб задання інформації
Інтерполяція функцій $n(n \geq 1)$ змінних	Значення наближуваної функції та її похідних (до фіксованого порядку) у деякій системі точок
Інтерлінація функцій $n(n \geq 2)$ змінних	Сліди наближуваної функції та її нормальних похідних (до фіксованого порядку) на деякій системі ліній
Інтерфлетація функцій $n(n \geq 3)$ змінних	Сліди наближуваної функції та її нормальних похідних (до фіксованого порядку) на деякій системі поверхонь

Інтерлінація є природним узагальненням інтерполяції, тому користуватимемось при дослідженні інтерлінаційних або інтерфлетаційних операторів термінологією теорії інтерполяції з заміною закінчення "поляція" на "лінація" або "флетація" без додаткових пояснень.

Для кращого викладу матеріалу, у посібнику наведено вибрані результати класичної теорії інтерполяції та апроксимації функцій, варіаційних методів розв'язання крайових задач, елементи функціонального аналізу тощо. Цей навчальний посібник можна розглядати, як доповнення до книг Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. Численные методы. – М.; СПб., 2001; І.П. Гаврилюк, В.Л. Макаров Методи обчислень. Підручник. У 2 ч.- К.: Вища шк., 1995 та ін.

Матеріал умовно можна поділити на чотири частини.

Перша частина (розд. 2, 3, 7) містить конкретні методи й алгоритми побудови операторів інтерлінації та інтерфлетації функцій двох і більшого числа змінних, а також дослідження залишкових членів наближення диференційовних функцій за допомогою цих операторів. Тут розрізняють інтерлінацію (інтерфлетацію) зі збереженням (розд. 2) та інтерлінацію (інтерфлетацію) без збереження (розд. 3, 7) класу диференційовності $C^r(D)$, $r \in \mathbf{N}$, $D \subseteq \mathbf{R}^n$, якому належить наближувана функція.

Другу частину (розд. 4 – 6) присвячено деяким застосуванням інтерлінації та інтерфлетації функцій. Зокрема, розд. 4 містить формулювання основних положень методів ЛІДР та НІДР, які зводять крайові задачі для диференціальних рівнянь з частинними похідними до систем звичайних лінійних або нелінійних інтегродиференціальних рівнянь (останні дали назви обом методам). Розглянуто методику поширення цих методів на випадок областей складеної форми, їх обґрунтування і деякі аспекти їх обчислювальної реалізації.

У розд. 5 проаналізовано деякі оператори комп'ютерної томографії, побудовані з використанням інтерлінації функцій. У загальному алгоритмі побудови таких операторів істотно використовуються оператори інтерполяції функцій однієї та двох змінних із даними коефіцієнтами Фур'є та оператори інтерлінації на вказаних лініях.

У розд. 6 розглянуто мішані кубатурні формули і кубатурні формули для коефіцієнтів Фур'є функцій двох змінних, що використовуються, наприклад, у цифровій обробці сигналів. Приділено увагу також побудові кубатурних формул для областей складеної форми.

У третій частині (розд. 8) проаналізовано оператори мішаної апроксимації функцій двох та трьох змінних, що будуються з використанням операторів апроксимації, які діють на одну змінну.

Четверта частина (розд. 9) присвячена викладу основ оптимального методу скінчених елементів (ОМСЕ), у якому знаходяться з умови мінімуму функціоналу не тільки невідомі параметри (як у класичному МСЕ), а й базисні функції однієї змінної та координати вузлів елементів.

Для детальнішого ознайомлення з інтерлінацією та інтерфлетацією функцій зверніться до монографії О.М. Литвина (2002 р.).

Наведені твердження, леми, теореми засвідчують високу точність операторів інтерлінації та інтерфлетації і вказують на їх тісний зв'язок із класичними операторами інтерполяції та апроксимації функцій багатьох змінних. Побудовані за їх допомогою оператори сплайн-інтерполяції та сплайн- або вейвлет- апроксимації функцій двох і більшого числа змінних тощо потребують значно меншого числа експериментальних даних для досягнення заданої точності порівняно з класичними операторами відповідно сплайн-інтерполяції та сплайн- або вейвлет-апроксимації.

Це значить, що сучасні курси обчислювальних методів слід вивчати обов'язково у порівнянні з методами, які базуються на використанні інтерлінації та інтерфлетації функцій, мішаної апроксимації.

Авторові невідомі ні в нашій країні, ні за кордоном навчальні посібники, присвячені дослідженню зазначених задач з єдиних позицій.

Цим посібником можуть скористатися викладачі під час підготовки курсів обчислювальних методів, комп'ютерної графіки, комп'ютерної томографії, цифрової обробки сигналів, рівнянь математичної фізики тощо. Він стане в пригоді при формулюванні тем курсових та дипломних робіт у вказаних вище курсах, при підготовці спецкурсів з обчислювальної та прикладної математики, магістерських робіт та кандидатських дисертацій.

Безсумнівно, насамперед він адресується студентам, які вивчають зазначені курси і спецкурси. Автор сподівається, що цей посібник сприятиме підвищенню рівня знань студентів з методів обчислень.

Відгуки та побажання просимо надсилати на кафедру прикладної математики Української інженерно-педагогічної академії, вул. Університетська, 16, Харків, Україна, 61003; e-mail: academ@kharkov.ua.

Глава 1. Приклади інженерних задач, які приводять до інтерлінації та інтерфлетації

1.1. Означення інтерлінації та інтерфлетації

Хай $n, M \in \mathbf{N}; m, N \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ – задані числа; $\Pi_k, k = \overline{1, M}$ – задані m -вимірні ($0 \leq m < n$) множини в \mathbf{R}^n ; $\varphi_{k,s}(x) \Big|_{\Pi_k} = L_{k,s}f(x) \Big|_{\Pi_k}, k = \overline{1, M}, s = \overline{0, N}$ – задані сліди деякої послідовності операторів $L_{k,s}f(x), k = \overline{1, M}, s = \overline{0, N}$ на множинах $\Pi_k, k = \overline{1, M}$. Частото $L_{k,0}f(x) = f(x)$. Функція f може бути невідомою. Оператори $L_{k,s}f(x)$ можуть бути частинними похідними або нормальними похідними $L_{k,s}f(x) \Big|_{\Pi_k} = \frac{\partial^s f}{\partial \nu_k^s} \Big|_{\Pi_k}, k = \overline{1, M}, s = \overline{0, N}$ (тут ν_k – вектор нормалі до Π_k , якщо $n \geq 2, 1 \leq m \leq n - 1$). Диференціальні оператори $L_{k,s}f$ можуть мати також більш загальний вигляд.

Означення 1. Оператори

$$O(\{\varphi_{k,s}\}; x) = O(\{L_{k,s}\}; \{\Pi_k\}; \{\varphi_{k,s}\}; x)$$

називатимемо *операторами інтерфлетації*, якщо

$$L_{\ell,q}O(\{\varphi_{k,s}\}; x) \Big|_{\Pi_\ell} = \varphi_{\ell,q}(x) \Big|_{\Pi_\ell}, \ell = \overline{1, M}; q = \overline{0, N}.$$

Очевидно, оператори $O(\{\varphi_{k,s}\}; x)$ відновлюють (можливо наближено) функції $f(x)$ багатьох змінних за допомогою вказаної інформації. У випадку $m = 0$ множини $\Pi_k \in \mathbf{R}^n$ є точками в \mathbf{R}^n і сліди $\varphi_{k,s}(x) \Big|_{\Pi_k}$ є значеннями функції $f(x)$ та її похідних в точках Π_k . Тоді оператори $O(\{\varphi_{k,s}\}; x)$ називають *інтерполяційними операторами* на M точках. Вони є об'єктом досліджень багатьох авторів і знаходять застосування в різних розділах науки.

Якщо $m = 1, n \geq 2$, то множини Π_k є лініями в \mathbf{R}^n і $O(\{\varphi_{k,s}\}; x)$ називатимемо *операторами інтерлінації*. Для них різні автори використовують інші назви (наприклад, оператори мішаної інтерполяції).

У випадку $2 \leq m \leq n - 1, n \geq 3$, $O(\{\varphi_{k,s}\}; x)$ будемо називати операторами інтерфлетації.

Якщо оператори $O(\{\varphi_{k,s}\}; x)$ лінійно залежать від слідів $\varphi_{k,s}(x), k = \overline{1, M}, s = \overline{1, N}$, тобто

$$O(\{\varphi_{k,s}\}; x) = \sum_{k=1}^M \sum_{s=0}^N L_{k,s}(\varphi_{k,s}; \{\Pi_k\}; x) h_{k,s}(x),$$

де $h_{k,s}(x) = h_{k,s}(\{\Pi_k\}; \{L_{k,s}\}; x)$ – деякі допоміжні функції, що не залежать від наближуваної функції $f(x)$, а залежать лише від параметрів геометричних об'єктів $\{\Pi_k\}$ і від типу операторів $L_{k,s}$, сліди

яких $\varphi_{k,s}$ використовують для наближення, то такі оператори називають лінійними операторами інтерфлетації (інтерлінації, інтерполяції). В іншому випадку їх називають нелінійними операторами інтерфлетації, або просто нелінійними інтерфлетантами (інтерлінантами, інтерполантатами).

Якщо допоміжні функції $h_{k,s}(\{P_k\}; \{L_{k,s}f\}; x)$ є раціональними, поліноміальними, тригонометричними функціями, або сплайнами, або функціями, побудованими за допомогою R -функцій тощо, то таку інтерфлетацію (інтерлінацію, інтерполяцію) називають відповідно раціональною, поліноміальною, тригонометричною, сплайн інтерфлетацією (інтерлінацією, інтерполяцією) або інтерфлетацією (інтерлінацією), побудованою за допомогою R -функцій тощо.

Зауважимо, що сліди $\varphi_{k,s}(x)$ є функціями m змінних (параметрів), бо стільки змінних (параметрів) потрібно для визначення точки на m -вимірній поверхні P_k .

1.2. Приклади інженерних задач, які приводять до інтерлінації

1.2.1. Картографія дна моря за даними гідролокації

Задача відтворення поверхні $\Sigma : z = f(x, y)$ дна океану (моря) за даними гідролокації, що отримані на різних лініях - курсах корабля з гідролокатором, є типовою задачею інтерлінації функції двох змінних за даними її слідами на декількох лініях.

Треба побудувати рівняння $z = f(x, y)$ рельєфу дна океану (моря). Тут x, y - координати змінної точки на поверхні океану (моря) (біжучі координати) в деякій системі координат, вибраній дослідником; $z = f(x, y)$ - відстань від поверхні океану (моря) в точці з координатами (x, y) до дна. Для побудови використовують сліди $\varphi_k(x, y)|_{\Gamma_k} = f(x, y)|_{\Gamma_k}$ функції $f(x, y)$ (дані гідролокації) на M ($M \geq 2$) лініях Γ_k ($k = \overline{1, M}$) - курсах корабля. За вказаними лініями і функціями $\varphi_k(x, y)$ (або їх значеннями в деяких точках ліній Γ_k) будують функцію $f(x, y)$ на основі однієї з формул кусково-поліноміальної інтерлінації, описаних у розд. 3. Ці формули зручні для програмування. Тому побудову функції $f(x, y)$ та її ліній рівня можна доручити бортовій ЕОМ. Курси корабля визначає дослідник.

Зауважимо, що сліди $\varphi_k(x, y)$ є функціями однієї змінної: $\varphi_k(x, y) = \varphi_k^*(x)$, або $\varphi_k(x, y) = \varphi_k^*(y)$, або $\varphi_k(x, y) = \varphi_k(x(t), y(t)) = \varphi_k^*(t)$.

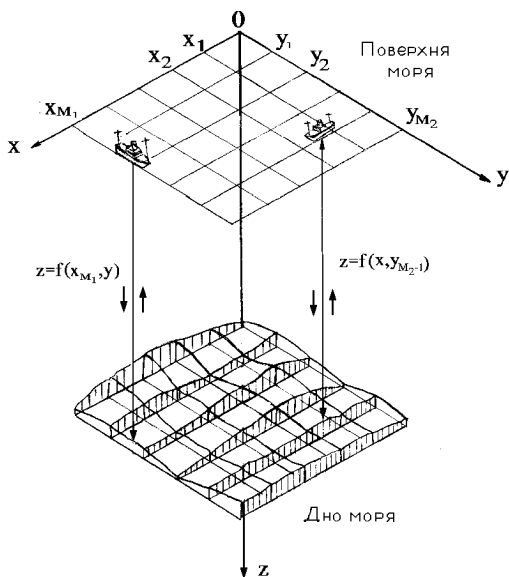


Рис. 1.1. Інформація про поверхню $z = f(x, y)$ дна моря задається лише на лініях - курсах корабля з гідролокатором.

1.2.2. Наближене відтворення поверхні космічного тіла за даними радіолокації

Задача відновлення поверхні космічного тіла за даними радіолокації виникає не тільки в астрономії. Її ефективне розв'язання може вплинути також на розвиток оборонних технологій та ін. Хай промінь радіолокатора рухається вздовж деякої наперед вибраної дослідником системи ліній Γ_k , $k = \overline{1, M}$ на космічному об'єкті, що вивчається (або просто на достатньо віддаленому об'єкті). Промінь відбивається від об'єкта, що дає змогу одержувати відстань до точки відбиття, тобто значення функції $z = f(x, y)$ у системі координат x, y, z , вибраній відповідним чином. Тут z – відстань від точки з координатами (x, y) на об'єкті до радіолокатора (на вказаних лініях-курсах променя локатора). Обробка такої інформації часто має відбуватися досить швидко і потребує математичного апарату, що найбільш природно використовує отримані дані. Таку можливість надає інтерлінація.

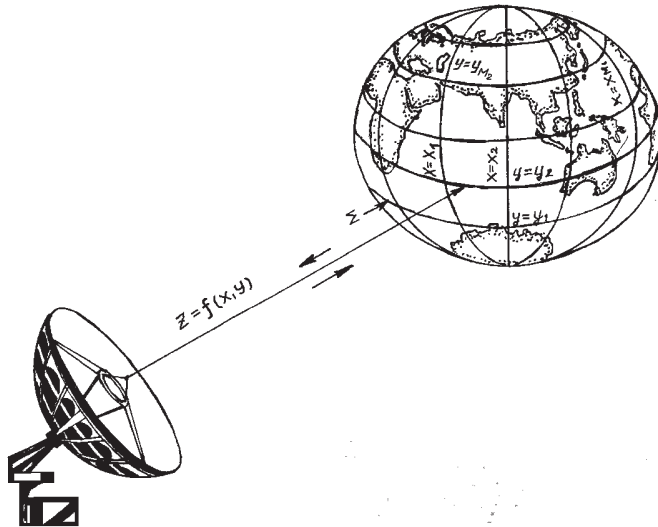


Рис. 1.2. Промінь радіолокатора рухається вздовж системи ліній $\Gamma_{1,k} : x = x_k, k = \overline{1, m}$ та $\Gamma_{2,\ell} : y = y_\ell, \ell = \overline{1, n}$ космічного тіла. За допомогою даних $z = f(x_k, y)$ та $z = f(x, y_\ell)$, де z – віддаль від радіолокатора до точки на поверхні тіла з координатами (x, y) , треба відновити рівняння поверхні $\Sigma : u = F(x, y)$.

1.2.3. Планування експерименту для відновлення $f(x, y)$

На практиці при плануванні і проведенні експериментів широко використовується такий підхід. Хай нам треба знайти формулу $z = f(x, y)$, що опише деяку характеристику процесу, яка залежить від двох змінних (параметрів) x та y . Для цього, звичайно, фіксуються значення x_1, \dots, x_m параметра x і для них знаходяться функції $\psi_k(y) = f(x_k, y), k = \overline{1, m}$ (функції $\psi_k(y)$ можуть бути зображені у вигляді графіків, накреслених самописом або наближено їх значеннями в декількох точках $y_1 < y_2 < \dots < y_n$). Змінні x та y можна поміняти місцями: фіксуємо значення y_1, \dots, y_n параметра y і для цих значень y знаходимо функції $\varphi_l(x) = f(x, y_l), l = \overline{1, n}$. Отримана інформація використовується для побудови шуканої функції $f(x, y)$ у вигляді полінома Лагранжа від змінних x та y , або у вигляді деякої кусково-поліноміальної функції (сплайна), яка інтерполує дані на вибраній множині вузлів (x_k, y_l) , або у вигляді згладжуючого сплайна,

коефіцієнти якого знаходяться методом найменших квадратів тощо. Важливе те, що на практиці часто використовуються тільки функції $\psi_k(y)$ або тільки функції $\varphi_l(x)$. Використання інтерлінації дає змогу врахувати функції $\psi_k(y)$ і функції $\varphi_l(x)$ одночасно, що, природно, дає точніші наближення до функції $f(x, y)$. У загальному випадку, взагалі кажучи, бажано проводити експеримент так, щоб знаходити значення функції $f(x, y)$ (або її сліди) не на серії прямих, паралельних осям координат, а на серії прямих (або кривих) більш загального положення. Для обробки такої інформації треба мати відповідний математичний апарат наближення за допомогою цієї інформації. Таким апаратом є інтерлінація функцій.

1.2.4. Проектування корпусів літаків, суден, автомобілів

При проектуванні корпусів літаків, ракет, суден, автомобілів у багатьох випадках може бути використані інтерлінація та інтерфлотація функцій для опису їх поверхні. У сучасній техніці, особливо в авіа- і суднобудуванні, в космічній техніці, широко використовують конструкції складної форми, які розраховуються і проектуються як оболонки. При апроксимації і заданні серединних поверхонь цих оболонок зручно використовувати математичний апарат сплайн-інтерполяції, сплайн-інтерлінації, сплайн-інтерфлотації та мішаної апроксимації функцій.

Наведемо приклад, пов'язаний з практикою побудови плавних обводів корпусів різних тіл (суден, фюзеляжів літаків, крил літаків тощо). Спочатку з цією метою креслярі використовували вдосконалені лекала – тонкі гнучкі рейки (англійська назва такої рейки spline – сплайн). За їх допомогою проводили плавні криві, що проходили через дані точки. Далі виготовляли набори шаблонів-плазів – форм перетинів поверхні конструйованого об'єкта. Після появи математичної теорії сплайнів виникла можливість відмовитись від плазово-шаблонного методу. Форму конструйованого тіла почали описувати аналітично за допомогою відносно простих формул сплайн-інтерполяції. При цьому конструктор задає координати невеликого числа опорних точок на поверхні і через ці точки проводиться побудова плавних поверхонь.

Наступним кроком у цьому процесі є заміна операторів сплайн-інтерполяції на оператора сплайн-інтерлінації та сплайн-інтерфлотації, які для своєї побудови використовують не тільки значення наближуваної функції в окремих точках, й систему ліній (і навіть поверхонь), що задають "каркас" об'єкта. При обробці поверхні верстатом з програмним керуванням такий аналітичний опис забезпечує можливість керувати рухом різального інструмента і відтворювати поверхню настільки точно, наскільки дозволяє інструмент. Тобто аналітичний опис зовнішніх контурів конструйованих тіл дає змогу конструкторові, зокрема, задавати кілька опорних ліній – каркас поверхні тіла і потім через них будувати плавні поверхні.

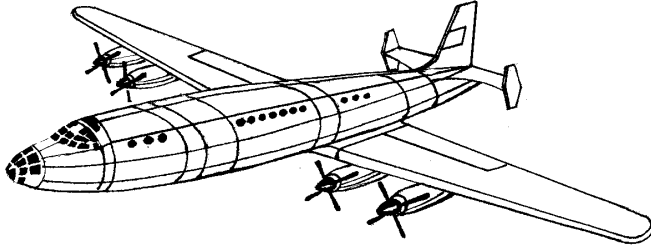


Рис. 1.3. Поверхня літака складається із каркасу - системи ліній - до якого прикріплюється система пластин із заданою формою. Рівняння поверхні $\Sigma : r = F(z, \varphi)$ у циліндричній системі координат (пряма Oz є віссю літака) треба написати так, щоб при переході від однієї пластини до іншої зберігалися потрібні аеродинамічні властивості та відповідні технологічні вимоги.

1.3. Приклади інженерних задач, які приводять до інтерфлетації

1.3.1. Наближення функцій трьох змінних за допомогою проєкцій або томограм, що надходять з комп'ютерного томографа

В останній чверті XX ст. в практиці медичних досліджень, а також при неруйнівному контролі тривимірних об'єктів (наприклад, на митниці), при проведенні наукових досліджень у різних галузях науки і техніки тощо, знайшли широке застосування комп'ютерні томографи, які дають змогу відтворювати внутрішню структуру тіла, не розрізаючи його. На відміну від класичних методів теорії наближення в методах обробки інформації, що надходить на вхід спецпроцесора з комп'ютерного томографа, використовують не сукупність значень досліджуваної характеристики (функції від трьох змінних, яка може бути, наприклад, щільністю тіла) в окремих точках, а інтеграли від неї (проєкції) вздовж фіксованої системи прямих або кілька рентгеновських знімків у різних ракурсах (тобто інтеграли від вказаної функції трьох змінних за кількома різними напрямками), або сліди цієї функції на заданому наборі площин (томограми) тощо. Задача полягає у відновленні (можливо наближеному) внутрішньої структури тіла за вказаною нетрадиційною інформацією.

Уявімо собі таку ситуацію. Пацієнт пройшов обстеження на комп'ютерному томографі. Лікар-оператор, який працює за пультом томографа, вирішив, що для встановлення правильного діагнозу достатньо отримати зображення внутрішньої структури тіла (томограми) у деяких площинах (не обов'язково паралельних). Однак після детального аналізу отриманих томограм, який проводився після того, як пацієнт залишив томограф, виникло бажання отримати зображення

внутрішньої структури його тіла також в інших перетинах (в інших площинах). Цю операцію можна виконати за допомогою операторів інтерфлетації та мішаної апроксимації функцій трьох змінних. Подібна ситуація виникає також, якщо лікар уточнює діагноз за допомогою рентгенівських знімків. Зокрема, майже кожен може зрозуміти, чому інколи лікар хоче отримати не один рентгенівський знімок, а два (у різних, як правило, взаємно перпендикулярних напрямках). Вагається, що за допомогою цього додаткового знімка лікар може (на жаль, для цього потрібен досвідчений фахівець) точніше встановити діагноз. Як математично описати внутрішню структуру тіла за допомогою двох, трьох і більше рентгенівських знімків, отриманих у різних напрямках? Цю задачу можна розв'язати за допомогою операторів інтерфлетації та мішаної апроксимації функцій трьох змінних.

Очевидно, крім нових математичних методів обробки цієї інформації потрібне також використання сучасних засобів комп'ютерної техніки (збереження рентгенівських знімків або томограм у комп'ютері з відповідним розширенням, відповідна їх обробка за допомогою ПЕ-ОМ, візуалізація результату на екранах дисплеїв тощо).

1.3.2. Картографія поверхні космічного тіла за її зображенням на системі смуг

У п.1.2.2 вважалося, що експериментальні дані (наприклад, про гравітаційне поле), які ми отримуємо за допомогою супутника, задані в кожній точці ліній, що знаходяться строго під орбітами супутника. Таке припущення не завжди можна реалізувати. Наведена у цьому підрозділі задача може виникнути в практиці обробки даних, отриманих зі супутника, що рухається над досліджуваною поверхнею по різних траєкторіях (орбітах) на досить великій висоті. Ці дані надають інформацію про досліджувану поверхню (наприклад, фотографії поверхні вздовж орбіти) не на лініях, а на смугах вздовж цих ліній. Тобто, висловлене вище припущення стосується тільки тих точок смуги, які належать лінії, що є проекцією відповідної орбіти на поверхню. Проте з урахуванням великої висоти польоту супутника можна вважати, що всі точки смуги знаходяться в однакових умовах. Це стосується також інших задач, наведених вище. Задача полягає у відновленні (можливо, наближеному) рельєфу поверхні між смугами за допомогою відомих рельєфів на смугах. Отже, задачу, що тут виникає, можна сформулювати так. Задана система смуг на поверхні і система слідів функції двох змінних (рельєф цієї поверхні) на цих смугах. Треба відновити (можливо наближено) цю функцію у точках між смугами. Її розв'язання див. у п.7.9.

Запитання і вправи для самостійної роботи

1. Що називається інтерлінацією функцій двох і більше змінних?
2. Що називається інтерфлетацією функцій трьох і більше змінних?
3. Як формулюється задача картографування дна моря за даними гідролокації?
4. Як формулюється задача відтворення поверхні космічного тіла за даними радіолокації?
5. Як пов'язані задачі проектування корпусів літаків, суден, автомобілів із інтерлінацією?
6. Як можна використовувати інтерлінацію при проведенні експерименту для відновлення функцій двох змінних?
7. У чому полягає задача відновлення функцій трьох змінних за допомогою проєкцій або томограм?
8. Чим відрізняються задачі відновлення поверхні космічного тіла за її слідами на системі ліній та на системі смуг?

Глава 2. Інтерлінація функцій двох змінних на M ($M \geq 2$) прямих зі збереженням класу $C^r(\mathbf{R}^2)$

2.1. Узагальнена формула Даламбера

Задача побудови функцій двох і більшого числа змінних, які не тільки задовольняють заданим граничним умовам на границі деякої області, а й зберігають потрібний клас диференційовності, є однією з ключових задач теорії наближення функцій багатьох змінних. Її розв'язанню присвячено праці багатьох математиків. У цьому розділі досліджується запропонований автором підхід до розв'язання зазначеної задачі, оснований на дискретному та інтегральному узагальненні класичної формули Даламбера.

Спочатку розглянемо задачу про відновлення (можливо наближене) функції двох змінних $f(x, y)$ за відомими даними Коші (слідами функції та її нормальних похідних) на одній прямій. Не зменшуючи загальності, вважатимемо, що ця пряма описується рівнянням $y = 0$.

Теорема 2.1.1. *Хай $r, N \in \overset{\circ}{\mathbf{N}}$ ($r > N$), $\varphi_s(x) \in C^{r-s}(\mathbf{R})$, $s = \overline{0, N}$ – задані функції, β_i ($i = \overline{0, N}$) – задані дійсні числа, що не дорівнюють одне одному: $\beta_k \neq \beta_l$, $k \neq l$; $k, l = \overline{0, N}$. Тоді оператор*

$$D_N(\{\varphi_s\}; x, y) = \tag{2.1.1}$$

$$= \sum_{i=0}^N \lambda_{N0i} \varphi_0(x + \beta_i y) + \sum_{s=1}^N \sum_{i=0}^N \lambda_{Nsi} \int_0^{x+\beta_i y} \varphi_s(\xi) \frac{(x + \beta_i y - \xi)^{s-1}}{(s-1)!} d\xi,$$

де числа λ_{Nsi} ($0 \leq s, i \leq N$) є розв'язками $(N+1)$ -ї системи лінійних алгебричних рівнянь, відповідних значенням $0 \leq s \leq N$

$$\sum_{i=0}^N \lambda_{Nsi} \beta_i^p = \delta_{p,s} \quad 0 \leq p \leq N, \tag{2.1.2}$$

має властивості

$$D_N(\{\varphi_s\}; x, y) \in C^r(\mathbf{R}^2), \tag{2.1.3}$$

$$\partial^s D_N(\{\varphi_s\}; x, y) / \partial y^s \Big|_{y=0} = \varphi_s(x) \quad s = \overline{0, N}. \tag{2.1.4}$$

Д о в е д е н н я. Перш за все зауважимо, що системи лінійних алгебричних рівнянь (2.2), відповідні значенням $s = \overline{0, N}$, мають єдиний розв'язок, бо детермінант $\Delta = \det[\beta_i^p]$ цих систем не дорівнює нулю — він є детермінантом Вандермонда.

Властивість (2.1.3) випливає з того, що кожна група доданків у (2.1.1), відповідних значенням $s = \overline{0, N}$, належить до класу $C^r(\mathbf{R}^2)$. Справді, з того, що $\varphi_0(x) \in C^r(\mathbf{R})$, випливає

$$\sum_{i=0}^N \lambda_{N0i} \varphi_0(x + \beta_i y) \in C^r(\mathbf{R}^2).$$

За допомогою формули диференціювання інтеграла за параметром y

$$\frac{d}{dy} \int_{a(y)}^{b(y)} f(t, y) dt = \frac{db(y)}{dy} f(b(y), y) - \frac{da(y)}{dy} f(a(y), y) + \int_{a(y)}^{b(y)} \frac{\partial f(t, y)}{\partial y} dt$$

отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\nu}{\partial y^\nu} \int_0^{x+\beta_i y} \varphi_s(\xi) \frac{(x + \beta_i y - \xi)^{s-1}}{(s-1)!} d\xi &= \\ &= \begin{cases} \beta_i^\nu \int_0^{x+\beta_i y} \varphi_s(\xi) \frac{(x + \beta_i y - \xi)^{s-\nu-1}}{(s-\nu-1)!} d\xi, & 0 \leq \nu \leq s-1, \\ \beta_i^s \varphi_s(x + \beta_i y) \in C^{r-s}(\mathbf{R}^2), & \nu = s, \\ \beta_i^\nu \varphi_s^{(\nu-s)}(x + \beta_i y) \in C^{r-\nu}(\mathbf{R}^2), & s+1 \leq \nu \leq N, \end{cases} \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

Ці вирази дають змогу дійти висновку, що $\forall \varphi_s(x) \in C^{r-s}(\mathbf{R})$:

$$\int_0^{x+\beta_i y} \varphi_s(\xi) \frac{(x + \beta_i y - \xi)^{s-1}}{(s-1)!} d\xi \in C^r(\mathbf{R}^2) \quad s = \overline{1, N}.$$

Цим властивість (2.1.3) доведена. За допомогою рівностей (2.1.5), (2.1.2) властивості (2.1.4) доводяться так:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^\nu D_N(\{\varphi_s\}; x, y)}{\partial y^\nu} \right|_{y=0} &= \sum_{i=0}^N \lambda_{N0i} \beta_i^\nu \varphi_0^{(\nu)}(x) + \sum_{s=1}^\nu \sum_{i=0}^N \lambda_{Nsi} \beta_i^\nu \varphi_s^{(\nu-s)}(x) + \\ &+ \sum_{s=\nu+1}^N \sum_{i=0}^N \lambda_{Nsi} \beta_i^\nu \int_0^x \varphi_s(\xi) \frac{(x - \xi)^{s-1-\nu}}{(s-1-\nu)!} d\xi = \sum_{s=0}^\nu \varphi_s^{(\nu-s)}(x) \sum_{i=0}^N \lambda_{Nsi} \beta_i^\nu + \end{aligned}$$

$$+ \sum_{s=\nu+1}^N \int_0^x \varphi_s(\xi) \frac{(x-\xi)^{s-1-\nu}}{(s-1-\nu)!} d\xi \sum_{i=0}^N \lambda_{Nsi} \beta_i^\nu = \varphi_\nu(x), \quad \nu = \overline{0, N}.$$

Теорему 2.1.1 доведено.

Зауваження 1. Якщо функції $\varphi_s(x)$ є слідами s -х похідних по y деякої функції $u(x, y)$ на прямій $y = 0$, то можна вважати, що оператор D_N є оператором відновлення функції u за відомими її нормальними похідними до порядку N на прямій $y = 0$: $D_N(\{\varphi_s\}; x, y) = D_N u(x, y)$.

Зауваження 2. Частинним випадком ($N = 1$, $\beta_0 = -\beta, \beta_1 = \beta$) формули (2.1.1) є формула Даламбера

$$D_2 u(x, y) = \frac{\varphi_0(x + \beta y) + \varphi_0(x - \beta y)}{2} + \frac{1}{2\beta} \int_{x-\beta y}^{x+\beta y} \varphi_1(t) dt,$$

що є єдиним розв'язком задачі Коші для рівняння коливання струни:

$$\frac{\partial^2 D_2 u(x, y)}{\partial y^2} = \beta^2 \frac{\partial^2 D_2 u(x, y)}{\partial x^2},$$

$$D_2 u(x, 0) = \varphi_0(x), \quad \left. \frac{\partial D_2 u(x, y)}{\partial y} \right|_{y=0} = \varphi_1(x).$$

Для дослідження (2.1.1) знайдемо розв'язки системи (2.1.2).

Лема 2.1.1. *Розв'язок систем (2.1.2) має вигляд*

$$\lambda_{Nsi} = \Delta_{Ni}^{-1} (-1)^{N-s} \sum_{\substack{0 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{N-s} \leq N \\ i_\nu \neq i; \nu = \overline{1, N-s}}} \beta_{i_1} \beta_{i_2} \dots \beta_{i_{N-s}}, \quad (2.1.6)$$

$$\Delta_{Ni} = \prod_{\substack{\nu=0 \\ \nu \neq i}}^N (\beta_i - \beta_\nu), \quad 0 \leq s, i \leq N.$$

Д о в е д е н н я. Введемо позначення

$$B = [\beta_i^p]_{i=0, N}^{p=\overline{0, N}}, \quad \Lambda = [\lambda_{is}]_{i=0, N}^{s=\overline{0, N}}, \quad \lambda_{is} = \lambda_{Nsi}, \quad I = [\delta_{p,s}]_{p=0, N}^{s=\overline{0, N}}.$$

Тоді системи (2.1.2) можна записати у вигляді матричного рівняння

$$\Lambda B = I, \quad (2.1.7)$$

При наближенні функцій багатьох змінних поліномом залишок наближення часто виражають через похідні порядків, більших за степінь полінома. При наближенні сумою формул, кожна з яких задовольняє однорідне диференціальне рівняння з частинними похідними, природно знайти зображення залишкового члена у формі, що залежить від цього диференціального оператора. Ця ідея розвивається нижче у теоремі 2.1.2.

Теорема 2.1.2. *Хай $f(x, y) \in C^r(\mathbf{R}^2)$ ($r \geq N + 1$),*

$$D_N f(x, y) = \sum_{i=0}^N \lambda_{N0i} f(x + \beta_i y, 0) + \sum_{s=1}^N \sum_{i=0}^N \lambda_{Nsi} \int_0^{x+\beta_i y} f^{(0,s)}(t, 0) \frac{(x + \beta_i y - t)^{s-1}}{(s-1)!} dt.$$

Тоді залишок $R_N f = (I - D_N)f(x, y)$ можна зобразити у вигляді

$$R_N f(x, y) = \tag{2.1.9}$$

$$= \int_0^y \left[\sum_{i=0}^N \Delta_{Ni}^{-1} \int_0^{x+\beta_i(y-z)} (A_{N+1}f)(t, z) \frac{(x + \beta_i(y-z) - t)^{N-1}}{(N-1)!} dt \right] dz, \quad N \geq 1,$$

$$R_0 f(x, y) = \int_0^y (A_1 f)(x + \beta_0(y-z), z) dz, \quad N = 0,$$

де

$$(A_{N+1}f)(x, y) = \prod_{\nu=0}^N \left(-\beta_\nu \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right) f(x, y).$$

Д о в е д е н н я. Хай $N \geq 1$. Введемо функцію

$$L_N(f; x, y; z) = \sum_{i=0}^N \lambda_{N0i} f(x + \beta_i(y-z), z) + \sum_{s=1}^N \sum_{i=0}^N \lambda_{Nsi} \int_0^{x+\beta_i(y-z)} f^{(0,s)}(t, z) \frac{(x + \beta_i(y-z) - t)^{s-1}}{(s-1)!} dt.$$

Очевидно, що $L_N(f; x, y; y) = f(x, y)$; $L_N(f; x, y; 0) = D_N f(x, y)$. Тому

$$R_N f(x, y) = \int_0^y \frac{\partial L_N(f; x, y; z)}{\partial z} dz = \tag{2.1.10}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^y \left\{ \sum_{i=0}^N \left[-\lambda_{N0i} \beta_i f^{(1,0)} + (\lambda_{N0i} - \beta_i \lambda_{N1i}) f^{(0,1)} \right] (x + \beta_i(y-z), z) + \right. \\
&\quad + \sum_{s=2}^N \sum_{i=0}^N (\lambda_{N,s-1,i} - \lambda_{Nsi} \beta_i) \int_0^{x+\beta_i(y-z)} f^{(0,s)}(t, z) \frac{(x + \beta_i(y-z) - t)^{s-2}}{(s-2)!} dt + \\
&\quad \left. + \sum_{i=0}^N \lambda_{NNi} \int_0^{x+\beta_i(y-z)} f^{(0,N+1)}(t, z) \frac{(x + \beta_i(y-z) - t)^{N-1}}{(N-1)!} dt \right\} dz.
\end{aligned}$$

Скористаємося такими тотожностями, які можна перевірити інтегруванням частинами з урахуванням рівностей (2.1.2):

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^N \lambda_{N0i} \beta_i f^{(1,0)}(x + \beta_i(y-z), z) = \\
&\quad = \sum_{i=0}^N \lambda_{N0i} \beta_i \int_0^{x+\beta_i(y-z)} f^{(N+1,0)}(t, z) \frac{(x + \beta_i(y-z) - t)^{N-1}}{(N-1)!} dt, \\
&\sum_{i=0}^N (\lambda_{N0i} - \lambda_{N1i} \beta_i) f^{(0,1)}(x + \beta_i(y-z), z) = \\
&\quad = \sum_{i=0}^N (\lambda_{N0i} - \lambda_{N1i} \beta_i) \int_0^{x+\beta_i(y-z)} f^{(N,1)}(t, z) \frac{(x + \beta_i(y-z) - t)^{N-1}}{(N-1)!} dt, \\
&\sum_{i=0}^N (\lambda_{N,s-1,i} - \lambda_{Nsi} \beta_i) \int_0^{x+\beta_i(y-z)} f^{(0,s)}(t, z) \frac{(x + \beta_i(y-z) - t)^{s-2}}{(s-2)!} dt = \\
&\quad = \sum_{i=0}^N (\lambda_{N,s-1,i} - \lambda_{Nsi} \beta_i) \int_0^{x+\beta_i(y-z)} f^{(N+1-s,s)}(t, z) \frac{(x + \beta_i(y-z) - t)^{N-1}}{(N-1)!} dt, \\
&\quad\quad\quad s = \overline{2, N}.
\end{aligned}$$

Підставивши ці вирази в рівність (2.1.10), отримуємо $R_N f(x, y) =$

$$= \int_0^y \left\{ \sum_{i=0}^N \int_0^{x+\beta_i(y-z)} (A_i f)(t, z) \frac{(x + \beta_i(y-z) - t)^{N-1}}{(N-1)!} dt \right\} dz, \quad (2.1.11)$$

де для $i = \overline{0, N}$

$$(A_i f)(x, y) = \left[-\lambda_{N0i} \beta_i f^{(N+1,0)} + \sum_{s=1}^N (\lambda_{N,s-1,i} - \lambda_{Nsi} \beta_i) f^{(N+1-s,s)} + \lambda_{N,N,i} f^{(0,N+1)} \right] (x, y).$$

Врахувавши, що з рівностей (2.1.6) випливають рівності

$$\begin{aligned} -\lambda_{N0i} \beta_i &= \Delta_{Ni}^{-1} (-1)^{N+1} \prod_{\nu=0}^N \beta_\nu, \\ \lambda_{N,s-1,i} - \lambda_{Nsi} \beta_i &= \Delta_{Ni}^{-1} \left[(-1)^{N+1-s} \sum_{\substack{0 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{N+1-s} \leq N \\ i_\nu \neq i; \nu = \overline{1, N+1-s}}} \beta_{i_1} \beta_{i_2} \dots \beta_{i_{N+1-s}} - \right. \\ &\quad \left. - (-1)^{N-s} \beta_i \sum_{\substack{0 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{N-s} \leq N \\ i_\nu \neq i; \nu = \overline{1, N-s}}} \beta_{i_1} \beta_{i_2} \dots \beta_{i_{N-s}} \right] = \\ &= \Delta_{Ni}^{-1} (-1)^{N+1-s} \sum_{\substack{0 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{N-s} \leq N \\ i_\nu \neq i; \nu = \overline{1, N-s}}} \prod_{\nu=1}^{N+1-s} \beta_{i_\nu}, \quad s = \overline{1, N}, \\ \lambda_{NNi} &= \Delta_{Ni}^{-1} = \Delta_{Ni}^{-1} \sum_{0 \leq i_1 < i_0 \leq N} \prod_{\nu=1}^0 \beta_{i_\nu} = 1, \quad i = \overline{0, N}, \end{aligned}$$

дійдемо висновку: усі оператори $A_i f(x, y)$ можна зобразити у вигляді $(A_i f)(x, y) = \Delta_{Ni}^{-1} (A_{N+1} f)(x, y)$, $i = \overline{0, N}$. Це дасть змогу рівність (2.1.11) записати у вигляді (2.1.9) при $N \geq 1$. Випадок $N = 0$ доводиться аналогічно.

Теорему 2.1.2 доведено.

Н а с л і д о к 1. Для всіх $f(x, y) \in C^r(\mathbf{R}^2)$, $r > N$ справедливе зображення - узагальнена формула Даламбера

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \sum_{i=0}^N \Delta_{Ni}^{-1} \left\{ (-1)^N \prod_{\substack{\nu=0 \\ \nu \neq i}}^N \beta_\nu f(x + \beta_i y, 0) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{s=1}^N (-1)^{N-s} \sum_{\substack{0 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{N-s} \leq N \\ i_\nu \neq i; \nu = \overline{1, N-s}}} \prod_{\nu=1}^{N-s} \beta_{i_\nu} \int_0^{x+\beta_i y} f^{(0,s)}(t, 0) \frac{(x + \beta_i y - t)^{s-1}}{(s-1)!} dt \right\} + \end{aligned} \quad (2.1.1.9a)$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^y \left\{ \sum_{i=0}^N \Delta_{N^i}^{-1} \int_0^{x+\beta_i(y-z)} \left[\prod_{\nu=0}^N \left(-\beta_\nu \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \right) f(t, z) \right] \times \right. \\
& \quad \left. \times \frac{(x + \beta_i(y - z) - t)^{N-1}}{(N-1)!} dt \right\} dz, \quad N \geq 1; \\
& f(x, y) = f(x + \beta_0 y, 0) + \\
& + \int_0^y \left[\left(-\beta_0 \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \right) f \right] (x + \beta_0(y - z), z) dz, \quad N = 0. \quad (2.1.96)
\end{aligned}$$

При фіксованих $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_N$ ці зображення єдині.

Н а с л і д о к 2. Розв'язок задачі Коші

$$A_{N+1}u(x, y) := \prod_{\nu=0}^N \left(-\beta_\nu \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right) u(x, y) = g(x, y), \quad (2.1.12)$$

$$y > 0, g(x, y) \in C^{r-N}(\mathbf{R}^2), \quad r > N;$$

$$u^{(0,s)}(x, 0) = \varphi_s(x) \in C^{r-s}(\mathbf{R}), \quad (s = \overline{0, N}), \quad N \geq 1 \quad (2.1.13)$$

існує, він єдиний і має вигляд $u = D_N u + R_N u$: $u(x, y) = D_N u(x, y) +$

$$+ \int_0^y \left[\sum_{i=0}^N \Delta_{N^i}^{-1} \int_0^{x+\beta_i(y-z)} g(t, z) \frac{(x + \beta_i(y - z) - t)^{N-1}}{(N-1)!} dt \right] dz. \quad (2.1.14)$$

Д о в е д е н н я. Перш за все зауважимо, що

$$A_{N+1}D_N u(x, y) = 0.$$

Це випливає з того, що $D_N u(x, y)$ є сумою функцій вигляду $\Phi_s(x + \beta_i y)$, $0 \leq s, i \leq N$, для яких $A_{N+1}\Phi_s(x + \beta_i y) = 0$. Тобто формула (2.1.14) є сумою двох функцій: одна задовольняє неоднорідні умови (2.1.13) і однорідне рівняння (2.1.12); друга задовольняє неоднорідне рівняння (2.1.12) і однорідні умови Коші (2.1.13).

Існування розв'язку випливає з існування узагальненої формули Даламбера, яка задовольняє умови (2.1.13) і рівняння (2.1.12); для цього треба в (2.1.9а) замінити оператор $(A_{N+1}f)(t, z)$ на $g(t, z)$. Тому для доведення того, що функція (2.1.14) задовольняє неоднорідне

рівняння (2.1.12), достатньо це довести для другої групи доданків у формулі (2.1.14). Якщо $N = 1$, то рівність

$$A_2 R_1 u(x, y) = \prod_{\nu=0}^1 \left(-\beta_\nu \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right) \int_0^y \sum_{i=0}^1 \Delta_{1i}^{-1} \int_0^{x+\beta_i(y-z)} g(t, z) dt dz \equiv g(x, y)$$

доводиться безпосередньо диференціюванням.

У випадку $N \geq 2$ скористаємося рівністю $\left(-\beta_N \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right) \times$

$$\begin{aligned} & \times \int_0^y \sum_{i=0}^N \Delta_{Ni}^{-1} \int_0^{x+\beta_i(y-z)} g(t, z) \frac{(x + \beta_i(y - z) - t)^{N-1}}{(N-1)!} dt dz = \\ & = \int_0^y \sum_{i=0}^{N-1} \Delta_{N-1,i}^{-1} \int_0^{x+\beta_i(y-z)} g(t, z) \frac{(x + \beta_i(y - z) - t)^{N-2}}{(N-2)!} dt dz. \end{aligned}$$

Застосувавши цю операцію $N - 1$ разів, отримаємо рівність

$$\prod_{\nu=2}^N \left(-\beta_\nu \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right) R_N u(x, y) = \int_0^y \sum_{i=0}^1 \Delta_{1i}^{-1} \int_0^{x+\beta_i(y-z)} g(t, z) dt dz.$$

Звідси і з доведеного вище випадку $N = 1$ дістанемо $g(x, y) \equiv$

$$\equiv A_{N+1} R_N u(x, y) = \prod_{\nu=0}^1 \left(-\beta_\nu \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right) \int_0^y \sum_{i=0}^1 \Delta_{1i}^{-1} \int_0^{x+\beta_i(y-z)} g(t, z) dt dz.$$

Отже, доведено, що формула (2.1.14) задовольняє неоднорідне рівняння (2.1.12) $\forall N \geq 1$. Зауважимо, що для $N = 0$ розв'язок задачі (2.1.12) – (2.1.13) має вигляд

$$u(x, y) = \varphi_0(x + \beta_0 y) + \int_0^y g(x + \beta_0(y - z), z) dz.$$

Для доведення єдиності одержаного розв'язку припустимо існування двох розв'язків $u_1(x, y)$ та $u_2(x, y)$ задачі (2.1.12)–(2.1.13). Тоді їхня різниця $w(x, y) = u_1(x, y) - u_2(x, y)$ має бути розв'язком однорідної задачі

$$A_{N+1} w(x, y) = 0, \quad w^{(0,s)}(x, 0) = 0, \quad s = \overline{0, N},$$

яка згідно з узагальненою формулою Даламбера має тривіальний розв'язок $w(x, y) \equiv 0$. Звідси випливає, що $u_1(x, y) \equiv u_2(x, y)$.

Наслідок 2 доведено.

Н а с л і д о к 3. У випадку формули Даламбера ($N = 1, \beta_0 = -\beta, \beta_1 = \beta$) можемо написати

$$u(x, y) = D_2 u(x, y) + \frac{1}{2\beta} \int_0^y \left[\int_{x-\beta(y-\eta)}^{x+\beta(y-\eta)} \left(\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - \beta^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u(t, \eta) dt \right] d\eta$$

Отже, теореми 2.1.1 і 2.1.2 дають в явній формі не тільки наближуючі оператори $D_N f(x, y)$, й інтегральне зображення залишку наближення. Виникає природне питання про оцінку виникаючої похибки за умови, що нам відомі відповідні оцінки для $A_{N+1} f(x, y)$.

Відповідь на це питання дає теорема 2.1.3.

Теорема 2.1.3. *Хай $a(z) \leq x, x + \beta_i(y - z) \leq b(z)$ ($i = \overline{0, N}$); $D = \{(t, z) \mid a(z) \leq t \leq b(z); 0 \leq z \leq y\}$; $(A_{N+1} f)(t, z) \in C(D)$. Тоді $\exists(\theta_i(\kappa), \kappa) \in D$; ($i = \overline{0, N}$); $\bar{\theta}(\kappa) = (\theta_0(\kappa), \dots, \theta_N(\kappa))$:*

$$R_N f(x, y) = \frac{y^{N+1}}{(N+1)!} (\tilde{A}_{N+1} f)(\bar{\theta}(\kappa), \kappa); \quad (2.1.15)$$

$$(\tilde{A}_{N+1} f)(\bar{\theta}(\kappa), \kappa) = \sum_{i=0}^N \Delta_{N_i}^{-1} \beta_i^N (A_{N+1} f)(\theta_i(\kappa), \kappa);$$

$$|R_N f(x, y)| \leq M_{N+1} h^{N+1} / (N+1)!, \quad \forall y \in [0, h], \quad h > 0; \quad (2.1.16)$$

$$M_{N+1} = M_{N+1}(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_N) = \max_{(\theta_i(z), z) \in D, i=\overline{0, N}} \left| (\tilde{A}_{N+1} f)(\bar{\theta}(z), z) \right|.$$

Д о в е д е н н я. Зауважимо, що в силу (2.1.2)

$$\sum_{i=0}^N \Delta_{N_i}^{-1} \int_x^0 (A_{N+1} f)(t, z) \frac{(x + \beta_i(y - z) - t)^{N-1}}{(N-1)!} dt = 0.$$

Тому формула для залишку (2.1.9) має вигляд $R_N f(x, y) =$

$$= \int_0^y \left[\sum_{i=0}^N \Delta_{N_i}^{-1} \int_x^{x+\beta_i(y-z)} (A_{N+1} f)(t, z) \frac{(x + \beta_i(y - z) - t)^{N-1}}{(N-1)!} dt \right] dz. \quad (2.1.17)$$

Скористаємося для кожного внутрішнього інтеграла в (2.1.17) формулою про середнє (узявши $(\theta_i = \theta_i(z) \in (x, x + \beta_i(y - z)))$):

$$R_N f(x, y) = \int_0^y \left[\sum_{i=0}^N \Delta_{N_i}^{-1} (A_{N+1} f)(\theta_i(z), z) \frac{\beta_i^N (y - z)^N}{N!} \right] dz.$$

Застосуємо до цього інтеграла теорему про середнє, узявши $\kappa \in (0, y)$:

$$R_N f(x, y) = \frac{y^{N+1}}{(N+1)!} \sum_{i=0}^N \Delta_{N_i}^{-1} \beta_i^N (A_{N+1} f)(\theta_i(\kappa), \kappa).$$

Отже, рівність (2.15) доведено. Доведення нерівності (2.1.16) очевидним чином випливає з рівності (2.1.15).

Теорему 2.1.3 доведено.

Н а с л і д о к 3. Якщо $(A_{N+1} f)(t, z) \in C(D)$ і

$$\sum_{i=0}^N \Delta_{N_i}^{-1} \beta_i^N = 1,$$

то у випадку $0 \leq \Delta_{N_i}^{-1} \beta_i^N < 1, \forall i = \overline{0, N}$ з рівності (2.1.15) легко отримати рівність

$$\exists(\theta(\kappa), \kappa) \in D : R_N f(x, y) = \frac{y^{N+1}}{(N+1)!} (A_{N+1} f)(\theta(\kappa), \kappa). \quad (2.1.18)$$

Наприклад, у випадку $N = 1$ нерівності

$$0 \leq \Delta_{10}^{-1} \beta_0 = \frac{-\beta_0}{\beta_1 - \beta_0} < 1, \quad 0 \leq \Delta_{11}^{-1} \beta_1 = \frac{\beta_1}{\beta_1 - \beta_0} < 1$$

виконуватимуться, якщо $\beta_0 < 0 < \beta_1$. У випадку $N = 2$ нерівності

$$0 \leq \frac{\beta_0^2}{(\beta_0 - \beta_1)(\beta_0 - \beta_2)}, \frac{\beta_1^2}{(\beta_1 - \beta_0)(\beta_1 - \beta_2)}, \frac{\beta_2^2}{(\beta_2 - \beta_0)(\beta_2 - \beta_1)} < 1$$

можуть очевидно виконуватися, тільки якщо $\beta_0 < \beta_1 = 0 < \beta_2$.

Н а с л і д о к 4. З теоремами 2.1.3 випливає, що залишок наближення диференційовних функцій за допомогою узагальненої формули Даламбера має таку ж форму, як і залишок наближення поліномом Тейлора за степенями однієї змінної y (у формі Лагранжа). Різниця в тім, що в залишку формули Тейлора замість оператора $(A_{N+1} f)$ стоїть оператор $f^{(0, N+1)}$. Очевидно, існують класи функцій $f(x, y)$, для

яких добором чисел $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_N$ можна добитися виконання нерівності $M_{N+1} \leq \max_{(t,z) \in D} |f^{(0,N+1)}(t,z)|$. Викладене наприклад, стосується

функцій $f(x,y)$, для яких $f^{(0,N+1)}(t,z) \neq 0, A_{N+1}f(x,y) = 0$.

Зауваження. Узагальнена формула Даламбера (2.1.1) відновлює f за даними Коші на прямій $y = 0$. У випадку прямої $y = a$ одержимо потрібну формулу, увівши замість змінної y нову змінну $u = y - a$. Тоді $f(x,y) = f(x,a+u) = \varphi(x,u)$ і задання даних Коші на прямій $y = a$ для функції $f(x,y)$ рівносильне їх задання на прямій $u = 0$ для функції $f(x,a+u)$. Тобто, щоб отримати формулу (2.1.1) у випадку $a \neq 0$ треба в формулі (2.1.1) всюди замість змінної y писати $y - a$. Це поширюється і на формулу (2.1.9) для залишкового члена.

2.2. Інтерполяційні оператори Лагранжа та Ерміта

2.2.1. Інтерполяційні оператори Лагранжа та Ерміта однієї змінної

З метою полегшення читання цього розділу пропонуємо читачеві самостійно довести такі твердження стосовно поліномів Лагранжа та Ерміта однієї змінної.

Твердження 2.2.1. Хай $g(t) \in C^r(I), I = [0,1], 1 \leq r \leq n, L_{n-1}g(t)$ —інтерполяційний поліном Лагранжа степеня $n - 1$ функції $g(t)$,

$$L_{n-1}g(t) = \sum_{k=1}^n g(t_k) \ell_{n-1,k}(t), \quad \ell_{n-1,k}(t) = \prod_{i=1, i \neq k}^n \frac{t - t_i}{t_k - t_i}, k = \overline{1, n}$$

із властивостями $L_{n-1}g(t_k) = g(t_k), k = \overline{1, n}, -\infty < a \leq t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n \leq b < \infty$. Тоді для залишку $R_n g(t) := g(t) - L_{n-1}g(t)$ справедливе інтегральне зображення

$$R_n g(t) = \sum_{k=1}^n \ell_{n-1,k}(t) \int_{t_k}^t g^{(r)}(\tau) \frac{(t_k - \tau)^{r-1}}{(r-1)!} d\tau$$

При доведенні цього твердження слід використати відому властивість поліномів Лагранжа $L_{n-1}g(t) = g(t) \forall g(t) = P_{r-1}(t) := a_0 + a_1 t + \dots + a_{r-1} t^{r-1}, 1 \leq r \leq n$ і підставити у формулу для $R_n g(t)$ замість $g(t)$ формулу Тейлора $g(t) = \sum_{s=0}^{r-1} g^{(s)}(t_1) \frac{(t-t_1)^s}{s!} + \int_{t_1}^t g^{(r)}(\tau) \frac{(t-\tau)^{r-1}}{(r-1)!} d\tau$.

Аналогічно доводиться наступне твердження 2.2.2.

Твердження 2.2.2. Хай $E_{n-1}g(t) = E_{n-1}(g; \{g^{(s)}(t_k)\}; t)$ —інтерпо-

ляційний поліном Ерміта функції $g(t)$ степеня $n - 1$

$$E_{n-1}g(t) = \sum_{k=1}^M \sum_{s=0}^{\rho_k-1} g^{(s)}(t_k) \frac{(t-t_k)^s}{s!} h_{n-1,k,s}(t),$$

$$\rho_k \in \mathbf{N}, \quad \sum_{k=1}^M \rho_k = n - 1,$$

$$h_{n-1,k,s}(t) = \prod_{\nu=1, \nu \neq k}^M (t-t_\nu)^{\rho_\nu} \left\{ \prod_{\nu=1, \nu \neq k}^M (t-t_\nu)^{-\rho_\nu} \right\}_{(t_k)}^{(\rho_k-s-1)}.$$

Запис $\{\psi(t)\}_{(t_k)}^{(\nu)}$ слід розуміти так:

$$\{\psi(t)\}_{(t_k)}^{(\nu)} = \sum_{p=0}^{\nu} \frac{(t-t_k)^p}{p!} \left[\frac{d^p \psi(t)}{dt^p} \Big|_{t=t_k} \right].$$

Оператор Ерміта має такі властивості: $E_{n-1}g(t) = g(t) \forall g(t) = P_{r-1}(t)$, $1 \leq r \leq n$; $\frac{d^s E_{n-1}g(t)}{dt^s} \Big|_{t=t_k} = g^{(s)}(t_k)$, $k = \overline{1, M}$; $s = \overline{0, \rho_k - 1}$.

Тоді для залишку $R_n g(t) := g(t) - E_{n-1}g(t)$ при умові

$$\forall r: \rho_k \leq r \leq n, \quad k = \overline{1, M} \quad (2.2.1)$$

справедливе таке інтегральне зображення:

$$R_n g(t) = \sum_{k=1}^M \sum_{s=0}^{\rho_k-1} h_{k,s}(t) \frac{(t-t_k)^s}{s!} \int_{t_k}^t \frac{d^r g(\tau)}{d\tau^r} \frac{(t_k-\tau)^{r-s-1}}{(r-s-1)!} d\tau. \quad (2.2.2)$$

2.2.2. Інтерполяційний оператор Ерміта для $f(\bar{x}, y)$ за змінною y

Хай $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, $\bar{x} = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbf{R}^{n-1}$, $x_n = y \in \mathbf{R}$, $f(x) = f(\bar{x}, y) \in C^r(\mathbf{R}^n)$, $-\infty < a \leq y_1 < y_2 < \dots < y_M \leq b < +\infty$, $\rho_k \in \mathbf{N}$; $\sum_{k=1}^n \rho_k = N$. Поліном Ерміта для $f(\bar{x}, y)$ за змінною y має вигляд

$$e(f; \{y_k\}; \bar{x}; y) := \sum_{k=1}^M \sum_{s=0}^{\rho_k-1} \varphi_{k,s}(\bar{x}) h_{k,s}(y) \frac{(y-y_k)^s}{s!}, \quad (2.2.3)$$

де використано позначення

$$\varphi_{k,s}(\bar{x}) = \frac{\partial^s f(x)}{\partial y^s} \Big|_{y=y_k}, \quad k = \overline{1, M}; \quad s = \overline{0, \rho_k - 1},$$

Оператор (2.2.3) має властивості

$$\frac{\partial^s e(f; \{y_k\}; \bar{x}; y)}{\partial y^s} \Big|_{y=y_k} = \varphi_{ks}(\bar{x}), k = \overline{1, M}; s = \overline{0, \rho_k - 1}. \quad (2.2.4)$$

Він є інтерфлетантом (інтерлінантом при $n = 2$) - оператором інтерфлетації (інтерлінації при $n = 2$), який відновлює $f(x)$ у точках між $(n - 1)$ -вимірними площинами (прямими при $n = 2$) $x_n = y = y_k, k = \overline{1, M}$. При цьому, якщо $\rho_1 = \dots = \rho_M = \rho, \rho \leq q \leq M\rho$, то (див. твердження 2.2.2)

$$\begin{aligned} R_e f(x) &= f(x) - e(f; \{y_k\}; \bar{x}; y) = \\ &= \sum_{k=1}^M \sum_{s=0}^{\rho-1} h_{ks}(y) \frac{(y - y_k)^s}{s!} \int_{y_k}^y \frac{\partial^q f(\bar{x}, \eta)}{\partial \eta^q} \frac{(y_k - \eta)^{q-s-1}}{(q - s - 1)!} d\eta. \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

Зауважимо, що функція $e(f; \{y_k\}; \bar{x}; y)$ є поліномом степеня $N - 1$ відносно змінної y . Отже, за змінною y її можна диференціювати довільну кількість разів. Однак як функція n змінних загалом вона не належить, до класу $C^r(\mathbf{R}^n)$, до якого належить функція $f(x)$. Інакше кажучи, оператор Ерміта не зберігає диференціальні властивості f :

$$\exists f \in C^{p-1}(\Omega) \implies E_{M,\rho} f(x, y) \in C^{p-\bar{\rho}}(\Omega), \quad \bar{\rho} = \max\{\rho_k\}. \quad (2.2.6)$$

Аналогічну властивість має оператор Тейлора

$$T_N(f; \bar{x}; y; y_0) := \sum_{s=0}^N f^{(0,s)}(\bar{x}, y_0) \frac{(y - y_0)^s}{s!}. \quad (2.2.7)$$

для якого (при $f^{(0,s)}(\bar{x}, y_0) = \frac{\partial^s f(\bar{x}, y)}{\partial y^s} \Big|_{y=y_0} = D_n^s f(x) \Big|_{x_n=y_0}$):

$$D_n^s T_N(f; \bar{x}; y; y_0) \Big|_{y=y_0} = f^{(0,s)}(\bar{x}, y_0), s = \overline{0, N}, \quad (2.2.8)$$

$$R_N f(\bar{x}; y; y_0) = \int_{y_0}^y f^{(0,N+1)}(\bar{x}, \eta) \frac{(y - \eta)^N}{N!} d\eta, \quad (2.2.9)$$

$$R_N f(\bar{x}; y; y_0) := f(\bar{x}, y) - T_N(f; \bar{x}; y; y_0).$$

Функцію $T_N(f; \bar{x}; y; y_0)$ можна диференціювати за змінною y безліч разів. Однак як функція n змінних загалом вона не належить, до класу $C^r(\mathbf{R}^n)$, до якого належить функція $f(x)$. Інакше кажучи, оператор $T_N(f; \bar{x}; y; y_0)$ не зберігає клас $C^r(\mathbf{R}^n)$:

$$\exists f(x) \in C^r(\mathbf{R}^n) \implies T_N(f; \bar{x}; y; y_0) \in C^{r-N}(\mathbf{R}^n). \quad (2.2.10)$$

Отже, оператор (2.2.7) не можна використовувати замість функції $f(x)$ в тих задачах, де істотною є вимога, щоб функція $f(x)$ мала всі частинні похідні до порядку r включно неперервними (наприклад, у задачах, де беруть участь похідні порядків до r включно).

Зауваження 1. Поліном Тейлора функції n змінних $f(x_1, \dots, x_n)$ за степенями $(x - x^{(0)})^\alpha = (x_1 - x_1^{(0)})^{\alpha_1} \dots (x_n - x_n^{(0)})^{\alpha_n}$,

$$T_N(f; x; x^{(0)}) = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq N} f^{(\alpha)}(x^{(0)}) \frac{(x - x^{(0)})^\alpha}{\alpha!}, \quad (2.2.11)$$

$x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$; $f^{(\alpha)}(x^{(0)}) = D^\alpha f(x)|_{x=x^{(0)}}$, має такі властивості ($D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$):

$$D^\alpha T_N(f; x; x^{(0)})|_{x=x^{(0)}} = f^{(\alpha)}(x^{(0)}) \quad , 0 \leq |\alpha| \leq N, \quad (2.2.12)$$

$$\begin{aligned} f(x) &= T_N(f; x; x^{(0)}) + \\ &+ \int_0^1 \left[\frac{\partial^{N+1}}{\partial t^{N+1}} f(x^{(0)} + t(x - x^{(0)})) \right] \frac{(1-t)^N}{N!} dt. \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

Він є функцією n змінних, що має неперервні похідні (частинні) довільного порядку (якщо $|\alpha| > N$, то $D^\alpha T_N \equiv 0$). Цим зокрема пояснюється широке застосування полінома Тейлора (2.2.11) і формули (2.2.13) (особливо при $n = 1$) при дослідженні різних методів наближення.

Вказаний вище недолік формули (2.2.7) наочно ілюструється на прикладі функції

$$f(x) = \frac{\left| x_n - \sum_{k=1}^{n-1} x_k + 1 \right|^{N+1}}{(N+1)!}, \quad N = 2k \in \mathring{\mathbb{N}},$$

що має неперервні похідні до порядку N включно. При цьому

$$\frac{\partial^{2s} f(x)}{\partial x_n^{2s}} = \frac{\left| x_n - \sum_{k=1}^{n-1} x_k + 1 \right|^{N+1-2s}}{(N+1-2s)!} \in C^{N-2s}(\mathbf{R}^n) \quad , s = \overline{0, k}.$$

Тобто функція $\frac{\partial^N f(x)}{\partial x_n^N} = \left| x_n - \sum_{k=1}^{n-1} x_k + 1 \right| \in C(\mathbf{R}^n)$ недиференційовна в точках $x \in \mathbf{R}^n$, що лежать на $(n-1)$ -вимірній площині

$$\Pi : x_n - \sum_{k=1}^{n-1} x_k + 1 = 0.$$

Зауваження 2. Наведемо приклад, де зазначена диференційовність істотна. Хай $f(x_1, x_2)$ – функція, що визначає поле температур на площині Ox_1x_2 . Якщо $f(x_1, x_2) = \exp\{-(x_1 - x_2)^2\}|x_1 - 3x_2|(x_1 - 3x_2)$, то поле температур диференційовне. В формулі $T_1(f; x_1; x_2; 0) = f(x_1, 0) + x_2 f^{(0,1)}(x_1, 0)$ функція $f(x_1, 0)$ дає температуру на прямій $x_2 = 0$, а функція $-f^{(0,1)}(x_1, 0)$ визначає потік теплоти на цій же прямій в напрямку осі x_2 . У цьому прикладі очевидно, що потік тепла в точці $x_1 = 0$ має розривну похідну і тому функція $f(x_1, 0) + x_2 f^{(0,1)}(x_1, 0)$ не є диференційовною (отже, не для всіх x можна знайти її градієнт).

Отже, поліном Ерміта $e(f; \{y_k\}; \bar{x}; y)$ по одній змінній y як функція n змінних, взагалі кажучи, не зберігає клас $C^r(\mathbf{R}^n)$:

$$\exists f(x) \in C^r(\mathbf{R}^n) \implies e(f; \{y_k\}; \bar{x}; y) \in C^{r-\rho+1}(\mathbf{R}^n).$$

Це перший недолік класичних інтерполяційних операторів Ерміта (2.2.3) за однією змінною: їх не можна використовувати замість $f(x)$ в тих задачах, де істотною є вимога, щоб функція $f(x)$ мала всі частинні похідні до порядку $q, r - N < q \leq r$ неперервними.

Зауваження 3. Поліном Ерміта функції $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ з вузлами $\{x^{(i)}\} = \{x_1^{(i_1)}, \dots, x_n^{(i_n)}\}$, $1 \leq i_k \leq m_k, k = \overline{1, n}$

$$e(f; \{x^{(i)}\}; x) := \sum_{i \in \Xi} \sum_{\alpha \in \Upsilon} f^{(\alpha)}(x^{(i)}) \prod_{\nu=1}^n h_{i_\nu, \alpha_\nu}(x_\nu) \frac{(x_\nu - x_\nu^{(i_\nu)})^{\alpha_\nu}}{\alpha_\nu!}, \quad (2.2.14)$$

$$\Xi := \{i = (i_1, \dots, i_n) \mid 1 \leq i_k \leq m_k, k = \overline{1, n}\};$$

$$\Upsilon := \{\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \mid 0 \leq \alpha_k \leq \rho - 1, k = \overline{1, n}\},$$

з властивостями

$$D^\alpha e(f; \{x^{(i)}\}; x) \Big|_{x=x^{(j)}} = f^{(\alpha)}(x^{(j)}), \quad j \in \Xi, \alpha \in \Upsilon, \quad (2.2.15)$$

або

$$e(f; \{x^{(i)}\}; x) = \left(\prod_{\nu=1}^n e_{\nu, m_\nu, \rho} \right) f(x),$$

де $e_{\nu, m_\nu, \rho} f(x)$ – інтерполяційні оператори Ерміта за змінними $x_\nu, \nu = \overline{1, n}$, є функцією n змінних, яка має неперервні частинні похідні довільного порядку.

Крім того, для залишку $r_e f(x) = f(x) - e(f; \{x^{(i)}\}; x)$ справедливе таке зображення:

$$r_e f(x) = \left(\sum_{\mu=1}^n (-1)^{\mu-1} \sum_{1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_\mu \leq n} \prod_{j=1}^{\mu} R_{k_j, m_{k_j}, \rho} \right) f(x), \quad (2.2.16)$$

де $R_{\nu, m_\nu, \rho} f(x) = f(x) - e_{\nu, m_\nu, \rho} f(x)$ – залишковий член наближення функції $f(x)$ інтерполяційними операторами Ерміта за змінними $x_\nu, \nu = \overline{1, n}$, які використовують m_ν вузлів і похідні до порядку $\rho - 1$ за змінною x_ν ; вирази для цих залишків мають вигляд (2.2.5), де замість змінної y треба писати $y = x_\nu$, а також $\bar{x} = (x_1, \dots, x_{\nu-1}, x_{\nu+1}, \dots, x_n)$.

Другий недолік оператора Ерміта (2.2.3): якщо треба відновити функцію $f(x)$ за її слідами і слідами її нормальних похідних до порядку $\rho - 1$ на M площинах

$$P_k : \omega_k(x) := \sum_{\nu=1}^n a_{k\nu} x_\nu - \gamma_k = 0 \quad (k = \overline{1, M}),$$

серед яких деякі (або всі) можуть перерізатися, то формула (2.2.3), в яку замість чисел y_k треба підставити функції $y_k(x_1, \dots, x_{n-1})$, що є розв'язком рівняння $\omega_k(x) = 0$ відносно змінної x_n , матиме раціональні допоміжні функції $h_{ks}(x_1, \dots, x_n)$, а не поліноміальні. Знаменники цих раціональних функцій можуть анулюватися у точках перерізу двох та більше площин P_k . Тому актуальною є задача побудови операторів інтерлінації та інтерфлетації з допоміжними функціями у вигляді поліномів або сплайнів.

Третій недолік оператора (2.2.3): якщо серед площин P_k є хоча б одна площина P_m , перпендикулярна до площини $x_n = 0$, то формула (2.2.3) не має сенсу – не буде визначений функціональний вузол $y_k(x_1, \dots, x_{n-1})$.

Отже, через велику кількість задач, в яких інформація про функцію $f(x)$ задана не на дискретній множині точок, а на сім'ї (скінченній або нескінченній) поверхонь P_k , з'являється потреба у побудові операторів, які розв'язують ті ж задачі, що й оператори Тейлора і Ерміта, але позбавлені перелічених недоліків. Особливо актуальною є побудова та дослідження операторів із вказаними властивостями для випадків, коли сім'я поверхонь $P_k : \omega_k(x) = 0$ є більш широкою, ніж сім'я $(n - 1)$ -вимірних площин.

2.3. Інтерлінація функцій на M ($M \geq 2$) паралельних прямих в R^2 зі збереженням класу $C^p(R^2)$

Дамо алгоритм побудови операторів $E_{M, \rho, \beta}$ із властивостями

$$f(x, y) \in C^p(\Omega) \implies E_{M, \rho, \beta} f(x, y) \in C^p(\Omega), \quad (2.3.1)$$

$$\partial^s E_{M, \rho, \beta} f(x, y) / \partial y^s |_{y=y_k} = f^{(0, s)}(x, y_k), \quad s = \overline{0, \rho - 1}; k = \overline{0, M - 1}. \quad (2.3.2)$$

Тут

$$\Omega = \{-\infty < x < \infty, a \leq y \leq b\}, \quad a \leq y_0 < y_1 < \dots < y_{M-1} \leq b, \\ \rho \in \mathbf{N}, \quad \rho \leq p \in \mathbf{N}, \quad M\rho = N; \quad \beta = \{\beta_i\}, \quad \beta_0 < \beta_1 < \dots < \beta_{\rho-1}.$$

Числа y_k, ρ, β_i вважаємо заданими. Оператори $E_{M,\rho,\beta}$ не тільки інтерлюють функцію та її нормальні похідні на декількох паралельних прямих, й належать тому ж класу диференційовності, що й функція f . Це значно розширює область їх застосування.

Теорема 2.3.1. *Хай $f(x, y) \in C^p(\Omega)$; y_k, ρ, β_i – фіксовані числа, які задовольняють вказані вище обмеження. Тоді існують числа $\alpha_{s,i}$ такі, що функція*

$$E_{M,\rho,\beta} f(x, y) = \sum_{k=0}^{M-1} h_{k0}(y) \sum_{i=0}^{\rho-1} \alpha_{0,i} f(x + \beta_i(y - y_k), y_k) + \quad (2.3.3)$$

$$+ \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{s=0}^{\rho-1} h_{ks}(y) \sum_{i=0}^{\rho-1} \alpha_{s,i} \int_0^{x+\beta_i(y-y_k)} f^{(0,s)}(t, y_k) \frac{(x + \beta_i(y - y_k) - t)^{s-1}}{(s-1)!} dt,$$

де

$$h_{ks}(y) = \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq k}}^{M-1} (y - y_l)^\rho \left\{ \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq k}}^{M-1} (y - y_l)^{-\rho} \right\}^{(\rho - s - 1)}, \quad (2.3.4)$$

$$\{\varphi(y)\}_{(y_k)}^{(\nu)} := \sum_{s=0}^{\nu} \varphi^{(s)}(y_k) \frac{(y - y_k)^s}{s!}, \quad k = \overline{0, M-1}; s = \overline{0, \rho-1},$$

задовольняє умови (2.3.1), (2.3.2). Сталі $\alpha_{s,i}, i, s = \overline{0, \rho-1}$ для кожного $s = \overline{0, \rho-1}$ знаходяться відповідно з таких систем лінійних алгебричних рівнянь:

$$\sum_{i=0}^{\rho_k-1} \alpha_{s,i} (\beta_i)^q = \delta_{s,q}, \quad s, q = \overline{0, \rho-1}. \quad (2.3.5)$$

Д о в е д е н н я. Властивість (2.3.1) випливає з того, що

$$f(x, y) \in C^p(\mathbf{R}^2) \implies f^{(0,s)}(x, y) \in C^{p-s}(\mathbf{R}^2) \implies$$

$$\implies \int_0^{\varphi(x,y)} f^{(0,s)}(t, y_k) \frac{(\varphi(x, y) - t)^{s-1}}{(s-1)!} dt \in C^p(\mathbf{R}^2),$$

$$\forall \varphi(x, y) \in C^p(\mathbf{R}^2).$$

Інтерлінаційні властивості (2.3.2) встановлюються безпосередньою перевіркою з урахуванням рівностей (2.3.5), а також властивостей функцій $h_{ks}(y)$, які відрізняються від базисних поліномів Ерміта відсутністю множника $(y - y_k)^s / (s!)$:

$$h_{ks}^{(q)}(y_l) = 0, l \neq k; q = \overline{0, \rho-1}, h_{ks}^{(q)}(y_k) = \delta_{0,q}, q = \overline{0, \rho-1}.$$

Теорему 2.3.1 доведено.

Для оцінки похибки наближення функції $f(x, y)$ операторами інтерлінації $E_{M, \rho, \beta} f$ потрібна лема 2.3.1.

Лема 2.3.1. *Хай $\rho \geq 1$,*

$$E_{M, \rho} f(x, y) = \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{s=0}^{\rho-1} f^{(0, s)}(x, y_k) h_{ks}(y) \frac{(y - y_k)^s}{s!} \quad (2.3.6)$$

- многочлен Ерміта функції $f(x, y)$ за змінною y : $\partial^s E_{M, \rho} f / \partial y^s|_{y=y_k} = f^{(0, s)}(x, y_k)$, $k = \overline{0, M-1}$; $s = \overline{0, \rho-1}$. Тоді, якщо $f(x, y) \in PC^p(\Omega)$, $\rho \leq p \leq N$, $N = M\rho$, то залишковий член

$$R_{M, \rho} f(x, y) = (I - E_{M, \rho}) f(x, y)$$

можна зобразити в інтегральній формі

$$R_{M, \rho} f(x, y) = \int_a^b f^{(0, p)}(x, \eta) G_{M, \rho, p}(y, \eta) d\eta, \quad (2.3.7)$$

де

$$G_{M, \rho, p}(y, \eta) = \bar{H}_p(y, \eta) - E_{M, \rho}[\bar{H}_p(y, \eta)] = R_{M, \rho}[\bar{H}_p(y, \eta)], \quad (2.3.8)$$

$$\bar{H}_p(y, \eta) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} H_p(y, \eta) \sigma_k(y, \eta), \quad (2.3.9)$$

$$H_p(y, \eta) = \frac{(y - \eta)^{p-1}}{(p-1)!}, \quad (2.3.10)$$

$$\sigma_k(y, \eta) = \begin{cases} 0, & \eta \notin [y_k, y], \\ 1, & y_k \leq \eta \leq y, \\ -1, & y \leq \eta < y_k. \end{cases} \quad (2.3.11)$$

Д о в е д е н н я. Якщо $p \leq N$, то можна написати формули Тейлора

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \sum_{s=0}^{p-1} f^{(0, s)}(x, y_k) \frac{(y - y_k)^s}{s!} + \\ &+ \int_{y_k}^y f^{(0, p)}(x, \eta) \frac{(y - \eta)^{p-1}}{(p-1)!} d\eta, \quad k = \overline{0, M-1}. \end{aligned} \quad (2.3.12)$$

Отже, для $f \in PC^p(\Omega)$ справедливий вираз

$$f(x, y) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{s=0}^{p-1} f^{(0,s)}(x, y_k) \frac{(y - y_k)^s}{s!} + \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \int_{y_k}^y f^{(0,p)}(x, \eta) \frac{(y - \eta)^{p-1}}{(p-1)!} d\eta.$$

Останню формулу зручно подати у вигляді $f(x, y) =$

$$= \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{s=0}^{p-1} f^{(0,s)}(x, y_k) \frac{(y - y_k)^s}{s!} + \int_a^b f^{(0,p)}(x, \eta) \bar{H}_p(y, \eta) d\eta. \quad (2.3.13)$$

Застосувавши оператор $R_{M,\rho}$ за змінною y до функції $f \in PC^p(\Omega)$, визначеної виразом (2.3.13), отримаємо

$$R_{M,\rho} f(x, y) = R_{M,\rho} \left[\frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{s=0}^{p-1} f^{(0,s)}(x, y_k) \frac{(y - y_k)^s}{s!} \right] + \int_a^b f^{(0,p)}(x, \eta) R_{M,\rho} [\bar{H}_p(y, \eta)] d\eta = \int_a^b f^{(0,p)}(x, \eta) G_{M,\rho,p}(y, \eta) d\eta.$$

Тут враховано, що

$$E_{M,\rho} \left[\sum_{l=0}^{p-1} \varphi_l(x) y^l \right] \equiv \sum_{l=0}^{p-1} \varphi_l(x) y^l, \quad 0 \leq p \leq N, \quad \forall \varphi_l(x) \in C(\mathbf{R}),$$

а тому

$$R_{M,\rho} \left[\frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{s=0}^{p-1} f^{(0,s)}(x, y_k) \frac{(y - y_k)^s}{s!} \right] = 0. \quad (2.3.14)$$

Лему 2.3.1 доведено.

Для практики може бути також корисною простіша формула для інтерпліації на M ($M \geq 2$) паралельних прямих ($\rho \geq 1$,

$$\beta = \{\beta_i\}; \quad \varphi_{ks}(x) = f^{(0,s)}(x, y_k), \quad k = \overline{0, M-1}; \quad s = \overline{0, \rho-1}:$$

$$T_{M,\rho,\beta}f(x, y) = \sum_{k=0}^{M-1} h_{k0}(y) D_{k,\rho-1}f(x, y), \quad (2.3.15)$$

$$D_{k,\rho-1}f(x, y) = \sum_{i=0}^{\rho-1} \left[\alpha_{\rho-1,0,i} \varphi_{k0}(x + \beta_i(y - y_k)) + \right. \\ \left. + \sum_{s=0}^{\rho-1} \alpha_{\rho-1,s,i} \int_0^{x+\beta_i(y-y_k)} \varphi_{ks}(\xi) \frac{(x + \beta_i(y - y_k) - \xi)^{s-1}}{(s-1)!} d\xi \right]. \quad (2.3.16)$$

Враховавши, що функції $h_{k0}(y)$ мають властивості

$$\sum_{k=0}^{M-1} h_{k0}(y) \equiv 1, \quad h_{k0}^{(q)}(y_l) = 0, \quad l \neq k, \quad q = \overline{0, \rho-1}, \\ h_{k0}^{(q)}(y_k) = \delta_{0,q}, \quad q = \overline{0, \rho-1}; \quad k, l = \overline{0, M-1},$$

а також враховуючи (див. підрозд. 2.1) співвідношення

$$\frac{\partial^s D_{k,\rho-1}f}{\partial y^s} \Big|_{y=y_k} = f^{(0,s)}(x, y_k) = \varphi_{ks}(x), \quad 0 \leq s \leq \rho-1,$$

легко показати, що оператор $T_{M,\rho,\beta}$ має такі властивості:

$$\frac{\partial^s T_{M,\rho,\beta}f}{\partial y^s} \Big|_{y=y_l} = f^{(0,s)}(x, y_l) = \varphi_{ls}(x), \quad l = \overline{0, M-1}; \quad s = \overline{0, \rho-1}, \quad (2.3.17)$$

$$f(x, y) - T_{M,\rho,\beta}f(x, y) = \sum_{k=0}^{M-1} h_{k0}(y) r_{k,\rho,\beta}f(x, y), \quad (2.3.18)$$

$$r_{k,\rho,\beta}f(x, y) = (I - D_{k,\rho-1})f(x, y) = \quad (2.3.19)$$

$$= \int_0^{y-y_k} \left\{ \sum_{i=0}^{\rho-1} \Delta_{\rho-1,i}^{-1} \int_0^{x+\beta_i(y-y_k-z)} \left[\prod_{\nu=0}^{\rho-1} \left(-\beta_\nu \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \right) f(t, y_k + z) \right] \times \right. \\ \left. \times \frac{(x + \beta_i(y - y_k - z) - t)^{\rho-2}}{(\rho-2)!} dt \right\} dz, \quad \rho \geq 2,$$

$$r_{k,1,\beta_0} f(x, y) = \sum_{k=0}^{M-1} h_{k0}(y) \int_0^{y-y_k} \left[\left(-\beta_0 \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right) f \right] \times \\ \times (x + \beta_0(y - z - y_k), y_k + z) dz, \rho = 1, k = \overline{0, M-1}.$$

2.4. Раціональна інтерлінація $f(x, y)$ на системі прямих зі збереженням класу $C^r(\mathbf{R}^2)$

1°. **Узагальнення формули (2.3.15).** У підрозд. 2.3 розглянуто методи побудови операторів інтерлінації, що інтерлінують функції та їхні нормальні похідні до порядку $\rho_k - 1$ на кількох паралельних прямих $y = y_k, k = \overline{0, M-1}$ і зберігають клас диференційовності. У цьому підрозділі досліджується інтерлінація функцій двох змінних $f(x, y)$ зі збереженням класу $C^r(\mathbf{R}^2)$ на M ($M \geq 2$) прямих $\Gamma_k, k = \overline{1, M}$

$$\Gamma_k: \omega_k(x, y) := xa_k + yb_k - \gamma_k = 0, a_k^2 + b_k^2 = 1, \nu_k = \nabla\omega_k = (a_k, b_k),$$

довільним чином розміщених на площині.

Хай (t_k, ω_k) – ортогональна система координат, пов'язана з Γ_k , $t_k = t_k(x, y) := b_k x - a_k y$, $\omega_k = \omega_k(x, y)$. Для функції $f(x, y) \in C^r(\mathbf{R}^2)$, $r > N \geq 0$ уведемо позначення

$$\Phi_k(t_k, \omega_k) := f(t_k b_k + \omega_k a_k + \gamma_k a_k, -t_k a_k + \omega_k b_k + \gamma_k b_k) \equiv f(x, y),$$

$$\Phi_k^{(0,s)}(t_k, \omega_k) \Big|_{\omega_k=0} := \varphi_{ks}(t_k) (k = \overline{1, M}; s = \overline{0, N}); \quad \Phi_k^{(0,s)} := \partial^s \Phi_k / \partial \omega_k^s;$$

$$\frac{\partial^s f(x, y)}{\partial \nu_k^s} = \left(a_k \frac{\partial}{\partial x} + b_k \frac{\partial}{\partial y} \right)^s f(x, y).$$

Уведемо оператори

$$\tilde{D}_{Nk} f(x, y) = D_N \Phi_k(t_k, \omega_k) = \\ = \sum_{i=0}^N \lambda_{N0i} \varphi_{k0}(t_k + \beta_i \omega_k) + \sum_{s=1}^N \sum_{i=0}^N \lambda_{Nsi} \int_0^{t_k + \beta_i \omega_k} \varphi_{ks}(\xi) \frac{(t_k + \beta_i \omega_k - \xi)^{s-1}}{(s-1)!} d\xi,$$

які мають властивості (див. підрозд. 2.1)

$$\tilde{D}_{Nk} f(x, y) \in C^r(\mathbf{R}^2),$$

$$\frac{\partial^s \tilde{D}_{Nk} f(x, y)}{\partial \omega_k^s} \Big|_{\omega_k=0} = \varphi_{ks}(t_k) = \frac{\partial^s f(x, y)}{\partial \nu_k^s} \Big|_{\Gamma_k}, \quad k = \overline{1, M}, \quad s = \overline{0, N}.$$

Лема 2.4.1. Система раціональних функцій (при $m \in \mathbf{N}$)

$$H_{Nk}(x, y) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^M \omega_i^{\bar{N}}(x, y) / \sum_{\mu=1}^M \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq \mu}}^M \omega_i^{\bar{N}}(x, y), \quad \bar{N} = \begin{cases} N+1, & N=2m+1 \\ N+2, & N=2m, \end{cases}$$

є розкладом одиниці

$$\sum_{k=1}^M H_{Nk}(x, y) \equiv 1$$

і в усіх точках (за винятком точок $A_{ik} = \Gamma_i \cap \Gamma_k$)

$$\left. \frac{\partial^p H_{Nk}}{\partial \nu_q^p} \right|_{\Gamma_q} = \delta_{kq} \delta_{0p}, \quad 1 \leq k, q \leq M; 0 \leq p \leq N.$$

Д о в е д е н н я. Перша із зазначених властивостей очевидна. Те, що

$$\left. \frac{\partial^p H_{Nk}}{\partial \nu_q^p} \right|_{\Gamma_q} = 0, \quad q \neq k, 0 \leq p \leq N,$$

впливає з того, що чисельник функції H_{Nk} має множник $\omega_q^{\bar{N}}(x, y)$. Тому перевірити треба тільки випадок $q = k$. Очевидно, $H_{Nk} \big|_{\Gamma_k} = 1$.

Зобразимо H_{Nk} у вигляді

$$H_{Nk}(x, y) = \frac{\Omega_{Nk}(x, y)}{\Omega_{Nk}(x, y) + \omega_k^{\bar{N}}(x, y) \Psi_k(x, y)}, \quad \Omega_{Nk}(x, y) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^M \omega_i^{\bar{N}}(x, y).$$

Тоді

$$g_k = \frac{\partial H_{Nk}}{\partial \nu_k} = \frac{\Omega_{Nk} / \partial \nu_k \cdot \omega_k^{\bar{N}} \Psi_k - \Omega_{Nk} \frac{\partial}{\partial \nu_k} [\omega_k^{\bar{N}} \Psi_k]}{[\Omega_{Nk} + \omega_k^{\bar{N}} \Psi_k]^2}.$$

Звідси $g_k \big|_{\Gamma_k} = 0$ і $\partial^p g_k / \partial \nu_k^p \big|_{\Gamma_k} = 0$, $p = \overline{1, N-1}$.

Лему 2.4.1 доведено.

Теорема 2.4.1. Оператор

$$O_{MN}(f; x, y) = \sum_{k=1}^M H_{Nk}(x, y) D_{Nk} f(x, y) \quad (2.4.1)$$

в усіх точках (за винятком множини точок $G = \{A_{ik}\}$) має властивості

$$O_{MN}(f; x, y) \in C^r(\mathbf{R}^2 \setminus G), \quad (2.4.2)$$

$$\frac{\partial^p O_{MN}(f; x, y)}{\partial \nu_q^p} \Big|_{\Gamma_q} = \frac{\partial^p f}{\partial \nu_q^p} \Big|_{\Gamma_q} = \varphi_{qp}(t_q), \quad q = \overline{1, M}, p = \overline{0, N}. \quad (2.4.3)$$

При цьому, якщо $r_{Nk}f = (I - \tilde{D}_{Nk})f(x, y)$, то

$$f - O_{MN}(f; x, y) = \sum_{k=1}^M H_{Nk}(x, y) r_{Nk}f(x, y). \quad (2.4.4)$$

Якщо частинні похідні $\partial^{p+s} O_{MN}(f; x, y) / \partial x^p \partial y^s$, $0 \leq p + s \leq N$ у точках $A_{k,i} = \Gamma_i \cap \Gamma_k$ довізначити значеннями $f^{(p,s)}(A_{k,i})$, то таким чином доповнена функція $O_{MN}(f; x, y)$ належатиме до класу $C^N(\mathbf{R}^2) \cap C^r(\mathbf{R}^2 \setminus G)$.

Д о в е д е н н я. Властивість (2.4.2) впливає з того, що кожен доданок у (2.4.1) має цю властивість – адже функції $H_{Nk}(x, y)$ є дробово-раціональні функції, знаменники яких можуть анулюватися тільки в точці перетину прямих сім'ї $\{\Gamma_k\}$.

Для доведення властивостей (2.4.3) врахуємо, що

$$\frac{\partial^p}{\partial \nu_q^p} \left[H_{Nk}(x, y) \tilde{D}_{Nk}f(x, y) \right] \Big|_{\Gamma_q} = \delta_{q,k} \varphi_{kp}(t_k), \quad k, q = \overline{1, M}; 0 \leq p \leq N.$$

Формула (2.4.4) для залишку впливає з тотожностей

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \tilde{D}_{Nk}f(x, y) + r_{Nk}f(x, y) \implies \\ \implies f(x, y) &= \sum_{k=1}^N H_{Nk}(x, y) f(x, y) = \\ &= \sum_{k=1}^N H_{Nk}(x, y) [D_{Nk}f(x, y) + r_{Nk}f(x, y)] = \\ &= O_{MN}(f; x, y) + \sum_{k=1}^N H_{Nk}(x, y) r_{Nk}f(x, y). \end{aligned}$$

Доведення останнього твердження теореми зводиться до перевірки граничних співвідношень в точках A_{ik}

$$\lim_{(x,y) \rightarrow A_{ik}} \frac{\partial^{p+s} O_{MN}(f; x, y)}{\partial x^p \partial y^s} = f^{(p,s)}(A_{ik}), \quad 0 \leq p + s \leq N.$$

В їхній справедливості можна впевнитись безпосередньою перевіркою. Теорему 2.4.1 доведено.

2°. **Залишковий член.** Уведемо позначення

$$\begin{aligned}\tilde{A}_{N+1,l}f &= \sum_{i=0}^N \Delta_{N_i}^{-1} \beta_i^N (A_{N+1,l}f)(\theta_{li}(\kappa), \kappa), \\ (A_{N+1,l}f)(t_l, \omega_l) &=: \prod_{\nu=0}^N \left(-\beta_\nu \frac{\partial}{\partial t_l} + \frac{\partial}{\partial \omega_l} \right) \Phi_l(t_l, \omega_l), l = \overline{1, M}.\end{aligned}$$

Тоді залишкові члени $r_{N\ell}f$ можна зобразити у вигляді (див. формулу (2.1.15))

$$\exists(\theta_{\ell i}(\kappa_\ell), \kappa_\ell) : r_{N\ell}f(x, y) = \frac{\omega_\ell^{N+1}}{(N+1)!} (\tilde{A}_{N+1,l}f)(\bar{\Theta}_\ell(\kappa_\ell), \kappa_\ell), \quad \ell = \overline{1, M},$$

$$(\tilde{A}_{N+1,l}f)(\bar{\Theta}_\ell(x), x) = \sum_{i=0}^N \Delta_{N_i}^{-1} \beta_i^N (A_{N+1,l}f)(\Theta_{\ell i}(\kappa_\ell), \kappa_\ell),$$

а тому залишок $R_{MN}f = f(x, y) - O_{MN}(f; x, y)$ – у вигляді

$$R_{MN}f(x, y) = \sum_{l=1}^N H_{Nl}(x, y) \frac{\omega_l^{N+1}(x, y)}{(N+1)!} (\tilde{A}_{N+1,l}f)(\bar{\Theta}_l(\kappa_l), \kappa_l).$$

Із цього виразу для залишку, з урахуванням формул для H_{Nl} , отримаємо таку оцінку ($\bar{N} = N + 1$, $\bar{N} = 2m + 1$; $\bar{N} = N + 2$, $N = 2m$):

$$|R_{MN}f(x, y)| \leq C_{N+1, M} \prod_{k=1}^M |\omega_k(x, y)|^N K(x, y) / (N+1)!, \quad (2.4.5)$$

$$C_{N+1, M} = \max_{1 \leq \ell \leq M} \max_{(x, y) \in D} |(\tilde{A}_{N+1,l}f)(\bar{\Theta}_\ell(\kappa_\ell), \kappa_\ell)|,$$

$$K(x, y) = \left[\sum_{l=1}^M \prod_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq l}}^M \omega_\mu^{\bar{N}}(x, y) \right]^{-1} \times \begin{cases} \sum_{k=1}^M |\omega_k|^{-1}, & N = 2m, \\ 1, & N = 2m+1. \end{cases}$$

Для ефективного використання оцінки (2.4.5) треба розглядати конкретні області $D \subset R^2$, обмежені цими прямими.

Зауваження 1. Оператори $O_{MN}(f; x, y)$ використовують оператори $D_N f(x, y)$, що входять в узагальнену формулу Даламбера. З таким же успіхом можна використати інтегральні аналоги узагальненої формули Даламбера (див. підрозд. 2.1 монографії О.М.Литвина [1]).

Зауваження 2. У випадку, коли запропоновані формули інтерляції використовуються при розв'язанні граничних задач в областях

G багатокутної форми, обмежених відрізками Γ_k^1 ліній Γ_k , виникає задача продовження слідів $\varphi_{ks}(t_k)$ з Γ_k^1 на Γ_k . Це продовження має зберігати клас диференційовності $\varphi_{ks}(t_k) \in C^{r-s}(\mathbf{R})$, що фігурував у всіх попередніх твердженнях.

Зауваження 3. Як і у відповідному випадку для інтерлінації на системі паралельних прямих, можна замість оператора $\sum_{k=1}^M H_{N,k}(x,y)D_{N,k}f(x,y)$ досліджувати оператори

$$O_{MN}f(x,y) = \sum_{k=1}^M \left[H_{n,k,0}(x,y) \sum_{i=0}^N \lambda_{N0i} \varphi_{k0}(t_k + \beta_i \omega_k) + \sum_{s=1}^N H_{Nks}(x,y) \sum_{i=1}^M \sum_{i=0}^N \lambda_{Nsi} \int_0^{t_k + \beta_i \omega_k} \varphi_{k0}(\xi) \frac{(t_k + \beta_i \omega_k - \xi)^{s-1}}{(s-1)!} d\xi \right],$$

де $\{H_{Nks}\}$ – система допоміжних функцій з властивостями $\left. \frac{\partial^p H_{Nks}}{\partial \nu_k^p} \right|_{\omega_k=0} = \delta_{p,0}, p = 0, N-s$.

2.5. Узагальнена формула Даламбера для функцій трьох змінних

У цьому підрозділі розглянемо питання про побудову операторів L_N із властивостями (при $0 \leq N < r$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3, y = (x_2, x_3) \in \mathbf{R}^2$):

$$f(x) \in C^r(\mathbf{R}^3) \implies L_N f \in C^r(\mathbf{R}^3), \quad (2.5.1)$$

$$D_y^\lambda L_N f|_{y=0} = D_y^\lambda f|_{y=0} = \varphi_\lambda(x_1), \quad 0 \leq |\lambda| \leq N; \quad (2.5.2)$$

$$\lambda = (\lambda_2, \lambda_3), \quad |\lambda| = \lambda_2 + \lambda_3;$$

$$y = (x_2, x_3) \in \mathbf{R}^2, \quad y = 0 \iff y = (0, 0), \quad D_y^\lambda = \frac{\partial^{|\lambda|}}{\partial x_2^{\lambda_2} \partial x_3^{\lambda_3}}.$$

Такий оператор визначається наведеною нижче теоремою.

Теорема 2.5.1. Хай $N \in \mathbf{N}, s = (s_2, s_3), |s| = s_2 + s_3, \beta_i = (\beta_{i2}, \beta_{i3}), y = (x_2, x_3), \beta_i y = \beta_{i2} x_2 + \beta_{i3} x_3$. Оператор

$$L_N f(x) = \sum_{i=0}^Q C_{N0i} \varphi_0(x_1 + \beta_i y) +$$

$$+ \sum_{|s|=1}^N \sum_{i=0}^Q C_{Nsi} \int_0^{x_1+\beta_i y} \varphi_s(t) \frac{(x_1 + \beta_i y - t)^{|s|-1}}{(|s|-1)!} dt$$

має такі властивості (при $q = (q_2, q_3)$):

$$f(x) \in C^r(\mathbf{R}^3) \Rightarrow L_N f(x) \in C^r(\mathbf{R}^3),$$

$$D_y^q L_N f(x) = D_y^q f(x), x = (x_1, 0, 0), 0 \leq |q| = q_2 + q_3 \leq N.$$

Тут $Q = Q(N)$ – кількість елементів множини $\{q = (q_2, q_3) : 0 \leq |q| \leq N\}$. Числа C_{Nsi} знаходять розв'язанням таких систем лінійних алгебричних рівнянь (за умови, що числа $\beta_{i2}, \beta_{i3}, 0 \leq i \leq Q$ вибрані так, що ці системи мають єдині розв'язки):

$$\sum_{i=0}^Q C_{Nsi} \beta_i^q = \prod_{j=2}^3 \delta_{s_j, q_j}, 0 \leq |s|, |q| \leq N, \beta_i^q = \beta_{i2}^{q_2} \beta_{i3}^{q_3}. \quad (2.5.3)$$

Доведення цієї теореми можна провести перевіркою.
Зауважимо, що поліном Тейлора

$$T_N f(x) = \sum_{|s|=1}^N \varphi_s(x_1) \frac{(x_2)^{s_2} (x_3)^{s_3}}{(s_2)! (s_3)!}$$

теж задовольняє умови (2.5.2), але він не задовольняє умови (2.5.1).

Зауваження 1. Хай Γ – гладенька лінія в \mathbf{R}^3 ; $\Gamma : \omega_k(x_1, x_2, x_3) = 0, k = 2, 3, \nu_k = \nabla \omega_k(x)$; $(\tau, \omega) = (\tau, \omega_1, \omega_2)$ – місцева ортогональна система координат, у якій вектор $\mu = \nu_1 \times \nu_2$ напрямлений по дотичній до лінії Γ і $\mu = \nabla \tau$. Тоді функцію $\bar{L}_N f(x)$ із властивостями (2.5.1) та

$$\left. \frac{\partial^{|\lambda|} \bar{L}_N f(x)}{\partial \nu_2^{\lambda_2} \partial \nu_3^{\lambda_3}} \right|_{\Gamma} = \left. \frac{\partial^{|\lambda|} f(x)}{\partial \nu_2^{\lambda_2} \partial \nu_3^{\lambda_3}} \right|_{\Gamma}, \quad 0 \leq |\lambda| \leq N$$

в околі Γ можна побудувати за допомогою заміни змінних $x \Leftrightarrow (\tau, \omega), \omega = (\omega_2, \omega_3)$ у вигляді $\bar{L}_N f(x) \equiv L_N F(\tau, \omega)$, де $F(\tau, \omega) \equiv f(x(\tau, \omega))$.

Зауваження 2. Оператор

$$L_{1,3,N}^* f(x) = \sum_{i=0}^Q C_{N0i} \varphi_0(x_1 + \beta_i y) + \sum_{|s|=1}^N \sum_{i=0}^Q C_{Nsi} \int_0^{x_1+\beta_i y} \varphi_s(t_1) \frac{(x_1 + \beta_i y - t_1)^{|s|-1}}{(|s|-1)!} dt_1$$

має такі властивості (при $q = (q_2, q_3)$):

$$f(x) \in C^r(\mathbf{R}^3) \Rightarrow L_{1,3,N}^* f(x) \in C^r(\mathbf{R}^3),$$

$$D_y^q L_{1,3,N}^* f(x) = D_y^q f(x), x = (x_1, 0, 0), 0 \leq |q| = q_2 + q_3 \leq N.$$

Тут $Q = Q(n, N)$ – кількість різних значень q у множині $\{q = (q_2, q_3) : 0 \leq |q| \leq N\}$. Числа C_{Nsi} знаходять розв'язанням таких систем лінійних алгебричних рівнянь (за умови, що числа $\beta_{i2}, \beta_{i3}, 0 \leq i \leq Q$ вибрані так, що ці системи мають єдині розв'язки):

$$\sum_{i=0}^Q C_{Nsi} \beta_i^q = \prod_{j=2}^3 \delta_{sj, q_j}, 0 \leq |s|, 0 \leq |q| \leq N, \beta_i^q = \beta_{i2}^{q_2} \beta_{i3}^{q_3}.$$

Таким чином, оператор $L_{13N} f \in C^r(\mathbf{R}^n)$ зберігає клас $C^r(\mathbf{R}^n)$ і має властивості (2.5.2) для кожної $f(x) \in C^r(\mathbf{R}^n)$.

Твердження 2.5.1. Оператор $L_{13N}^* f(x)$ має такі ж властивості, як і оператор

$$\begin{aligned} L_{13N} f(x) &= \sum_{|q|=0}^N \lambda_{N0q} \varphi_0(x_1 + \sum_{p=2}^3 \beta_{qp} x_p) + \\ &+ \sum_{|s|=1}^N \sum_{|q|=0}^N \lambda_{Nsq} \int_0^{x_2} \int_0^{x_3} \varphi_s(x_1 + \sum_{p=2}^3 \beta_{qp} t_p) \prod_{p=2}^3 \frac{(x_p - t_p)^{s_p-1}}{(s_p - 1)!} dt_p, \\ &\sum_{|q|=0}^N \lambda_{Nsq} (\beta_q)^p = \delta_{0,p}, 0 \leq |p| = p_1 + p_2 \leq N. \end{aligned}$$

Такого типу оператори $L_{13N} f(x)$ можуть бути основою для побудови операторів із даними Коші на площині $x_3 = 0$, які зберігають клас диференційовності наближуваної функції та відновлюють функцію за допомогою слідів похідних $f^{(0,0,s_3)}(x_1, x_2, 0) = \varphi_{s_3}(x_1, x_2), 0 \leq s_3 \leq N$. Наведемо кілька прикладів.

Приклад 1. Хай система даних Коші має вигляд ($N \geq 1, N < r$)

$$\varphi_\lambda(x_1, x_2) = \sum_{l=1}^{N_0} |K_{\lambda,1l} x_1 + K_{\lambda,2l} x_2 + \gamma_{\lambda,l}|^{r-\lambda+1} \in C^{r-\lambda}(\mathbf{R}^2), 0 \leq \lambda \leq N.$$

Тоді класична формула Тейлора за степенями змінної x_3

$$T_N f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{\lambda=0}^N \varphi_\lambda(x_1, x_2) \frac{x_3^\lambda}{\lambda!}$$

має такі властивості

$$T_N f(x_1, x_2, x_3) \in C^{r-N}(\mathbf{R}^3);$$

$$\left. \frac{\partial^p T_N f}{\partial x_3^p} \right|_{x_3=0} = \varphi_p(x_1, x_2), 0 \leq p \leq N.$$

Якщо ж ми знайдемо такі елементи $\beta_{s,p,i}, s, i = \overline{0, N}, p = 1, 2$ матриць $\beta_{s,i} = \beta_{s,p,i}$, що системи

$$\sum_{0 \leq i \leq N} \lambda_{Nsi} (\beta_{s,1,i})^{q_1} (\beta_{s,2,i})^{q_2} = \delta_{q,0} (0 \leq |q| = |q_1 + q_2|, s \leq N) \quad (2.5.4)$$

відносно сталих λ_{Nsi} мають єдиний розв'язок, то функція (при $x = (x_1, x_2, x_3)$)

$$L_{23N}(x) = \sum_{0 \leq i \leq N} \lambda_{N0i} \varphi_0(x_1 + x_3 \beta_{0,1,i}, x_2 + x_3 \beta_{0,2,i}) + \quad (2.5.5)$$

$$+ \sum_{0 \leq i \leq N} \sum_{0 \leq s \leq N} \lambda_{Nsi} \int_0^{x_3} \varphi_s(x_1 + t \beta_{s,1,i}, x_2 + t \beta_{s,2,i}) \frac{(x_3 - t)^{s-1}}{(s-1)!} dt,$$

задовольняє умови (2.5.1), (2.5.2).

Зауваження 3. У формулі (2.5.5) матриці β_{si} мають, очевидно, задовольняти умови $\beta_{si} \neq \beta_{s'i'} (i \neq i')$. При цьому найпростіший випадок отримуємо, взявши $\beta_{si} = \beta_i = (\beta_{1,i}, \beta_{2,i}) \forall s, i (0 \leq s, i \leq N)$.

Запитання і вправи для самостійної роботи

1. Сформулюйте і доведіть аналоги леми 2.3.1 та теореми 2.3.1, а також отримайте аналог оцінки похибки (2.3.5) для залишку наближення диференційовних функцій операторами $O_{MN}f(x, y, z)$.

2. Побудуйте оператори кусково-поліноміальної інтерлінації на системі взаємно перпендикулярних прямих зі збереженням класу диференційовності (див. О.М. Литвин [1, п.2.6])

3. Вище узагальнена формула Даламбера розглядалася за умови, що параметри β_0, \dots, β_n є дійсними числами, що не дорівнюють одне одному. Побудуйте узагальнену формулу Даламбера для випадку, коли параметри β_0, \dots, β_n є дійсними або комплексними кратними числами (див. Литвин О.М. [1, п. 2.7])

4. Побудуйте узагальнену формулу Даламбера на лінії $y = 0$ для функції $f(x, y) = |x + y - 1|^3$, поклавши $N = 2$.

5. Побудуйте оператор раціональної інтерлінації із збереженням класу $C^2(\mathbf{R}^2)$, який інтерлінує функцію $f(x, y) = |x + y - 1|^3$ на лініях $x = 0$ та $y = 0$. Покладіть $N = 2$.

6. Побудуйте оператори інтерлінації $O_{31}f(x, y)$ з підрозд. 2.4, взявши три прямі: $\Gamma_1 : x = 0$; $\Gamma_2 : y = 0$; $\Gamma_3 : x/\sqrt{2} + y/\sqrt{2} - 1/\sqrt{2} = 0$.

7. Доведіть твердження 2.5.1.

Глава 3. Інтерлінація функцій двох змінних на $M (M \geq 2)$ прямих без збереження класу $C^r(\mathbb{R}^2)$

3.1. Раціональна інтерлінація на M перетинних прямих без збереження класу $C^r(\mathbb{R}^2)$

1°. Раціональна інтерлінація на перетинних прямих

Хай $f(x, y)$ – деяка функція двох змінних, Γ – деяка лінія на площині Oxy . Запис

$$f(x, y)|_{\Gamma} = g(x, y)|_{\Gamma}$$

означає, що в точках лінії Γ функції $f(x, y)$ і $g(x, y)$ мають однакові сліди, тобто ці дві функції на вказаній лінії Γ є однаковими функціями однієї змінної. Хай лінія Γ складається з об'єднання ліній $\Gamma_k : \omega_k(x, y) = 0, k = \overline{1, M}$ та $\varphi_{0,k}(x, y)$ – задані в \mathbb{R}^2 функції. У книзі В. Л. Рвачова [1, с. 201] запропоновано формулу (7.41)

$$\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^M \psi_i(x, y) \varphi_{0,i}(x, y),$$

де

$$\psi_i(x, y) = \frac{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^M \omega_k^2(x, y)}{\omega_i^2(x, y) + \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^M \omega_k^2(x, y)}, \quad i = \overline{1, M}$$

з властивостями

$$\varphi(x, y)|_{\Gamma_k} = \varphi_{0,k}(x, y)|_{\Gamma_k}, \quad k = \overline{1, M}.$$

Ця формула та її узагальнення широко застосовують у теорії R -функцій Рвачова для побудови структур наближених розв'язків крайових задач.

Зауважимо, що використані в ній допоміжні функції $\psi_i(x, y)$ не дають розклад одиниці, якщо $M > 2$, тобто

$$\sum_{i=1}^M \psi_i(x, y) \neq 1 \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Проте основна ідея, використана для побудови формули Рвачова, допускає узагальнення і для випадку, коли $\sum_{i=1}^M \psi_i(x, y) \equiv 1$ і коли на Γ_k

задано нормальні похідні до порядку N . Нижче викладено її узагальнення для випадку, коли Γ_k , $k = \overline{1, M}$ є системою перетинних прямих довільного розміщення на площині. У цьому узагальненні допоміжні раціональні функції дають розклад одиниці.

Хай прямі Γ_k визначаються нормальними рівняннями

$$\Gamma_k : \omega_k(x) := x_1 a_k + x_2 b_k - c_k = 0, a_k^2 + b_k^2 = 1.$$

Уведемо позначення:

$$\begin{aligned} x &= (x_1, x_2), \nu_k = (a_k, b_k) = \nabla \omega_k; \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2} \right), \tau_k = (b_k, -a_k), \\ D_0^{(k)} &= T_0^{(k)} = I; \quad D_s^{(k)} = (\nabla \omega_k, \nabla)^s = \left(a_k \frac{\partial}{\partial x_1} + b_k \frac{\partial}{\partial x_2} \right)^s, \\ T_s^{(k)} &= (\tau_k, \nabla)^s = \left(b_k \frac{\partial}{\partial x_1} - a_k \frac{\partial}{\partial x_2} \right)^s, \quad s \in \mathbb{N}; k = \overline{1, M}, \\ \mathfrak{R} &= \{1, \dots, M\}, \quad A_{ki} = (x_{1ki}, x_{2ki}) = \Gamma_i \cap \Gamma_k \neq \emptyset, \quad k, i \in \mathfrak{R}, \\ D_1^{(k)} \omega_l &= \nabla_{kl} = \nabla_{lk} = a_k a_l + b_k b_l, \\ T_1^{(l)} \omega_k &= a_k b_l - b_k a_l = \Delta_{kl} = -\Delta_{lk}. \end{aligned}$$

Нижче використовуються рівності

$$\begin{aligned} D_1^{(k)} &= \Delta_{kl} T_1^{(l)} + \nabla_{kl} D_1^{(l)}; T_1^{(k)} = \nabla_{kl} T_1^{(l)} - \Delta_{kl} D_1^{(l)}, \\ A_{kl} - \frac{\tau_l}{\Delta_{lk}} \omega_k(x) &\equiv x + \frac{\tau_k}{\Delta_{kl}} \omega_l(x) \Leftrightarrow \begin{cases} x_{1kl} - \frac{b_l}{\Delta_{lk}} \omega_k(x) \equiv x_1 + \frac{b_k}{\Delta_{kl}} \omega_l(x), \\ x_{2kl} + \frac{a_l}{\Delta_{lk}} \omega_k(x) \equiv x_2 - \frac{a_k}{\Delta_{kl}} \omega_l(x), \end{cases} \\ H_{kN}(x) &= \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^M \omega_i^{\bar{N}} / \sum_{\mu=1}^M \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq \mu}}^M \omega_i^{\bar{N}}, \quad k = \overline{1, M}, \bar{N} = \begin{cases} N+1, & N=2m+1, \\ N+2, & N=2m. \end{cases} \end{aligned}$$

Для розуміння теореми 3.1.1 і подальших тверджень, рекомендуємо читачеві самостійно довести наступне твердження і лему 3.1.1.

Твердження 3.1.1. Хай

$$\Phi_{k,N}(x) = \sum_{s=0}^N \varphi_{ks}(x - \omega_k(x) \nabla \omega_k) \frac{\omega^s(x)}{s!}.$$

Тоді

$$D_p^{(k)} \Phi_{kN} |_{\Gamma_k} = \varphi_{kp}(x) |_{\Gamma_k}, p = \overline{0, N} \quad (3.1.1)$$

Лема 3.1.1. *Функції $H_{kN}(x)$ задовольняють властивості*

$$\sum_{k=1}^M H_{kN}(x) = 1,$$

$$\frac{\partial^p H_{kN}(x)}{\partial \nu_q^p} \Big|_{\Gamma_q} = \delta_{p,0} \delta_{q,k}, \quad q, k = \overline{1, M}, \quad p = \overline{0, N}. \quad (3.1.2)$$

Теорема 3.1.1. *Хай $\varphi_{ks}(x) \in C^{r-s}(\mathbf{R}^2)$, $k = \overline{1, M}$; $s = \overline{0, N}$; $r > 2N$. Тоді оператор*

$$O_{MN}(\{\varphi_{ks}\}; x) = \sum_{k=1}^M \sum_{s=0}^N H_{kN}(x) \sum_{s=0}^N \varphi_{ks}(x - \omega_k(x) \nabla \omega_k) \frac{\omega_k^s(x)}{s!} \quad (3.1.3)$$

має властивості

$$O_{MN}(\{\varphi_{ks}\}; x) \in C^{r-N}(\mathbf{R}^2 \setminus G), \quad G = \bigcup_{k \neq \ell} (\Gamma_\ell \cap \Gamma_k), \quad (3.1.4)$$

$$\frac{\partial^p O_{MN}(\{\varphi_{ks}\}; x)}{\partial \nu_q^p} \Big|_{\Gamma_q} = \varphi_{qp}(x) \Big|_{\Gamma_q}, \quad q = \overline{1, M}, \quad p = \overline{0, N}. \quad (3.1.5)$$

При цьому, якщо $f(x) \in C^r(\mathbf{R}^2)$, $r > 2N$ – довільна функція, що задовольняє умови

$$\frac{\partial^s f(x)}{\partial \nu_k^s} \Big|_{\Gamma_k} = \varphi_{ks}(x) \Big|_{\Gamma_k}, \quad k = \overline{1, M}, \quad s = \overline{0, N},$$

то для залишку $r_{MN}f(x) = (I - O_{MN})f(x)$, $O_{MN}f(x) := O_{MN}(\{\varphi_{ks}\}; x)$ справедлива рівність $r_{MN}f(x) =$

$$= \sum_{k=1}^M H_{kN}(x) \int_0^{\omega_k(x)} (D_{N+1}^{(k)} f)(x - (\omega_k - t) \nabla \omega_k) \frac{(\omega_k(x) - t)^N}{N!} dt. \quad (3.1.6)$$

Д о в е д е н н я. Сума $\Phi_{kN}(x)$ належить до класу $C^{r-N}(\mathbf{R}^2)$, бо

$$\varphi_{ks}(x - \omega_k \nabla \omega_k) \in C^{r-s}(\mathbf{R}^2). \quad (3.1.7)$$

Виходячи з (3.1.1) і (3.1.7), властивості (3.1.2) можна встановити безпосередньою перевіркою. Із твердження леми 3.1.1 та тотожностей

$$f(x) = \sum_{s=0}^N \varphi_{ks}(x - \omega_k \nabla \omega_k) \frac{\omega_k^s(x)}{s!} +$$

$$+ \int_0^{\omega_k(x)} (D_{N+1}^{(k)} f)(x - (\omega_k - t)\nabla\omega_k) \frac{(\omega_k(x) - t)^N}{N!} dt$$

впливає, що

$$f(x) = \sum_{k=1}^N H_{kN}(x) f(x) = \sum_{k=1}^N H_{kN}(x) \left[\sum_{s=0}^N \varphi_{ks}(x - \omega_k \nabla\omega_k) \frac{\omega_k^s(x)}{s!} + \int_0^{\omega_k(x)} (D_{N+1}^{(k)} f)(x - (\omega_k - t)\nabla\omega_k) \frac{(\omega_k(x) - t)^N}{N!} dt \right] = O_{MN} f(x) + r_{MN} f(x).$$

Тобто рівність (3.1.6) доведено.

Теорему 3.1.1 доведено.

Н а с л і д о к 1. З формули (3.1.6) для залишку впливає, що оператор $O_{MN} f(x)$ є точним на поліномах від двох змінних до степеня N включно ($\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$):

$$O_{MN} x^\alpha \equiv x^\alpha, \quad 0 \leq |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 \leq N. \quad (3.1.8)$$

Для функції $f(x) = \omega_1^{N+1} \dots \omega_M^{N+1}$ маємо $O_{MN} f(x) \equiv 0$. Отже, цей оператор не є точним на поліномах степеня $M(N+1)$.

Зауважимо, що при побудові функцій $H_{kN}(x)$ можна вважати \bar{N} довільним числом (навіть не натуральним), більшим за $N+1$: $\bar{N} \geq N+1$. При цьому $0 \leq H_{kN}(x) \leq 1$ лише при \bar{N} парному або лише в точках $x: \omega_i(x) > 0, i = \overline{1, \bar{M}}$.

Приклад 1. Хай $N = 0, M = 3, \Gamma_1: \omega_1 =: x_1 = 0, \Gamma_2: \omega_2 =: x_2 = 0, \Gamma_3: \omega_3(x) =: (1 - x_1 - x_2)/\sqrt{2} = 0$. Довести, що оператор

$$O_{30} f(x) = \left[(x_1 + x_2)(1 - x_1 - x_2)/\sqrt{2} + x_1 x_2 \right]^{-1} \times \\ \times \left[x_1(1 - x_1 - x_2)/\sqrt{2} f(x_1, 0) + x_2(1 - x_1 - x_2)/\sqrt{2} f(0, x_2) + \right. \\ \left. + x_1 x_2 f\left(\frac{x_1 - x_2 + 1}{2}, \frac{x_2 - x_1 + 1}{2}\right) \right]$$

має такі властивості: $O_{30} C = C, C = \text{const}, O_{30} x_i \neq x_i, i = 1, 2,$

$$O_{30} f(x_1, 0) = f(x_1, 0), \quad O_{30} f(0, x_2) = f(0, x_2), \\ O_{30} f(x_1, 1 - x_1) = f(x_1, 1 - x_1). \quad (3.1.9)$$

Приклад 2. Довести, що оператор

$$\begin{aligned} \bar{O}_{30}f &= O_{30}f + \left[(x_1 + x_2)(1 - x_1 - x_2)/\sqrt{2} + x_1x_2 \right]^{-1} \times \\ &\times \frac{x_1x_2(1 - x_1 - x_2)}{\sqrt{2}} \left[\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \left[f^{(1,0)}(1,0) + f^{(0,1)}(0,1) \right] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sqrt{2}}{4}f^{(1,1)}(0,0) + \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{4} \right) f^{(1,1)}(0,0)(x_1 + x_2) \right] \end{aligned}$$

відновлює поліноми степеня x^α ($0 \leq \alpha_i \leq 1; i = 1, 2$):

$$\bar{O}_{30}x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2} = x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2} \quad (0 \leq \alpha_1 + \alpha_2 \leq 1). \quad (3.1.10)$$

Підкреслимо: оператор $\bar{O}_{30}f(x)$ теж інтерлінує всяку двічі неперервно диференційовну функцію $f(x)$ на всіх трьох прямих Γ_i , $i = \overline{1,3}$, тобто він має властивості (3.1.9).

У цьому прикладі при побудові функціоналів $C_\alpha(f)$ використані похідні $f^{(i,j)}$ ($0 \leq i, j \leq 1$) у різних точках прямих Γ_i , $i = \overline{1,3}$. Наведемо приклад оператора з тими ж властивостями (3.1.9), (3.1.10), для побудови якого не вимагається диференційовність $f(x)$:

$$\begin{aligned} \bar{O}_{30}f(x) &= O_{30}f(x) + \frac{x_1x_2(1 - x_1 - x_2)/\sqrt{2}}{(x_1 + x_2)(1 - x_1 - x_2)/\sqrt{2} + x_1x_2} \times \\ &\times \left[\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) [f(1,0) + f(0,1) - 2f(0,0)] + \right. \\ &\quad \left. + \left[4f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) - 2f(1,0) - 2f(0,1) \right] \left(-\frac{\sqrt{2}}{4} + \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{4} \right) (x_1 + x_2) \right) \right]. \end{aligned}$$

2°. Рациональна інтерлінація на трикутнику T без збереження класу $C^r(T)$. У зв'язку з практичною цінністю у цьому підрозділі розглянемо також методи побудови операторів раціональної інтерлінації на сторонах трикутника. Усі методи мають найвищу алгебричну точність, тобто точно відновлюють поліноми найвищого степеня за відомими їхніми слідами та слідами їхніх частинних похідних до порядку N включно, де $N = 0, 1, \dots$ на межі ∂T трикутника T .

В основному використовуватимемо стандартний трикутник T з вершинами $V_1(0,0)$, $V_2(0,1)$, $V_3(1,0)$. Інтерлінант $P[f](x,y)$ має використовувати тільки три функції $\varphi(x) = f(x,0)$, $\psi(y) = f(0,y)$, $\eta(x) = f(x,1-x)$ і мати властивості

$$\begin{aligned} P[f](0,y) &= f(0,y), \\ P[f](x,0) &= f(x,0), \\ P[f](x,1-x) &= f(x,1-x). \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

Усі запропоновані методи зображують P у формі

$$P[f](x, y) = \sum_{i=1}^N \omega_i(x, y) f(\alpha_i(x, y), \beta_i(x, y)). \quad (3.1.12)$$

Зауважимо, що в цитованій літературі оператори інтерлінації часто називають операторами мішаної інтерполяції (blending function interpolation operators). Функції ω_i , $i = 1, \dots, N$ називають *ваговими функціями*; система допоміжних функцій $(\alpha_i(x, y), \beta_i(x, y)) \in \partial T$, $i = 1, \dots, N$ будеться після вибору системи вузлів на сторонах трикутника, що називається *шаблоном інтерлінації*. В операторі трилінійної інтерлінації

$$\begin{aligned} Q^*[f] = & \frac{1}{2} \left[\frac{1-x-y}{1-y} f(0, y) + \frac{1-x-y}{1-x} f(x, 0) + \right. \\ & + \frac{y}{1-x} f(x, 1-x) + \frac{x}{1-y} f(1-y, y) + \frac{x}{x+y} f(x+y, 0) + \\ & \left. + \frac{y}{x+y} f(0, x+y) - xf(1, 0) - (1-x-y)f(0, 0) - yf(0, 1) \right]. \end{aligned} \quad (3.1.13)$$

використовується шаблон з такими вузлами: $(0, y)$, $(x, 0)$, $(x, 1-x)$, $(1-y, y)$, $(x+y, 0)$, $(0, x+y)$, $(1, 0)$, $(0, 0)$, $(0, 1)$ та такими раціональними допоміжними функціями: $\frac{1-x-y}{1-y}$, $\frac{1-x-y}{1-x}$, $\frac{y}{1-x}$, $\frac{x}{1-y}$, $\frac{x}{x+y}$, $\frac{y}{x+y}$, x , y , $1-x-y$. Афінні перетворення, що пов'язують T і довільний трикутник Δ з вершинами $V_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, 2, 3$, можна використати для отримання так званих афінно еквівалентних інтерлінантів. Для $F(s, t)$, $(s, t) \in \Delta$ цей процес можна описати формулою

$$P_{\Delta}[F](s, t) = P[\tilde{f}](b_j(s, t), b_k(s, t)), \quad (s, t) \in \Delta, \quad (3.1.14)$$

де $\tilde{f}(x, y) = F(xV_i + yV_j + (1-x-y)V_k) =$

$$= F(xx_i + yy_j + (1-x-y)x_k, xy_i + yy_j + (1-x-y)y_k), \quad (3.1.15)$$

$$\tilde{f}(0, 0) = F(x_k, y_k); \tilde{f}(1, 0) = F(x_i, y_i); \tilde{f}(0, 1) = F(x_j, y_j).$$

Якщо кожне з шести афінних перетворень приводить до інтерлінанта з однаковими інтерлінаційними властивостями, то такі методи побудови інтерлінантів називають *афінно інваріантними*. Наприклад, формула (3.1.13) отримується, якщо $b_1 = 1-x-y$, $b_2 = y$, $b_3 = x$, з формули $Q^*[F] =$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j \neq k}}^3 \left[\frac{b_k F(b_i V_i + (1-b_i) V_k) + b_j F(b_i V_i + (1-b_i) V_j)}{1-b_i} - b_i F(V_i) \right].$$

Означення 1. *Оператор P має алгебричну точність k , якщо*

$$P[q] = q \forall q \in \prod^k = \{f : f(x, y) = x^i y^j, 0 \leq i + j \leq k\}.$$

Очевидно, що оператори вигляду (3.1.14) мають алгебричну точність 2. Це випливає з того, що кубічний поліном $f = xy(1 - x - y)$ дорівнює тотожно нулю на ∂T , тому $P[f](x, y) = 0$.

3.2. Поліноміальна інтерлінація на системі взаємно перпендикулярних прямих

3.2.1. Поліноміальна інтерлінація на системі взаємно перпендикулярних прямих

Хай $\Gamma_{1i_1}, i_1 = \overline{1, M_1}, \Gamma_{2i_2}, i_2 = \overline{1, M_2}$ – дві системи взаємно перпендикулярних прямих, які, не зменшуючи загальності, вважатимемо паралельними осям координат Ox_1 та Ox_2 :

$$\Gamma_{1i_1} : x_1 = x_{1i_1}, i_1 = \overline{1, M_1}, \quad \Gamma_{2i_2} : x_2 = x_{2i_2}, i_2 = \overline{1, M_2}.$$

Хай $\varphi_{1i_1 s_1}(x_2), s_1 = \overline{0, N}$ та $\varphi_{2i_2 s_2}(x_1), s_2 = \overline{0, N}$ – дві системи функцій, кожна з яких залежить від однієї змінної (x_1 або x_2); $h_{ki s_k}(x_k) = h_{k M_k i_k s_k}(x_k), k = \overline{1, 2}$ – фундаментальні (базисні) поліноми Ерміта, тобто поліноми від змінної x_k степеня $M_k(N + 1) - 1$ із такими властивостями

$$h_{ki s_k}^{(p_k)}(x_{kj_k}) = \delta_{i_k, j_k} \delta_{s_k, p_k}, \quad i_k, j_k = \overline{1, M_k}, s_k, p_k = \overline{0, N}, k = 1, 2. \quad (3.2.1)$$

Теорема 3.2.1. *Якщо функції $\varphi_{1i_1 s_1} \in C^{r-s_1}(\mathbf{R}), \varphi_{2i_2 s_2} \in C^{r-s_2}(\mathbf{R}), r \geq 2N$ задовольняють у точках перетину прямих Γ_{1i_1} та Γ_{2i_2} умови С. М. Нікольського $\Upsilon_i^{N, N}, i = (i_1, i_2), s = (s_1, s_2), i_k = \overline{1, M_k}, s_k = \overline{0, N}, k = 1, 2,$*

$$\varphi_{1i_1 s_1}^{(s_2)}(x_{2i_2}) = \varphi_{2i_2 s_2}^{(s_1)}(x_{1i_1}) = f_{is}, \quad (3.2.2)$$

то оператор ($M = (M_1, M_2)$)

$$\begin{aligned} E_{MN}(x) &= \sum_{k=1}^2 \sum_{i_k=1}^{M_k} \sum_{s_k=0}^N h_{ki s_k}(x_k) \varphi_{ki s_k}(x_{3-k}) - \\ &- \sum_{i_1=1}^{M_1} \sum_{i_2=1}^{M_2} \sum_{s_1, s_2=0}^N f_{is} \prod_{k=1}^2 h_{ki s_k}(x_k) \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

має такі властивості:

$$E_{MN}(x) = E_{MN}(\{\varphi_{ki s_k}\}; x) \in C^{r-N}(\mathbf{R}^2), \quad (3.2.4)$$

$$\left. \frac{\partial^{q_k} E_{MN}}{\partial x_k^{q_k}} \right|_{x_k=x_{k i_k}} = \varphi_{k i_k q_k}(x_{3-k}), q_k = \overline{0, N}, i_k = \overline{1, M_k}, k = 1, 2. \quad (3.2.5)$$

При цьому, якщо $f(x) \in C^r(\mathbf{R}^2)$, $r \geq 2N + 2$ - довільна функція, що задовольняє умови (3.2.5), тобто $\left. \frac{\partial^{q_k} f}{\partial x_k^{q_k}} \right|_{x_k=x_{k i_k}} = \varphi_{k i_k q_k}(x_{3-k})$, $0 \leq q_k \leq N$, $1 \leq i_k \leq M_k$, $k = 1, 2$, то $E_{MN}(\{\varphi_{k i_k s_k}\}; x) = E_{MN} f(x)$ і для залишку $R_{MN} f(x) = (I - E_{MN})f(x)$ справедливі інтегральні зображення ($\xi = (\xi_1, \xi_2)$):

$$R_{MN} f(x) = \sum_{i_1=1}^{M_1} \sum_{i_2=1}^{M_2} \sum_{s_1=0}^N \sum_{s_2=0}^N \prod_{k=1}^2 h_{k i_k s_k}(x_k) \times \\ \times \int_{x_{1 i_1}}^{x_1} \int_{x_{2 i_2}}^{x_2} f^{(p)}(\xi) \prod_{k=1}^2 \frac{(x_{k i_k} - \xi_k)^{p_k - s_k - 1}}{(p_k - s_k - 1)!} d\xi_k, \quad (3.2.6)$$

$$\forall p = (p_1, p_2): N + 1 \leq p_k \leq M_k(N + 1), k = 1, 2,$$

$$f^{(p)}(\xi) = f^{(p_1, p_2)}(\xi_1, \xi_2),$$

$$R_{MN} f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f^{(p)}(\xi) \prod_{k=1}^2 G_{k M_k N p_k}(x_k, \xi_k) d\xi,$$

$$G_{k M_k N p_k}(x_k, \xi_k) = \sum_{i_k=1}^{M_k} \sum_{s_k=0}^N h_{k i_k s_k}(x_k) \frac{(x_{k i_k} - \xi_k)^{p_k - s_k - 1}}{(p_k - s_k - 1)!} \chi(x_{k i_k}, x_k; \xi_k),$$

$$\chi(a, b; t) := \begin{cases} 0, & t \notin [a, b], \\ 1, & a \leq t \leq b, \\ -1, & b \leq t < a. \end{cases}$$

Д о в е д е н н я. Зауважимо, що оператор $E_{MN} f(x)$ можна зобразити у вигляді

$$E_{MN} f(x) = (E_{1 M_1 N} + E_{2 M_2 N} - E_{1 M_1 N} E_{2 M_2 N}) f(x), \quad (3.2.7)$$

де

$$E_{k M_k N} f(x) = \sum_{i_k=1}^{M_k} \sum_{s_k=0}^N h_{k i_k s_k}(x_k) \left[\left. \frac{\partial^{s_k} f}{\partial x_k^{s_k}} \right|_{x_k=x_{k i_k}} \right], \quad k = 1, 2. \quad (3.2.8)$$

Оператори E_{kM_kN} є інтерполяційними операторами (поліномами Ерміта за змінними $x_k, k = 1, 2$) із властивостями

$$\left. \frac{\partial^{p_k} E_{kM_kN} f(x)}{\partial x_k^{p_k}} \right|_{x_k=x_{ki_k}} = \left. \frac{\partial^{p_k} f}{\partial x_k^{p_k}} \right|_{x_k=x_{ki_k}} = \varphi_{ki_k p_k}(x_{3-k}), \quad 0 \leq p_k \leq N. \quad (3.2.9)$$

Ці оператори переставні один з одним, причому

$$\begin{aligned} E_{1M_1N} E_{2M_2N} f(x) &= E_{2M_2N} E_{1M_1N} f(x) = \\ &= \sum_{i_1=1}^{M_1} \sum_{i_2=1}^{M_2} \sum_{s_1, s_2=0}^N f^{(s)}(x_i) \prod_{k=1}^2 h_{ki_k s_k}(x_k), \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

$$D^{(p)} [E_{1M_1N} E_{2M_2N} f(x)] \Big|_{\substack{x_1=x_{1i_1} \\ x_2=x_{2i_2}}} = f^{(p)}(x_i) = f_{ip}, \quad (3.2.11)$$

$0 \leq p_k \leq N, 1 \leq i_k \leq M_k, k = 1, 2$, бо (при $x_i = (x_{1i_1}, x_{2i_2})$)

$$\varphi_{ki_k p_k}^{(p_3-k)}(x_{3-k}, i_{3-k}) = f_{ip} = D^{(p)} f \Big|_{x=x_i}, \quad p = (p_1, p_2). \quad (3.2.12)$$

Враховавши рівності (3.2.11) та (3.2.12), отримаємо ($0 \leq p_k \leq N, 1 \leq i_k \leq M_k, k = 1, 2$):

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^{p_k} E_{MN} f}{\partial x_k^{p_k}} \right|_{x_k=x_{ki_k}} &= \sum_{j=1}^2 \left. \frac{\partial^{p_k} E_{jM_jN} f}{\partial x_k^{p_k}} \right|_{x_k=x_{ki_k}} - \\ &- \left. \frac{\partial^{p_k} [E_{1M_1N} E_{2M_2N} f]}{\partial x_k^{p_k}} \right|_{x_k=x_{ki_k}} = \varphi_{ki_k p_k}(x_{3-k}), \end{aligned}$$

що доводить властивості (3.2.5). Властивість (3.2.4) випливає з припущень щодо класу диференційовності функцій $\varphi_{ki_k p_k}(x_{3-k})$.

Для доведення формули (3.2.6) зобразимо залишок у вигляді

$$\begin{aligned} R_{MN} f(x) &= (I - E_{1M_1N} - E_{2M_2N} + E_{1M_1N} E_{2M_2N}) f(x) = \\ &= (I - E_{1M_1N})(I - E_{2M_2N}) f(x) = R_1 R_2 f(x), \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

де $R_k f(x) = (I - E_{kM_kN}) f(x)$, $k = 1, 2$ - залишки наближення функції $f(x)$ з допомогою одновимірної ермітової інтерполяції (за змінною x_k), для якої при $k = 1, 2$ справедливе зображення: $R_k f(x) =$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i_k=1}^{M_k} \sum_{s_k=0}^N h_{ki_k s_k}(x_k) \int_{x_{ki_k}}^{x_k} \left[\frac{\partial^{p_k}}{\partial \xi_k^{p_k}} [f(x)]_{x_k=\xi_k} \right] \frac{(x_{ki_k} - \xi_k)^{p_k - s_k - 1}}{(p_k - s_k - 1)!} d\xi_k, \end{aligned} \quad (3.2.14)$$

$N + 1 \leq p_k \leq M(N + 1)$. Підставивши формули (3.2.14) у рівність (3.2.13), яка є добутком двох операторів, отримаємо доведення (3.2.6).

Теорему 3.2.1 доведено.

Н а с л і д о к 1. Оператори E_{MN} є точними на поліномах $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$ від двох змінних степеня $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 \leq (M_1 + M_2)(N + 1) - 1$:

$$E_{MN} x^\alpha \equiv x^\alpha (\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)). \quad (3.2.15)$$

Для порівняння зауважимо, що залишок наближення функції $f(x)$ за допомогою звичайних двовимірних поліномів Ерміта $E_{1M_1N} E_{2M_2N} f(x)$ з інтерполяційними властивостями (3.2.11) має вигляд

$$\begin{aligned} (I - E_{1M_1N} E_{2M_2N}) f(x) &= \\ &= [(I - E_{1M_1N}) + (I - E_{2M_2N}) - (I - E_{1M_1N})(I - E_{2M_2N})] f(x) = \\ &= R_1 f + R_2 f - R_1 R_2 f. \end{aligned} \quad (3.2.16)$$

Як видно з формули (3.2.16), оператори звичайної ермітової двовимірної інтерполяції $E_{1M_1N} E_{2M_2N}$ є точними на поліномах від двох змінних степеня до $m(N + 1) - 1$, $m = \min(M_1, M_2)$ включно:

$$E_{1M_1N} E_{2M_2N} x^\alpha \equiv x^\alpha, \quad 0 \leq |\alpha| \leq m(N + 1) - 1. \quad (3.2.17)$$

Зауважимо, що у науковій літературі ці твердження часто формулюються так: оператори E_{MN} та $E_{1M_1N} E_{2M_2N}$ мають алгебраїчну точність $(M_1 + M_2)(N + 1) - 1$ та $m(N + 1) - 1$, відповідно.

Рівності (3.2.13) та (3.2.16) та їхні наслідки (3.2.15), (3.2.17) чітко показують різницю між операторами інтерлінації на системі взаємно перпендикулярних прямих і операторами двовимірної інтерполяції на системі точок – перетині вказаних перпендикулярних прямих. Суть її в тому, що порядок точності операторів поліноміальної ермітової інтерлінації можна збільшити (при заданому N) за рахунок збільшення одного з чисел M_1 або M_2 , а в операторах поліноміальної ермітової інтерполяції – тільки за рахунок збільшення M_1 і M_2 одночасно.

Н а с л і д о к 2. Якщо функція $f(x)$ має неперервні похідні $f^{(p)}(x)$, $p = (p_1, p_2)$, $0 \leq p_k \leq M_k(N + 1)$, то існують такі числа η_1 та η_2 , $\eta_k \in (x_{k,1}, x_{k,M_k})$, $k = 1, 2$, що для залишку поліноміальної інтерлінації можна записати рівність

$$R_{MN} f(x) = \frac{f^{(M_1(N+1), M_2(N+1))}(\eta_1, \eta_2)}{(M_1(N+1))! (M_2(N+1))!} \prod_{k=1}^2 \prod_{i_k=1}^{M_k} (x_k - x_{k i_k})^{N+1}. \quad (3.2.18)$$

Доведення рівності (3.2.18) випливає з рівності (3.2.13) та відомих рівностей для залишків $R_k f$, $k = 1, 2$: $R_k f(x) =$

$$= \left[\frac{\partial^{M_k(N+1)} f(x)}{\partial x_k^{M_k(N+1)}} \Big|_{x_k = \eta_k} \right] \prod_{i_k=1}^{M_k} (x_k - x_{k i_k})^{N+1} / (M_k(N+1))!. \quad (3.2.19)$$

Теорема 3.2.2. *Хай функція $f(x)$ означена на одиничному квадраті $D_e = [0, 1]^2$ і задовольняє такі умови (при $s = (s_1, s_2), p = (p_1, p_2)$):*

$$f^{(s)}(x) \in C(D_e), \quad 0 \leq s_k < p_k \leq M_k(N+1), \quad k = 1, 2, \quad (3.2.20)$$

$$\|f^{(p)}\|_{L_\nu(D_e)} < \infty, \quad 1 \leq \nu \leq \infty, p_k \geq N+1, k = 1, 2.$$

Хай також система взаємно перпендикулярних прямих $\Gamma_{1i_1}, \Gamma_{2i_2}$ перетинає цей одиничний квадрат:

$$\Gamma_{ki_k} : x_k = x_{ki_k}, \quad 0 \leq x_{k1} < \dots < x_{kM_k} \leq 1, \quad k = 1, 2.$$

Тоді для залишку $R_{MN}f$ наближення функції $f(x)$ за допомогою оператора $E_{MN}f(x)$ справедлива нерівність (при $1 \leq \mu, \nu \leq \infty$)

$$\|R_{MN}f\|_{L_\mu(D_e)} \leq \|f^{(p)}\|_{L_\nu(D_e)} \prod_{k=1}^2 g_{kM_k N p_k \nu \mu}, \quad (3.2.21)$$

де

$$g_{kM_k N p_k \nu \mu} = \left\{ \int_0^1 \left[\int_0^1 |G_{kM_k N p_k}(x_k, \xi_k)|^{\nu'} d\xi_k \right]^{\mu/\nu'} dx_k \right\}^{1/\mu}, \quad \frac{1}{\nu} + \frac{1}{\nu'} = 1.$$

Д о в е д е н н я. Зауважимо, якщо $x \in D_e$, то формулу (3.2.6) для залишку можна переписати також у вигляді

$$R_{MN}f(x) = \int_0^1 \int_0^1 f^{(p)}(\xi) \prod_{k=1}^2 G_{kM_k N p_k}(x_k, \xi_k) d\xi_k, \quad x \in D_e. \quad (3.2.22)$$

Застосувавши до інтеграла в (3.2.22) нерівність Гельдера, отримаємо

$$|R_{MN}f(x)| \leq \|f^{(p)}\|_{L_\nu(D_e)} \prod_{k=1}^2 \left[\int_0^1 |G_{kM_k N p_k}(x_k, \xi_k)|^{\nu'} d\xi_k \right]^{1/\nu'}.$$

З останньої нерівності випливає, що

$$\|R_{MN}f\|_{L_\mu(D_e)} \leq \|f^{(p)}\|_{L_\nu(D_e)} \prod_{k=1}^2 g_{kM_k N p_k \nu \mu}.$$

Теорему 3.2.2 доведено.

Н а с л і д о к 3. Хай функція $f(y)$, $y = (y_1, y_2)$ визначена на прямокутнику $\Pi = [c_1, d_1] \times [c_2, d_2]$ і задовольняє умови

$$f^{(s)}(y) \in C(\Pi), \quad 0 \leq s_k < p_k \leq M(N+1), k = 1, 2, \quad (3.2.23)$$

$$\left\| f^{(p)} \right\|_{L_\nu(\Pi)} \leq 1, \quad 1 \leq \nu \leq \infty, p_k \geq N+1, k = 1, 2.$$

Хай також система взаємно перпендикулярних прямих $\Gamma_{ki_k} : y_k = y_{ki_k}$ перетинає цей прямокутник

$$c_k \leq y_{k,1} < y_{k,2} < \dots < y_{k,N_k} \leq d_k, \quad k = 1, 2$$

і числа y_{ki_k} пов'язані з числами x_{ki_k} , що фігурують у теоремі 3.2.1, так:

$$y_{ki_k} = c_k + (d_k - c_k)x_{ki_k}, \quad y_k = c_k + x_k(d_k - c_k), \quad k = 1, 2. \quad (3.2.24)$$

Тоді для залишку $\tilde{R}_{mn}f(y) = f(y) - \tilde{E}_{MN}f(y)$ наближення функції $f(y)$ з допомогою інтерлінаційного оператора $\tilde{E}_{MN}f(y) =: E_{MN}f(y(x))$ справедлива нерівність (при $1 \leq \mu, \nu \leq \infty$)

$$\left\| \tilde{R}_{MN}f \right\|_{L_\mu(\Pi)} \leq \prod_{i_k=1}^2 (d_k - c_k)^{p_k-1/\mu+1/\nu} g_{kM_kN_kp_k\nu\mu}, \quad (3.2.25)$$

де $g_{kM_kN_kp_k\nu\mu}$ – ті ж числа, що і в теоремі 3.2.2.

Д о в е д е н н я. Зауважимо, що в операторі $\tilde{E}_{MN}f(y)$ замість вузлів x_{ki_k} мають фігурувати вузли y_{ki_k} . Уведемо функцію $\varphi(x) = f(c_1 + x_1(d_1 - c_1), c_2 + x_2(d_2 - c_2))$, $x \in D_e$. Очевидно, що функція $\varphi(x)$ як функція двох змінних x_1, x_2 задовольняє умови теореми 3.2.1. Тому для неї справедлива нерівність

$$\left\| \varphi(x) - E_{MN}\varphi(x) \right\|_{L_\mu(D_e)} \leq \left\| \varphi^{(p)} \right\|_{L_\nu(D_e)} \prod_{k=1}^2 g_{kM_kN_kp_k\nu\mu}. \quad (3.2.26)$$

Зауважимо, що оператор $E_{MN}\varphi(x)$ і оператор $\tilde{E}_{MN}f(y)$ можуть бути одержані один з одного за допомогою відповідної заміни змінних.

Перший множник у формулі (3.2.26) має вигляд (при $\Delta_i = d_i - c_i$)

$$\left\| \varphi^{(p)} \right\|_{L_\nu(D_e)} = \left[\int_0^1 \int_0^1 \left| f^{(p)}(c_1 + x_1\Delta_1, c_2 + x_2\Delta_2) \right|^\nu dx_1 dx_2 \right]^{1/\nu} \Delta_1^{p_1} \Delta_2^{p_2}. \quad (3.2.27)$$

Перейдемо у формулі (3.2.27) до змінних $y_k = c_k + x_k \Delta_k$, $k = 1, 2$:

$$\begin{aligned} \left[\int_0^1 \int_0^1 \left| f^{(p)}(c_1 + x_1 \Delta_1, c_2 + x_2 \Delta_2) \right|^\nu dx_1 dx_2 \right]^{1/\nu} &= \quad (3.2.28) \\ &= \left[\int_{c_1}^{d_1} \int_{c_2}^{d_2} \left| f^{(p)}(y) \right|^\nu dy \right]^{1/\nu} (\Delta_1 \Delta_2)^{-1/\nu}. \end{aligned}$$

Аналогічно (при $y = (y_1, y_2)$)

$$\|\varphi - E_{MN}\varphi\|_{L_\mu(D_\varepsilon)} = \|f(y) - \bar{E}_{MN}f(y)\|_{L_\mu(\Pi)} (\Delta_1 \Delta_2)^{-1/\mu}. \quad (3.2.29)$$

Врахувавши співвідношення (3.2.27) – (3.2.29), нерівність (3.2.26) можна зобразити у вигляді

$$\left\| R_{MN} \tilde{f} \right\|_{L_\nu(\Pi)} \leq \left\| f^{(p)} \right\|_{L_\mu(\Pi)} \prod_{k=1}^2 g_{kMNp\nu\mu} \Delta_k^{p_k-1/\mu+1/\nu}.$$

Звідси, з урахуванням того, що $\|f^{(p)}\|_{L_\nu(\Pi)} \leq 1$, отримаємо доведення нерівності (3.2.25), тобто наслідку 3.

3.2.2. Приклади

Рекомендуємо читачеві самостійно довести всі твердження у наведених нижче прикладах.

П р и к л а д 1. Хай оператор $O_{2N}f(x)$ (при $x = (x_1, x_2)$) визначається як:

$$\begin{aligned} O_{2N}f(x) &= \sum_{s_1=0}^N f^{(s_1,0)}(0, x_2) \frac{x_1^{s_1}}{s_1!} + \sum_{s_2=0}^N f^{(0,s_2)}(x_1, 0) \frac{x_2^{s_2}}{s_2!} - \\ &- \sum_{s_1=0}^N \sum_{s_2=0}^N f^{(s_1,s_2)}(0, 0) \frac{x_1^{s_1} x_2^{s_2}}{s_1! s_2!}. \end{aligned} \quad (3.2.30)$$

Довести, що оператор $O_{2N}f(x)$ має такі властивості:

$$\begin{aligned} f(x) \in C^r(\mathbf{R}^2) \quad (r \geq 2N) &\implies O_{2N}f(x) \in C^{r-N}(\mathbf{R}^2) \implies \quad (3.2.31) \\ \implies \frac{\partial^{s_k} O_{2N}f}{\partial x_k^{s_k}} \Big|_{x_k=0} &= \frac{\partial^{s_k} f}{\partial x_k^{s_k}} \Big|_{x_k=0}, \quad 0 \leq s_k \leq N; k = 1, 2. \end{aligned}$$

Довести також тотожності $f(x) = O_{2N}f(x) + R_{2N}f(x)$,

$$R_{2N}f(x) = \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} f^{(N+1, N+1)}(\xi_1, \xi_2) \frac{(x_1 - \xi_1)^N (x_2 - \xi_2)^N}{N!N!} d\xi_1 d\xi_2. \quad (3.2.32)$$

Приклад 2. Довести, що оператор (при $x \in \mathbf{R}$, $t \in \mathbf{R}$, $h_{Nis}^{(p)}(x_j) = \delta_{ij} \delta_{ps}$, $i, j = 1, 2$, $0 \leq p, s \leq N$)

$$\begin{aligned} O_{3N}f(x, t) &= \sum_{p=0}^N \frac{t^p}{p!} \left[f^{(0,p)}(x, 0) - \sum_{i=1}^2 \sum_{s=0}^N h_{Nis}(x) f^{(s,p)}(x_i, 0) \right] + \\ &+ \sum_{i=1}^2 \sum_{s=0}^N h_{Nis}(x) f^{(s,0)}(x_i, t) \end{aligned}$$

має такі властивості: $f(x, t) \in C^r(\mathbf{R}^2)$, $r \geq 2N \implies O_{3N}f(x, t) \in C^{r-N}(\mathbf{R}^2)$,

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^p O_{3N}f}{\partial t^p} \right|_{t=0} &= f^{(0,p)}(x, 0), \quad 0 \leq p \leq N, \\ \left. \frac{\partial^s O_{3N}f}{\partial x^s} \right|_{x=x_i} &= f^{(s,0)}(x_i, t), \quad 0 \leq s \leq N; i = 1, 2. \end{aligned}$$

При цьому, якщо $f(x, t) \in C^r(\mathbf{R}^2)$, $r \leq 3N + 3$, то для залишку $R_{3N}f(x) = (I - O_{3N})f(x)$ справедлива рівність $R_{3N}f(x, t) =$

$$= \sum_{i=1}^2 \sum_{s=0}^N h_{Nis}(x) \int_0^x \int_0^t f^{(2N+2, N+1)}(\xi, \tau) \frac{(x_i - \xi)^{2N+1-s}}{(2N+1-s)!} \frac{(t-\tau)^N}{N!} d\xi d\tau.$$

Зауваження 1. Цей оператор інтерлінує функцію $f(x, t)$ та її нормальні похідні на трьох прямих $x = x_i$, $t \in \mathbf{R}$, $i = 1, 2$; $x \in \mathbf{R}$, $t = 0$. Якщо ж $\varphi_{is}(t) \in C^{r-s}(\mathbf{R})$, $i = 1, 2$, $s = \overline{0, N}$, $\psi_p(x) \in C^{r-s}(\mathbf{R})$, $0 \leq p \leq N$ — довільна множина функцій, що задовольняє в кутових точках умови Нікольського

$$\varphi_{1s}^{(p)}(0) = \psi_p^{(s)}(x_1) = f_{1sp}, \quad \varphi_{2s}^{(p)}(0) = \psi_p^{(s)}(x_2) = f_{2sp}, \quad 0 \leq s, p \leq N,$$

то оператор

$$\begin{aligned} O(\{\varphi_{is}\}; \{\psi_p\}; x, t) &= \\ &= \sum_{p=0}^N \frac{t^p}{p!} \left[\psi_p(x) - \sum_{i=1}^2 \sum_{s=0}^N h_{Nis}(x) f_{isp} \right] + \sum_{i=1}^2 \sum_{s=0}^N h_{Nis}(x) \varphi_{is}(t) \end{aligned}$$

має властивості

$$\left. \frac{\partial^p O(\cdot)}{\partial t^p} \right|_{t=0} = \psi_p(x), \quad 0 \leq p \leq N,$$

$$\left. \frac{\partial^s O(\cdot)}{\partial x^s} \right|_{x=x_i} = \varphi_{is}(t), \quad 0 \leq s \leq N; i = 1, 2.$$

Якщо $f(x, t) \in C^r(\mathbf{R}^2)$ – довільна функція, що має ті ж сліди $\psi_p(x), \varphi_{is}(t)$ на вказаних трьох прямих, то $O(\{\varphi_{is}\}; \{\psi_p\}; x, t) = O_{3N}f(x, t)$ і залишок наближення цієї функції оператором $O_{3N}f(x, t)$ визначається наведеною вище формулою для $R_{3N}f(x, t)$.

П р и к л а д 3. Довести, що оператор (при $x = (x_1, x_2)$; $h_1(t) = 1 - t$, $h_2(t) = t$)

$$\begin{aligned} O_{40}f(x) &= \sum_{k=1}^2 h_k \left(\frac{x_1 - x_{11}}{x_{12} - x_{11}} \right) f(x_{1k}, x_2) + \\ &+ \sum_{l=1}^2 h_l \left(\frac{x_2 - x_{21}}{x_{22} - x_{21}} \right) f(x_1, x_{2l}) - \\ &- \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 h_k \left(\frac{x_1 - x_{11}}{x_{12} - x_{11}} \right) h_l \left(\frac{x_2 - x_{21}}{x_{22} - x_{21}} \right) f(x_{1k}, x_{2l}) \end{aligned}$$

має властивості

$$\begin{aligned} O_{40}f \Big|_{x_1=x_{1k}} &= f(x_{1k}, x_2), \quad k = 1, 2, \\ O_{40}f \Big|_{x_2=x_{2l}} &= f(x_1, x_{2l}), \quad l = 1, 2. \end{aligned}$$

При цьому для залишку $R_{40}f(x) = (I - O_{40})f(x)$ справедлива рівність

$$\begin{aligned} R_{40}f(x) &= \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 h_k \left(\frac{x_1 - x_{11}}{x_{12} - x_{11}} \right) h_l \left(\frac{x_2 - x_{21}}{x_{22} - x_{21}} \right) \times \\ &\times \int_{x_{1k}}^{x_1} \int_{x_{2l}}^{x_2} f^{(2,2)}(\xi, \eta) \frac{(x_{1k} - \xi)(x_{2l} - \eta)}{1! 1!} d\xi d\eta = \\ &= \int_{x_{11}}^{x_{12}} \int_{x_{21}}^{x_{22}} f^{(2,2)}(\xi, \eta) G_1(x_1, \xi) G_2(x_2, \eta) d\xi d\eta, \end{aligned}$$

$$G_s(x_s, t) = \begin{cases} h_1 \left(\frac{x_s - x_{s1}}{x_{s2} - x_{s1}} \right) (x_{s1} - t) = \frac{x_{s2} - x_s}{x_{s2} - x_{s1}} (x_{s1} - t), & x_{s1} \leq t \leq x_s, \\ h_2 \left(\frac{x_s - x_{s1}}{x_{s2} - x_{s1}} \right) (x_{s2} - t) = \frac{x_s - x_{s1}}{x_{s2} - x_{s1}} (x_{s2} - t), & x_s \leq t \leq x_{s2}. \end{cases}$$

Якщо $f \in C^{1,1}$, то

$$\begin{aligned} R_{40}f(x) &= \sum_{k=1}^2 \sum_{\ell=1}^2 h_k \left(\frac{x_1 - x_{11}}{x_{12} - x_{11}} \right) h_l \left(\frac{x_2 - x_{21}}{x_{22} - x_{21}} \right) \int_{x_{1k}}^{x_1} \int_{x_{2l}}^{x_2} f^{(1,1)}(\xi, \eta) d\xi d\eta = \\ &= \int_{x_{11}}^{x_{12}} \int_{x_{21}}^{x_{22}} f^{(1,1)}(\xi, \eta) g_1(x_1, \xi) g_2(x_2, \eta) d\xi d\eta, \\ g_1(x_1, \xi) &= \begin{cases} h_1 \left(\frac{x_1 - x_{1,1}}{x_{12} - x_{11}} \right), & x_{11} \leq \xi \leq x_1 \leq x_{12}, \\ h_2 \left(\frac{x_1 - x_{1,1}}{x_{12} - x_{11}} \right), & x_{11} \leq x_1 \leq \xi \leq x_{12}. \end{cases} \end{aligned}$$

Зауваження 2. Цей оператор інтерлінує функцію $f(x)$ на чотирьох прямих $x_1 = x_{1k}$, $k = 1, 2$; $x_2 = x_{2l}$, $l = 1, 2$. Якщо ж $\varphi_k(x_2)$, $k = 1, 2$, $\psi_l(x_1)$, $l = 1, 2$ - довільні чотири функції, що задовольняють у кутових точках умови Нікольського

$$\varphi_k(x_{2l}) = \psi_l(x_{1k}) = f_{kl}, \quad 1 \leq k, l \leq 2,$$

то оператор

$$\begin{aligned} O_{40}(\{\varphi_k\}; \{\psi_l\}; x) &= \sum_{k=1}^2 H_{1k}(x_1) \varphi_k(x_2) + \sum_{l=1}^2 H_{2l}(x_2) \psi_l(x_1) - \\ &- \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 H_{1k}(x_1) H_{2l}(x_2) f_{kl}, \end{aligned}$$

$$H_{1k} = h_k((x_1 - x_{11})/(x_{12} - x_{11})), H_{2l} = h_l((x_2 - x_{21})/(x_{22} - x_{21}))$$

має властивості

$$O_{40}(\cdot) \Big|_{x_1=x_{1k}} = \varphi_k(x_2) (k = 1, 2), \quad O_{40}(\cdot) \Big|_{x_2=x_{2l}} = \psi_l(x_1), l = 1, 2.$$

3.2.3. Найкраща в $L_1[-1, 1]^2$ лагранжева поліноміальна інтерлінація на системі взаємно перпендикулярних прямих

При знаходженні найкращої в $L_q[-1, 1]^2$, $q = \infty, 1, 2$ лагранжевої поліноміальної інтерлінації на системі взаємно перпендикулярних

прямих слід враховувати, що: 1) залишок інтерлінації дорівнює добуткові залишків по кожній змінній окремо; 2) поліноми $T_{n,q}(\cdot)$ степеня n з найменшим відхиленням від нуля в метриці $L_q[-1, 1]$ - це поліноми з коефіцієнтом одиниця при старшому степені, що є розв'язком екстремальної задачі

$$\max_{t \in [-1, 1]} \left| t^n - \sum_{k=0}^{n-1} c_k t^k \right| \longrightarrow \min_{c_0, \dots, c_{n-1}}, \quad q = \infty,$$

$$\int_{-1}^1 \left| t^n - \sum_{k=0}^{n-1} c_k t^k \right|^q dt \longrightarrow \min_{c_0, \dots, c_{n-1}}, \quad 1 \leq q < \infty.$$

Для них справедлива наступна теорема.

Теорема 3.2.2. При $q = \infty, 1, 2$ поліномами найкращого наближення є відповідно поліноми Чебишова 1-го роду

$$T_{n,\infty}(t) = \frac{\cos(n \arccos t)}{2^{n-1}},$$

поліноми Чебишова 2-го роду

$$T_{n,1}(t) = \frac{\sin(n+1) \arccos t}{2^n \sqrt{1-t^2}},$$

поліноми Лежандра

$$T_{n,2}(t) = \frac{n!}{(2n)!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n.$$

Це означає, що при побудові поліноміальних інтерлінантів треба вибирати вузли інтерлінації так, щоб вони були коренями відповідних поліномів з найменшим відхиленням.

Зокрема, при $q = 1$ справедлива наступна теорема.

Теорема 3.2.3. Хай $p = (p_1, p_2)$, $f(x_1, x_2) \in C^p(J^2)$, $J = [-1, 1]$, $D^p = \partial^{p_1+p_2} / \partial x_1^{p_1} \partial x_2^{p_2}$, $B^p = \{g(x) | g \in C^p(J^2), D^p g = 0\}$, $E(f)$ - величина найкращого наближення функції f множиною B^p за нормою $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L_1(J^2)}$; $g^* \in B^p$ - елемент найкращого наближення; $x_{1i_1} = \cos(i_1 \pi / (p_1 + 1))$, $i_1 = \overline{1, p_1}$, $x_{2i_2} = \cos(i_2 \pi / (p_2 + 1))$, $i_2 = \overline{1, p_2}$ - нулі поліномів U_{p_1}, U_{p_2} Чебишова 2-го роду відповідно степеня p_1 та p_2 :

$$U_m(t) = \frac{\sin(m+1)\theta}{\sin \theta}, \quad \cos \theta = t, \quad m = 0, 1, \dots,$$

$l_{kp_k i_k}$ – базисні поліноми Лагранжа, $l_{kp_k i_k}(x_{k i'_k}) = \delta_{i_k i'_k}$,

$$\begin{aligned} g^*(x) &= \sum_{i_1=1}^{p_1} f(x_{1 i_1}, x_2) l_{1 p_1 i_1}(x_1) + \sum_{i_2=1}^{p_2} f(x_1, x_{2 i_2}) l_{2 p_2 i_2}(x_2) - \\ &- \sum_{i_1=1}^{p_1} \sum_{i_2=1}^{p_2} f(x_{1 i_1}, x_{2 i_2}) l_{1 p_1 i_1}(x_1) l_{2 p_2 i_2}(x_2). \end{aligned} \quad (3.2.33)$$

Для $f(x)$ існує єдиний найближчий до $f(x)$ за нормою $\|\cdot\|$ елемент $g^* \in B^p$, і цей елемент має вигляд (3.2.33), тобто є інтерлінантом, який інтерлінує $f(x)$ на лінійях

$$x_k = x_{k i_k}, \quad i_k = \overline{1, p_k}; \quad k = 1, 2.$$

Д о в е д е н н я. Треба знайти g^* з умови

$$\|f - g^*\| \leq \|f - g\| \quad \forall g \in B^p. \quad (3.2.34)$$

Формула (3.2.18) для розглядуваного випадку має такий вигляд:

$$f(x) - g^*(x) = \frac{U_{p_1}(x_1) U_{p_2}(x_2)}{2^{p_1+p_2} p_1! p_2!} f^{(p_1, p_2)}(\xi_1, \xi_2), \quad (\xi_1, \xi_2) \in J^2, \quad (3.2.35)$$

де (ξ_1, ξ_2) – деяка точка, що залежить від $(x_1, x_2) \in J^2$. Тому найменше значення величини $\|f(x) - g^*(x)\|$ досягається на тих g^* , для яких величина $\left\| \prod_{k=1}^2 \prod_{i_k=1}^{p_k} (x_k - x_{k i_k}) \right\|$ є найменшою. Цю умову задовольняють поліноми, вузли яких є нулями поліномів Чебишова 2-го роду.

Теорему 3.2.3 доведено.

Н а с л і д о к 1. При $p_1 = p_2 = 1$ отримаємо: $f(x) \in C^{1,1}(J^2)$, $f^{(1,1)}(x) \geq 0 \Rightarrow \exists! g^*(x) = g_1^*(x_1) + g_2^*(x_2) = f(x_1, 0) + f(0, x_2) - f(0, 0) : \|f - g^*\| \leq \|f - g\| \forall g = g_1(x_1) + g_2(x_2), g_1, g_2 \in C^1(J)$.

Н а с л і д о к 2. Хай $f(x) = x_1^{p_1} x_2^{p_2} \equiv x^p$, $V := \{g = \sum_{i_1=0}^{p_1} \sum_{i_2=0}^{p_2} a_{i_1 i_2} x^{i_1} x^{i_2}, a_p = 0\}$. Тоді найкращий елемент $g^* \in V$ в нормі L_1 має вигляд

$$g^*(x) = x^p - \frac{U_{p_1}(x_1) U_{p_2}(x_2)}{2^{p_1+p_2}}; \quad p = (p_1, p_2),$$

$$\|x^p - g^*\| \leq \|x^p - g\| \forall g \in V.$$

3.3. Поліноміальна інтерлінація на M довільних прямих. Приклади

Із загальною теорією поліноміальної інтерлінації на системі прямих довільного розміщення на площині (не обов'язково взаємно перпендикулярних) можна ознайомитися в монографії О.М.Литвина [1, розділ 3.3]. Нижче розглянемо кілька важливих прикладів.

Приклад 1. Хай $x = (x_1, x_2)$, $\Gamma_k : \omega_k(x) := x_1\omega_{k1} + x_2\omega_{k2} - \gamma_k = 0$, $\omega_{k1}^2 + \omega_{k2}^2 = 1$, $k = 1, 2$ – дві перетинні прямі,

$$\begin{vmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} \\ \omega_{21} & \omega_{22} \end{vmatrix} = \Delta_{12} \neq 0, \quad \tau_k = (\omega_{k2}, -\omega_{k1}), \quad \Delta_{21} = -\Delta_{12}.$$

Хай $\varphi_k(x) = \varphi_k(x_1) = f|_{\Gamma_k} = f(x_1, (\gamma_k - x_1\omega_{k1})/\omega_{k2})$, якщо $\omega_{k2} \neq 0$, $\varphi_k(x) = \varphi_k(x_2) = f|_{\Gamma_k} = f((\gamma_k - x_2\omega_{k2})/\omega_{k1}, x_2)$, якщо $\omega_{k1} \neq 0$, $A_{12} := (x_{112}, x_{212})$ – розв'язок системи рівнянь $\omega_1 = 0, \omega_2 = 0$:

$$x_{112} = \begin{vmatrix} \gamma_1 & \omega_{12} \\ \gamma_2 & \omega_{22} \end{vmatrix} / \Delta_{12}, \quad x_{212} = \begin{vmatrix} \omega_{11} & \gamma_1 \\ \omega_{21} & \gamma_2 \end{vmatrix} / \Delta_{12}.$$

Скористаємося тотожністю (при $k \neq l$; $k, l = 1, 2$)

$$A_{12} - \frac{\tau_1}{\Delta_{12}}\omega_2(x) \equiv x + \frac{\tau_2}{\Delta_{21}}\omega_1(x) \Leftrightarrow \begin{cases} x_{112} - \frac{\omega_{12}}{\Delta_{12}}\omega_2(x) \equiv x_1 + \frac{\omega_{22}}{\Delta_{21}}\omega_1(x), \\ x_{212} + \frac{\omega_{11}}{\Delta_{12}}\omega_2(x) \equiv x_2 - \frac{\omega_{21}}{\Delta_{21}}\omega_1(x). \end{cases}$$

Доведіть цю тотожність безпосередньою перевіркою, а також те, що

$$f\left(A_{12} - \frac{\tau_l}{\Delta_{lk}}\omega_k(x)\right) \equiv \varphi_l\left(A_{12} - \frac{\tau_l}{\Delta_{lk}}\omega_k(x)\right), \quad k \neq l; \quad k, l = 1, 2.$$

Доведіть, що коли сліди $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ задовольняють у точці A_{12} умову Нікольського $\varphi_1(A_{12}) = \varphi_2(A_{12})$, то оператор

$$\Lambda_{12}f(x) = \varphi_1\left(A_{12} - \frac{\tau_1}{\Delta_{12}}\omega_2(x)\right) + \varphi_2\left(A_{12} - \frac{\tau_2}{\Delta_{21}}\omega_1(x)\right) - \varphi_1(A_{12})$$

має властивості

$$\Lambda_{12}f(x)|_{\Gamma_k} = \varphi_k(x)|_{\Gamma_k}, \quad k = 1, 2.$$

При цьому, якщо $f^{(p,q)}(x) \in C(\mathbf{R}^2)$, $0 \leq p, q \leq 1$, то для залишку наближення функції $f(x)$ за допомогою оператора $\Lambda_{12}f(x)$ виконується рівність

$$f(x) - \Lambda_{12}f(x) = \int_0^{\omega_1(x)} \left[\int_0^{\omega_2(x)} \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} f\left(A_{12} - \frac{\tau_1}{\Delta_{12}}t_2 - \frac{\tau_2}{\Delta_{21}}t_1\right) dt_2 \right] dt_1.$$

П р и к л а д 2. Хай $\Gamma_k : \omega_k(x) = x_1\omega_{k1} + x_2\omega_{k2} - \gamma_k = 0$, $k = \overline{1, 3}$, $\omega_{k1}^2 + \omega_{k2}^2 = 1$, $\tau_k = (\omega_{k2}, -\omega_{k1})$ – три перегинні прямі,

$$\Delta_{123} = \begin{vmatrix} \omega_{12} & \omega_{11} & -\gamma_1 \\ \omega_{22} & \omega_{21} & -\gamma_2 \\ \omega_{32} & \omega_{31} & -\gamma_3 \end{vmatrix} \neq 0, \Delta_{ik} = \begin{vmatrix} \omega_{i1} & \omega_{i2} \\ \omega_{k1} & \omega_{k2} \end{vmatrix} \neq 0, k \neq i; k = \overline{1, 3},$$

$A_{kl} = (x_1^{kl}, x_2^{kl})$ – розв'язки систем рівнянь $\omega_k(x) = 0$, $\omega_l(x) = 0$, $k \neq l$; $k, l = \overline{1, 3}$. Доведіть, що коли сліди $\varphi_k(x)$, $k = \overline{1, 3}$ задовольняють у точках $A_{kl} = (x_{1kl}, x_{2kl})$ умови Нікольського

$$\varphi_k(A_{kl}) = \varphi_l(A_{kl}), \quad k \neq l; k, l = \overline{1, 3},$$

то оператор

$$\begin{aligned} \bar{\Lambda}_{30}f(x) &= \\ &= \frac{\omega_1(x)}{\omega_1(A_{23})} \left[\varphi_2(A_{23} - \frac{\tau_2}{\Delta_{23}}\omega_3(x)) + \varphi_3(A_{23} - \frac{\tau_3}{\Delta_{32}}\omega_2(x)) - \varphi_3(A_{23}) \right] + \\ &+ \frac{\omega_2(x)}{\omega_2(A_{13})} \left[\varphi_1(A_{13} - \frac{\tau_1}{\Delta_{13}}\omega_3(x)) + \varphi_3(A_{13} - \frac{\tau_3}{\Delta_{31}}\omega_1(x)) - \varphi_1(A_{13}) \right] + \\ &+ \frac{\omega_3(x)}{\omega_3(A_{12})} \left[\varphi_1(A_{12} - \frac{\tau_1}{\Delta_{12}}\omega_2(x)) + \varphi_2(A_{12} - \frac{\tau_2}{\Delta_{21}}\omega_1(x)) - \varphi_2(A_{12}) \right] \end{aligned}$$

має властивості

$$\bar{\Lambda}_{30}f(x) \Big|_{\Gamma_k} = \varphi_k(x) \Big|_{\Gamma_k}, \quad k = \overline{1, 3}.$$

При цьому, якщо $f(x)$ є неперервною разом із своїми частинними похідними до другого порядку включно, то для залишку $\bar{R}_{30}f = (I - \bar{\Lambda}_{30})f$ виконується рівність

$$\begin{aligned} \bar{R}_{30}f(x) &= \frac{\omega_1(x)}{\omega_1(A_{2,3})} \int_0^{\omega_2(x)} \int_0^{\omega_3(x)} \frac{\partial^2}{\partial t_2 \partial t_3} f \left(A_{kl} - \frac{\tau_k}{\Delta_{kl}}t_l - \frac{\tau_l}{\Delta_{lk}}t_k \right) dt_2 dt_3 + \\ &+ \frac{\omega_2(x)}{\omega_2(A_{1,3})} \int_0^{\omega_1(x)} \int_0^{\omega_3(x)} \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_3} f \left(A_{kl} - \frac{\tau_k}{\Delta_{kl}}t_l - \frac{\tau_l}{\Delta_{lk}}t_k \right) dt_1 dt_3 + \\ &+ \frac{\omega_3(x)}{\omega_3(A_{1,2})} \int_0^{\omega_1(x)} \int_0^{\omega_2(x)} \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} f \left(A_{kl} - \frac{\tau_k}{\Delta_{kl}}t_l - \frac{\tau_l}{\Delta_{lk}}t_k \right) dt_1 dt_2. \end{aligned}$$

Зокрема, якщо $\omega_1 \equiv x_1$, $\omega_2 \equiv x_2$, $\omega_3 \equiv (1 - x_1 - x_2)/\sqrt{2}$, то

$$\begin{aligned} \bar{\Lambda}_{30} f(x) &= \\ &= x_1 \left[\varphi_2(x_1 + x_2, 0) + \varphi_3(1 - x_2, x_2) - \varphi_3(1, 0) \right] + \\ &+ x_2 \left[\varphi_1(0, x_1 + x_2) + \varphi_3(x_1, 1 - x_1) - \varphi_1(0, 1) \right] + \\ &+ (1 - x_1 - x_2) \left[\varphi_1(0, x_2) + \varphi_2(x_1, 0) - \varphi_2(0, 0) \right]. \end{aligned}$$

Напишіть формулу для залишку $\bar{R}_{30} f(x)$ у цьому випадку.

Доведіть, що оператор $\Lambda_{30}^* f(x) =: \bar{\Lambda}_{30} f(x) - f^{(1,1)}(0, 0)x_1x_2(1 - x_1 - x_2)$ має такі властивості: $\Lambda_{30}^* x_1^i x_2^j \equiv x_1^i x_2^j$, $0 \leq i, j \leq 1$.

П р и к л а д 3. Хай $\Gamma_k : \omega_k(x) =: x_1\omega_{k1} + x_2\omega_{k2} - \gamma_k = 0$, $k = \overline{1, M}$ – сім'я прямих, кожна з яких перетинається з усіма іншими і жодні три з яких не перетинаються в одній точці. Хай, як і в прикладах 1 і 2, $A_{k,l}, (k, l) \in \mathfrak{R} = \{(k, l) | \Gamma_k \cap \Gamma_l = A_{kl} \neq \emptyset; k \neq l; k, l = \overline{1, M}\}$ – точки перетину прямих Γ_k та Γ_l (якщо ці прямі перетинаються),

$$\Delta_{kl} = \begin{vmatrix} \omega_{k1} & \omega_{k2} \\ \omega_{l1} & \omega_{l2} \end{vmatrix} = -\Delta_{lk} \neq 0, k \neq l; k, l = \overline{1, M}.$$

$\nu_k(\omega_{k1}, \omega_{k2})$ - вектор нормалі до прямої Γ_k ; $\tau_k(-\omega_{k2}, \omega_{k1})$ - вектор дотичної до прямої Γ_k .

Доведіть, що коли сліди $\varphi_k(x)|_{\Gamma_k} = f(x)|_{\Gamma_k}$ задовольняють у точках $A_{kl} = \Gamma_k \cap \Gamma_l \neq \emptyset$ умови Нікольського

$$\varphi_k(A_{kl}) = \varphi_l(A_{kl}), \quad k \neq l; k, l = \overline{1, M},$$

то оператор

$$\begin{aligned} \bar{\Lambda}_{M0} f(x) &= \sum_{(k,l) \in \mathfrak{R}} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k,l}}^M \frac{\omega_i(x)}{\omega_i(A_{kl})} \times \\ &\times \left[\varphi_k \left(A_{kl} - \frac{\tau_k}{\Delta_{kl}} \omega_l(x) \right) + \varphi_l \left(A_{kl} - \frac{\tau_l}{\Delta_{lk}} \omega_k(x) \right) - \varphi_k(A_{kl}) \right] \end{aligned}$$

має властивості

$$\bar{\Lambda}_{M0} f(x) \Big|_{\Gamma_k} = \varphi_k(x) \Big|_{\Gamma_k}, \quad k = \overline{1, M}.$$

Доведіть також, що для залишку наближення функції $f(x) \in C^2(\mathbf{R}^2)$

за допомогою оператора $\bar{\Lambda}_{M0}f(x)$ виконується рівність

$$\begin{aligned} \bar{R}_{M0}f(x) &= (I - \bar{\Lambda}_{M0})f(x) = \sum_{(k,l) \in \mathfrak{R}} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k, l}}^M \frac{\omega_i(x)}{\omega_i(A_{kl})} \times \\ &\times \int_0^{\omega_k} \int_0^{\omega_l} \frac{\partial^2}{\partial t_k \partial t_l} f \left(A_{kl} - \frac{\tau_k}{\Delta_{kl}} t_l - \frac{\tau_l}{\Delta_{lk}} t_k \right) dt_k dt_l. \end{aligned}$$

Далі зупинимось на доведенні теореми про рівномірну збіжність поліноміальних інтерліантів. При її доведенні важливу роль відіграє теорема Банаха–Штейнгауза, або теорема про рівномірну обмеженість.

Теорема 3.3.1. *Хай E_1 – простір Банаха, E_2 – нормований векторний простір, $(t_\alpha)_\alpha \in A$ – множина неперервних лінійних операторів $t_\alpha : E_1 \rightarrow E_2$. Припустимо, що $\forall x \in E_1 \exists m_x \in \mathbf{R} : \|t_\alpha(x)\|_{E_2} \leq m_x \forall \alpha \in A$. Тоді*

$$\exists m \in \mathbf{R} : \|t_\alpha(x)\|_{E_2} \leq m \|x\|_{E_1} \forall \alpha \in A \forall x \in E_1,$$

або

$$\|t_\alpha\| \leq m \forall \alpha \in A.$$

Н а с л і д о к. Хай $(V_n)_{n \in \mathbf{N}^\circ}$ – послідовність вкладених підпросторів $(V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots)$, об'єднання яких $\bigcup_{n \in \mathbf{N}^\circ} V_n$ щільне в E_1 . Хай

$(\ell_n)_{n \in \mathbf{N}^\circ}$ – послідовність неперервних лінійних операторів $\ell_n : E_1 \rightarrow E_2$ і $\ell : E_1 \rightarrow E_2$ – неперервний лінійний оператор. Припустимо, що

$$(H1) : \forall v \in V_k, k \in \mathbf{N}^\circ : \ell_n(x) = \ell(x) \forall n \geq k$$

або

$$(H2) : \forall v \in V_k, k \in \mathbf{N}^\circ : \lim_{n \rightarrow \infty} \ell_n(x) = \ell(x).$$

Тоді при виконанні гіпотези (H2) або (H1) для реалізації умови

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ell_n(x) = \ell(x) \forall x \in E_1$$

необхідно і достатньо, щоб $\exists m \in \mathbf{R} : \|\ell_n\| \leq m \forall n \in \mathbf{N}^\circ$.

Дальша теорема є аналогом відповідної теореми в теорії інтерполяції. Знову розглянемо випадок інтерліанації на системі взаємно перпендикулярних прямих $x = x_k^{(m)}$, $k = \overline{1, m}$; $y = y_l^{(n)}$, $l = \overline{1, n}$. Рекомендуємо читачеві самостійно довести написану нижче теорему 3.3.2, скориставшись сформульованими вище твердженнями.

Теорема 3.3.2. *Якими б не були дві таблиці вузлів інтерліанації*

$$X = \|x_k^{(m)}\|, \quad k = \overline{1, m}, \quad Y = \|y_l^{(n)}\|, \quad l = \overline{1, n},$$

$$m, n \in \mathbf{N}, \quad 0 \leq x_k^{(m)}, y_l^{(n)} \leq 1,$$

для них існує така неперервна функція $f(x, y) \in C[0, 1]^2$, що відповідний їй інтерлінаційний процес

$$\begin{aligned} O_{mn}f(x, y) &= \sum_{k=1}^m f(x_k^{(m)}, y) h_{1mk}(x) + \\ &+ \sum_{l=1}^n f(x, y_l^{(n)}) h_{2nl}(y) - \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n f(x_k^{(m)}, y_l^{(n)}) h_{1mk}(x) h_{2nl}(y) = \\ &= (\Lambda_{1m} + \Lambda_{2n} - \Lambda_{1m} \Lambda_{2n}) f(x, y), \end{aligned}$$

де $h_{1mk}(x) = \prod_{i=1, i \neq k}^m \frac{x-x_i}{x_k-x_i}$, $h_{2nl}(y) = \prod_{j=1, j \neq l}^n \frac{y-y_j}{y_l-y_j}$, $\Lambda_{1m} = \sum_{k=1}^m f(x_k^{(m)}, y) h_{1mk}(x)$ ($\Lambda_{2n} = \sum_{l=1}^n f(x, y_l^{(n)}) h_{2nl}(y)$) – інтерполянти Лагранжа за $m(n)$ точками, не буде збігатися рівномірно до f на $[0, 1]^2$ при $m, n \rightarrow \infty$.

Отже, не існує єдиної системи вузлів інтерлінації, що забезпечує збіжність до кожної неперервної функції. Проте існують найкращі системи (див. 3.2.3).

3.4. Кусково-поліноміальна інтерлінація

3.4.1. Сплайн-інтерлінація. Загальні твердження

Нижче наведено основні означення та деякі результати теорії поліноміальної сплайн-інтерполяції та сплайн-інтерлінації в канонічній області $[0, 1]^2 = I^2$ за умови, що I^2 розбивається на підобласті (прямокутні елементи) $R_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \subset I^2$ прямими $x = x_i, i = \overline{0, M_1}$ та $y = y_j, j = \overline{0, M_2}$: $\Delta_{1M_1} : 0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{M_1} = 1, \Delta_{2M_2} : 0 = y_0 < y_1 < \dots < y_{M_2} = 1$.

Слід підкреслити різницю між одно- і двовимірною теоріями сплайнів: в одновимірному випадку теорію наближення сплайнами можна створювати для відрізка $I = [0, 1]$, а потім заміною змінних результати легко переносяться на відрізок $[a, b]$. У двовимірному випадку результати, одержані для канонічної області I^2 , легко переносяться лише на області $[a, b] \times [c, d]$. Побудова ж теорії сплайнів і сплайн-інтерлінантів у складніших областях (при розбитті їх на трикутні, чотирикутні, п'ятикутні тощо елементи, а також на елементи з криволінійними межами) потребує більш тонких методів, ніж ті, які є зараз в одновимірній теорії сплайнів. Зокрема, одним зі шляхів побудови такої теорії може бути використання кусково-поліноміальної та кусково-тригонометричної інтерлінації.

Хай $f(x, y) \in C^r(\mathbf{R}^2), r = (r_1, r_2)$. Двовимірним сплайном порядку m дефекту $k, 1 \leq k \leq m$ за змінною x і порядку n дефекту

l , $1 \leq l \leq m$ за змінною y , відповідним розбиттю $\Delta_{M_1 M_2} = \Delta_{M_1} \times \Delta_{M_2}$, є функція $s(x, y) \in C^{m-k, n-l}(I^2)$, яка в кожному елементі $R_{ij} \subset I^2$ збігається з деяким поліномом степеня m за змінною x та степеня n за змінною y . Лінійний многовид таких сплайнів позначатимемо через $S_{m, n}^{k, l}(\Delta_{M_1 M_2})$. Через $S_m^k(\Delta_{M_1})$ або $S_n^l(\Delta_{M_2})$ позначимо многовид одновимірних сплайнів за змінною x або y . Для одновимірних сплайнів $s_{1M_1} \in C^{m-k}(\mathbf{R})$ степеня m дефекту k можна використати зображення

$$s_{1M_1}(x) = \sum_{\nu=0}^m C_{\nu} x^{\nu} + \sum_{i=1}^{M_1-1} \sum_{j=m-k+1}^m \alpha_{ij} (x - x_i)_+^j, \quad (3.4.1)$$

$$C_{\nu} = s^{(\nu)}(0)/\nu!, \quad \nu = \overline{0, m}, \quad (x - x_i)_+^{\beta} = \begin{cases} (x - x_i)^{\beta} & x > x_i, \\ 0 & x \leq x_i, \end{cases}$$

$$\alpha_{ij} = \left[s^{(j)}(x_i + 0) - s^{(j)}(x_i - 0) \right] / j!, \\ i = \overline{1, M_1 - 1}, j = \overline{m - k + 1, m}.$$

Аналогічно визначається сплайн $s_{2M_2}(y) \in S_n^l(\Delta_{M_2})$. На практиці важливу роль відіграють непарні сплайни (степеня $2q - 1$).

Теорема 3.4.1. *Хай $f(x) \in C^{k-1}(I)$. Якщо $(M_1 + 1)k \geq r$, $1 \leq k < r$, то існує єдиний сплайн $s(x) = s_{1M_1}(x) \in S_{2r-1}^k(\Delta_{M_1})$ з інтерполяційними властивостями*

$$s^{(\nu)}(x_i) = f^{(\nu)}(x_i), \quad i = \overline{0, M_1}, \nu = \overline{0, k-1}, \quad (3.4.2)$$

котрий задовольняє один з наведених наборів $2r - 2k$ граничних умов:

$$s^{(\nu)}(0) = s^{(\nu)}(1), \quad \nu = \overline{k, 2r - k - 1} \quad (3.4.3)$$

(періодичні граничні умови);

$$s^{(\nu)}(0) = y_{0, \nu}, \quad s^{(\nu)}(1) = y_{1, \nu}, \nu = \overline{k, r - 1}, \quad (3.4.4)$$

$$s^{(\nu)}(0) = y_{0, \nu}, \quad s^{(\nu)}(1) = y_{1, \nu}, \nu = \overline{r, 2r - k - 1}, \quad (3.4.5)$$

$$s^{(2\nu)}(0) = y_{0, \nu}, \quad s^{(2\nu)}(1) = y_{1, \nu}, \quad (3.4.6)$$

$$\nu = \overline{\left[\frac{k+1}{2} \right], \left[\frac{k+1}{2} \right] + r - k - 1},$$

$$s^{(2\nu+1)}(0) = y_{0, \nu}, \quad s^{(2\nu+1)}(1) = y_{1, \nu}, \quad (3.4.7)$$

$\nu = \overline{\left[\frac{k}{2}\right], \left[\frac{k}{2}\right] + r - k - 1}$, де $[a]$ у формулах – ціла частина a . У всіх вказаних випадках $y_{0,\nu}, y_{1,\nu}$ – довільні наперед задані числа. Наприклад, можна взяти

$$y_{i,\nu} = f^{(\nu)}(i), \quad i = 0, 1. \quad (3.4.8)$$

Доведення див. Корнейчук М.П. [1].

У задачах інтерполяції використовують також натуральні (або природні) сплайни непарного порядку $s_1(x) \in S_{2r-1}^k(\Delta_{M_1})$ $1 \leq k \leq r$, $(N+1)k \geq r$, які задовольняють при $k < r$ граничні умови

$$s_1^{(\nu)}(0) = s_1^{(\nu)}(1) = 0, \quad \nu = \overline{r, 2r - k - 1}. \quad (3.4.9)$$

Якщо $p_0(x), p_1(x) \in \mathbf{P}_{r-1}$ – поліноми степеня $r-1$ із властивостями

$$p_0^{(j)}(0) = s_1^{(j)}(0), \quad p_1^{(j)}(1) = s_1^{(j)}(1), \quad j = \overline{0, r-1}, \quad (3.4.10)$$

то натуральний сплайн $s_1(x)$ має вигляд

$$s_1(x) = \begin{cases} p_0(x), & x < 0, \\ s_{1M_1}(x), & 0 \leq x \leq 1, \\ p_1(x), & x > 1. \end{cases} \quad (3.4.11)$$

Цей сплайн, означений на всій осі, задовольняє умови (3.4.2) і $s_1(x) \in C^{2r-k-1}(\mathbf{R})$. Кожен сплайн з властивостями (3.4.2) (такі сплайни називають інтерполяційними) можна зобразити у вигляді

$$s_{1M_1}(x) = \sum_{i=0}^{M_1} \sum_{\nu=0}^{k-1} f^{(\nu)}(x_i) s_{i\nu}(x), \quad (3.4.12)$$

де $s_{i\nu}(x)$ – базис лінійного многовиду $S_{2r-1}^k(\Delta_{M_1})$, тобто набір сплайнів $s_{i\nu}(x) \in S_{2r-1}^k(\Delta_{M_1})$ із властивостями

$$s_{i\nu}^{(j)}(x_q) = \delta_{iq} \delta_{j\nu}, \quad i, q = \overline{0, M_1}, \quad j, \nu = \overline{0, k-1}. \quad (3.4.13)$$

Отже, якщо $\{\varphi_{i\nu}(x)\}$ – базис лінійного многовиду $S_m^k(\Delta_{M_1})$, а $\{\psi_{j\mu}(y)\}$ – базис $S_n^l(\Delta_{M_2})$, то $\{\varphi_{i\nu}(x)\psi_{j\mu}(y)\}$ – базис лінійного многовиду $S_{m,n}^{k,l}(\Delta_{M_1M_2})$, тобто базис сплайнів від двох змінних. Таким чином, двовимірний сплайн $s(x, y)$ порядку m дефекту k , $1 \leq k \leq m$ за змінною x та порядку n дефекту l , $1 \leq l \leq n$ за змінною y , котрий відповідає розбиттю $\Delta_{M_1M_2}$ з інтерполяційними умовами

$$s^{(\nu,\mu)}(x_i, y_q) = f^{(\nu,\mu)}(x_i, y_q), \quad (3.4.14)$$

$$i = \overline{0, M_1}, \quad q = \overline{0, M_2}, \quad 0 \leq \nu \leq k-1, \quad 0 \leq \mu \leq l-1$$

і задовольняє один із зазначених у (3.4.23)–(3.4.29) наборів граничних умов на межі квадрата I^2 (похідні беруться відповідно за змінними x та y), можна зобразити у вигляді

$$s(x, y) = \sum_{i=0}^{M_1} \sum_{j=0}^{M_2} \sum_{\nu=0}^{k-1} \sum_{\mu=0}^{l-1} f^{(\nu, \mu)}(x_i, y_j) \varphi_{i\nu}(x) \psi_{j\mu}(y). \quad (3.4.15)$$

тобто класичні сплайни від двох змінних використовують базис, що є тензорним добутком одновимірних базисів сплайнів за різними змінними. Уведемо оператори (вони діють на $f(x, y)$ за однією змінною)

$$A_1(f; x, y) = \sum_{i=0}^{M_1} \sum_{\nu=0}^{k-1} f^{(\nu, 0)}(x_i, y) \varphi_{i\nu}(x), \quad (3.4.16)$$

$$A_2(f; x, y) = \sum_{j=0}^{M_2} \sum_{\mu=0}^{l-1} f^{(0, \mu)}(x, y_j) \psi_{j\mu}(y). \quad (3.4.17)$$

Тоді

$$A_1(A_2(f; x, y); x, y) \equiv A_2(A_1(f; x, y); x, y) \equiv A_{12}(f; x, y) =: s(x, y).$$

Тому оператор ("булева" сума операторів)

$$A(f; x, y) =: (A_1 \oplus A_2)f(x, y) = (A_1 + A_2 - A_1 A_2)f(x, y) \quad (3.4.18)$$

матиме такі властивості: $A(f; x, y) \in C^{k-1, l-1}(I^2)$,

$$\left. \frac{\partial^s A(f; x, y)}{\partial x^s} \right|_{x=x_i} = f^{(s, 0)}(x_i, y), \quad i = \overline{0, M_1}, \quad s = \overline{0, k-1}, \quad (3.4.19)$$

$$\left. \frac{\partial^p A(f; x, y)}{\partial y^p} \right|_{y=y_j} = f^{(0, p)}(x, y_j), \quad j = \overline{0, M_2}, \quad p = \overline{0, l-1}. \quad (3.4.20)$$

Якщо при побудові базисів $\{\varphi_{i\nu}(x)\}$, $\{\psi_{j\mu}(y)\}$ використані, наприклад, періодичні умови (3.4.3), то функції $A(f; x, y)$ також задовольнятимуть умови періодичності за x та y :

$$\left. \frac{\partial^\nu A(f; x, y)}{\partial x^\nu} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial^\nu A(f; x, y)}{\partial x^\nu} \right|_{x=1}, \quad \nu = \overline{k, 2m_1 - k - 1}, \quad 2m_1 - 1 = m, \quad (3.4.21)$$

$$\left. \frac{\partial^\mu A(f; x, y)}{\partial y^\mu} \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial^\mu A(f; x, y)}{\partial y^\mu} \right|_{y=1}, \quad \mu = \overline{l, 2n_1 - l - 1}, \quad 2n_1 - 1 = n. \quad (3.4.22)$$

Оператор інтерлінації (3.4.18) і є оператором поліноміальної сплайн-інтерлінації на відміну від оператора сплайн-інтерполяції (3.4.15).

З формули (3.4.18) випливає, що залишок наближення диференційовної функції $f(x, y) \in PC^{r_1, r_2}(\mathbf{R}^2)$ оператором $A(f; x, y)$ можна зобразити у вигляді

$$\begin{aligned} f(x, y) - A(f; x, y) &= (I - A)f(x, y) = [(I - A_1)(I - A_2)f](x, y) = \\ &= \int_0^1 \int_0^1 K_1(x, \xi) K_2(y, \eta) f^{(r_1, r_2)}(\xi, \eta) d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (3.4.23)$$

Водночас для залишку наближення $f(x, y)$ оператором A_{12} справедлива така рівність:

$$\begin{aligned} f(x, y) - A_{12}(f; x, y) &= (I - A_1)f(x, y) + (I - A_2)f(x, y) - \\ &- (I - A)f(x, y) = \int_0^1 K_1(x, u) f^{(r_1, 0)}(u, y) du + \\ &+ \int_0^1 K_2(y, v) f^{(0, r_2)}(x, v) dv - (I - A)f(x, y). \end{aligned} \quad (3.4.24)$$

Явні вирази для ядер $K_1(x, u)$ та $K_2(y, v)$ можна отримати, скориставшись формами для інтегрального зображення залишків інтерполяційних формул Лагранжа та Ерміта (п. 2.2.1).

Побудова сплайн-інтерлінантів із використанням фундаментальних сплайнів. Зупинимось детальніше на алгоритмах побудови сплайн-інтерлінантів з використанням квадратичних, кубічних В-сплайнів (сплайнів Бора) та В-сплайнів 5-го степеня.

Означення 1. В-сплайном m -го ($m \geq 2$) порядку ($m - 1$ -го степеня) є функція

$$N_m(x) = (N_{m-1} * N_1)(x) = \int_0^1 N_{m-1}(x-t) N_1(t) dt = \int_0^1 N_{m-1}(x-t) dt,$$

$$N_1(x) = \chi_{[0,1)}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1), \\ 0, & x \notin [0, 1), \end{cases}$$

$$N_2(x) = \begin{cases} x, & x \in (0, 1], \\ 2-x, & x \in (1, 2), \\ 0, & x \notin (0, 2), \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
N_3(x) &= \frac{1}{2} \begin{cases} x^2, & x \in (0, 1], \\ -2x^2 + 6x - 3, & x \in (1, 2], \\ (x-3)^2, & x \in (2, 3), \\ 0, & x \in (0, 3), \end{cases} \\
N_4(x) &= \frac{1}{6} \begin{cases} x^3, & x \in (0, 1], \\ 1 + 3(x-1) + 3(x-1)^2(2-x), & x \in (1, 2], \\ 4 - 6(x-2)^2 + 3(x-2)^3, & x \in (2, 3], \\ (4-x)^3, & x \in (3, 4), \\ 0, & x \in (0, 4), \end{cases} \\
N_5(x) &= \frac{1}{24} \begin{cases} x^4, & x \in (0, 1], \\ 1 + 4(x-1) + 6(x-1)^2 + 4(x-1)^3 - & x \in (1, 2], \\ 4(x-1)^4, & \\ 11 + 12(x-2) - 6(x-2)^2 - 12(x-2)^3 + & x \in (2, 3], \\ 6(x-2)^4, & \\ 1 - 4(x-4) + 6(x-4)^2 - 4(x-4)^3 - & x \in (3, 4], \\ 4(x-4)^4, & \\ (x-5)^4, & x \in (4, 5), \\ 0, & x \in (0, 5), \end{cases} \\
N_6(x) &= \frac{1}{120} \begin{cases} x^5, & x \in (0, 1], \\ 1 + 5(x-1) + 10(x-1)^2 + 10(x-1)^3 + & x \in (1, 2], \\ +5(x-1)^4 - 5(x-1)^5, & \\ 26 + 50(x-2) + 20(x-2)^2 - 20(x-2)^3 - & x \in (2, 3], \\ -20(x-2)^4 + 10(x-2)^5, & \\ 66 - 60(x-3)^2 + 30(x-3)^4 - 10(x-3)^5, & x \in (3, 4], \\ 26 - 50(x-4) + 20(x-4)^2 + 20(x-4)^3 - & \\ -20(x-4)^4 + 5(x-4)^5, & x \in (4, 5], \\ (6-x)^5, & x \in (5, 6), \\ 0, & x \in (0, 6). \end{cases}
\end{aligned}$$

На практиці корисними можуть бути наступні відомі твердження про В-сплайни. Введемо позначення.

$$\begin{cases} x_+ := \max\{0, x\}, \\ x_+^{m-1} := (x_+)^{m-1}, \quad m \geq 2. \end{cases}$$

$$(\Delta f)(x) := f(x) - f(x-1), \quad (\Delta^n f)(x) := (\Delta^{n-1}(\Delta f))(x), \quad n = 2, 3, \dots$$

$$\binom{m}{k} := \frac{m!}{k!(m-k)!}.$$

Твердження 1. Для $N_m(x)$ справедливе зображення

$$N_m(x) = \frac{1}{(m-1)!} \Delta^m x_+^{m-1} = \frac{1}{(m-1)!} \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} (x-k)_+^{m-1}.$$

Твердження 2. $\forall f \in C(\mathbf{R})$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)N_m(x)dx = \int_0^1 \cdots \int_0^1 f(t_1 + \cdots + t_m)dt_1 \cdots dt_m.$$

Твердження 3. $\forall f \in C^m(\mathbf{R})$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^{(m)}(x)N_m(x)dx = \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} \binom{m}{k} f(k).$$

Твердження 4. а) $\text{supp}N_m = [0, m]$,

б) $N_m(x) > 0 \forall x : 0 < x < m$;

в) $\sum_{k=-\infty}^{\infty} N_m(x-k) = 1 \forall x \in \mathbf{R}$;

г) $N_m(x) = \frac{x}{m-1}N_{m-1}(x) + \frac{m-x}{m-1}N_{m-1}(x-1)$;

д) $N_m(\frac{m}{2} + x) = N_m(\frac{m}{2} - x) \forall x \in \mathbf{R}$ — це твердження означає, що В-сплайн симетричний відносно середини свого носія;

е) $N_m(x) = \sum_{k=0}^m \frac{1}{2^{m-1}} \binom{m}{k} N_m(2x-k)$ — це двомасштабне співвідношення для В-сплайнів порядку m (степеня $m-1$).

Перейдемо до наступної задачі: для довільної допустимої (тобто такої, що має не більш ніж поліноміальний ріст) послідовності даних f_j знайти розв'язок $\{c_k\}$ системи рівнянь

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k N_m(x + \frac{m}{2} - k) |_{x=j} = f_j, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Твердження 5. Хай $f_j = \delta_{j,0}$, $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Тоді розв'язок нескінченної системи відносно $c_k^{(m)}$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^{(m)} N_m(x + \frac{m}{2} - k) |_{x=j} = \delta_{j,0}, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

дає "фундаментальну сплайн-функцію"

$$L_m(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^{(m)} N_m(x + \frac{m}{2} - k),$$

яка при $m = 4$ має вигляд (див. К. Чуи, с. 184)

$$L_4(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \sqrt{3} (2 - \sqrt{3})^{|k|} N_4(x + 2 - k).$$

Врахувавши, що $\text{supp}N_4(x+2-k) = (k-2, k+2)$, можна дійти висновку, що швидкість спадання $L_4(x)$ дорівнює $O((2-\sqrt{3})^{|x|})$, $x \rightarrow \pm\infty$. Отже, формула

$$J_m f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)L_m(x-k)$$

є нескінченим інтерполяційним сплайн-рядом із властивостями

$$J_m f(j) = f(j), \quad j \in \mathbf{Z},$$

який збігається до кожної неперервної функції $f(x) \forall x \in \mathbf{R}$, якщо вона має не більш ніж поліноміальний ріст при $|x| \rightarrow \infty$.

На практиці зручно користуватись замість $J_m f$ квазіінтерполяційними операторами (інколи їх називають апроксимативними)

$$Q_{k,m} f(x) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} (\Lambda_{k,m} f)(\ell) N_m(x + \frac{m}{2} - \ell), \quad f \in C(\mathbf{R}),$$

де функціонали $\Lambda_{k,m} f$ знаходяться у вигляді лінійної комбінації значень $f(j)$, такої що $Q_{k,m} f(x) = f(x)$, $x = 1, x, \dots, x^k$, $k \leq m$. Наприклад, числа

$$(\Lambda_{2,2} f)(\ell) = \frac{1}{8}(-f(\ell-1) + 10f(\ell) - f(\ell+1))$$

дають апроксимативні квадратичні сплайни

$$Q_{2,2} f(x) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \frac{1}{8}(-f(\ell-1) + 10f(\ell) - f(\ell+1)) N_3(x + \frac{3}{2} - \ell), \quad f \in C(\mathbf{R}),$$

з властивостями

$$Q_{2,2} f(x) = f(x), \quad \forall f(x) = 1, x, x^2.$$

$$\sup_{f \in W_{\infty}^3} \|f - Q_{2,2} f\|_{C[0,1]} = \frac{3}{64} h^3 \approx 0.046875 h^3.$$

Для порівняння наведемо похибку найкращого наближення функцій класу W_{∞}^3 інтерполяційними квадратичними сплайнами $\sigma_2 f$ на рівномірній сітці вузлів $t_j = j/N$, $j = 0, 1, \dots, N$ із кроком $h = 1/N$:

$$\sup_{f \in W_{\infty}^3} \|f - \sigma_2 f\|_{C[0,1]} = \frac{1}{24} h^3 \approx 0.0416667 h^3.$$

Числа

$$(\Lambda_{3,3} f)(\ell) = \frac{1}{6}(-f(\ell-1) + 8f(\ell) - f(\ell+1))$$

дають апроксимативні кубічні сплайни

$$Q_{3,3}f(x) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \frac{1}{6}(-f(\ell-1) + 8f(\ell) - f(\ell+1))N_4(x+2-\ell), \quad f \in C(\mathbf{R}),$$

із властивостями

$$Q_{3,3}f(x) = f(x), \quad \forall f(x) = 1, x, x^2, x^3.$$

$$\sup_{f \in W_{\infty}^4} \|f - Q_{2,2}f\|_{C[0,1]} = \frac{35}{1152}h^4 \approx 0.0303819h^4.$$

Для порівняння наведемо похибку найкращого наближення функцій класу W_{∞}^4 інтерполяційними кубічними сплайнами $\sigma_3 f$ з крайовими умовами Лідстона на рівномірній сітці вузлів $t_j = j/N, j = 0, 1, \dots, N$ із кроком $h = 1/N$:

$$\sup_{f \in W_{\infty}^4} \|f - \sigma_3 f\|_{C[0,1]} = \frac{5}{384}h^4 \approx 0.0130208h^4.$$

Верхня грань в останній оцінці досягається на функції $f(t) = |t - t_{N/2} - h/2|^4/4!$. Тобто апроксимативні локальні сплайни 2 і 3-го степеня наближують диференційовні функції з похибкою яка незначно відрізняється від найкращої, отриманої наближенням відповідними інтерполяційними сплайнами.

3.4.2. Сплайн-інтерлінація на лініях ректангуляції

Розглянемо кусково-поліноміальну інтерлінацію на лініях ректангуляції обмеженої області $\Omega \subset \mathbf{R}^2$, тобто на лініях, які розділяють Ω на прямокутники. Хай область Ω складається з об'єднання прямокутників

$$\Omega = \bigcup_i \Pi_i; \quad \Pi_i = [x_{1,i_1}, x_{1,i_1+1}] \times [x_{2,i_2}, x_{2,i_2+1}], \quad i = (i_1, i_2) \in \mathfrak{R},$$

де \mathfrak{R} – деяка множина мультиіндексів.

Хай

$$\begin{aligned} E_{i_0}(x) = & \sum_{j_1=0}^1 \frac{x_1 - x_{1,i_1+1-j_1}}{x_{1,i_1+j_1} - x_{1,i_1+1-j_1}} f(x_{1,i_1+j_1}, x_2) + \\ & + \sum_{j_2=0}^1 \frac{x_2 - x_{2,i_2+1-j_2}}{x_{2,i_2+j_2} - x_{2,i_2+1-j_2}} f(x_1, x_{2,i_2+j_2}) - \end{aligned} \quad (3.4.25)$$

$$- \sum_{j_1=0}^1 \sum_{j_2=0}^1 \frac{x_1 - x_{1,i_1+1-j_1}}{x_{1,i_1+j_1} - x_{1,i_1+1-j_1}} \frac{x_2 - x_{2,i_2+1-j_2}}{x_{2,i_2+j_2} - x_{2,i_2+1-j_2}} f(x_{ij}),$$

$$x \in \Pi_i, i = (i_1, i_2), j = (j_1, j_2), x_{ij} = (x_{1,i_1+j_1}, x_{2,i_2+j_2}),$$

$E_{i0}(x)$ – поліноміальні інтерліанти із властивостями

$$f(x) \in C(\Omega) \rightarrow E_{i0}(x) \in C(\Pi_{ij}), \quad (3.4.26)$$

$$E_{i0}f(x_{1,i_1+j_1}, x_2) = f(x_{1,i_1+j_1}, x_2); j_1 = 0, 1; \quad (3.4.27)$$

$$E_{i0}f(x_1, x_{2,i_2+j_2}) = f(x_1, x_{2,i_2+j_2}); j_2 = 0, 1.$$

Тоді оператор $E_{\Omega}f(x)$, що визначається рівностями

$$E_{\Omega}f(x) = E_{i0}f(x), x \in \Pi_i \subset \Omega, \quad (3.4.28)$$

задовольнятиме умови

$$E_{\Omega}f(x) \Big|_{x_k=x_k, i_k+j_k} = f(x) \Big|_{x_k=x_k, i_k+j_k}, \quad (3.4.29)$$

$$x \in \Pi_i \subset \Omega, 0 \leq j_k \leq 1, k = 1, 2.$$

Цей оператор називатимемо *кусково-поліноміальним інтерліанційним оператором*, або *кусково-поліноміальним інтерліантом*. Він інтерлінує функцію f на системі взаємно перпендикулярних прямих - сторонах прямокутників $\Pi_i \subset \Omega$; при цьому на межах кожного з двох сусідніх прямокутників Π_i, Π_{i^*} , що мають спільні сторони або кутові точки, оператори $E_{\Omega}f(x)$ зберігають неперервність, тобто $E_{\Omega}f(x) \in C(\Omega)$.

Ще раз підкреслимо, що функція $E_{\Omega}f(x)$ має значення в точках $x \in \Pi_i$, залежні від слідів функції $f(x)$ лише на межі $\partial\Pi_i$.

Хай $f(x) \in L_q^{2,2}(\Omega)$, $1 \leq q \leq \infty, p = (p_1, p_2)$,

$$L_q^p(\Omega) =: \{f(x) | f^{(s)} \in C(\Omega), s = (s_1, s_2), 0 \leq s_k \leq 2, k = 1, 2, s \neq (2, 2),$$

$$\|f^{(2,2)}\|_{L_q(\Omega)} \leq 1\}.$$

Як випливає з формули (3.2.18) похибка поліноміальної інтерліанції в кожному з прямокутників $\Pi_i \subset \Omega$ задовольняє нерівність

$$|f(x) - E_{\Omega}f(x)| \leq |Q_i(x)|, \quad x \in \Pi_i \subset \Omega, i = (i_1, i_2), \quad (3.4.30)$$

де $Q_i(x)$ – "стандартна" функція

$$Q_i(x) = \frac{(x_1 - x_{1,i_1})(x_1 - x_{1,i_1+1})(x_2 - x_{2,i_2})(x_2 - x_{2,i_2+1})}{2!2!}.$$

Тому похибку наближення функції $f(x) \in L_{\infty}^{2,2}(\Omega)$ оператором $E_{\Omega}f(x)$ у кожній точці $x \in \Omega$ оцінюють з огляду на значення функції

$$Q(x) = Q_i(x), \quad x \in \Pi_i.$$

Теорема 3.4.2. *Якщо $f(x) \in L_{\infty}^{2,2}(\Omega)$, то*

$$|f(x) - E_{\Omega}f(x)| \leq |Q(x)|, \quad x \in \Omega. \quad (3.4.31)$$

Оцінка (3.4.7) є найкращою у кожній точці $x \in \Omega$.

Д о в е д е н н я. Хай $\delta(x) = f(x) - E_{\Omega}f(x)$,

$$\delta(x) \Big|_{x_k = x_{k,i_k+j_k}} = 0, \quad 0 \leq p_k \leq N; x \in \Pi_i \subset \Omega; 0 \leq j_k \leq 1, k = 1, 2. \quad (3.4.32)$$

Треба довести, що $|\delta(x)| \leq |Q(x)| \quad \forall x \in \Omega$. Припустимо, що це не так й існує $\bar{\Pi}_i \subset \Omega$ і точка $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in \bar{\Pi}_i \subset \Omega$, в якій $|\delta(\bar{x})| > |Q(\bar{x})| = |Q_i(\bar{x})|$. Виберемо $\lambda (0 < |\lambda| < 1)$ з умови $\lambda \delta(\bar{x}) = Q(\bar{x})$.

Враховуючи, що $Q^{(2,0)}(x) = (x_2 - x_{2,i_2})(x_2 - x_{2,i_2+1})/2$, $x \in \Pi_i$, $Q^{(0,2)}(x) = (x_1 - x_{1,i_1})(x_1 - x_{1,i_1+1})/2$, $x \in \Pi_i$, $Q^{(2,2)}(x) = 1$, а також те, що $|\lambda| < 1$, можна зробити висновок, що функція $\eta(x) = Q(x) - \lambda \delta(x)$ не може тотожно дорівнювати нулю на якому-небудь прямокутнику Π_i .

Функція $\eta(x)$ має такі властивості:

а)

$$\eta(x) \Big|_{x_k = x_{k,i_k+j_k}} = 0, \quad x \in \Pi_i \subset \Omega; 0 \leq j_k \leq 1; k = 1, 2; \quad (3.4.33)$$

б) $\eta(x)$ має на $[x_{1,i_1}, x_{1,i_1+1}]$ щонайменше три розділених нулі при $\bar{x}_2 \in [x_{2,i_2}, x_{2,i_2+1}]$; $\eta(x)$ має щонайменше три розділені нулі на $[x_{2,i_2}, x_{2,i_2+1}]$ при $\bar{x}_1 \in [x_{1,i_1}, x_{1,i_1+1}]$.

Із (3.4.9) випливає, що похідна $\eta^{(1,0)}(x_1, x_2)$ повинна мати на інтервалі $[x_{1,i_1}, x_{1,i_1+1}]$ не менше двох розділених нулів, а тому похідна $\eta^{(2,0)}(x_1, x_2)$ має змінювати знак на $[x_{1,i_1}, x_{1,i_1+1}]$ при фіксованому $x_2 = \bar{x}_2$. Аналогічні міркування приводять до висновку, що $\eta^{(0,2)}(x_1, x_2)$ має змінювати знак на інтервалі $[x_{2,i_2}, x_{2,i_2+1}]$ при фіксованому $x_1 = \bar{x}_1$. Отже, $\eta^{(2,2)}(x_1, x_2) = Q^{(2,2)}(x_1, x_2) - \lambda \delta^{(2,2)}(x_1, x_2)$

має дорівнювати нулю щонайменше на одній прямій $x_1 = u_1$ ($x_{1i_1} < u_1 < x_{1,i_1+1}$) і на одній прямій $x_2 = v_1$ ($x_{2i_2} < v_1 < x_{2,i_2+1}$). Однак це неможливо, бо

$$\begin{aligned} |f^{(2,2)}(x)| &= D^{2,2}Q(x) = 1, D^{2,2}E_\Omega(x) = 0 \quad \forall x \in \Pi_i, \\ |\lambda\delta^{(2,2)}(x)| &= |\lambda(f^{(2,2)}(x) - D^{2,2}E_\Omega(x))| = |\lambda| |f^{(2,2)}(x)| < 1. \end{aligned}$$

Таким чином, ми отримали нерівність $|\lambda\delta^{(2,2)}(x)| < 1$. Проте згідно з припущенням $\lambda\delta(\bar{x}) = Q(\bar{x})$ має виконуватись рівність $\lambda\delta^{(2,2)}(\bar{x}) = Q^{(2,2)}(\bar{x}) = 1$. Тобто ми отримали протиріччя, яке і доводить перше твердження теореми. Те, що оцінка (3.4.31) є найкращою, випливає із співвідношень

$$Q(x) \in L_\infty^{2,2}(\Omega), \quad E_\Omega Q(x) \equiv 0 \quad x \in \Omega.$$

Теорему 3.4.2 доведено.

Введемо до розгляду також оператори

$$\begin{aligned} E_{iN}(x) &= \sum_{j_1=0}^1 \sum_{s_1=0}^N h_{1,j_1,s_1}(x_1) f^{(s_1,0)}(x_1, i_1+j_1, x_2) + \\ &+ \sum_{j_2=0}^1 \sum_{s_2=0}^N h_{2,j_2,s_2}(x_2) f^{(0,s_2)}(x_1, x_2, i_2+j_2) - \\ &- \sum_{j_1=0}^1 \sum_{j_2=0}^1 \sum_{s_1,s_2=0}^N h_{1,j_1,s_1}(x_1) h_{2,j_2,s_2}(x_2) f^{(s)}(x_{ij}), \quad x \in \Pi_i \subset \Omega, \end{aligned}$$

$$i = (i_1, i_2), j = (j_1, j_2), s = (s_1, s_2), x_{ij} = (x_{1,i_1+j_1}, x_{2,i_2+j_2}).$$

де $h_{k,j_k,s_k}(x_k)$, $k = 1, 2$ - базисні поліноми двоточкової ермітової інтерполяції. Пропонуємо читачеві самостійно довести (див. О.М. Литвин [3, п. 3.4.1]), що $E_{iN}(x)$ - поліноміальні інтерліаннти із властивостями

$$f(x) \in C^r(\mathbf{R}^2) \rightarrow E_{iN}(x) \in C^{r-N}(\mathbf{R}^2), \quad r \geq 2N,$$

$$\left. \frac{\partial^{p_k} E_{iN} f(x)}{\partial x_k^{p_k}} \right|_{x_k=x_k, i_k+j_k} = \left. \frac{\partial^{p_k} f(x)}{\partial x_k^{p_k}} \right|_{x_k=x_k, i_k+j_k}, \quad (3.4.34)$$

$$\Pi_i \subset \Omega; 0 \leq j_k \leq 1; 0 \leq p_k \leq N; k = 1, 2.$$

Довести також, що оператор $E_\Omega f(x)$, що визначається рівностями

$$E_\Omega f(x) = \bar{E}_{iN} f(x), \quad x \in \Pi_i \subset \Omega, \quad (3.4.35)$$

задовольнятиме умови $f(x) \in C^r(\Omega) \Rightarrow E_\Omega f(x) \in C^N(\Omega), r \geq 2N$,

$$\frac{\partial^{p_k} E_\Omega f(x)}{\partial x_k^{p_k}} \Big|_{x_k=x_k, i_k+j_k} = \frac{\partial^{p_k} f(x)}{\partial x_k^{p_k}} \Big|_{x_k=x_k, i_k+j_k}, \quad (3.4.36)$$

$$x \in \Pi_i \subset \Omega, 0 \leq j_k \leq 1, 0 \leq p_k \leq N, k = 1, 2.$$

Цей оператор називатимемо *кусково-поліноміальним інтерлінаційним оператором*, або *кусково-поліноміальним інтерліантом*. Він інтерлінує функцію f та її немішані похідні до порядку N включно на взаємно перпендикулярних прямих - сторонах прямокутників $\Pi_i \subset \Omega$; при цьому на межах кожного з двох сусідніх прямокутників Π_i, Π_{i^*} , що мають спільні сторони або точки, оператори $E_{iN} f(x), E_{i^*N} f(x)$ зберігають неперервні похідні до порядку N включно.

Ще раз підкреслимо, що функція $E_\Omega f(x)$ має значення в точках $x \in \Pi_i$, залежні від слідів функції $f(x)$ та її нормальних похідних (в даному випадку нормальні похідні збігаються з частинними похідними по змінних x_1 та x_2) до порядку N лише на межі $\partial \Pi_i$.

Хай $f(x) \in L_q^{2(N+1), 2(N+1)}(\Omega), 1 \leq q \leq \infty$,

$$L_q^p(\Omega) =: \{f(x) \mid f^{(s)} \in C(\Omega), s = (s_1, s_2), 0 \leq s_k \leq p_k, k = 1, 2, s \neq p,$$

$$p = (p_1, p_2); \quad \|f^{(p)}\|_{L_q(\Omega)} \leq 1\}.$$

Довести, що похибка $\delta(x) = f(x) - E_\Omega f(x)$ поліноміальної інтерлінації в кожному з прямокутників $\Pi_i \subset \Omega$ задовольняє нерівність

$$|f(x) - E_\Omega f(x)| \leq |Q_i(x)|, \quad x \in \Pi_i \subset \Omega, i = (i_1, i_2), \quad (3.4.37)$$

де $Q_i(x)$ - "стандартна" функція $Q_i(x) =$

$$= \frac{(x_1 - x_{1,i_1})^{N+1} (x_1 - x_{1,i_1+1})^{N+1} (x_2 - x_{2,i_2})^{N+1} (x_2 - x_{2,i_2+1})^{N+1}}{(2(N+1))!(2(N+1))!}.$$

Тому похибка наближення функції $f(x) \in L_\infty^{2(N+1), 2(N+1)}(\Omega)$ оператором $E_\Omega f(x)$ у кожній точці $x \in \Omega$ оцінюється з огляду на значення функції

$$Q(x) = Q_i(x), \quad x \in \Pi_i.$$

Пропонуємо читачеві самостійно довести наступну теорему.

Теорема 3.4.3. *Якщо $f(x) \in L_\infty^{2(N+1), 2(N+1)}(\Omega)$, то*

$$|f(x) - E_\Omega f(x)| \leq |Q(x)|, x \in \Omega. \quad (3.4.38)$$

Оцінка (3.4.14) є найкращою у кожній точці $x \in \Omega$.

Уведемо позначення: $\Delta_k = \max_{i_k} \Delta_{ki_k}$, $\Delta_{ki_k} = x_{k,i_{k+1}} - x_{k,i_k}$. Тоді нерівність (3.4.38) дає змогу довести такі наслідки.

Н а с л і д о к 1. Для похибки $f - E_\Omega f$ виконується співвідношення

$$\begin{aligned} & \sup_{f \in L_\infty^{M_1(N+1), M_2(N+1)}(\Omega)} \|f - E_\Omega f\|_{C(\Omega)} = \\ & = \frac{\Delta_1^{M_1(N+1)} \Delta_2^{M_2(N+1)}}{[M_1(N+1)]! [M_2(N+1)]! 2^{(N+1)(M_1+M_2)}}. \end{aligned} \quad (3.4.39)$$

Доведення цього наслідку впливає з того, що $\max_{x \in \Pi_i} |Q_i(x)| =$

$$= \left| Q_i \left(x_{1i_1} + \frac{\Delta_{1i_1}}{2}, x_{2i_2} + \frac{\Delta_{2i_2}}{2} \right) \right| = \frac{\Delta_{1i_1}^{2(N+1)} \Delta_{2i_2}^{2(N+1)}}{[2(N+1)]! [2(N+1)]! 2^{4(N+1)}}.$$

Зокрема, при фіксованому розбитті області Ω на прямокутники $\Pi_i \subset \Omega$ з довжинами сторін Δ_1 та Δ_2 (випадок рівномірного розбиття)

$$\sup_{f \in L_\infty^{M_1(N+1), M_2(N+1)}(\Omega)} \|f - E_\Omega f\|_{C(\Omega)} = \frac{\Delta_1^{2(N+1)} \Delta_2^{2(N+1)} 2^{-4(N+1)}}{[2(N+1)]! [2(N+1)]!}.$$

Н а с л і д о к 2. При $1 \leq q \leq \infty$

$$\begin{aligned} & \sup_{f \in L_\infty^{M_1(N+1), M_2(N+1)}(\Omega)} \|f - E_\Omega f\|_{L_q(\Omega)} = \\ & = M_{Nq} \left[\sum_{\Pi_i \in \Omega} \Delta_{1i_1}^{2q(N+1)+1} \Delta_{2i_2}^{2q(N+1)+1} \right]^{1/q}, \end{aligned} \quad (3.4.40)$$

$$M_{Nq} = [\Gamma(q(N+1) + 1)]^{4/q} [\Gamma(2N+3)]^{-2} [\Gamma(2(N+1)q + 2)]^{-2/q}.$$

Зокрема, при фіксованому розбитті області Ω на прямокутники $\Pi_i \subset \Omega$ з довжинами сторін Δ_1 та Δ_2

$$\sup_{f \in L_\infty^{M_1(N+1), M_2(N+1)}(\Omega)} \|f - E_\Omega f\|_{L_q(\Omega)} = M_{Nq} (\text{mes } \Omega)^{(1/q)} \Delta_1^{2(N+1)} \Delta_2^{2(N+1)}.$$

Рекомендуємо читачеві самостійно довести наступну теорему.

Теорема 3.4.4. *Хай* $1 \leq q \leq \infty$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$. У випадку рівномірного розбиття області Ω на прямокутники Π_i зі сторонами Δ_1 та Δ_2

$$\sup_{f \in L_1^{2(N+1), 2(N+1)}(\Omega)} \|f - E_\Omega f\|_{L_1(\Omega)} = \frac{\Delta_1^{2(N+1)} \Delta_2^{2(N+1)}}{[(2(N+1))!]^2 2^{4(N+1)}}, \quad (3.4.41)$$

$$\sup_{f \in L_q^{2(N+1), 2(N+1)}(\Omega)} \|f - E_\Omega f\|_{L_1(\Omega)} = M_{Nq'} \left[\sum_{\Pi_i \in \Omega} (\Delta_{1i_1} \Delta_{2i_2})^{2q'(N+1)+1} \right]^{1/q'}. \quad (3.4.42)$$

Зауваження. При інтерлінації нескінченне число разів диференційовних функцій можна скористатися атомарними функціями В.Л.Рвачова і В.А.Рвачова [1].

3.4.3. Сплайн-інтерлінація на лініях триангуляції

У випадку, коли область Ω розбита на трикутники (триангульована), залишок інтерлінації в кожному з трикутників не дорівнює добуткові залишків одновимірної інтерполяції – на відміну від випадку розбиття Ω на прямокутники. Тому корисна наступна лема.

Лема 3.4.1. *Хай $\xi, x \in \mathbf{R}^n$, $T_i = T_{ix} \subset T \subset \mathbf{R}^n$ ($i = \overline{1, M}$, $\text{mes}(T_i \cap T_j) = 0$),*

$$K(x, \xi) = \begin{cases} K_i(x, \xi), & \xi \in T_i, \quad i = \overline{1, M}, \\ 0, & \xi \in T \setminus \bigcup_i T_i, \end{cases}$$

$$1 \leq p, q \leq \infty, \quad 1/p + 1/p' = 1, \quad g \in L_p(T),$$

$$\left(\int_{T_i} |K_i(x, \xi)|^{p'} d\xi \right)^{1/p'} \in L_q(T), \quad i = \overline{1, M}.$$

Тоді

$$\left(\int_T \left| \int_T g(\xi) K(x, \xi) d\xi \right|^q dx \right)^{1/q} \leq$$

$$\leq \|g\|_{L_p(T)} \left(\int_T \left[\sum_{i=1}^M \left(\int_{T_i} |K_i(x, \xi)|^{p'} d\xi \right)^{1/p'} \right]^q dx \right)^{1/q}.$$

Якщо ж $(\int_{T_i} |K_i(x, \xi)|^{p'} d\xi)^{1/p'} = \psi(x)$, $i = \overline{1, M}$, $\sum_{i=1}^M (\int_{T_i} |g(\xi)|^p d\xi)^{1/p} = (\int_T |g(\xi)|^p d\xi)^{1/p}$, то отримуємо більш точну нерівність

$$\left(\int_T \left| \int_T g(\xi) K(x, \xi) d\xi \right|^q dx \right)^{1/q} \leq \|g\|_{L_p(T)} \|\psi(x)\|_{L_q(T)}.$$

Твердження лемати 3.4.1 лежить в основі доведення наступної лемати.

Лема 3.4.2. *Хай $T_e = \{x, y > 0, 1 - x - y > 0\}$, $f(x, y) \in \mathbf{C}^{1,1}(\overline{T_e})$. Тоді оператор*

$$L_0 f(x, y) = (1 - x - y)[f(x, 0) + f(0, y) - f(0, 0)] +$$

$+y[f(x, 1-x) - f(0, 1-x) + f(0, y)] + x[f(1-y, y) - f(1-y, 0) + f(x, 0)]$
 інтерлінує f на ∂T_e : $L_0 f|_{\partial T_e} = f|_{\partial T_e}$. Для залишку $R_0 f = (I - L_0)f$
 справедлива рівність

$$\begin{aligned} R_0 f(x, y) &= (1-x-y) \int_0^x \int_0^y f^{(1,1)}(\xi, \eta) d\xi d\eta + \\ &+ y \int_0^x \int_{1-x}^y f^{(1,1)}(\xi, \eta) d\xi d\eta + x \int_{1-y}^x \int_0^y f^{(1,1)}(\xi, \eta) d\xi d\eta = \\ &= \iint_{T_i} f^{(1,1)}(\xi, \eta) K(x, y; \xi, \eta) d\xi d\eta, \end{aligned} \quad (3.4.43)$$

$$\begin{aligned} K(x, y; \xi, \eta) &= \\ &= \begin{cases} 1-x-y := K_1(x, y; \xi, \eta), & (\xi, \eta) \in T_1 = \{\xi \in (0, x), \eta \in (0, y)\}, \\ -y := K_2(x, y; \xi, \eta), & (\xi, \eta) \in T_2 = \{\xi \in (0, x), y < \eta < 1-x\}, \\ -x := K_3(x, y; \xi, \eta), & (\xi, \eta) \in T_3 = \{x < \xi < 1-y, \eta \in (0, y)\} \end{cases} \end{aligned}$$

i такі точні нерівності $\forall (x, y) \in T_e$, якщо $f \in L_\infty^{1,1}(T_e) \implies$
 $\implies \|f^{(1,1)}\|_{L_\infty(T_e)} = 1$,

$$|R_0 f(x, y)| \leq |xy(1-x-y)| \quad \forall (x, y) \in T_e, \quad (3.4.44)$$

$$\|R_0 f\|_{L_q(T_e)} \leq \|xy(1-x-y)\|_{L_q(T_e)} = C_q, \quad (3.4.45)$$

$$C_\infty = 1/27, \quad C_q = [\Gamma(q+1)^3/\Gamma(3q+3)]^{1/q}, \quad 1 \leq q < \infty.$$

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x^{\alpha_1} \partial y^{\alpha_2}} R_0 f \right\|_{L_q(T_e)} \leq C_{p,q,\alpha} \forall f \in L_p^{1,1}(T_e), \quad (3.4.46)$$

$$1 \leq p, q \leq \infty, \alpha = (\alpha_1, \alpha_2), \alpha_1 + \alpha_2 = 1.$$

Тут

$$C_{p,q,1,0} = C_{p,q,0,1} := \left(\frac{\Gamma\left(\frac{p-1}{p}q+2\right)\Gamma\left(\frac{p-1}{p}q+1\right)}{\Gamma\left(2\frac{p-1}{p}q+3\right)} \right)^{1/q}, \quad 1 \leq p, q < \infty;$$

$$C_{p,\infty,1,0} = C_{p,\infty,0,1} = (1/4)^{(p-1)/p}, \quad C_{\infty,\infty,1,0} = C_{\infty,\infty,0,1} = 1/4;$$

$$C_{\infty,1,1,0} = \frac{\Gamma(3)\Gamma(2)}{\Gamma(5)} = 1/12; C_{\infty,q,1,0} = \left(\frac{\Gamma(q+2)\Gamma(q+1)}{\Gamma(2q+3)} \right)^{1/q}.$$

Д о в е д е н н я. Те, що оператор $L_0 f$ інтерлінує f на ∂T_e , встановлюється безпосередньою перевіркою. Справедливість формули для залишку перевіряють інтегруванням у всіх трьох інтегралах. Далі

$$\iint_{T_1} |K_1(x, y; \xi, \eta)| d\xi d\eta = \int_0^x \int_0^y (1-x-y) d\xi d\eta = (1-x-y)xy,$$

$$\iint_{T_2} |K_2(x, y; \xi, \eta)| d\xi d\eta = \int_0^x \int_y^{1-x} |-y| d\xi d\eta = xy(1-x-y),$$

$$\iint_{T_3} |K_3(x, y; \xi, \eta)| d\xi d\eta = \int_x^{1-y} \int_0^y |-x| d\xi d\eta = (1-x-y)xy.$$

Таким чином, застосувавши лему 3.4.1, одержимо

$$|R_0 f(x, y)| \leq \|f^{(1,1)}\|_{L_\infty(T_e)} |xy(1-x-y)|, \quad (x, y) \in T_e \quad (p = \infty, p' = 1),$$

причому знак рівності тут досягається для $f = xy(1-x-y)$, $[xy(1-x-y)]^{(1,1)} = 1-2x-2y$, $\|[xy(1-x-y)]^{(1,1)}\|_{L_\infty(T_1)} = 1$, $f|_{\partial T_e} = 0$. Отже, нерівність (3.4.44) доведено. З неї очевидним чином отримаємо і нерівність (3.4.45). Значення констант $C_q = \|xy(1-x-y)\|_{L_q(T_e)}$ одержимо їх безпосереднім обчисленням.

Для доведення нерівності (3.4.46) при $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0$ (випадок $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1$ доводиться аналогічно) скористаємося рівністю

$$\frac{\partial}{\partial x} R_0 f(x, y) = \iint_{T_1} f^{(1,1)}(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial x} K(x, y; \xi, \eta) d\xi d\eta.$$

Врахувавши, що

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} K(x, y; \xi, \eta) &= K^{(1,1,0,0)}(x, y; \xi, \eta) = \\ &= \begin{cases} -1, & (\xi, \eta) \in T_1 = \{\xi \in (0, x), \eta \in (0, y)\}, \\ 0, & (\xi, \eta) \in T_2 = \{\xi \in (0, x), y < \eta < 1-x\}, \\ -1, & (\xi, \eta) \in T_3 = \{x < \xi < 1-y, \eta \in (0, y)\}, \end{cases} \end{aligned}$$

отримаємо

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial}{\partial x} R_0 f \right\|_{L_q(T_e)} &= \|f^{(1,1)}\|_{L_p(T)} \|K_{p,1,0}\|_{L_q(T_e)}, \\ K_{p,1,0}(x,y) &=: \left(\int_{T_e} |K^{(1,0,0,0)}(x,y;\xi,\eta)|^{p/(p-1)} d\xi d\eta \right)^{(p-1)/p} = \\ &= \left(\int_0^x \int_0^y d\xi d\eta + \int_0^x \int_y^{1-x} 0 d\xi d\eta + \int_x^{1-y} \int_0^y d\xi d\eta \right)^{(p-1)/p} = \\ &= (xy + (1-x-y)y)^{(p-1)/p} = ((1-y)y)^{(p-1)/p}, 1 \leq p \leq \infty. \end{aligned}$$

Тому $C_{p,\infty,1,0} =: \|K_{p,1,0}\|_{L_\infty(T_e)} = (1/4)^{(p-1)/p}$. Якщо $1 \leq q < \infty$, то

$$\begin{aligned} C_{p,q,1,0} &=: \|K_{p,1,0}\|_{L_q(T_e)} = \left(\int_0^1 dy \int_0^{1-y} [((1-y)y)^{(p-1)/p}]^q dx \right)^{1/q} = \\ &= \left(\int_0^1 [((1-y)y)^{(p-1)/p}]^q (1-y) dy \right)^{1/q} = \\ &= \left(\frac{\Gamma\left(\frac{p-1}{p}q + 2\right) \Gamma\left(\frac{p-1}{p}q + 1\right)}{\Gamma\left(2\frac{p-1}{p}q + 3\right)} \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

Зокрема,

$$C_{\infty,1,1,0} = \frac{\Gamma(3)\Gamma(2)}{\Gamma(5)} = \frac{1}{12}, C_{\infty,q,1,0} = \left(\frac{\Gamma(q+2)\Gamma(q+1)}{\Gamma(2q+3)} \right)^{1/q}.$$

Лему 3.4.2 доведено.

Розглянемо тепер замість "одичного" трикутника T_e трикутник $T = \{x, y > 0 : 1 - x/a - y/b > 0\}$. Легко бачити, що заміна змінних $x = x'a, y = y'b$ дає взаємно однозначне перетворення трикутника $T_e = \{x', y' > 0; 1 - x' - y' > 0\}$ на трикутник T . Тому з результатів леми 3.4.2 очевидним чином впливає наступна теорема.

Теорема 3.4.5. *Хай $f \in L_{\infty}^{1,1}(T)$,*

$$\begin{aligned} \bar{L}_0 f(x, y) &= \left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)[f(x, 0) + f(0, y) - f(0, 0)] + \\ &+ \frac{y}{b}[f(x, b(1 - \frac{x}{a})) - f(0, b(1 - \frac{x}{a})) + f(0, y)] + \frac{x}{a}[f(a(1 - \frac{y}{b}), y) - \\ &- f(a(1 - \frac{y}{b}), 0) + f(x, 0)]. \end{aligned}$$

Тоді

$$\bar{L}_0 f(x, y)|_{\partial T} = f(x, y)|_{\partial T},$$

$$|f(x, y) - \bar{L}_0 f(x, y)| \leq xy(1 - x/a - y/b) \quad \forall (x, y) \in T.$$

Цю нерівність не можна поліпшити на даному класі функцій. При цьому $\forall f(x, y) \in L_p^{(1,1)}(T)$, $1 \leq p \leq \infty \forall \alpha = (\alpha_1, \alpha_2) : 0 \leq |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 \leq 1$ виконуються нерівності

$$\left\| \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2}}{\partial x^{\alpha_1} \partial y^{\alpha_2}} (f(x, y) - \bar{L}_0 f(x, y)) \right\|_{L_q(T)} \leq a^{1 - \alpha_1 + \frac{1}{q} - \frac{1}{p}} b^{1 - \alpha_2 + \frac{1}{q} - \frac{1}{p}} C_{p,q,\alpha}. \quad (3.4.47)$$

Сталі $C_{p,q,\alpha_1,\alpha_2}$ (при $0 \leq |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 \leq 1$) означено в лемі 3.4.2.

Д о в е д е н н я. Функція $\varphi(x', y') =: f(x'a, y'b) = f(x, y)$ на трикутнику $T_e = \{x', y' \geq 0; 1 - x' - y' \geq 0\}$ задовольняє умови леми 3.4.2. Тому $\forall f \in L_p^{1,1}(T)$ отримаємо $|f(x, y) - \bar{L}_0 f(x, y)| =$

$$= |\varphi(x', y') - L_0 \varphi(x', y')| \leq \|\varphi^{(1,1)}\|_{L_p(T_e)} x' y' (1 - x' - y') =$$

$$= \left\| \frac{\partial^2}{\partial x' \partial y'} f(x'a, y'b) \right\|_{L_p(T_e)} x' y' (1 - x' - y') =$$

$$= ab \|\varphi^{(1,1)}(x'a, y'b)\|_{L_p(T_e)} x' y' (1 - x' - y').$$

Знайдемо норму $\|*\|_{L_q(T_e)}$ від обох частин отриманої нерівності і врахуємо, що

$$\|\varphi^{(1,1)}(x'a, y'b)\|_{L_p(T_e)} = (ab)^{-p} \|f^{(1,1)}\|_{L_p(T)},$$

$$\|\varphi(x', y') - L_0 \varphi(x', y')\|_{L_q(T_e)} = (ab)^{-q} \|(f(x, y) - \bar{L}_0 f(x, y))\|_{L_q(T)}.$$

У результаті

$$(ab)^{-q} \|f - \bar{L}f\|_{L_q(T)} \leq (ab)^{1 - 1/p} \|f^{1,1}\|_{L_p(T)} \|x' y' (1 - x' - y')\|_{L_q(T_e)}.$$

Врахувавши, що $\|x'y'(1-x'-y')\|_{L_q(T_\epsilon)} = C_q$ (див. (3.4.48)), з очевидністю отримуємо нерівність (3.4.50) для $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

Випадки $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0$ та $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1$ доводяться аналогічно з використанням твердження лемми 3.4.2.

Теорему 3.4.5 доведено.

Зауваження. Для практики бажано мати аналог оператора $\bar{L}_0 f(x, y)$ для інтерлінації на сторонах трикутника $T_{x_0, y_0}(a, b) = \{x - x_0 > 0, y - y_0 > 0, 1 - (x - x_0)/a - (y - y_0)/b > 0\}$. Введемо замість функції $f(u, v), (u, v) \in T_{x_0, y_0}(a, b)$ нову функцію $\varphi(x, y) = f(x_0 + x, y_0 + y), (x, y) \in T_{0,0}(a, b)$. Тоді оператор $\bar{L}_0 \varphi(x, y)$ інтерлінує функцію $\varphi(x, y)$ на сторонах трикутника $T_{0,0}(a, b)$, тобто

$$\begin{aligned} L_0 \varphi(0, y) &= \varphi(0, y) = f(x_0, y_0 + y), L_0 \varphi(x, 0) = \varphi(x, 0) = f(x_0 + x, y_0), \\ L_0 \varphi(x, b(1 - x/a)) &= \varphi(x, b(1 - x/a)) = f(x_0 + x, y_0 + b(1 - (x_0 + x)/a)). \end{aligned}$$

Таким чином, ми довели, що цей оператор інтерлінує $f(u, v), (u, v) \in T_{x_0, y_0}(a, b)$ на сторонах трикутника $T_{x_0, y_0}(a, b)$: $\bar{L}_0 \varphi(x, y) = Lf(u, v) = f(u, v), (u, v) \in \partial T_{x_0, y_0}(a, b)$.

Твердження теореми 3.4.4 дають змогу знайти точні оцінки похибки кусково-поліноміальної інтерлінації на триангульованих областях.

Хай Ω – багатокутник. Розіб'ємо його на прямокутники і трикутники прямими $x = x_k, k = \overline{1, M_1 + 1}, y = y_l, l = \overline{1, M_2 + 1}$ і потім кожний прямокутник $\Pi_{kl} \subset \Omega$ розіб'ємо на два трикутники однією з діагоналей. Таким чином, якщо (x_k, y_l) – вузол, в якому знаходиться прями кут прямокутного трикутника, то можливі чотири типи трикутників ($\Delta_{1k} = x_{k+1} - x_k; \Delta_{2l} = y_{l+1} - y_l$):

$$\begin{aligned} T_{kl}^{(1)} &= \{x_k < x < x_{k+1}; y_l < y < y_l + \Delta_{2,l}(1 - (x - x_k)/\Delta_{1k})\}, \\ T_{kl}^{(2)} &= \{x_{k-1} < x < x_k; y_l < y < y_l + \Delta_{2l}(x - x_{k-1})/\Delta_{1,k-1}\}, \\ T_{kl}^{(3)} &= \{x_{k-1} < x < x_k; y_{l-1} - \Delta_{2,l-1}(x - x_k)/\Delta_{1,k-1} < y < y_l\}, \\ T_{kl}^{(4)} &= \{x_k < x < x_{k+1}; y_l - \Delta_{2,l-1}(1 - (x - x_k)/\Delta_{1k}) < y < y_l\}. \end{aligned}$$

Далі в кожному з трикутників $T_{kl}^{(\nu)} \subset \Omega (\nu \in \{1, 2, 3, 4\})$, які одержано за допомогою вказаного вище способу триангуляції області Ω , побудуємо поліноміальний інтерлінант $O_{kl}^{(\nu)}$ виду $\bar{L}_0 f(x, y)$. Хай $O_\pi f(x, y) = O_{kl}^{(\nu)} f(x, y), (x, y) \in T_{kl}^{(\nu)} \subset \Omega$. Функція $Q(x, y)$ визначається так:

$$\begin{aligned} Q(x, y) &= Q_{kl}^{(\nu)}(x, y) =: \\ &=: (x - x_k)(y - y_l)\omega_{kl}^{(\nu)}(x, y), (x, y) \in T_{kl}^{(\nu)}, \nu \in \{1, 2, 3, 4\}, \end{aligned}$$

де $\omega_{kl}^{(1)} = 1 - (x - x_k)/\Delta_{1k} - (y - y_l)/\Delta_{2l}$, якщо трикутник $T_{kl}^{(\nu)}$ має тип $\nu = 1$; $\omega_{kl}^{(2)} = -1 - (x - x_k)/\Delta_{1,k-1} + (y - y_l)/\Delta_{2l}$, якщо $\nu = 2$;

$$\begin{aligned}\omega_{kl}^{(3)} &= 1 + (x - x_k)/\Delta_{1,k-1} + (y - y_l)/\Delta_{2,l-1}, \quad \text{якщо } \nu = 3; \quad \omega_{kl}^{(4)} = \\ &= -1 + (x - x_k)/\Delta_{1k} - (y - y_l)/\Delta_{2,l-1}, \quad \text{якщо } \nu = 4.\end{aligned}$$

Теорема 3.4.6. *Якщо $f \in L_{\infty}^{1,1}(\Omega)$, то*

$$|f(x, y) - O_{\pi} f(x, y)| \leq |Q(x, y)| \quad \forall (x, y) \in \Omega. \quad (3.4.48)$$

Ця оцінка є найкращою в кожній точці $(x, y) \in \Omega$.

Д о в е д е н н я. Використаємо твердження лемми 3.4.2 та теореми 3.4.5. Виходячи з них, можна стверджувати, що $\forall (x, y) \in T_{kl}^{(\nu)} \subset \Omega$

$$|f(x, y) - O_{\pi} f(x, y)| = |f(x, y) - O_{kl}^{(\nu)} f(x, y)| \leq |Q_{kl}^{(\nu)}| \cdot \|f^{(1,1)}\|_{L_{\infty}(T_{kl}^{(\nu)})}.$$

Тому

$$\begin{aligned}|f - O_{\pi} f| &\leq |Q(x, y)| \max_{T_{kl}^{(\nu)} \subset \Omega} \|f^{(1,1)}\|_{L_{\infty}(T_{kl}^{(\nu)})} = \\ &= |Q(x, y)| \cdot \|f^{(1,1)}\|_{L_{\infty}(\Omega)} \leq |Q(x, y)|.\end{aligned}$$

Отже, співвідношення (3.4.48) доведено. Оцінка (3.4.48) є найкращою в кожній точці $(x, y) \in \Omega$, оскільки $Q \in L_{\infty}^{1,1}(\Omega)$,

$$\|Q^{(1,1)}\|_{L_{\infty}(\Omega)} = 1, \quad O_{\pi}[Q(x, y)] \equiv 0.$$

Теорему 3.4.6 доведено.

Н а с л і д о к 1. Хай $f \in L_{\infty}^{1,1}(\Omega)$. Тоді

$$\sup_{f \in L_{\infty}^{1,1}(\Omega)} \|f - O_{\pi} f\|_{L_{\infty}(\Omega)} = \frac{s}{27}, \quad s = 2 \max_{k,l} \left\{ \text{mes } T_{kl}^{(\nu)} \right\}. \quad (3.4.49)$$

Доведення наслідку випливає з того, що при $2 \text{mes } T_{kl}^{(1)} = \Delta_{1k} \Delta_{2l}$

$$\begin{aligned}\sup_{f \in L_{\infty}^{1,1}(\Omega)} \|f - O_{\pi} f\|_{L_{\infty}(\Omega)} &= \\ &= \max_{T_{kl}^{(\nu)}} \sup_{(x,y) \in T_{kl}^{(\nu)} \subset \Omega} |Q_{kl}^{(\nu)}(x, y)| = \max_{T_{kl}^{(\nu)} \subset \Omega} \left\{ \frac{2 \text{mes } T_{kl}^{(\nu)}}{27} \right\}.\end{aligned}$$

Н а с л і д о к 2. Хай $f \in L_{\infty}^{1,1}(\Omega)$, $1 \leq q < \infty$, $C_q = \left[\frac{\Gamma(q+1)^3}{\Gamma(3q+3)} \right]^{1/q}$.

Тоді

$$\sup_{f \in L_{\infty}^{1,1}(\Omega)} \|f - O_{\pi} f\|_{L_q(\Omega)} = C_q \left(\sum_{T_{kl}^{(\nu)} \subset \Omega} (2 \text{mes } T_{kl}^{(\nu)})^{q+1} \right)^{1/q}. \quad (3.4.50)$$

При рівномірному розбитті Ω $\Delta_{1k} = \Delta_1, \Delta_{2l} = \Delta_2$, праві частини в (3.4.49), (3.4.50) дорівнюють відповідно $\Delta_1 \Delta_2 / 27$, $C_q \Delta_1 \Delta_2 (\text{mes} \Omega)^{1/q}$.
Зауваження 1. Тут використано рівність

$$\begin{aligned} & \iint_{T_{kl}^{(1)}} |Q_{kl}^{(1)}(x, y)|^q dx dy = \\ &= \int_{x_k}^{x_k + \Delta_{1k}} dx \int_{y_l}^{y_l + \Delta_{2l} \left(1 - \frac{x - x_k}{\Delta_{1k}}\right)} (x - x_k)^q (y - y_l)^q \left(1 - \frac{x - x_k}{\Delta_{1k}} - \frac{y - y_l}{\Delta_{2l}}\right)^q dy = \\ &= \Delta_{1k}^{q+1} \Delta_{2l}^{q+1} \int_0^1 (x')^q dx' \int_0^{1-x'} (y')^q (1 - x' - y')^q dy' = \\ &= \left(2 \text{mes} T_{kl}^{(1)}\right)^{q+1} \int_0^1 (x')^q (1 - x')^{2q+1} dx' \frac{\Gamma(q+1)\Gamma(q+1)}{\Gamma(2q+2)} = \\ &= \left(2 \text{mes} T_{kl}^{(1)}\right)^{q+1} \frac{[\Gamma(q+1)]^3}{\Gamma(3q+3)} = C_q^q (2 \text{mes} T_{kl}^{(1)})^{q+1}. \end{aligned}$$

Під час її доведення двічі застосовано відому рівність

$$\begin{aligned} & \int_0^{\Delta} x^p (\Delta - x)^q dx = \Delta^{p+q+1} \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+2)}, \\ & p, q \in \mathbf{N} \implies \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+2)} = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}. \end{aligned}$$

Зауваження 2. Аналогічні результати можна одержати для випадку, коли використовуються кусково-поліноміальні інтерлінанти, що інтерлінують похідні до N -го порядку, а також коли одночасно використовуються трикутні та чотирикутні елементи (для цього досить об'єднати результати, викладені в цьому підрозділі).

3.4.4. Інтерлінація на прямокутному трикутнику з криволінійною гіпотенузою. Приклади

Хай $O(0, 0), M(1, 0), N(0, 1)$; OMN – прямокутний трикутник T з криволінійною гіпотенузою: $T = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, MN: f(x) + g(y) = 1, \text{ або } y = g^{-1}(1 - f(x)), \text{ або } x = f^{-1}(1 - g(y))\}$, де функції

f, g неперервні та монотонні, $f(0) = 0, f(1) = 1, g(0) = 0, g(1) = 1$. Вважатимемо катети $OM : y = 0, ON : x = 0$ прямолінійними, а гіпотенузу MN вважаємо, взагалі кажучи, криволінійною.

Теорема 3.4.7. *Хай $F(x, y) \in C(T)$ і*

$$\begin{aligned} P_1 F(x, y) &= f(x)F(f^{-1}(1 - g(y)), y) + g(y)F(x, g^{-1}(1 - f(x))), \\ P_2 F(x, y) &= F(x, 0) + F(0, y) - F(0, 0). \end{aligned} \quad (3.4.51)$$

Тоді булева сума $P_1 \oplus P_2$ операторів P_1, P_2 є оператором

$$\begin{aligned} P_{12} F(x, y) &= (P_1 \oplus P_2) F(x, y) := \\ &:= (P_1 + P_2 - P_1 P_2) F(x, y) = f(x)F(f^{-1}(1 - g(y)), y) + \\ &+ g(y)F(x, g^{-1}(1 - f(x))) + F(x, 0) + F(0, y) - F(0, 0) - \\ &- f(x)[F(0, y) + F(f^{-1}(1 - g(y)), 0) - F(0, 0)] - \\ &- g(y)[F(0, g^{-1}(1 - f(x))) + F(x, 0) - F(0, 0)] \end{aligned} \quad (3.4.52)$$

який інтерлінує F на трьох сторонах трикутника T , тобто

$$P_{12} F(x, 0) = F(x, 0), P_{12} F(0, y) = F(0, y), \quad (3.4.53)$$

$$P_{12} F(x, y) = F(x, y), \text{ якщо } f(x) + g(y) = 1. \quad (3.4.54)$$

Д о в е д е н н я. Напишемо формулу (3.4.52) у формі

$$\begin{aligned} P_{12} F(x, y) &= (1 - f(x) - g(y))[F(x, 0) + F(0, y) - F(0, 0)] + \\ &+ f(x)[F(f^{-1}(1 - g(y)), y) - F(f^{-1}(1 - g(y)), 0) + F(x, 0)] + \\ &+ g(y)[F(x, g^{-1}(1 - f(x))) - F(0, g^{-1}(1 - f(x))) + F(0, y)] \end{aligned} \quad (3.4.55)$$

Візьмемо у формулі (3.4.55) $y = 0$. В результаті отримаємо $P_{12} F(x, 0) =$

$$= (1 - f(x))F(x, 0) + f(x)[F(f^{-1}(1), 0) - F(f^{-1}(1), 0) + F(x, 0)] = F(x, 0).$$

Аналогічно, $P_{12} F(0, y) =$

$$= (1 - g(y))F(0, y) + g(y)[F(0, g^{-1}(1)) - F(0, g^{-1}(1)) + F(0, y)] = F(0, y).$$

Отже, співвідношення (3.4.53) доведено.

Підставивши $y = g^{-1}(1 - f(x))$ у формулу (3.4.55), отримаємо

$$P_{12} F(x, g^{-1}(1 - f(x))) = f(x)[F(f^{-1}(1 - g(g^{-1}(1 - f(x))))), g^{-1}(1 - f(x))] -$$

$$\begin{aligned}
& -F(f^{-1}(1 - g(g^{-1}(1 - f(x))), 0) + F(x, 0)] + g(g^{-1}(1 - f(x))) \times \\
& \times [F(x, g^{-1}(1 - f(x))) - F(0, g^{-1}(1 - f(x))) + F(0, g^{-1}(1 - f(x)))] = \\
& = f(x)[F(f^{-1}(f(x))), g^{-1}(1 - f(x))] - F(f^{-1}(1 - (1 - f(x))), 0) + F(x, 0)] + \\
& \quad + (1 - f(x))[F(x, g^{-1}(1 - f(x)))] = \\
& = f(x)[F(x, g^{-1}(1 - f(x))) - F(x, 0) + F(x, 0)] + \\
& \quad + (1 - f(x))[F(x, g^{-1}(1 - f(x)))] = F(x, g^{-1}(1 - f(x))).
\end{aligned}$$

Аналогічно доводиться, що $P_{12}F(f^{-1}(1 - g(y)), y) = F(f^{-1}(1 - g(y)), y)$. Таким чином, доведено властивість (3.4.54).

Теорему 3.4.7 доведено.

Теорема 3.4.8. Для залишку $R_{12}F(x, y) = (I - L_{12})F(x, y)$ виконуються співвідношення $\forall F \in C^{(1,1)}(T)$:

$$\begin{aligned}
R_{12}F(x, y) &= (1 - f(x) - g(y)) \int_0^x \int_0^y F^{(1,1)}(\xi, \eta) d\xi d\eta + \quad (3.4.56) \\
&+ f(x) \int_{\xi=x}^{f^{-1}(1-g(y))} \int_{\eta=0}^y F^{(1,1)}(\xi, \eta) d\xi d\eta + g(y) \int_{\xi=0}^x \int_{\eta=y}^{g^{-1}(1-f(x))} F^{(1,1)}(\xi, \eta) d\xi d\eta.
\end{aligned}$$

Д о в е д е н н я. Запишемо тотожності

$$\begin{aligned}
F(x, y) &= F(x, 0) + F(0, y) - F(0, 0) + \int_0^x \int_0^y F^{(1,1)}(\xi, \eta) d\xi d\eta, \\
F(x, y) &= F(f^{-1}(1 - g(y)), y) - F(f^{-1}(1 - g(y)), 0) + F(x, 0) + \\
&\quad + \int_{\xi=x}^{f^{-1}(1-g(y))} \int_{\eta=0}^y F^{(1,1)}(\xi, \eta) d\xi d\eta, \\
F(x, y) &= F(x, g^{-1}(1 - f(x))) - F(0, g^{-1}(1 - f(x))) + F(0, y) + \\
&\quad + \int_{\xi=0}^x \int_{\eta=0}^{g^{-1}(1-f(x))} F^{(1,1)}(\xi, \eta) d\xi d\eta.
\end{aligned}$$

За їх допомогою отримаємо тотожність $F(x, y) \equiv$

$$\equiv (1 - f(x) - g(y))F(x, y) + f(x)F(x, y) + g(y)F(x, y) \equiv$$

$$\equiv P_{12}F(x, y) + R_{12}F(x, y),$$

Теорему 3.4.8 доведено.

Н а с л і д о к. Справедлива рівність

$$P_{12}F(x, y) = F(x, y)\forall F = \phi(x) + \psi(y), \quad (3.4.57)$$

де $\phi(x), \psi(y) \in C^1[0, 1]$ – довільні функції однієї змінної.

Доведення випливає з того, що $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(\phi(x) + \psi(y)) \equiv 0$.

П р и к л а д 1. Хай $f(x) = x, g(y) = y$. Тобто T – трикутник з прямолінійною гіпотенузою. Формули для операторів інтерлінації на трьох сторонах такого трикутника див. у підрозд. 3.4.3 та 4.3.

П р и к л а д 2. Хай $f(x) = (x/a)^{2/3}, g(y) = (y/b)^{2/3}, a > 0, b > 0$. Ця крива є сегментом астроїди $(x/a)^{2/3} + (y/b)^{2/3} = 1$. У цьому разі $L_{12}F(x, y) =$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} F \left[a \left(1 - \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3}\right)^{3/2}, y \right] + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} F \left[x, b \left(1 - \left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}\right)^{3/2} \right] + \\ &+ F(0, y) + F(x, 0) - F(0, 0) - \left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} \left(F(0, y) + F \left[a \left(1 - \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3}\right)^{3/2}, 0 \right] - \right. \\ &\left. - F(0, 0) \right) - \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} \left\{ F \left[0, b \left(1 - \left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}\right)^{3/2} \right] + F(x, 0) - F(0, 0) \right\}. \end{aligned} \quad (3.4.58)$$

П р и к л а д 3. Хай $f(x) = \left(\frac{x}{a}\right)^2, g(y) = \left(\frac{y}{b}\right)^2, a > 0, b > 0$. Ця крива є сегментом еліпса $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$. У такому випадку $L_{12}F(x, y) =$

$$\begin{aligned} &= \frac{x^2}{a^2} F \left(a \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}, y \right) + \frac{y^2}{b^2} F \left(x, b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \right) + F(0, y) + F(x, 0) - F(0, 0) - \\ &\quad (3.4.59) \\ &\quad - \frac{x^2}{a^2} \left[F(0, y) + F \left(a \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}, 0 \right) - F(0, 0) \right] - \\ &\quad - \frac{y^2}{b^2} \left[F \left(0, b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \right) + F(x, 0) - F(0, 0) \right]. \end{aligned}$$

Для $a = b = R$ ця крива є дугою кола $x^2 + y^2 = R^2$. Тому $L_{12}F(x, y) =$

$$= \frac{x^2}{R^2} F \left(\sqrt{R^2 - y^2}, y \right) + \frac{y^2}{R^2} F \left(x, \sqrt{R^2 - x^2} \right) + F(0, y) + F(x, 0) - F(0, 0) -$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{x^2}{R^2} \left[F(0, y) + F\left(\sqrt{R^2 - y^2}, 0\right) - F(0, 0) \right] - \quad (3.4.60) \\
& -\frac{y^2}{R^2} \left[F\left(0, \sqrt{R^2 - x^2}\right) + F(x, 0) - F(0, 0) \right].
\end{aligned}$$

П р и к л а д 4. Хай $f(x) = x^2, g(y) = y$ або $f(x) = x$ і $g(y) = y^2$. У цих двох випадках відповідні криві сторони трикутника є дугами парабол $x^2 + y = 1$ та $x + y^2 = 1$, тому $L_{1,2}F(x, y) =$

$$= x^2 F(\sqrt{1 - y}, y) + y F(x, 1 - x^2) + F(0, y) + F(x, 0) - F(0, 0) - \quad (3.4.61)$$

$$- x^2 [F(0, y) + F(\sqrt{1 - y}, 0) - F(0, 0)] - y [F(0, 1 - x^2) + F(x, 0) - F(0, 0)],$$

і відповідно $L_{12}F(x, y) =$

$$= x F(1 - y^2, y) + y^2 F(x, \sqrt{1 - x}) + F(0, y) + F(x, 0) - F(0, 0) - \quad (3.4.62)$$

$$- x [F(0, y) + F(1 - y^2, 0) - F(0, 0)] - y^2 [F(0, \sqrt{1 - x}) + F(x, 0) - F(0, 0)],$$

Викладемо нижче також інший метод побудови інтеграланта на трикутнику, в якому рівняння криволінійної гіпотенузи задано явно: $T = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq f(x); \text{ або } 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq g(y); f(g(y)) = y\}$. Уведемо до розгляду оператори

$$L_1 F(x, y) = \frac{g(y) - x}{g(y)} F(0, y) + \frac{x}{g(y)} F(g(y), y),$$

$$L_1 F(0, y) = F(0, y); L_1 F(g(y), y) = F(g(y), y),$$

$$L_2 F(x, y) = \frac{f(x) - y}{f(x)} F(x, 0) + \frac{y}{f(x)} F(x, f(x)),$$

$$L_2 F(x, 0) = F(x, 0); L_2 F(x, f(x)) = F(x, f(x)),$$

$$L_1 L_2 F(x, y) = \frac{g(y) - x}{g(y)} \left[\frac{f(0) - y}{f(0)} F(0, 0) + \frac{y}{f(0)} F(0, f(0)) \right] +$$

$$+ \frac{x}{g(y)} \left[\frac{f(g(y)) - y}{f(g(y))} F(g(y), 0) + \frac{y}{f(g(y))} F(g(y), f(g(y))) \right] =$$

$$= \frac{g(y) - x}{g(y)} \left[(1 - y) F(0, 0) + y F(0, 1) \right] + \frac{x}{g(y)} F(g(y), y).$$

Безпосередньою перевіркою впевнімося в тому, що

$$L_1 L_2 F(0, 0) = F(0, 0), \quad L_1 L_2 F(1, 0) = F(1, 0),$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0, y \rightarrow 1 \\ g(y) \rightarrow 0}} L_1 L_2 F(x, y) = F(0, 1),$$

$$L_1 L_2 F(x, 0) = (1 - x)F(0, 0) + xF(1, 0),$$

$$L_1 L_2 F(0, y) = (1 - y)F(0, 0) + yF(0, 1),$$

$$L_1 L_2 F(x, y) \neq L_2 L_1 F(x, y) =$$

$$= \frac{f(x) - y}{f(x)} \left[(1 - x)F(0, 0) + xF(1, 0) \right] + \frac{y}{f(x)} F(x, f(x)),$$

$$L_2 L_1 F(0, 0) = F(0, 0); \quad L_2 L_1 F(0, 1) = F(0, 1),$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1, y \rightarrow 0 \\ f(x) \rightarrow 0}} L_2 L_1 F(x, y) = F(1, 0),$$

$$L_2 L_1 F(x, 0) = (1 - x)F(0, 0) + xF(1, 0),$$

$$L_2 L_1 F(0, y) = (1 - y)F(0, 0) + yF(0, 1).$$

Теорема 3.4.9. $\forall F(x, y) \in C(T)$ оператор

$$L_{21} F(x, y) = (L_1 + L_2 - L_2 L_1) F(x, y)$$

визначений у кожній точці області T за винятком точок $M(1, 0), N(0, 1)$. Він інтерлінує функцію F на трьох сторонах T :

$$L_{21} F(x, 0) = F(x, 0), \quad L_{21} F(0, y) = F(0, y),$$

$$L_{21} F(x, f(x)) = F(x, f(x)), \quad L_{21} F(g(y), y) = F(g(y), y).$$

В точках $M(1, 0), N(0, 1)$ виконуються граничні співвідношення

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (1, 0)} L_{21} F(x, y) = F(1, 0), \quad \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 1)} L_{21} F(x, y) = F(0, 1).$$

Доведення проводиться безпосередньою перевіркою.

Зауваження 1. $L_{21} F(x, y) \neq L_{12} F(x, y) := (L_1 + L_2 - L_1 L_2) F(x, y)$.

Цей метод можна узагальнити для випадку, коли на сторонах трикутника $T_h = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, h - x - y \geq 0\}$ відомі сліди функції F і сліди її частинних похідних (див. Литвин О.М. [3, с.251-256]).

3.4.5. Інтерлінація на прямих, паралельних координатним осям та на границі довільної області $G \subset \mathbf{R}^2$

У попередніх підрозділах досліджувалась інтерлінація на лініях ректангуляції в прямокутнику та триангуляції в багатокутнику. З практичної точки зору важливою є побудова операторів інтерлінації на лініях ректангуляції та триангуляції в областях складеної форми, обмежених дугами відомих кривих. Нижче будемо вважати, що $G \subset \mathbf{R}^2$ - область на площині, границя якої ∂G є об'єднанням дуг відомих кривих. Для спрощення викладу матеріалу припустимо, що область G повністю розміщена в прямокутнику $[a, b] \times [c, d]$. Розіб'ємо G на підобласті прямими $x = x_k, k = \overline{0, M_1}, y = y_l, l = \overline{0, M_2}, a = x_0 < x_1 < \dots < x_{M_1} = b; c = y_0 < y_1 < \dots < y_{M_2} = d$. В результаті область G розіб'ється на підобласті, які можуть бути прямокутниками $R_{i,j} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \subset G$ або чотирикутниками $R_{i,j}^{(1)} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}(x)] \subset G, R_{i,j}^{(2)} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j(x), y_{j+1}] \subset G, R_{i,j}^{(3)} = [x_i(y), x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \subset G, R_{i,j}^{(4)} = [x_i, x_{i+1}(y)] \times [y_j, y_{j+1}] \subset G$, в яких три прямі паралельні осям координат, а одна - криволінійна сторона є частиною границі області ∂G .

Крім того, підобласті, на які розбивається область G , можуть бути трикутниками

$$T_{i,j}^{(1)} = \{(x, y) | x \geq x_i, y \geq y_j, y \leq \eta_{j+1}(x), \eta'_{j+1}(x) < 0, x_i < x < x_{i+1}\},$$

$$T_{i,j}^{(2)} = \{(x, y) | x \geq x_i, y \leq y_j, y \geq \eta_{j-1}(x), \eta'_{j-1}(x) > 0, x_i < x < x_{i+1}\},$$

$$T_{i,j}^{(3)} = \{(x, y) | x \leq x_i, y \geq y_j, y \leq \eta_{j+1}(x), \eta'_{j+1}(x) > 0, x_{i-1} < x < x_i\},$$

$$T_{i,j}^{(4)} = \{(x, y) | x \leq x_i, y \leq y_j, y \geq \eta_{j-1}(x), \eta'_{j-1}(x) > 0, x_{i-1} < x < x_i\},$$

в яких одна зі сторін є криволінійною (взагалі кажучи) частиною границі ∂G області G .

Напишемо формулу для інтерлінації на чотирикутнику $R_{i,j}^{(1)} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}(x)] \subset G$, одна зі сторін якого є криволінійною частиною границі ∂G області G :

$$O_{i,j}^{(1)} f(x, y) = (F_1 + F_2 - F_1 F_2) f(x, y),$$

$$F_1 f(x, y) = \frac{y - y_{j+1}(x)}{y_j - y_{j+1}(x)} f(x, y_j) + \frac{y - y_j}{y_{j+1}(x) - y_j} f(x, y_{j+1}(x)),$$

$$F_2 f(x, y) = \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} f(x_i, y) + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} f(x_{i+1}, y),$$

$$F_1 F_2 f(x, y) = \frac{y - y_{j+1}(x)}{y_j - y_{j+1}(x)} F_2 f(x, y_j) + \frac{y - y_j}{y_{j+1}(x) - y_j} F_2 f(x, y_{j+1}(x)).$$

Пропонуємо читачеві самостійно довести наступне твердження.

Твердження 1. Оператор $O_{i,j}^{(1)} f(x, y)$ інтерлінує функцію $f(x, y) \in C(R_{i,j}^{(1)})$ на границі чотирикутника $R_{i,j}^{(1)}$ з криволінійною стороною: $O_{i,j}^{(1)} f(x, y) = f(x, y)$, $(x, y) \in \partial R_{i,j}^{(1)}$, тобто $O_{i,j}^{(1)} f(x_q, y) = f(x_q, y)$, $q = i, i + 1$; $O_{i,j}^{(1)} f(x, y_j) = f(x, y_j)$, $O_{i,j}^{(1)} f(x, y_{j+1}(x)) = f(x, y_{j+1}(x))$. Аналогічно будуються інтерлінанти, що інтерлінують функцію $f(x, y)$ на сторонах чотирикутників $R_{i,j}^{(2)}, R_{i,j}^{(3)}, R_{i,j}^{(4)}$ з криволінійними сторонами.

Пропонуємо читачеві самостійно довести наступну теорему.

Теорема 3.4.10 *Хай оператори $OP_{i,j}^{(q)} f(x, y)$, $q = 0, 1, \dots, 4$ інтерлінують функцію $f(x, y)$ на сторонах чотирикутників $R_{i,j}^{(q)}$, $q = 0, 1, \dots, 4$, де $R_{i,j}^{(0)} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \subset G \subseteq [a, b] \times [c, d]$, а інші чотирикутники з однією криволінійною стороною означені вище. Хай оператори $OT_{i,j}^{(q)} f(x, y)$, $q = 1, \dots, 4$ інтерлінують функцію $f(x, y)$ на сторонах трикутників $T_{i,j}^{(q)} \subset G$ з криволінійною гіпотенузою (взагалі кажучи). Тоді оператор*

$$O_G f(x, y) = \begin{cases} OR_{i,j}^{(q)} f(x, y), & (x, y) \in \partial R_{i,j}^{(q)}, q = 0 \vee 1 \vee \dots \vee 4 \\ OT_{i,j}^{(q)} f(x, y), & (x, y) \in \partial T_{i,j}^{(q)}, q = 1 \vee \dots \vee 4 \end{cases}$$

інтерлінує функцію $f(x, y)$ на прямих $x = x_k \in [a, b]$, $y = y_i \in [c, d]$, а також на границі ∂G довільної області G , тобто $O_G f(x_k, y) = f(x_k, y)$, $O_G f(x, y_i) = f(x, y_i)$, $O_G f(x, y) = f(x, y)$, $(x, y) \in \partial G$. При цьому $O_G f(x, y) \in C(G) \forall f(x, y) \in C(G)$.

Зауваження. Якщо нам невідомі сліди $f(x_k, y) = \phi_k(y)$, $f(x, y_i) = \psi_i(x)$, то їх можна замінити на деякі функції (поліноми, сплайни тощо) з невідомими параметрами. В результаті $O_G f(x, y)$ перетвориться на функцію, що збігається з функцією $f(x, y)$ на границі ∂G області G незалежно від вибору вказаних вище параметрів. Такого типу функції можна використовувати для наближення функції $f(x, y)$, виходячи з тих або інших вимог. Наведемо два важливих приклади.

П р и к л а д 1. В методі скінченних елементів при розв'язанні крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними у випадку областей складеної форми дуже важливим є питання задовільнення крайовим умовам (особливо неоднорідним). У таких задачах використання операторів інтерлінації функцій є необхідним.

П р и к л а д 2. Використання операторів інтерлінації функцій є корисним також у методі найменших квадратів при наближенні функції за допомогою скінченної кількості її значень у внутрішніх точках області G і відомими її слідами на дугах відомих кривих всередині області G або таких кривих, що їхнє об'єднання є границею області G тощо. Слід підкреслити, що класичний варіант методу найменших квадратів для наближення функцій двох змінних використовує лише значення функції у деякій системі точок (або деяку іншу систему функціоналів від наближуваної функції) і не використовує сліди наближуваної функції на деяких лініях. Очевидно, така інформація як сліди наближуваної функції на деякій системі ліній є значно більш інформативною, але до появи інтерлінації функцій дослідники не знали, що з нею робити.

3.5. Тригонометрична інтерлінація

3.5.1. Оператори тригонометричної інтерлінації

Хай $D = [0, 2\pi]^2$, $f(x) \in C(D)$ – неперервна 2π -періодична функція за кожною змінною x_1 та x_2 : $x = (x_1, x_2)$, $f(x_1 + 2\pi, x_2) = f(x_1, x_2 + 2\pi) = f(x) \quad \forall x \in \mathbf{R}^2$. Уведемо систему вузлів

$$0 \leq x_{k0} < x_{k1} < \dots < x_{k,2M_k} < 2\pi, \quad k = 1, 2; M_k \in \mathbf{N}.$$

Тоді повторним використанням формул $\sin \frac{x_k - x_{k,m}}{2} \cdot \sin \frac{x_k - x_{k,m+1}}{2} =$

$$= \frac{1}{2} \left[\cos \frac{x_{k,m} - x_{k,m+1}}{2} - \cos \left(x_k - \frac{x_{k,m} + x_{k,m+1}}{2} \right) \right]$$

до кожної пари множників у чисельнику функції

$$Q_{kM_k i_k}(x_k) = \prod_{\substack{m=0 \\ m \neq i_k}}^{2M_k} \frac{\sin \frac{x_k - x_{km}}{2}}{\sin \frac{x_{ki_k} - x_{km}}{2}}, \quad 0 \leq i_k \leq 2M_k, \quad k = 1, 2 \quad (3.5.1)$$

і повторним використанням формули

$$\cos \left(x_k - \frac{x_{k,m} + x_{k,m+1}}{2} \right) \cos \left(x_k - \frac{x_{k,m+2} + x_{k,m+3}}{2} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\cos \frac{x_{k,m} + x_{k,m+1} - x_{k,m+2} - x_{k,m+3}}{2} + \cos \left(2x_k - \frac{1}{2} \sum_{j=0}^3 x_{k,m+j} \right) \right]$$

можна довести, що $Q_{kM_k i_k}(x_k)$ є тригонометричним поліномом порядку M_k з властивостями

$$Q_{kM_k i_k}(x_{ki'_k}) = \delta_{i_k i'_k}, \quad 0 \leq i_k, i'_k \leq 2M_k, \quad k = 1, 2.$$

Теорема 3.5.1. *Оператор*

$$T_{M_1 M_2} f(x) = \sum_{k=1}^2 \sum_{i_k=0}^{2M_k} Q_{k M_k i_k}(x_k) \varphi_{k i_k}(x_{3-k}) - \sum_{i_1=0}^{2M_1} \sum_{i_2=0}^{2M_2} \prod_{k=1}^2 Q_{k M_k i_k}(x_k) f(x_{1 i_1}, x_{2 i_2}) \quad (3.5.2)$$

має властивості $(f(x_{1 i_1}, x_2) = \varphi_{1 i_1}(x_2), \quad f(x_1, x_{2 i_2}) = \varphi_{2 i_2}(x_1))$,

$$T_{M_1 M_2} f(x) = T_{M_1 M_2} f(x_1 + 2\pi, x_2) = T_{M_1 M_2} f(x_1, x_2 + 2\pi), \quad \forall x \in \mathbf{R}^2, \quad (3.5.3)$$

$$T_{M_1 M_2} f(x) \Big|_{x_k=x_{k i_k}} = f(x) \Big|_{x_k=x_{k i_k}} = \varphi_{k i_k}(x_{3-k}), \quad k = 1, 2; 0 \leq i_k \leq 2M_k. \quad (3.5.4)$$

Доведення можна провести безпосередньою перевіркою.

Особливо важливим є випадок рівновіддалених вузлів інтерлінації, коли

$$x_{k i_k} = \frac{2\pi i_k}{2M_k + 1}, \quad k = 1, 2; 0 \leq i_k \leq 2M_k.$$

У цьому випадку, врахувавши, що тригонометричний поліном

$$D_{M_k}(x_k) = \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{M_k} \cos m x_k = \left[\sin \frac{2M_k + 1}{2} x_k \right] / \left[2 \sin \frac{x_k}{2} \right] \quad (3.5.5)$$

має властивості

$$D_{M_k}(0) = \frac{2M_k + 1}{2}, \quad D_{M_k}(x_{k i_k}) = 0, \quad k = 1, 2; 1 \leq i_k \leq 2M_k,$$

можна показати, що поліноми $Q_{k M_k i_k}(x_k)$ тотожно збігаються з функціями

$$\frac{2}{2M_k + 1} D_{M_k}(x_k - x_{k i_k}) \equiv Q_{k M_k i_k}(x_k), \quad k = 1, 2; 0 \leq i_k \leq 2M_k.$$

Тобто оператор (3.5.2) можна зобразити також як

$$T_{M_1 M_2} f(x) = \sum_{k=1}^2 \sum_{i_k=0}^{2M_k} \frac{2}{2M_k + 1} D_{M_k}(x_k - x_{k i_k}) \varphi_{k i_k}(x_{3-k}) - \frac{4}{(2M_1 + 1)(2M_2 + 1)} \sum_{i_1=0}^{2M_1} \sum_{i_2=0}^{2M_2} \prod_{k=1}^2 D_{M_k}(x_k - x_{k i_k}) f(x_{1 i_1}, x_{2 i_2}). \quad (3.5.6)$$

У вигляді (3.5.2) можна зобразити кожний тригонометричний інтерліант, що інтерлінує функцію на серії взаємно перпендикулярних прямих, паралельних осям координат.

Практично важливим є наближення кусково-тригонометричними інтерліантантами, що збігаються з тригонометричними інтерліантантами в кожному з прямокутників, на які розбивається область D . Їх можна одержати, якщо тригонометричні поліноми $Q_{kM_k i_k}(x_k)$ замінити на 2π -періодичні інтерполяційні сплайни.

Якщо функція $f(x_1, x_2)$ є парною за однією змінною $f(-x_1, x_2) = f(x_1, x_2)$ або за двома змінними $f(-x_1, -x_2) = f(x_1, x_2)$, то для тригонометричної інтерлінації доцільно використати допоміжні функції $\bar{Q}_{kM_k i_k} x_k$, які будуються не за формулами (3.5.1), а за формулами

$$\bar{Q}_{kM_k i_k}(x) = \prod_{\substack{m=0 \\ m \neq i_k}}^{M_k} \frac{\cos x_k - \cos x_{km}}{\cos x_{k i_k} - \cos x_{km}},$$

$$0 = x_{k0} < x_{k1} < \dots < x_{k, M_k} < \pi, \quad k = 1, 2; \quad 0 \leq i_k \leq M_k.$$

Легко бачити, що у випадку

$$f(-x_1, x_2) = f(x_1, x_2) \Rightarrow \varphi_{2i_2}(-x_1) = \varphi_{2i_2}(x_1)$$

інтерліант (3.5.2), в якому допоміжні функції $Q_{1M_1 i_1}(x_1)$ замінені на функції $\bar{Q}_{1M_1 i_1}(x_1)$, має властивість

$$T_{M_1 M_2} f(-x_1, x_2) = T_{M_1 M_2} f(x_1, x_2).$$

При цьому у формулі (3.5.2) треба суму $\sum_{i_1=0}^{2M_1}$ замінити на суму $\sum_{i_1=0}^{M_1}$.

Для парної функції $f(x)$ за двома змінними $f(-x_1, -x_2) = f(x_1, x_2)$ таку заміну треба зробити з обома сумами. Тобто інтерліант (3.5.2), в якому допоміжні функції $Q_{kM_k i_k}(x_k)$ ($k = 1, 2$) замінені функціями $\bar{Q}_{kM_k i_k}(x_k)$, $k = 1, 2$, буде також парною функцією за двома змінними:

$$T_{M_1 M_2} f(-x_1, -x_2) = T_{M_1 M_2} f(x_1, x_2).$$

При цьому суми $\sum_{i_k=0}^{2M_k}$ ($k = 1, 2$) треба замінити сумами $\sum_{i_k=0}^{M_k}$, $k = 1, 2$.

Таким чином, запропоновані конструкції тригонометричних інтерлінаційних операторів, що інтерлінують функцію на кількох взаємно перпендикулярних прямих, зберігають не тільки періодичність, а й парність, якщо вона є.

Зауважимо, що тут випадок рівномірного розбиття еквівалентний при поліноміальній інтерлінації використанню вузлів, які є нулями поліномів Чебишова.

У тих випадках, коли наближувана функція $f(x_1, x_2)$ є непарною за однією із змінних (наприклад, $f(-x_1, x_2) = -f(x_1, x_2)$) або $f(x_1, -x_2) = -f(x_1, x_2)$, треба використовувати непарні допоміжні функції $\tilde{Q}_{kM_k i_k}(x_k)$, які можна побудувати так. Хай $0 < x_{k1} < x_{k2} < \dots < x_{kM_k} < \pi$. Тоді функції

$$\tilde{Q}_{kM_k i_k}(x_k) = \frac{\sin x_k}{\sin x_{ki_k}} \prod_{\substack{m=0 \\ m \neq i_k}}^{M_k} \frac{\cos x_k - \cos x_{km}}{\cos x_{ki_k} - \cos x_{km}},$$

$$k = 1, 2; \quad 1 \leq i_k \leq M_k$$

є непарними тригонометричними поліномами степеня M_k

$$\tilde{Q}_{kM_k i_k}(-x_k) = -\tilde{Q}_{kM_k i_k}(x_k).$$

Тому якщо у формулу (3.5.2) замість функцій $Q_{1M_1 i_1}(x_1)$ підставити ці непарні допоміжні функції $\tilde{Q}_{1M_1 i_1}(x_1)$, то одержимо оператор

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{M_1 M_2} f(x) &= \sum_{i_1=1}^{M_1} \tilde{Q}_{1M_1 i_1}(x_1) \varphi_{1i_1}(x_2) + \sum_{i_2=1}^{2M_2} Q_{2M_2 i_2}(x_2) \varphi_{2i_2}(x_1) - \\ &- \sum_{i_1=1}^{M_1} \sum_{i_2=1}^{2M_2} \tilde{Q}_{1M_1 i_1}(x_1) Q_{2M_2 i_2} f(x_{1i_1}, x_{2i_2}) \end{aligned}$$

із властивостями

$$\varphi_{2i_2}(-x_1) = -\varphi_{2i_2}(x_1) \Rightarrow \tilde{T}_{M_1 M_2} f(-x_1, x_2) = -\tilde{T}_{M_1 M_2} f(x_1, x_2),$$

$$\tilde{T}_{M_1 M_2} f(x) \Big|_{x_1 = \pm x_{1i_1}} = \pm \varphi_{1, i_1}(x_2), \quad i_1 = \overline{1, M_1},$$

$$\tilde{T}_{M_1 M_2} f(x) \Big|_{x_2 = x_{2i_2}} = \varphi_{2, i_2}(x_1), \quad i_2 = \overline{0, 2M_2}.$$

Теорема 3.5.2. Хай Θ_m – підпростір усіх тригонометричних поліномів однієї змінної до степеня m включно,

$$T_m(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^m (a_i \cos it + b_i \sin it),$$

$$\tilde{C} = \{\varphi(t) \in C[-\pi, \pi] | \varphi(t + 2\pi) = \varphi(t)\},$$

$$\tilde{C}^{r,s}(\mathbf{R}^2) = \{f \in C^{r,s}(\mathbf{R}^2) | f(x_1 + 2\pi, x_2) = f(x_1, x_2 + 2\pi) = f(x)\},$$

$B_{m,n}$ – множина функцій вигляду

$$\begin{aligned} B_{m,n} &= \Theta_m \otimes \tilde{C} + \tilde{C} \otimes \Theta_n = \\ &= \sum_{i_1=0}^{2m} h_{1i_1}(x_1) \varphi_{1i_1}(x_2) + \sum_{i_2=0}^{2n} \varphi_{2i_2}(x_1) h_{2i_2}(x_2), \\ &h_{1i_1} \in \Theta_m, h_{2i_2} \in \Theta_n, \varphi_{ki_k} \in \tilde{C}. \end{aligned} \quad (3.5.7)$$

Хай

$$E_{B_{m,n}}^p(f) := \inf_{w \in B_{m,n}} \|f(x) - w(x)\|_{L_p(\Omega)}, \Omega = [-\pi, \pi]^2.$$

Тоді

$$f^{(r,s)} \in L_p(\Omega) \Rightarrow E_{B_{m,n}}^p(f) \leq \frac{K_r K_s}{m^r n^s} \|f^{(r,s)}\|_{L_p(\Omega)}(r, s \in \mathring{\mathbb{N}}), \quad (3.5.8)$$

де K_r – константи Фавара,

$$K_r = \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu(r+1)}}{(2\nu+1)^{(r+1)}}, r = 0, 1, \dots, \quad (3.5.9)$$

$$1 \leq K_r \leq \pi/2, K_0 = 1, K_1 = \frac{\pi}{2}, K_2 = \frac{\pi^2}{8}, K_3 = \frac{\pi^3}{24}, \dots$$

Д о в е д е н н я. Нерівність (3.5.8) впливає з відомих оцінок наближення тригонометричними поліномами до степеня m включно періодичних диференційовних функцій однієї змінної, для яких справдливим є таке зображення ($\varphi(t) \in \tilde{C}^{r-1}$, $\varphi^{(r)} \in L_p(0, 2\pi)$):

$$\varphi(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi^{(r)}(\tau) B_r(t - \tau) d\tau, \quad (3.5.10)$$

$$B_r(u) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(ku - \frac{\pi r}{2})}{k^r}, \quad r \in \mathbb{N}. \quad (3.5.11)$$

Функції $B_r(u)$ називають *функціями Бернуллі*. На проміжку $[0, 2\pi]$ вони є алгебричними поліномами степеня r , що визначаються рекурентними формулами

$$B_1(u) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin ku}{k} = \begin{cases} 0, & u = 0, \\ (\pi - u)/2, & 0 < u < 2\pi, \end{cases}$$

$$B_r(u) = \int_{\beta_r}^u D_{r-1}(t) dt, \quad r = 2, 3, \dots,$$

де стала β_r вибирається так, щоб

$$\int_0^{2\pi} B_r(u) du = 0, \quad \beta_{2\nu+1} = 0, \forall \nu \in \mathbb{N}.$$

Ці функції добре вивчено. Зокрема доведено, що найкраще наближення в метриці $L_1[0, 2\pi]$ функції $B_r(u)$ дає тригонометричний поліном $\tilde{T}_{nr}(u)$, який інтерполює $D_r(u)$ в нулях $\cos nu$ (тобто в точках $u_j = \frac{(2j-1)\pi}{2n}$, $j = \overline{1, n}$), якщо r – парне, і в нулях $\sin nt$ (тобто в точках $t_j = j\pi/n$, $j = \overline{1, n-1}$), якщо r – непарне. При цьому

$$\|B_r - \tilde{T}_{nr}\|_{L_1[0, 2\pi]} = \frac{K_r}{n^r} = E_n(B_r)_{L_1}. \quad (3.5.12)$$

Враховуючи сказане і вираз (3.5.10), для похибки наближення функції $\varphi(t)$ тригонометричними поліномами до степеня n включно отримаємо таку оцінку, яку використано при одержанні оцінки (3.5.8):

$$\varphi(t) - \tilde{T}_n \varphi(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi^{(r)}(\tau) [B_r(t - \tau) - \tilde{T}_n B_r(t - \tau)] d\tau, \quad (3.5.13)$$

$$\sup_{\|\varphi^{(r)}\|_{L_p} \leq 1} \inf_{\tilde{T}_n} \|\varphi(t) - \tilde{T}_n \varphi(t)\|_{L_p(0, 2\pi)} \leq \frac{1}{\pi} E_n(B_r)_{L_1}.$$

Для отримання оцінки (3.5.8) треба замінити $B_{m,n}$ на оператор $T_{mn}f(x) = (\tilde{T}_{mr} + \tilde{T}_{nr} - \tilde{T}_{mr}\tilde{T}_{nr})f(x)$ і двічі використати оцінку (3.5.12) за змінними x_1 та x_2 , бо

$$f(x) - T_{mn}f(x) = (I - \tilde{T}_{mr})(I - \tilde{T}_{nr})f(x).$$

Теорему 3.5.2 доведено.

Зауваження. Формула (3.5.6) написана для випадку, коли на інтервалі $[0, 2\pi]$ змінна x_1 та змінна x_2 мають непарне число вузлів інтерполяції $x_{ki_k} = \frac{2\pi i_k}{2M_k+1}$, $k = 1, 2$; $0 \leq i_k \leq 2M_k$.

Для випадку, коли на інтервалі $[0, 2\pi]$ змінна x_1 та змінна x_2 мають парне число вузлів інтерполяції $x_{ki_k} = \frac{2\pi i_k}{2M_k}$, $k = 1, 2$; $0 \leq i_k \leq 2M_k - 1$, базисні інтерполяційні тригонометричні поліноми $Q_{kM_k i_k}(x_k)$ можна взяти у вигляді

$$Q_{kM_k i_k}(x_k) = \frac{1}{2M_k} \left[1 + 2 \sum_{j=1}^{M_k-1} \cos j(x_k - x_{ki_k}) + \cos M_k(x_k - x_{ki_k}) \right].$$

Функції $Q_{kM_k i_k}(x_k)$ задовольняють умови (доведіть це)

$$Q_{kM_k i_k}(x_{kj}) = \delta_{i_k, j}, 0 \leq i_k, j \leq 2M_k - 1,$$

тобто вони можуть бути використані як базисні функції в тригонометричній інтерполяції і в тригонометричній інтерлінації.

У цьому випадку оператор $T_{M_1 M_2} f(x)$ можна зобразити у вигляді

$$\begin{aligned} T_{M_1 M_2} f(x) = & \sum_{k=1}^2 \sum_{i_k=0}^{2M_k-1} \frac{1}{2M_k} \left[1 + 2 \sum_{j=1}^{M_k-1} \cos j(x_k - x_{ki_k}) + \right. \\ & \left. + \cos M_k(x_k - x_{ki_k}) \right] \varphi_{ki_k}(x_{3-k}) - \frac{1}{4M_1 M_2} \sum_{i_1=0}^{2M_1-1} \sum_{i_2=0}^{2M_2-1} \times \\ & \times \prod_{k=1}^2 \left[1 + 2 \sum_{j=1}^{M_k-1} \cos j(x_k - x_{ki_k}) + \cos M_k(x_k - x_{ki_k}) \right] f(x_{1i_1}, x_{2i_2}). \end{aligned}$$

3.5.2. Періодична сплайн-інтерлінація

Нижче розглянуто періодичну сплайн-інтерлінацію диференціальних періодичних функцій двох змінних. Одержані при цьому формули для найкращого наближення мають вигляд, подібний до формули (3.5.8), але $h_{ki_k}(x_k)$ у (3.5.7) є періодичними сплайнами.

При дослідженні найкращого наближення періодичних за всіма змінними функцій двох та більше змінних періодичними сплайнами корисними є наступні твердження.

Хай $r \in \mathbf{N}$, $1 \leq p \leq \infty$, $I = [-\pi, \pi]$, $W_p^r(I) = \{u(t) | u(t+2\pi) = u(t), u^{(r-1)}(t) - \text{абсолютно неперервна і } u^{(r)}(t) \in L_p(I)\}$. Кожну функцію $u(t) \in W_p^r(I)$ можна зобразити у вигляді

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_I u(\tau) d\tau + \frac{1}{2\pi} \int_I B_r(t-\tau) u^{(r)}(\tau) d\tau, \int_I u^{(r)}(\tau) d\tau = 0,$$

де $B_r(t)$ - ядро Бернуллі (див. теорему 3.5.2).

Відомо, що $B_{2m}(-t) = B_{2m}(t)$, $B_{2m-1}(-t) = -B_{2m-1}(t)$. Введемо також позначення $\tilde{W}_p^r(I) = \{u(t) \in W_p^r(I) | \|u\|_{L_p(I)} \leq 1\}$.

Розглянемо задачу відновлення значення функції $u(\cdot) \in \tilde{W}_p^r(I)$ в точці $t = 0$ за допомогою значень $u(\tau_k)$, $\tau_k = -\pi + \frac{(2k-1)\pi}{2n}$, $k = 1, \dots, 2n$.

Позначимо через $S_{2n}^m(I)$, $m = 0, 1, \dots$ – простір поліноміальних на I періодичних сплайнів порядку m дефекту 1 з вузлами в точках $\frac{j\pi}{n}$, $j = -n, \dots, n-1$. Якщо $m = 0$, $s(t) \in S_{2n}^0(I)$, то сплайн $s(t)$ є функцією, сталою на кожному відрізку $\left(\frac{j\pi}{n}, \frac{(j+1)\pi}{n}\right)$. Якщо $m \geq 1$, то $s(t) \in C^{m-1}(I)$ і звуження $s(t)$ на $\left(\frac{j\pi}{n}, \frac{(j+1)\pi}{n}\right)$ є поліномом степеня не вищого, ніж m .

Очевидно, $B_r(t) \in S_{2n}^{(r-1)}(I)$, тобто $B_r(t)$ є періодичним сплайном.

Теорема 3.5.3. *Хай $r, n \in \mathbf{N}$, $\tau_k = -\pi + \frac{(2k-1)\pi}{2n}$, $k = 1, \dots, 2n$. Тоді $\exists! \mu_k^*$, $k = 0, 1, \dots, 2n$:*

- i) $s^*(t) = \mu_0^* + \sum_{k=1}^{2n} \mu_k^* B_r(\tau_k - t) \in S_{2n}^{(r-1)}(I)$;
 ii) $s^*(t_k) = B_r(t_k)$, $t_k = \frac{k\pi}{n} + \frac{(1-(-1)^r)\pi}{4n}$, $k = -n, \dots, n-1$.

При цьому

$$u(0) = \sum_{k=1}^{2n} \mu_k^* u(\tau_k),$$

$$E(u(0), W_\infty^r(I), F_{2n}) = \frac{K_r}{n^r}.$$

Ця оцінка похибки виконується також при обчисленні значення $u(\tau)$, $\tau \neq 0$.

Хай $D = [0, 2\pi]^2$, $PC(D)$ – множина кусково-неперервних на D функцій, $1 \leq p \leq \infty$,

$$\tilde{W}_{L_p(D)}^{r+1, s+1} = \left\{ f(x, y) \in \tilde{C}^{r, s}(D) \mid f^{(r+1, s+1)} \in PC(D), \right. \\ \left. \left\| f^{(r+1, s+1)} \right\|_{L_p(D)} \leq 1 \right\}.$$

Для кожної функції $f \in \tilde{C}^{r, s}(D)$ побудуємо інтерліант

$$\sigma_{mnr s}(f; x, y) = \sum_{k=0}^{m-1} f(x_k, y) l_{kr}(x) + \sum_{i=0}^{n-1} f(x, y_i) l_{is}(y) - \\ - \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_k, y_i) l_{kr}(x) l_{is}(y),$$

де $l_{kr}(x)$, $l_{is}(y)$ – 2π – періодичні фундаментальні сплайни степеня r і s відповідно дефекту 1 із властивостями

$$l_{kr}(x_\nu) = \delta_{k\nu} \quad 0 \leq \nu \leq m-1, \quad l_{is}(y_\mu) = \delta_{i\mu}, \quad 0 \leq \mu \leq n-1.$$

Вузли x_ν, y_μ визначаються так:

$$x_\nu = 2\nu\pi/m + [1 + (-1)^r]\pi/(2m) \quad \nu = \overline{0, m-1}; r \in \overset{\circ}{\mathbb{N}},$$

$$y_\mu = 2\mu\pi/n + [1 + (-1)^s]\pi/(2n), \quad \mu = \overline{0, n-1}; s \in \overset{\circ}{\mathbb{N}}.$$

Хай $1 \leq p, q \leq \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$,

$$\varepsilon_{mn} \left(\tilde{W}_{L_p(D)}^{r+1, s+1} \right)_{L_q(D)} = \sup_{f \in \tilde{W}_{L_p(D)}^{r+1, s+1}} \|f - \sigma_{mnr} s(f; x, y)\|_{L_q(D)},$$

$$x_0 = \frac{[1 + (-1)^r]\pi}{2m}, \quad r = 0, 1, 2, \dots,$$

$$y_0 = \frac{[1 + (-1)^s]\pi}{2n}, \quad s = 0, 1, 2, \dots,$$

$$K_r(x, t) = B_r(x - t - x_0) - \sum_{k=0}^{m-1} B_r(x_k - t - x_0) l_{kr}(x),$$

де $B_r u$ – функція Бернуллі. Аналогічно визначимо $K_s(y, \tau)$.
Візьмемо

$$\begin{aligned} F_\rho(u, v) &= \int_{-u_0}^v K_\rho(u, z) dz = B_r(u) - B_r(u - v - u_0) - \\ &- \sum_{\nu=0}^{m-1} [B_r(u_\nu) - B_r(u_\nu - v - u_0)] l_{\nu\rho}(u). \end{aligned}$$

Теорема 3.5.4. Для всіх $m, n = 0, 1, 2, \dots; r, s = 0, 1, 2, \dots$ виконується нерівність

$$\begin{aligned} \varepsilon_{mn} \left(\tilde{W}_{L_p(D)}^{r+1, s+1} \right)_{L_q(D)} &\leq \\ &\leq \frac{1}{\pi^2} \left(\iint_D \|F_r(\cdot, t)\|_{L_q} \|F_s(\cdot, \tau)\|_{L_q} \right)^{p'} dt d\tau, \end{aligned} \quad (3.5.14)$$

$$1 \leq p, q \leq \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1.$$

При парних $m, n (m = 2m', n = 2n'; m', n' = 0, 1, 2, \dots)$ ма $1 \leq p < \infty, q = 1$ справедлива рівність

$$\varepsilon_{mn} \left(\tilde{W}_{L_p(D)}^{r+1, s+1} \right)_{L_1(D)} = \left\| \varphi_{m', r+1}(t) \varphi_{n', s+1}(\tau) \right\|_{L_{p'}(D)}, \quad (3.5.15)$$

де $\varphi_{\nu,0}(x) = \operatorname{sgn} \sin \nu x$; $\varphi_{\nu,\rho}(x) - \rho$ -й періодичний інтеграл від функції $\varphi_{\nu,0}(x)$ із середнім значенням на періоді, що дорівнює нулю.

Д о в е д е н н я. Скористаємося формулою (3.5.13). Тоді

$$\begin{aligned}
 l_{mnr s}(f; x, y) &= f(x, y) - \sigma_{mnr s}(f; x, y) = \left[f(x, y) - \right. \\
 &- \sum_{k=0}^{m-1} f(x_k, y) l_{kr}(x) \left. \right] - \sum_{i=0}^{n-1} \left[f(x, y_i) - \sum_{k=0}^{m-1} f(x_k, y_i) l_{kr}(x) \right] l_{is}(y) = \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} K_r(x, t) f^{(r,0)}(t + x_0, y) dt - \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} K_r(x, t) \times \right. \\
 &\quad \left. \times f^{(r,0)}(t + x_0, y_i) dt \right) l_{is}(y) = \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} K_r(x, t) \left[f^{(r,0)}(t + x_0, y) - \sum_{i=0}^{n-1} f^{(r,0)}(t + x_0, y_i) l_{is}(y) \right] dt = \\
 &= \frac{1}{\pi^2} \iint_D K_r(x, t) K_s(y, \tau) f^{(r,s)}(t + x_0, \tau + y_0) dt d\tau. \quad (3.5.16)
 \end{aligned}$$

Якщо $f \in \tilde{W}_{L_p(D)}^{r+1, s+1}$, то інтегруванням частинами отримаємо

$$l_{mnr s}(f; x, y) = \frac{1}{\pi^2} \iint_D F_r(x, t) F_s(y, \tau) f^{(r+1, s+1)}(t + x_0, \tau + y_0) dt d\tau.$$

Оцінимо цю формулу за нормою в просторі L_q ($1 \leq q \leq \infty$). Користуючись узагальненою нерівністю Мінковського ($D_1, D_2 \subset \mathbf{R}^2$; $u = (u_1, u_2) \in D_1$; $y = (y_1, y_2) \in D_2$, $1 \leq q < \infty$)

$$\left(\iint_{D_1} \left| \iint_{D_2} k(u, y) dy \right|^q du \right)^{\frac{1}{q}} \leq \iint_{D_2} \left(\iint_{D_1} |k(u, y)|^q du \right)^{\frac{1}{q}} dy,$$

отримаємо нерівність $\|l_{mnr s}(f; x, y)\|_{L_q(D)} =$

$$= \frac{1}{\pi^2} \left(\iint_D \left| \iint_D F_r(x, t) F_s(y, \tau) f^{(r+1, s+1)}(t + x_0, \tau + y_0) dt d\tau \right|^q dx dy \right)^{\frac{1}{q}} \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{\pi^2} \iint_D \left(\int_0^{2\pi} |F_r(x, t)|^q dx \int_0^{2\pi} |F_s(y, \tau)|^q dy \right)^{1/q} \times \\
&\quad \times |f^{(r+1, s+1)}(t + x_0, \tau + y_0)| dt d\tau = \\
&= \frac{1}{\pi^2} \iint_D \|F_r(\cdot, t)\|_{L_q[0; 2\pi]} \|F_s(\cdot, \tau)\|_{L_q[0; 2\pi]} \times \\
&\quad \times |f^{(r+1, s+1)}(t + x_0, \tau + y_0)| dt d\tau.
\end{aligned}$$

Застосуємо до останнього інтеграла нерівність Гельдера

$$\left| \iint_D f \cdot g dt d\tau \right| \leq \|f\|_{L_p(D)} \|g\|_{L_{p'}(D)}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

У результаті одержимо $\|l_{mnr s}(f; x, y)\|_{L_q(D)} \leq$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{\pi^2} \left(\iint_D \left(\|F_r(\cdot, t)\|_{L_q[0; 2\pi]} \|F_s(\cdot, \tau)\|_{L_q[0; 2\pi]} \right)^{p'} dt d\tau \right)^{1/p'} \times \\
&\quad \times \left(\iint_D |f^{(r+1, s+1)}(t + x_0, \tau + y_0)|^p dt d\tau \right)^{1/p} \leq \\
&\leq \frac{1}{\pi^2} \left(\iint_D \left(\|F_r(\cdot, t)\|_{L_q[0; 2\pi]} \|F_s(\cdot, \tau)\|_{L_q[0; 2\pi]} \right)^{p'} dt d\tau \right)^{1/p'}.
\end{aligned}$$

Отже, нерівність (3.5.14) доведено .

Якщо $m = 2m'$, то можна довести, що

$$\int_0^{2\pi} |F_\rho(x, y)| dx = \pi |\varphi_{m', \rho+1}(y)|.$$

Тому якщо $q = 1$, то для $m = 2m', n = 2n', 1 \leq p \leq \infty$

$$\|l_{mnr s}(f; x, y)\|_{L_1(D)} \leq \left\| \varphi_{m', r+1}(t) \varphi_{n', s+1}(\tau) \right\|_{L_{p'}(D)}.$$

Ця нерівність є точною. Рівність у ній буде для функції $f_0 \in \tilde{W}_{L_p(D)}^{r+1, s+1}$, періодичній з періодом $2\pi/m'$ за t та періодом $2\pi/n'$ за τ , яка має наступний вигляд

$$f_0^{(r+1, s+1)}(t, \tau) = \left\| \varphi_{m', r+1}(t) \varphi_{n', s+1}(\tau) \right\|_{L_{p'(D)}}^{1-p'} |\varphi_{m', r+1}(t - x_0) \times \\ \times \varphi_{n', s+1}(\tau - y_0)|^{q-1} \operatorname{sgn}(\varphi_{m', r+1}(t - x_0) \varphi_{n', s+1}(\tau - y_0)), \\ \iint_D f_0(t, \tau) dt d\tau = 0.$$

Теорему 3.5.4 доведено.

Н а с л і д о к. При $p = q = 1$, а також при $p = \infty, q = 1$ одержуємо рівності

$$\varepsilon_{2m', n'} \left(\tilde{W}_{L_1(D)}^{r+1, s+1} \right)_{L_1(D)} = \|\varphi_{m', r+1}(t) \varphi_{n', s+1}(\tau)\|_C = \frac{K_{r+1}}{(m')^{r+1}} \frac{K_{s+1}}{(n')^{s+1}}, \quad (3.5.17)$$

$$\varepsilon_{2m', n'} \left(\tilde{W}_{L_\infty(D)}^{r+1, s+1} \right)_{L_1(D)} = \|\varphi_{m', r+1}(t) \varphi_{n', s+1}(\tau)\|_{L_1(D)} = \frac{16K_{r+2}K_{s+2}}{(m')^{r+1} (n')^{s+1}}. \quad (3.5.18)$$

Рівності (3.5.17), (3.5.18) впливають з того, що

$$\|\varphi_{\nu, \rho}(u)\|_C = \frac{K_\rho}{\nu^\rho}, \quad \|\varphi_{\nu, \rho}(u)\|_{L_1(D)} = \frac{4K_{\rho+1}}{\nu^\rho}.$$

З рівності (3.5.16) можна одержати також співвідношення

$$\varepsilon_{2m' 2n'} \left(\tilde{W}_{L_\infty(D)}^{r+1, s+1} \right)_{L_q(D)} = \|\varphi_{m', r+1}(t) \varphi_{n', s+1}(\tau)\|_{L_q(D)}, \quad (3.5.19)$$

$$1 \leq q \leq \infty.$$

3.6. Інтерлінація за допомогою R -функцій

R -функції В.Л.Рвачова знайшли широке застосування при побудові рівнянь ліній (у випадку $n = 2$) або поверхонь (у випадку $n \geq 3$) $\partial G : \omega(x_1, \dots, x_n) = 0$, що обмежують задану область $G \subset R^n$ при умові, що (для спрощення покладемо $n = 2, x_1 = x, x_2 = y$):

а) область G обмежена границею ∂G , яка складається з об'єднання дуг кривих $\partial G_k : \omega_k(x, y) = 0, k = \overline{1, M}$, що обмежують підобласті $G_k : \omega_k(x, y) > 0 \forall (x, y) \in G_k; \omega_k(x, y) < 0 \forall (x, y) \notin G_k \cup \partial G_k$;

б) відома логічна формула $G = F(X_1, \dots, X_M)$ побудови G за допомогою областей $G_k, k = \overline{1, M}$. Тут використане позначення $X_k =$

$\chi_{D_k}(x, y)$, де $\chi_D(x, y)$ – характеристична функція області D , яка набуває тільки двох значень - 0 та 1, тобто є булевою змінною: $\chi_D(x, y) = 1 \forall (x, y) \in D, \chi_D(x, y) = 0 \forall (x, y) \notin D$. Ця формула має бути написана у вигляді булевої (двозначної) функції M булевих змінних з використанням операцій булевої алгебри $X \vee Y, X \wedge Y, \overline{X}$. Вона отримується з формули для опису області G шляхом заміни операцій теорії множин - перетину $X \cap Y$, об'єднання $X \cup Y$ та доповнення \overline{X} на операції булевої алгебри - кон'юнкції \wedge , диз'юнкції \vee та заперечення \overline{X} . Наприклад, формула $G = (X_1 \vee X_2) \wedge (\overline{X_3} \vee X_4)$ отримується з формули $(G_1 \cup G_2) \cap (\overline{G_3} \cup G_4)$. Такий підхід широко використовується при побудові діаграм Вєнна - Ейлєра для геометричного зображення областей, складених з елементарних підобластей (не використовуючи термінології алгебри Буля). Формула $G = F(X_1, \dots, X_M)$ означає рівність $\chi_G(x, y) = F(\chi_{G_1}(x, y), \dots, \chi_{G_M}(x, y))$.

Алгоритм побудови рівняння $\omega(x, y) = 0$ можна провести за два кроки: 1) підставляємо у формулу $F(X_1, \dots, X_M)$ замість булевих операцій відповідні їм R - операції; 2) замість змінних X_1, \dots, X_M підставляємо функції $\omega_1(x, y), \dots, \omega_M(x, y)$, тобто $\omega(x, y) = F(\omega_1(x, y), \dots, \omega_M(x, y)) = 0$ є шуканим рівнянням лінії.

У більшості випадків використовуються наступні R - операції:

$$x \wedge_{\alpha} y = \frac{1}{1 + \alpha} (x + y - \sqrt{x^2 + y^2 - 2\alpha xy}),$$

$$x \vee_{\alpha} y = \frac{1}{1 + \alpha} (x + y + \sqrt{x^2 + y^2 - 2\alpha xy}),$$

$$\overline{x} = -x, \alpha = \alpha(x, y), -1 < \alpha \leq 1.$$

Зауваження 1. При обчисленнях слід пам'ятати, що $\sqrt{x^2} = |x|$.

П р и к л а д 1. Рівняння лінії $\Gamma = \Gamma_1 \cap \Gamma_2$, що складається з двох додатних півосей Ox та Oy , тобто $\Gamma_1 : \omega_1(x, y) := x = 0, y \geq 0; \Gamma_2 : \omega_2(x, y) := y = 0, x \geq 0$, має вигляд $\Gamma : \omega(x, y) := \omega_1(x, y) \wedge_{\alpha} \omega_2(x, y) = x \wedge_{\alpha} y = 0$. Це впливає з того, що лінія Γ є границею першого квадранта: $\Gamma = \partial G, G = G_1 \cap G_2, G_1 = \{(x, y) : \omega_1(x, y) \geq 0\}; G_2 = \{(x, y) : \omega_2(x, y) \geq 0\}$.

П р и к л а д 2. Рівняння лінії $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, що складається з двох від'ємних півосей Ox та Oy , тобто $\Gamma_1 : \omega_1(x, y) := x = 0, y \leq 0; \Gamma_2 : \omega_2(x, y) := y = 0, x \leq 0$, має вигляд $\Gamma : \omega(x, y) := \omega_1(x, y) \vee_{\alpha} \omega_2(x, y) = x \vee_{\alpha} y = 0$. Це впливає з того, що лінія Γ є границею області, яка складається з об'єднання 1 і 2-го та 1 і 4-го квадрантів: $\Gamma = \partial G, G = G_1 \cup G_2, G_1 = \{(x, y) : \omega_1(x, y) \geq 0\}; G_2 = \{(x, y) : \omega_2(x, y) \geq 0\}$.

П р и к л а д 3. Напишемо рівняння лінії, що є границею "кута", тобто області $G = G_1 \cup G_2, G_1 = \{(x, y) : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq d\}, G_2 = \{(x, y) : 0 \leq x \leq c, 0 \leq y \leq b\}, c < a, d < b$. Очевидно, функції $\omega_1(x, y) := x(a - x) \wedge_{\alpha} y(d - y), \omega_2(x, y) := x(c - x) \wedge_{\alpha} y(b - y)$ можна використати відповідно для опису областей $G_1 : \omega_1(x, y) >$

$0\forall(x, y) \in G_1$; $\omega_1(x, y) = 0\forall(x, y) \in \partial G_1$; $\omega_1(x, y) < 0\forall(x, y) \notin G_1$ та G_2 : $\omega_2(x, y) > 0\forall(x, y) \in G_2$; $\omega_2(x, y) = 0\forall(x, y) \in \partial G_2$; $\omega_2(x, y) < 0\forall(x, y) \notin G_2$. Тому шукану функцію $\omega(x, y)$ можна записати у вигляді $\omega(x, y) = \omega_1(x, y) \vee_{\alpha} \omega_2(x, y)$. Тобто, $\omega(x, y) > 0\forall(x, y) \in G$; $\omega_1(x, y) = 0\forall(x, y) \in \partial G$; $\omega_1(x, y) < 0\forall(x, y) \notin G$.

Отже, знаючи рівняння границь підобластей, можна написати рівняння складеної за їх допомогою області. Такі рівняння можуть знайти широке застосування при розв'язанні задач опису характеристичних функцій області складеної форми для верстатів з програмним керуванням, при написанні структур наближених розв'язків крайових задач у випадку області складеної форми тощо (В.Л.Рвачов [1-3]). Ці структури мають вигляд формул раціональної інтерлінації вигляду (див. п.3.1), але при умові, що рівняння окремих ліній будуються з використанням R -функцій.

Приклад 4. Напишемо за допомогою R -функцій рівняння відрізка $AB = \{(x, y) : a \leq x \leq b, y = 0.\}$ Введемо до розгляду дві функції: $\omega_1(x, y) := y^2$ та $\omega_2(x, y) := \frac{(b-a)^2}{4} - (x - \frac{a+b}{2})^2 - y^2$. Рівняння $\omega_1(x, y) = 0$ є рівнянням осі Ox , а $\omega_2(x, y) = 0$ є рівнянням кола радіуса $\frac{b-a}{2}$ з центром у точці $(\frac{a+b}{2}, 0)$. Відрізок AB повністю знаходиться всередині круга $D_1 := \{(x, y) : \omega_2(x, y) \geq 0\}$, причому його кінці - на границі цього круга, тобто лежать на колі $\omega_2(x, y) = 0$. Тому рівняння $\omega(x, y) = 0$, де $\omega(x, y) := \omega_1(x, y) \wedge_0 \omega_2(x, y) = y^2 + \frac{(b-a)^2}{4} - (x - \frac{a+b}{2})^2 - y^2 - \sqrt{y^4 + (\frac{(b-a)^2}{4} - (x - \frac{a+b}{2})^2 - y^2)^2}$ є рівнянням відрізка AB . Справді, за межами круга D_1 виконуються нерівність $\omega_2(x, y) < 0$. Тому за межами круга D_1 виконуються нерівність $\omega_1(x, y) \wedge_0 \omega_2(x, y) < 0$. Всередині цього круга D_1 виконується нерівність $\omega_2(x, y) > 0$. Тому $\omega_1(x, y) \wedge_0 \omega_2(x, y) = 0$ у точках відрізка AB : $\omega_1(x, y) = 0$ і $\omega_1(x, y) \wedge_0 \omega_2(x, y) > 0$ в інших точках круга. Отже, функція $\omega(x, y)$ дорівнює нулю тільки в точках відрізка AB .

Зауваження 1. В окремих випадках можна написати рівняння частин ліній або поверхонь не використовуючи R -функції. Напишемо для прикладу рівняння відрізка AB , де $A(a, 0), B(b, 0), b > a$ - дві точки на осі Ox . Хай $M(x, y)$ - довільна точка, $\rho_1(x, y) = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}, \rho_2(x, y) = \sqrt{(x-b)^2 + y^2}$ - віддали від точки M відповідно до точок A і B . Тоді функція $\rho(x, y) := \rho_1(x, y) + \rho_2(x, y) - (b-a)$ у всіх точках площини є додатною і тільки в точках відрізка AB вона дорівнює нулю, бо $AM + BM \geq AB$ і знак "дорівнює" у цій нерівності виконується тільки, якщо точка M належить відрізку AB . Тобто рівняння $\rho(x, y) = 0$ є рівнянням відрізка AB . Аналогічні міркування дають змогу стверджувати, що рівняння $\rho(x, y) = 0$, де $\rho(x, y) = 0.5(x - \sqrt{x^2 + y^2})$ є рівнянням додатної півосі Ox .

Алгоритм побудови функції, яка точно задовольняє заданим гра-

ничним умовам, на границі складеної області, використовує формулу

$$\varphi_0(x, y) = \sum_{k=1}^M \psi_k(x, y) \phi_k(x, y),$$

де допоміжні функції $\psi_k(x, y)$ будуються за допомогою рівнянь $\omega_i(x, y) = 0, i = \overline{1, M}$ частин Γ_i границі $\Gamma = \bigcup_{k=1}^M \Gamma_k$ так, як це описано на початку підрозд.3.1. Функції $\phi_k(x, y), k = \overline{1, M}$ - задані граничні функції. Формула $\varphi_0(x, y)$ є функцією, визначеною в усіх точках $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, за виключенням тих точок, де допоміжні функції $\psi_k(x, y)$ є невизначеними, і в точках лінії Γ задовольняє граничні умови

$$\varphi_0(x, y)|_{\Gamma_i} = \phi_i(x, y)|_{\Gamma_i}, i = \overline{1, M}.$$

У випадку, якщо на границі Γ задані значення функції й значення похідних по нормалі до Γ (до заданого порядку N), то для точного задовільнення граничних умов використовують узагальнену формулу Тейлора-Рвачова

$$T_N(x, y) = \sum_{s=0}^N \varphi_s \left(x - \omega(x, y) \frac{\partial \omega}{\partial x}, y - \omega \frac{\partial \omega(x, y)}{\partial y} \right) \frac{\omega^s(x, y)}{s!}.$$

Тут $\omega(x, y) = 0$ - нормалізоване рівняння лінії Γ , в якому

$$\frac{\partial^s \omega(x, y)}{\partial \nu^s} \Big|_{\Gamma} = \delta_{s,0}, s = \overline{0, N}; \frac{\partial f}{\partial \nu} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial y}.$$

$\frac{\partial^s f(x, y)}{\partial \nu^s}$ - похідна порядку s по нормалі ν до лінії Γ , $\frac{\partial^0 f(x, y)}{\partial \nu^0} = f(x, y)$. Так побудований оператор задовольняє наступні граничні умови

$$\frac{\partial^p T_N(x, y)}{\partial \nu^p} \Big|_{\Gamma} = \varphi_p(x, y)|_{\Gamma}, p = \overline{0, N}$$

Запитання і вправи для самостійної роботи

1. У чому полягає різниця між операторами інтерлінації функцій зі збереженням та без збереження класу диференційовності $C^r(\mathbf{R}^2)$?

2. Напишіть формулу для оператора раціональної інтерлінації без збереження класу $C^r(\mathbf{R}^2)$ функції $f(x, y)$ на системі довільних прямих.

3. Напишіть формулу для оператора поліноміальної інтерлінації функції $f(x, y)$ на системі взаємно перпендикулярних прямих. Як поліноміальна інтерлінація зв'язана з поліноміальною інтерполяцією?

4. Як треба вибирати вузли інтерлінації для найкращої в $L_p[-1, 1]$, $p = 1, 2, \infty$ лагранжевої поліноміальної інтерлінації?

5. Сформулюйте алгоритм побудови операторів тригонометричної інтерлінації на системі взаємно перпендикулярних прямих.

6. Наведіть приклади періодичних сплайн-функцій.

7. Чим відрізняється періодична інтерлінація від періодичної сплайн-інтерлінації?

8. Сформулюйте основні кроки для побудови операторів інтерлінації на границі довільної плоскої області.

9. Сформулюйте основні кроки для побудови операторів інтерлінації з використанням R -функцій.

10. Сформулюйте алгоритм побудови операторів інтерлінації на границі довільної плоскої області з використанням R -функцій.

11. Побудуйте рівняння відрізка $S_1 = \{(x, y) : x = 0, 0 \leq y \leq 1\}$ за допомогою R -функцій та за допомогою формули $\rho(x, y) := \rho_1(x, y) + \rho_2(x, y) - (b - a)$ (див. зауваження 2 до останнього параграфа). Доведіть, що $\rho(x, y) = 0$ є рівнянням цього відрізка.

12. Доведіть лему 3.4.1 (див. Литвин О.М. [3, с. 202]).

Задача 3.1.1. Довести, що при $(M = 2, N = 0)$ оператори $O_{MN}f(x)$ не є точними навіть на поліномах степеня $N + 1$. Тобто $O_{20}f(x) \neq f(x) \forall f(x) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2, a_i \in \mathbf{R}, i = 0, 1, 2$. Взяти для спрощення $\omega_1(x) = x_1; \omega_2(x) = x_2$.

Задача 3.1.2. Показати, що існує такий набір \mathfrak{R} мультиіндексів $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathfrak{R}$ і такий набір лінійних функціоналів $\bar{C}_\alpha(f)$, $\alpha \in \mathfrak{R}$, що оператор (якщо, наприклад, в $H_{kN}(x)$ узяти $\bar{N} = N + 1$)

$$\bar{O}_{MN}f(x) = O_{MN}f(x) + \sum_{\alpha \in \mathfrak{R}} C_\alpha(f)x^\alpha \prod_{k=1}^M \omega_k^{\bar{N}}(x) / \sum_{i=1}^M \prod_{k \neq i} \omega_k^{\bar{N}}(x) \quad (3.6.1)$$

матиме максимально можливу алгебричну точність

$$O_{MN}x^\alpha \equiv x^\alpha, \quad 0 \leq |\alpha| \leq M(N + 1) - 1.$$

Глава 4. Метод зведення до систем звичайних лінійних (ЛІДР) та нелінійних (НІДР) інтегродиференціальних рівнянь

4.1. Метод ЛІДР. Перша крайова задача для еліптичного оператора $2m$ -го порядку

Уведені в попередніх розділах формули, які інтерлінують функції та їхні нормальні похідні на лініях ректангуляції та триангуляції, можуть бути ефективно використані для побудови структур наближених розв'язків крайових задач у випадку областей складеної форми (обмежених дугами відомих кривих), а також для знаходження наближених розв'язків. Нижче викладено методику наближеного розв'язання граничних задач за допомогою інтерлінації методом ЛІДР.

Загальна ідея така: область інтегрування розбивається на елементи - прямокутники і трикутники (граничні елементи можуть мати криволінійну сторону, яка є частиною межі). У кожному з цих елементів шуканий наближений розв'язок зображується у вигляді функцій, які забезпечують потрібний порядок диференційовності на лініях розділу різних елементів, а також забезпечують задовільнення граничних умов. Структура наближеного розв'язку залежить від деяких невідомих функцій однієї змінної (як x , так і y), а також від невідомих сталих. Тобто при застосуванні методу ЛІДР обидві змінні рівноправні. Ці невідомі функції і сталі знаходяться з вимоги, щоб функціонал, відповідний даній граничній задачі, досягав мінімуму, або з умови ортогональності нев'язки до відповідної системи функцій однієї та двох змінних.

Рівноправність змінних у методі ЛІДР є важливою його перевагою перед відомим методом Канторовича (методом ДР), який зводить двовимірну граничну задачу до систем звичайних диференціальних рівнянь. У структуру наближеного розв'язку методу ДР входять невідомі функції тільки однієї змінної (x або y), тобто змінні не рівноправні.

Друга важлива перевага методу ЛІДР полягає в тому, що він легко (як і метод скінченних елементів) поширюється на області складеної форми.

Третя важлива перевага - можливість побудови наближених розв'язків, що точно задовольняють граничні умови крайової задачі у випадку областей складеної форми (обмежених дугами відомих кривих).

Четвертою, найсуттєвішою перевагою методу ЛІДР є його висока точність: при фіксованому розбитті області інтегрування на елементи похибка методу ЛІДР (а також методу скінченних елементів, побудованому на основі сплайн-інтерлінації) дорівнює $O(\varepsilon^2)$, якщо класичний метод скінченних елементів має похибку $O(\varepsilon)$.

4.1.1. Область G -квадрат

Опишемо більш детально основні положення методу ЛІДР на прикладі першої однорідної крайової задачі для самоспряженого еліптичного оператора $2m$ -го порядку в разі канонічної області – одиничного квадрата. Узагальнення для випадку областей складеної форми не потребує принципових змін в ідеології методу ЛІДР, а тільки вимагає використання складніших формул інтерлінації на областях складеної форми (інтерлінації на прямокутних трикутниках з криволінійною гіпотенузою, на прямокутниках з однією криволінійною стороною тощо).

Хай $G = (0, 1)^2$, $\partial G = (x, y) : x = 0$ або $x = 1 : 0 \leq y \leq 1$; $y = 0$ або $y = 1 : 0 \leq x \leq 1$. Знаходимо наблизений розв'язок першої однорідної крайової задачі для самоспряженого еліптичного оператора $2m$ -го порядку

$$L_{2m}u(x, y) = f(x, y), (x, y) \in G, \quad (4.1.1)$$

з наступними граничними умовами

$$D^{(p,0)}u(x, y) = 0, x = 0 \text{ або } x = 1 : 0 \leq y \leq 1, p = \overline{0, m-1}, \quad (4.1.2)$$

$$D^{(0,r)}u(x, y) = 0, y = 0 \text{ або } y = 1 : 0 \leq x \leq 1, r = \overline{0, m-1}, \quad (4.1.3)$$

$$L_{2m} = \sum_{s+t \leq m} (-1)^{s+t} D^{(s,t)}(a_{st}(x, y)D^{(s,t)}).$$

Припустимо, що всі коефіцієнти $a_{st}(x, y)$ обмежені в \overline{G} і білінійна форма

$$B(u, v) = \sum_{s+t \leq m} \int_0^1 \int_0^1 a_{st}(x, y) D^{(s,t)}u(x, y) D^{(s,t)}v(x, y) dx dy$$

є $W_2^{0,m}$ -еліптичною, тобто

$$\exists K > 0 : B(u, v) \geq K \|u\|_{W_2^m(G)}^2 \quad \forall u \in W_2^{0,m}, \quad (4.1.4)$$

$$W_2^{0,m} = \{u(x, y) \in W_2^m(G) | u \text{ задовольняє умови (4.1.2), (4.1.3)}\}.$$

Припустимо також, що

$$\exists C > 0 : |B(u, v)| \leq C \|u\|_{W_2^m(G)} \|v\|_{W_2^m(G)}. \quad (4.1.5)$$

Згідно з методом Гальоркіна функція $\tilde{u}(x, y) \in W_2^{0,m}(G)$ є узагальненим розв'язком задачі (4.1.1) – (4.1.3), якщо вона задовольняє співвідношення

$$B(\tilde{u}, v) = \int_G f(x, y)v(x, y) dx dy \quad \forall v \in W_2^{0,m}. \quad (4.1.6)$$

При вказаних обмеженнях на коефіцієнти та праву частину диференціального рівняння (4.1.1) згідно з теоремою Лакса–Мільграма існує єдиний розв'язок задачі (4.1.1)–(4.1.3).

Теорема 4.1.1 (теорема Лакса – Мільграма). *Хай V – гільбертів простір, білінійна форма $B(u, v) : V \times V \rightarrow R$ неперервна і V – еліптична, тобто*

$$\exists \alpha > 0 \forall v \in V : B(v, v) \geq \alpha \|v\|^2.$$

Хай

$$\forall u, v \in V \exists M \in R : |B(u, v)| \leq M \|u\| \|v\|;$$

лінійна форма $f : V \rightarrow R$ неперервна, $\| \| := \|* \|_V$. Тоді абстрактна варіаційна задача: знайти $u \in V$ таке, що*

$$B(u, v) = f(v) \forall v \in V,$$

має єдиний розв'язок.

Д о в е д е н н я. За умовою теореми $\forall u$ лінійна форма $v \rightarrow B(u, v)$ неперервна. Тому

$$\exists! Au \in V^* \forall v \in V : B(u, v) = Au(v),$$

де V^* – простір з нормою $\| \cdot \|_{V^*}$, спряжений до V , тобто сукупність усіх неперервних лінійних функціоналів, визначених на V ,

$$\|Au\|_{V^*} = \sup_{v \in V} \frac{|Au(v)|}{\|v\|_V} \leq M \|u\|.$$

Тобто лінійне відображення $A : V \rightarrow V^*$ неперервне і

$$\|A\|_{L(V; V^*)} \leq M.$$

Хай $\tau : V^* \rightarrow V$ – відображення Рісса:

$$\forall f \in V^* \forall v \in V : f(v) = (\tau f, v)_V,$$

де $(*, *)_V$ – скалярний добуток у просторі V .

Тоді поставлена варіаційна задача $B(u, v) = f(v) \forall v \in V$ еквівалентна задачі $\tau Au = \tau f$, тобто ці задачі мають один розв'язок u . Розв'язок u єдиний, якщо афінне перетворення

$$\exists \gamma > 0 : v \in V \rightarrow g(x) := v - \gamma(\tau Av - \tau f) \in V$$

стискує.

За означенням, відображення g метричного простору X із метрикою $\rho(x, y) = \rho(x, y)_X$ у себе є стискуєчим, якщо

$$\exists \beta \in (0, 1) : \rho(g(x), g(y)) \leq \beta \rho(x, y) \forall x, y \in X.$$

Врахувавши співвідношення

$$(\tau Av, v)_V = Av(v) = B(v, v) \geq \alpha \|v\|_V^2,$$

$$\|\tau Av\| = \|Av\|_{V^*} \leq \|A\| \cdot \|v\|_V,$$

отримаємо нерівність

$$\|v - \gamma \tau Av\|^2 = \|v\|^2 - 2\gamma(v, \tau Av)_V + \gamma^2 \|\tau Av\|^2 \leq (1 - 2\gamma\alpha + \gamma^2 M^2) \|v\|_V^2.$$

Тому, взявши $\rho(x, y)_V := \|x - y\|_V$, $x, y \in V$, матимемо

$$\begin{aligned} \rho(g(x), g(y))_V &= \|g(x) - g(y)\|_V = \|(x - y) - \gamma \tau A(x - y)\| \leq \\ &\leq (1 - 2\gamma\alpha + \gamma^2 M^2)^{1/2} \|x - y\|_V. \end{aligned}$$

Отже, при $\gamma \in (0, 2\alpha/M^2)$ відображення g є стискующим.

Теорему 4.1.1 доведено.

Наближений розв'язок задачі (4.1.1) – (4.1.3) шукатимемо у вигляді сплайн-інтерлінанта, один з можливих алгоритмів побудови якого викладемо нижче по кроках.

Крок 1. Розіб'ємо область G на прямокутні елементи

$$\begin{aligned} \Pi_{kl} &= [x_{k-1}, x_k] \times [y_{l-1}, y_l] \subset G \text{ прямими } x = x_k, k = \overline{0, N_1 + 1}, 0 = \\ &= x_0 < x_1 < \dots < x_{N_1 + 1} = 1; y = y_l, l = \overline{0, N_2 + 1}, 0 = y_0 < y_1 < \dots < \\ &< y_{N_2 + 1} = 1. \end{aligned}$$

Крок 2. Побудуємо систему фінітних функцій $S_{k,i}(x)$ із властивостями $\text{supp} S_{k,i}(x) = [x_{k-1}, x_{k+1}]$, $k = \overline{1, N_1}$, $S_{k,i}^{(p)}(x_j) = \delta_{k,j} \delta_{i,p}$, $k, j = \overline{1, N_1}$, $i, p = \overline{0, m-1}$. Наприклад,

$$\begin{aligned} S_{k,i}(x) &= \frac{(x - x_k)^i}{i!} \times \\ &\times \begin{cases} q_i((x - x_{k-1})/(x_k - x_{k-1}))/g_i(1), & x \in [x_{k-1}, x_k], \\ q_i((x - x_{k+1})/(x_k - x_{k+1}))/g_i(1), & x \in [x_k, x_{k+1}], \\ 0, & x \notin [x_{k-1}, x_{k+1}], \end{cases} \end{aligned}$$

де

$$g_i(z) = \int_0^z t^{m-1} (1-t)^{m-1-i} dt.$$

Умова $\text{supp} S_{k,i} = (x_{k-1}, x_{k+1})$ не є обов'язковою. Функції $S_{k,i}(x)$ можуть бути базисними сплайнами або поліномами відповідного степеня. Для їх побудови можна використовувати В-сплайни.

Крок 3. Наближений розв'язок задачі (4.1.1) – (4.1.3) шукатимемо у вигляді інтерлінанта

$$\tilde{u}_m(x, y) = \sum_{k=1}^{N_1} \sum_{i=0}^{m-1} S_{k,i}(x) \varphi_{k,i}(y) + \sum_{l=1}^{N_2} \sum_{j=0}^{m-1} S_{l,j}(y) \psi_{l,j}(x) - \quad (4.1.7)$$

$$- \sum_{k,l=1}^{N_1, N_2} \sum_{i,j=0}^{m-1} S_{k,i}(x) S_{l,j}(y) u_{kl ij},$$

в якому невідомі функції $\varphi_{k,i}(y)$, $\psi_{l,j}(x)$ мають задовольняти граничні умови

$$\begin{aligned} \varphi_{k,i}^{(p)}(\mu) &= 0, \mu \in \{0, 1\}, p = \overline{0, m-1}, \\ \psi_{l,j}^{(q)}(\nu) &= 0, \nu \in \{0, 1\}, q = \overline{0, m-1}. \end{aligned} \quad (4.1.8)$$

Крок 4. Вибираємо систему обмежень (4.1.9), описану нижче. Невідомі функції $\varphi_{k,i}(y)$, $\psi_{l,j}(x)$ можна інтерпретувати як наближені сліди розв'язку задачі (4.1.1) – (4.1.3) та його немішаних частинних похідних до порядку $m-1$ на вузлових лініях $x = x_k$, $y = y_j$. Невідомі $u_{kl ij}$ можна інтерпретувати як наближені значення розв'язку та його частинних похідних у вузлових точках (x_k, y_l) . Для цього треба, щоб вони задовольняли у вузлових точках умови спряження (умови С.М. Нікольського)

$$\varphi_{k,i}^{(j)}(y_l) = \psi_{l,j}^{(i)}(x_k) = u_{kl ij}, k = \overline{1, N_1}, l = \overline{1, N_2}; i, j = \overline{0, m-1}. \quad (4.1.9)$$

За таких умов наближений розв'язок (4.1.7) задовольнятиме граничні умови (4.1.2), (4.1.3) і умови

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^p \tilde{u}_m}{\partial x^p} \right|_{x=x_{k'}} &= \varphi_{k',p}(y), \quad k' = \overline{1, M_1}, \quad 0 \leq p \leq m-1, \\ \left. \frac{\partial^q \tilde{u}_m}{\partial y^q} \right|_{y=y_{l'}} &= \psi_{l',q}(x), \quad l' = \overline{1, M_2}, \quad 0 \leq q \leq m-1, \\ \left. \frac{\partial^{p+q} \tilde{u}_m}{\partial x^p \partial y^q} \right|_{\substack{x=x_{k'} \\ y=y_{l'}}} &= u_{k',l',p,q}, \quad k' = \overline{1, M_1}, \quad l' = \overline{1, M_2}, \quad p, q = \overline{0, m-1}. \end{aligned}$$

Слід звернути увагу на те, що незалежно від вибору цих невідомих функцій та сталих функція $\tilde{u}_m(x, y)$ задовольняє точно граничні умови (4.1.2) – (4.1.3). Тому в принципі можна не вимагати задоволення умов (4.1.9), тобто вважати невідомі функції і невідомі сталі незалежними одна від одної.

Крок 5. Для знаходження невідомих функцій $\varphi_{k,i}(y)$, $\psi_{l,j}(x)$ та сталих $u_{kl ij}$ запишемо систему звичайних лінійних інтегродиференціальних і алгебричних рівнянь, що отримується з умови ортогональності нев'язки $L_{2m} \tilde{u}_m(x, y) - f(x, y)$ координатним функціям $S_{k_1, i_1}(x)$, $S_{l_1, j_1}(y)$ та їх добутковій $S_{k_1, i_1}(x) S_{l_1, j_1}(y)$:

$$\int_0^1 (L_{2m} \tilde{u}_m(x, y) - f(x, y)) S_{k_1, i_1}(x) dx = 0, \quad k_1 = \overline{1, N_1}, i_1 = \overline{0, m-1}, \quad (4.1.10)$$

$$\int_0^1 (L_{2m}\tilde{u}_m(x, y) - f(x, y))S_{l_1, j_1}(y)dy = 0, \quad l_1 = \overline{1, N_2}, j_1 = \overline{0, m-1}, \quad (4.1.11)$$

$$\int_0^1 \int_0^1 (L_{2m}\tilde{u}_m(x, y) - f(x, y))S_{k_1, i_1}(x)S_{l_1, j_1}(y)dx dy = 0, \quad (4.1.12)$$

$$k_1 = \overline{1, N_1}, i_1 = \overline{0, m-1}, l_1 = \overline{1, N_2}, j_1 = \overline{0, m-1}. \quad (4.1.13)$$

Ці системи треба розв'язувати сумісно із системою рівнянь (4.1.8), що забезпечує задовільнення граничних умов (4.1.2) – (4.1.3).

Крім того, якщо обмеження введено (див. початок кроку 4), то ці системи треба розв'язувати сумісно із системою (4.1.9).

Зауваження. В структурі наближеного розв'язку \tilde{u}_m у формулі (4.1.7) функції $S_{k,i}(x)$, $S_{l,j}(y)$ можна замінити на довільні (не обов'язково фінітні) лінійно незалежні функції $g_{k,i}(x)$, $\tilde{g}_{l,j}(y)$, що задовольняють умови $g_{k,i}^{(s)}(w) = \tilde{g}_{l,j}^{(s)}(w) = 0$, $w \in \{0, 1\}$, $s = \overline{0, m-1}$.

П р и к л а д. Наближений розв'язок задачі Діріхле для рівняння Пуассона

$$u''_{xx}(x, y) + u''_{yy}(x, y) = -2, \quad (x, y) \in G = (-a, a) \times (-b, b);$$

$$u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \partial G :$$

$$u(-a, y) = u(a, y) = 0, y \in [-b, b]; u(x, -b) = u(x, b) = 0, x \in [-a, a].$$

шукатимемо у вигляді

$$\bar{u}(x, y) = \cos \frac{\pi x}{2a} \psi(y) + \varphi(x) \cos \frac{\pi y}{2b} - u_{0,0} \cos \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{\pi y}{2b}.$$

Тут вважаємо, що $u_{0,0}$ – невідома стала, а $\varphi(x)$, $\psi(y)$ – невідомі функції з властивостями $\varphi(-a) = \varphi(a) = 0$; $\psi(-b) = \psi(b) = 0$.

Пропонуємо читачеві самостійно впевнитись, що незалежно від вибору вказаних функцій $\varphi(x)$, $\psi(y)$ в інших точках, а також незалежно від вибору сталої $u_{0,0}$ функція $\bar{u}(x, y)$ задовольняє граничну умову поставленої крайової задачі: $\bar{u}(x, y) = 0, (x, y) \in \partial G$. Підставивши цю функцію $\bar{u}(x, y)$ в диференціальне рівняння, отримаємо нев'язку $e(x, y) := \bar{u}''_{xx}(x, y) + \bar{u}''_{yy}(x, y) + 2 =$

$$= \cos \frac{\pi x}{2a} \left[\psi''(y) - \left(\frac{\pi}{2a} \right)^2 \psi(y) \right] + \cos \frac{\pi y}{2b} \left[\varphi''(x) - \left(\frac{\pi}{2b} \right)^2 \varphi(x) \right] + u_{0,0} \left[\left(\frac{\pi}{2a} \right)^2 + \left(\frac{\pi}{2b} \right)^2 \right] \cos \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{\pi y}{2b} + 2.$$

Знайдемо невідомі функції $\varphi(x)$, $\psi(y)$ та невідому сталу $u_{0,0}$ із систем рівнянь (4.1.14)–(4.1.16):

$$\int_{-a}^a e(x, y) \cos \frac{\pi x}{2a} dx = 0 \implies \quad (4.1.14)$$

$$\Rightarrow a\psi''(y) - a\left(\frac{\pi}{2a}\right)^2 \psi(y) - \cos\frac{\pi y}{2b} \left[\left(\frac{\pi}{2b}\right)^2 A_0 - \frac{\pi}{2a} A_1 - u_{0,0} \left[\left(\frac{\pi}{2a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{2b}\right)^2 \right] a \right] + \frac{8a}{\pi} = 0,$$

де використані позначення

$$A_0 = \int_{-a}^a \varphi(x) \cos\frac{\pi x}{2a} dx, \quad A_1 = \int_{-a}^a \varphi'(x) \sin\frac{\pi x}{2a} dx.$$

Зауважимо, що сталі A_0, A_1 залежать від невідомої функції $\varphi(x)$.

Загальний розв'язок рівняння (4.1.14) можна зобразити у вигляді (c_1, c_2 - довільні сталі):

$$\begin{aligned} \psi(y) &= c_1 ch\frac{\pi y}{2a} + c_2 sh\frac{\pi y}{2a} + c_3 \cos\frac{\pi y}{2b} + \frac{32a^2}{\pi^3}, \\ c_3 &= - \left[a\left(\frac{\pi}{2b}\right)^2 + a\left(\frac{\pi}{2a}\right)^2 \right]^{-1} \times \\ &\times \left[\left(\frac{\pi}{2b}\right)^2 A_0 - \frac{\pi}{2a} A_1 - u_{0,0} \left[\left(\frac{\pi}{2a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{2b}\right)^2 \right] a \right] = \\ &= - \left[a\left(\frac{\pi}{2b}\right)^2 + a\left(\frac{\pi}{2a}\right)^2 \right]^{-1} \left[\left(\frac{\pi}{2b}\right)^2 A_0 - \frac{\pi}{2a} A_1 \right] + u_{0,0}. \end{aligned}$$

Із граничних умов $\psi(-b) = \psi(b) = 0$ отримуємо $c_2 = 0, c_1 = -32a^2/(\pi^3 ch\frac{\pi b}{2a})$. Отже, для функції $\psi(y)$ матимемо

$$\psi(y) = \frac{32a^2}{\pi^3} \left(1 - \frac{ch\frac{\pi y}{2a}}{ch\frac{\pi b}{2a}} \right) + c_3 \cos\frac{\pi y}{2b}$$

Напишемо також рівняння

$$\int_{-b}^b e(x, y) \cos\frac{\pi y}{2b} dy = 0 \implies \tag{4.1.15}$$

$$\Rightarrow b\varphi''(x) - b\left(\frac{\pi}{2b}\right)^2 \varphi(x) - \cos\frac{\pi x}{2a} \left[\left(\frac{\pi}{2a}\right)^2 B_0 -$$

$$-\frac{\pi}{2b}B_1 - u_{0,0} \left[\left(\frac{\pi}{2a} \right)^2 + \left(\frac{\pi}{2b} \right)^2 \right] b \Big] + \frac{8b}{\pi} = 0.$$

Його розв'язок, який задовольняє граничні умови $\varphi(-a) = \varphi(a) = 0$, має вигляд

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{32b^2}{\pi^3} \left(1 - \frac{ch \frac{\pi x}{2b}}{ch \frac{\pi a}{2b}} \right) + d_3 \cos \frac{\pi x}{2a}, \\ d_3 &= - \left[b \left(\frac{\pi}{2b} \right)^2 + b \left(\frac{\pi}{2a} \right)^2 \right]^{-1} \times \\ &\times \left[\left(\frac{\pi}{2a} \right)^2 B_0 - \frac{\pi}{2b} B_1 - u_{0,0} \left[\left(\frac{\pi}{2a} \right)^2 + \left(\frac{\pi}{2b} \right)^2 \right] b \right] = \\ &= - \left[b \left(\frac{\pi}{2b} \right)^2 + b \left(\frac{\pi}{2a} \right)^2 \right]^{-1} \left[\left(\frac{\pi}{2a} \right)^2 B_0 - \frac{\pi}{2b} B_1 \right] + u_{0,0}. \\ B_0 &= \int_{-b}^b \psi(y) \cos \frac{\pi y}{2b} dy, \quad B_1 = \int_{-b}^b \psi'(y) \sin \frac{\pi y}{2b} dy. \end{aligned}$$

З означення сталих A_0, A_1, B_0, B_1 та функцій φ, ψ отримаємо

$$\begin{aligned} A_0 &= \int_{-a}^a \varphi(x) \cos \frac{\pi x}{2a} dx \Rightarrow \\ \Rightarrow A_0 &= \frac{32b^2}{\pi^3} \left(\frac{4a}{\pi} - ch^{-1} \frac{\pi a}{2b} \int_{-a}^a ch \frac{\pi x}{2b} \cos \frac{\pi x}{2a} dx \right) + d_3 a, \\ A_1 &= \int_{-a}^a \varphi'(x) \sin \frac{\pi x}{2a} dx \Rightarrow \\ \Rightarrow A_1 &= -\frac{32b^2}{\pi^3} \left(\frac{\pi}{2b} \right) ch^{-1} \frac{\pi a}{2b} \int_{-a}^a sh \frac{\pi x}{2b} \sin \frac{\pi x}{2a} dx - d_3 \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Аналогічно для B_0, B_1 можемо записати

$$B_0 = \int_{-b}^b \psi(y) \cos \frac{\pi y}{2b} dy \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B_0 = \frac{32a^2}{\pi^3} \left(\frac{4b}{\pi} - ch^{-1} \frac{\pi b}{2a} \int_{-b}^b ch \frac{\pi y}{2a} \cos \frac{\pi y}{2b} dy \right) + c_3 b,$$

$$B_1 = \int_{-b}^b \psi'(y) \sin \frac{\pi y}{2b} dy \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B_1 = -\frac{32a^2}{\pi^3} \left(\frac{\pi}{2a} \right) ch^{-1} \frac{\pi b}{2a} \int_{-b}^b sh \frac{\pi y}{2a} \sin \frac{\pi y}{2b} dy - c_3 \frac{\pi}{2}.$$

Запишемо останнє рівняння

$$\int_{-a}^a \int_{-b}^b e(x, y) \cos \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{\pi y}{2b} dx dy = 0 \Rightarrow \quad (4.1.16)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow & -\left(\frac{\pi}{2b}\right)^2 b A_0 + b \frac{\pi}{2a} A_1 - \left(\frac{\pi}{2a}\right)^2 a B_0 + a \frac{\pi}{2b} B_1 + \\ & + u_{0,0} \left[\left(\frac{\pi}{2a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{2b}\right)^2 \right] ab + \frac{32ab}{\pi^2} = 0. \end{aligned}$$

Врахуємо, що $\int_{-b}^b ch \left(\frac{\pi y}{2a} \right) \cos \left(\frac{\pi y}{2b} \right) dy = \frac{4ba^2}{\pi(a^2+b^2)} ch \left(\frac{\pi b}{2a} \right)$,

$$\int_{-b}^b sh \left(\frac{\pi y}{2a} \right) \sin \left(\frac{\pi y}{2b} \right) dy = \frac{4ab^2}{\pi(a^2+b^2)} ch \left(\frac{\pi b}{2a} \right),$$

$$\int_{-a}^a ch \left(\frac{\pi x}{2b} \right) \cos \left(\frac{\pi x}{2a} \right) dx = \frac{4ab^2}{\pi(a^2+b^2)} ch \left(\frac{\pi a}{2b} \right),$$

$$\int_{-a}^a sh \left(\frac{\pi x}{2b} \right) \sin \left(\frac{\pi x}{2a} \right) dx = \frac{4a^2 b}{\pi(a^2+b^2)} ch \left(\frac{\pi b}{2a} \right).$$

Це дає змогу записати систему рівнянь відносно п'яти невідомих чисел $A_0, A_1, B_0, B_1, u_{0,0}$ у такому вигляді:

$$\begin{aligned} A_0 = & \frac{32a^2}{\pi^3} \left(\frac{4a}{\pi} - \frac{4ab^2}{\pi(a^2+b^2)} \right) + \\ & + \left(- \left[b \left(\frac{\pi}{2b} \right)^2 + b \left(\frac{\pi}{2a} \right)^2 \right]^{-1} \left[\left(\frac{\pi}{2a} \right)^2 B_0 - \frac{\pi}{2b} B_1 \right] + u_{0,0} \right) a, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_1 &= -\frac{32b^2}{\pi^3} \left(\frac{\pi}{2b} \right) \frac{4a^2b}{\pi(a^2 + b^2)} \\
&- \left(- \left[b \left(\frac{\pi}{2b} \right)^2 + b \left(\frac{\pi}{2a} \right)^2 \right]^{-1} \left[\left(\frac{\pi}{2a} \right)^2 B_0 - \frac{\pi}{2b} B_1 \right] + u_{0,0} \right) \frac{\pi}{2}, \\
B_0 &= \frac{32a^2}{\pi^3} \left(\frac{4b}{\pi} - \frac{4ba^2}{\pi(a^2 + b^2)} \right) + \\
&+ \left(- \left[a \left(\frac{\pi}{2b} \right)^2 + a \left(\frac{\pi}{2a} \right)^2 \right]^{-1} \left[\left(\frac{\pi}{2b} \right)^2 A_0 - \frac{\pi}{2a} A_1 \right] + u_{0,0} \right) b, \\
B_1 &= -\frac{32a^2}{\pi^3} \left(\frac{\pi}{2a} \right) \frac{4ab^2}{\pi(a^2 + b^2)} - \\
&- \left(- \left[a \left(\frac{\pi}{2b} \right)^2 + a \left(\frac{\pi}{2a} \right)^2 \right]^{-1} \left[\left(\frac{\pi}{2b} \right)^2 A_0 - \frac{\pi}{2a} A_1 \right] + u_{0,0} \right) \frac{\pi}{2}; \\
&- \left(\frac{\pi}{2b} \right)^2 b A_0 - b \frac{\pi}{2a} A_1 - \left(\frac{\pi}{2a} \right)^2 a B_0 - a \frac{\pi}{2b} B_1 + \\
&+ u_{0,0} \left[\left(\frac{\pi}{2a} \right)^2 + \left(\frac{\pi}{2b} \right)^2 \right] ab + \frac{32ab}{\pi^2} = 0.
\end{aligned}$$

Розв'язавши цю систему п'яти алгебричних рівнянь відносно п'яти невідомих чисел $A_0, A_1, B_0, B_1, u_{0,0}$, отримаємо

$$A_0 = 0, A_1 = 0, B_0 = 0, B_1 = 0, u_{0,0} = -\frac{128 a^2 b^2}{\pi^4 (a^2 + b^2)}.$$

Підставивши їх у формули для $\varphi(x), \psi(y)$ та для $\bar{u}(x, y)$, отримаємо наближений розв'язок задачі методом ЛПДР у вигляді ($c_3 = d_3 =$

$$\begin{aligned}
u_{00} \Rightarrow \varphi(x) &= \frac{32b^2}{\pi^3} \left(1 - \frac{ch \frac{\pi x}{2b}}{ch \frac{\pi a}{2b}} \right) + u_{00} \cos \frac{\pi x}{2a}; \quad \psi(y) = \frac{32a^2}{\pi^3} \left(1 - \frac{ch \frac{\pi y}{2a}}{ch \frac{\pi b}{2a}} \right) + \\
&u_{00} \cos \frac{\pi y}{2b} \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\bar{u}(x, y) = \cos \frac{\pi x}{2a} \left[\frac{32a^2}{\pi^3} \left(1 - \frac{ch \frac{\pi y}{2a}}{ch \frac{\pi b}{2a}} \right) \right] +$$

$$+ \left[\frac{32b^2}{\pi^3} \left(1 - \frac{ch \frac{\pi x}{2b}}{ch \frac{\pi a}{2b}} \right) \right] \cos \frac{\pi y}{2b} + u_{0,0} \cos \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{\pi y}{2b}.$$

Звернемо увагу на те, що $\varphi(0) = \frac{32b^2}{\pi^3} \left(1 - \frac{1}{ch \frac{\pi a}{2b}} \right) + d_3$, $\psi(0) = \frac{32a^2}{\pi^3} \left(1 - \frac{1}{ch \frac{\pi b}{2a}} \right) + c_3$, $\overline{u}^*(0,0) = \varphi(0) + \psi(0) - u_{0,0}$. Тому значення наближеного розв'язку в точці $(0,0)$ можна обчислити для різних значень параметрів a, b . Нижче для деяких значень a, b наведено значення цієї величини $u^* = \overline{u}(0,0)$, а також величин $\tau^* = \frac{\partial \overline{u}}{\partial x}(-a, 0)$, $C^* = 2 \int_{-a}^a \int_{-b}^b \overline{u}(x,y) dx dy$, для яких відомі точні значення. Ці точні значення $u(0,0)$, τ, C теж наведені для порівняння.

a/b	$u(0,0)$	u^*	C^*	C	τ	τ^*
1,0	0,147343	0,1461	0,1403	0,140557	0,675314	0,715
1,2	0,173481	0,1720	0,1989	0,199343	0,758764	0,801
1,4	0,193494	0,1919	0,2611	0,261666	0,822151	0,867
1,5	0,201543	0,1999	0,2930	0,293641	0,847562	0,893
1,6	0,208483	0,2068	0,3252	0,325977	0,869444	0,916
1,8	0,219580	0,2178	0,3905	0,391376	0,904383	0,952
2,0	0,227744	0,2259	0,4563	0,457363	0,930060	0,978
2,3	0,236091	0,2341	0,5555	0,556888	0,956297	1,005
2,5	0,239837	0,2378	0,6219	0,623413	0,968070	1,017
3,0	0,245365	0,2433	0,7880	0,789951	0,985438	1,036
3,5	0,247886	0,2458	0,9542	0,956591	0,993360	1,044
4,0	0,249036	0,2469	1,1204	1,123252	0,996973	1,048
4,5	0,249561	0,2474	1,2867	1,289917	0,998620	1,050
5,0	0,2498	0,2477	1,4529	1,456583	0,999371	1,051
5,5	0,249909	0,2478	1,6191	1,623250	0,999713	1,051
6,0	0,249958	0,2478	1,7853	1,789917	0,999869	1,051
7,0	0,249991	0,2478	2,1177	2,123250	0,999973	1,051
8,0	0,249998	0,2478	2,4502	2,456584	0,999994	1,052
10,0	0,25	0,2478	3,1150	3,123250	1,0	1,052

Результати цієї таблиці показують, що використання всього двох невідомих функцій у структурі наближеного розв'язку дає значення наближеного розв'язку, його інтегральну та диференціальну характеристики з максимальною похибкою 0,02: 0,008 та 0,05 відповідно.

4.1.2. G – складена область

Хай область G є складеною областю, межа якої ∂G складається з дуг відомих ліній. Вважатимемо, що в цій області існує розв'язок диференціального рівняння (4.1.1) при граничних умовах (4.1.17):

$$\frac{\partial^s u(x,y)}{\partial \nu^s} = \gamma_s(x,y), \quad (x,y) \in \partial G, s = \overline{0, m-1}, \nu \perp \partial G. \quad (4.1.17)$$

Наближений розв'язок поставленої задачі (4.1.1), (4.1.17) шукаємо у вигляді сплайн-інтерлінанта, алгоритм побудови якого викладено нижче по кроках.

Крок 1. Розіб'ємо область $G \subset [a, b] \times [c, d]$ на елементи прямими $x = x_k, k = \overline{0, N_1 + 1}, a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N_1 + 1} = b; y = y_l, l = \overline{0, N_2 + 1}, c = y_0 < y_1 < \dots < y_{N_2 + 1} = d$. У результаті такого розбиття отримуємо:

– прямокутні елементи $\Pi_{kl} = [x_{k-1}, x_k] \times [y_{l-1}, y_l] \subset G$ всередині області G ;

– криволінійні чотирикутні елементи $\Pi_{kl}^\rho, \rho = \overline{1, 4}$ з трьома прямими сторонами і четвертою криволінійною, взагалі кажучи, яка є частиною межі ∂G ;

– трикутні елементи $T_{kl}^\rho, \rho = \overline{1, 4}$ з двома прямими сторонами, що перетинаються під прямим кутом, і третьою криволінійною, взагалі кажучи, яка є частиною межі ∂G .

Вважаємо, що при $\rho = 1$ криволінійна сторона вказаних криволінійних чотирикутників лежить справа від Π_{kl}^1 , а в криволінійних трикутниках – справа над T_{kl}^1 ; при $\rho = 2$ криволінійна сторона чотирикутників лежить вище від Π_{kl}^2 , а в трикутниках – зліва над T_{kl}^2 ; при $\rho = 3$ криволінійна сторона чотирикутників лежить зліва від Π_{kl}^3 , а в трикутниках – зліва під T_{kl}^3 ; при $\rho = 4$ криволінійна сторона чотирикутників лежить нижче від Π_{kl}^4 , а в трикутниках – справа під T_{kl}^4 .

Крок 2. Наближений розв'язок задачі (4.1.1) – (4.1.14) шукатимемо у вигляді інтерлінанта

$$\tilde{u}_m(x, y) = \begin{cases} u^{kl}(x, y), & (x, y) \in \Pi_{kl}, \\ F^{kl\rho}(x, y), & (x, y) \in \Pi_{kl}^\rho, \\ G^{kl\rho}(x, y), & (x, y) \in T_{kl}^\rho, \end{cases} \quad (4.1.18)$$

в якому функції $u^{kl}(x, y), F^{kl\rho}(x, y), G^{kl\rho}(x, y)$ будуються за допомогою формул інтерлінації так, щоб функція \tilde{u}_m задовольняла граничні умови (4.1.14) і умови

$$\tilde{u}_m \in C^{m-1, m-1}(G),$$

$$\left. \frac{\partial^p \tilde{u}_m}{\partial x^p} \right|_{x=x_k} = \psi_{k,p}(y); \quad \left. \frac{\partial^q \tilde{u}_m}{\partial y^q} \right|_{y=y_l} = \varphi_{l,q}(x),$$

$$\left. \frac{\partial^{p+q} \tilde{u}_m}{\partial x^p \partial y^q} \right|_{x=x_k, y=y_l} = u_{k,l,p,q}, \quad p, q = \overline{0, m-1}, (x_k, y_l) \in G.$$

Остання система умов аналогічна системі обмежень (4.1.9), описаній вище.

Зауважимо, що, незалежно від вибору цих невідомих функцій $\varphi_{l,q}(x), \psi_{k,p}(y)$ та сталих $u_{k,l,p,q}$, функція $\tilde{u}_m(x, y)$ задовольняє точно граничні умови (4.1.17).

Крок 3. Для знаходження невідомих функцій $\varphi_{k,i}(y), \psi_{l,j}(x)$ та сталих $u_{k,l,i,j}$ напишемо системи звичайних лінійних інтегродиференціальних рівнянь, що отримуються з умов прирівнювання до нуля варіацій по невідомих функціях функціоналу енергії $J_m(u)$, відповідно задачі (4.1.1) – (4.1.17) :

$$\delta_{\varphi_{l^*,q^*}} J_m(\tilde{u}_m) = 0, \quad l^* = 1, 2, \dots, N_2, \quad q^* = \overline{0, m-1},$$

$$\delta_{\psi_{k^*,p^*}} J_m(\tilde{u}_m) = 0, \quad k^* = 1, 2, \dots, N_1, \quad p^* = \overline{0, m-1}.$$

Ці системи треба розв'язувати сумісно із системою рівнянь Рітца

$$\frac{\partial J_m(\tilde{u}_m)}{\partial u_{k^*,l^*,p^*,q^*}} = 0,$$

$$k^* \in \{1, 2, \dots, N_1\}, \quad l^* \in \{1, 2, \dots, N_2\}, \quad p^*, q^* \in \{0, 1, \dots, m-1\}.$$

Підставивши розв'язки цих систем в інтерліаннти $u^{kl}(x, y), F^{kl\rho}(x, y), G^{kl\rho}(x, y)$, отримаємо шуканий наближений розв'язок \tilde{u}_m .

Нижче ці алгоритми детальніше розглянуто на конкретних прикладах.

4.2. Застосування інтерліанації на лініях тріангуляції до розв'язання задачі Діріхле для рівняння Пуассона

4.2.1. Структура наближеного розв'язку задачі

У попередньому підрозділі розглянуто метод побудови розв'язку граничної задачі Діріхле для рівняння Пуассона на основі формул інтерліанації на системі перпендикулярних прямих, паралельних осям координат. Для поширення сфери дії методу ЛІДР на випадок областей складнішої форми (обмежених кусково-гладким контуром) треба при побудові структур наближених розв'язків використовувати інтерліанацію на трикутниках (у тому числі на трикутниках та чотирикутниках з криволінійною стороною).

Маємо задачу

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} \right) + c(x, y)u = f(x, y), \quad (x, y) \in G, \quad (4.2.1)$$

$$u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \partial G \quad (4.2.2)$$

для випадку, коли G – довільний багатокутник.

Хай спочатку G – прямокутник: $|x| < a, |y| < b$. Потім розглянемо ряд прикладів для складніших областей. Зараз розіб'ємо G на трикутники типів 1а, 2а, 1б, 2б (див. нижче) прямими

$$x = i\Delta_1, \quad i = 0, \pm 1, \dots, \pm M; \quad y = j\Delta_2, \quad j = 0, \pm 1, \dots, \pm N, \quad (4.2.3)$$

$$\frac{x}{\Delta_1} + \frac{y}{\Delta_2} = k, \quad (\Delta_1 = \frac{a}{M}, \Delta_2 = \frac{b}{N}). \quad (4.2.4)$$

Тут $k = i + j + 1 = -M + 1, \dots, N - 1$ у трикутниках типу 1а і $k = i + j - 1 = -N + 1, \dots, M - 1$ у трикутниках типу 2а.

Крім того, розіб'ємо G прямими

$$\frac{x}{\Delta_1} - \frac{y}{\Delta_2} = k, \quad (4.2.4a)$$

де $k = i - j - 1 = -M + 1, \dots, N - 1$ у трикутниках типу 1б і $k = i - j + 1 = -N + 1, \dots, M - 1$ у трикутниках типу 2б.

Уведемо позначення

$$u(i\Delta_1, y) = \psi_i(y), \quad u(x, j\Delta_2) = \varphi_j(x), \quad (4.2.5)$$

$$i = 0, \pm 1, \dots, \pm M, \quad j = 0, \pm 1, \dots, \pm N,$$

$$u(x, \Delta_2(k - \frac{x}{\Delta_1})) = \eta_k(x), \quad k = \overline{-M + 1, N - 1}; \quad (4.2.6)$$

$$u(x, \Delta_2(\frac{x}{\Delta_1} + k)) = \bar{\eta}_k(x), \quad k = \overline{-N + 1, M - 1}. \quad (4.2.6a)$$

У випадку розбиття (4.2.3)–(4.2.4) маємо два типи трикутників:

$$1a: \quad x \geq x_i, \quad y \geq y_j, \quad \frac{x}{\Delta_1} + \frac{y}{\Delta_2} \leq i + j + 1;$$

$$2a: \quad x \leq x_i, \quad y \leq y_j, \quad \frac{x}{\Delta_1} + \frac{y}{\Delta_2} \geq i + j - 1.$$

У випадку розбиття (4.2.3)–(4.2.4a) маємо інші два типи трикутників:

$$1b: \quad x \leq x_i, \quad y \geq y_j, \quad \frac{x}{\Delta_1} - \frac{y}{\Delta_2} \leq i - j - 1;$$

$$2b: \quad x \geq x_i, \quad y \leq y_j, \quad \frac{x}{\Delta_1} - \frac{y}{\Delta_2} \geq i - j + 1.$$

Хай $h(t)$ – дана функція, що задовольняє умови $h(0) = 0, h(1) = 1; h(a) + h(b) = 1$, якщо $a + b = 1; h(-t) = -h(t)$. Наприклад, $h(t) = t$, або

$$h(t) = g_m(t)/g_m(1), \quad g_m(t) = \int_0^t u^m (1-u)^m du, \quad m = 1, 2, \dots$$

Наближений розв'язок задачі (4.2.1)–(4.2.2) шукаємо у вигляді

$$\begin{aligned}
 u_{\pi}(x, y) = & h \left(1 - \frac{x - x_i}{\Delta_1} - \frac{y - y_j}{\Delta_2} \right) [\varphi_j(x) + \psi_i(y) - \quad (4.2.7) \\
 & - \varphi_j(x_i)] + h \left(\frac{x - x_i}{\Delta_1} \right) \left[\varphi_j \left(x_i + \Delta_1 \left(\frac{x - x_i}{\Delta_1} + \frac{y - y_j}{\Delta_2} \right) \right) + \right. \\
 & \left. + \eta_{i+j+1} \left(x_i + \Delta_1 \left(1 - \frac{y - y_j}{\Delta_2} \right) \right) - \varphi_j(x_{i+1}) \right] + \\
 & + h \left(\frac{y - y_j}{\Delta_2} \right) \left[\psi_i \left(y_j + \Delta_2 \left(\frac{x - x_i}{\Delta_1} + \frac{y - y_j}{\Delta_2} \right) \right) + \eta_{i+j+1}(x) - \psi_i(y_{j+1}) \right], \\
 & \varphi_j(x_i) = \psi_i(y_j), \eta_{i+j+1}(x_i) = \psi_i(y_{j+1}), \eta_{i+j+1}(x_{i+1}) = \varphi_j(x_{i+1}),
 \end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned}
 \bar{u}_{\pi}(x, y) = & h \left(1 - \frac{x - x_i}{\Delta_1} - \frac{y - y_j}{\Delta_2} \right) [\varphi_j(x) + \psi_i(y) - \varphi_j(x_i)] + \quad (4.2.8) \\
 & + h \left(\frac{x - x_i}{\Delta_1} \right) \left[\varphi_j(x) + \eta_{i+j+1} \left(x_i + \Delta_1 \left(1 - \frac{y - y_j}{\Delta_2} \right) \right) - \right. \\
 & \left. - \varphi_j \left(x_i + \Delta_1 \left(1 - \frac{y - y_j}{\Delta_2} \right) \right) \right] + \\
 & + h \left(\frac{y - y_j}{\Delta_2} \right) \left[\psi_i(y) + \eta_{i+j+1}(x) - \psi_i \left(y_j + \Delta_2 \left(1 - \frac{x - x_i}{\Delta_1} \right) \right) \right],
 \end{aligned}$$

у трикутниках 1a та у вигляді

$$\begin{aligned}
 u_{\pi}(x, y) = & h \left(1 + \frac{x - x_i}{\Delta_1} + \frac{y - y_j}{\Delta_2} \right) [\varphi_j(x) + \psi_i(y) - \varphi_j(x_i)] - \quad (4.2.9) \\
 & - h \left(\frac{x - x_i}{\Delta_1} \right) \left[\varphi_j \left(x_i + \Delta_1 \left(-\frac{x_i - x}{\Delta_1} - \frac{y_j - y}{\Delta_2} \right) \right) + \right. \\
 & \left. + \eta_{i+j-1} \left(x_i - \Delta_1 \left(1 + \frac{y - y_j}{\Delta_2} \right) \right) - \varphi_j(x_{i-1}) \right] - \\
 & - h \left(\frac{y - y_j}{\Delta_2} \right) \left[\psi_i \left(y_j + \Delta_2 \left(-\frac{x_i - x}{\Delta_1} - \frac{y_j - y}{\Delta_2} \right) \right) + \eta_{i+j-1}(x) - \psi_i(y_{j-1}) \right], \\
 & \varphi_j(x_i) = \psi_i(y_j), \eta_{i+j-1}(x_i) = \psi_i(y_{j-1}), \eta_{i+j-1}(x_{i-1}) = \varphi_j(x_{i-1}),
 \end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned} \bar{u}_\pi(x, y) = & h \left(1 + \frac{x - x_i}{\Delta_1} + \frac{y - y_j}{\Delta_2} \right) [\varphi_j(x) + \psi_i(y) - \varphi_j(x_i)] - (4.2.10) \\ & - h \left(\frac{x - x_i}{\Delta_1} \right) \left[\varphi_j(x) + \eta_{i+j-1} \left(x_i - \Delta_1 \left(1 + \frac{y - y_j}{\Delta_2} \right) \right) - \right. \\ & \left. - \varphi_j \left(x_i - \Delta_1 \left(1 + \frac{y - y_j}{\Delta_2} \right) \right) \right] - \\ & - h \left(\frac{y - y_j}{\Delta_2} \right) \left[\psi_i(y) + \eta_{i+j-1}(x) - \psi_i \left(y_j - \Delta_2 \left(1 + \frac{x - x_i}{\Delta_1} \right) \right) \right] \end{aligned}$$

у трикутниках 2а.

При розбитті (4.2.3), (4.2.4а) наближений розв'язок задачі (4.2.1)–(4.2.2) шукаємо у вигляді

$$\begin{aligned} u_\pi(x, y) = & h \left(1 + \frac{x - x_i}{\Delta_1} - \frac{y - y_j}{\Delta_2} \right) [\varphi_j(x) + \psi_i(y) - \varphi_j(x_i)] - (4.2.7а) \\ & - h \left(\frac{x - x_i}{\Delta_1} \right) \left[\varphi_j \left(x_i - \Delta_1 \left(\frac{x - x_i}{\Delta_1} - \frac{y - y_j}{\Delta_2} \right) \right) + \right. \\ & \left. + \bar{\eta}_{i-j-1} \left(x_i - \Delta_1 \left(1 - \frac{y - y_j}{\Delta_2} \right) \right) - \varphi_j(x_{i-1}) \right] + h \left(\frac{y - y_j}{\Delta_2} \right) \times \\ & \times \left[\psi_i \left(y_j + \Delta_2 \left(\frac{x_i - x}{\Delta_1} + \frac{y - y_j}{\Delta_2} \right) \right) + \bar{\eta}_{i-j-1}(x) - \psi_i(y_{j+1}) \right], \end{aligned}$$

$$\varphi_j(x_i) = \psi_i(y_j), \bar{\eta}_{i-j-1}(x_i) = \psi_i(y_{j+1}), \bar{\eta}_{i-j-1}(x_{i-1}) = \varphi_j(x_{i-1}),$$

або

$$\begin{aligned} \bar{u}_\pi(x, y) = & h \left(1 + \frac{x - x_i}{\Delta_1} - \frac{y - y_j}{\Delta_2} \right) [\varphi_j(x) + \psi_i(y) - \varphi_j(x_i)] - (4.2.8а) \\ & - h \left(\frac{x - x_i}{\Delta_1} \right) \left[\varphi_j(x) + \bar{\eta}_{i-j-1} \left(x_i - \Delta_1 \left(1 - \frac{y - y_j}{\Delta_2} \right) \right) - \right. \\ & \left. - \varphi_j \left(x_i - \Delta_1 \left(1 - \frac{y - y_j}{\Delta_2} \right) \right) \right] + \\ & + h \left(\frac{y - y_j}{\Delta_2} \right) \left[\psi_i(y) + \bar{\eta}_{i-j-1}(x) - \psi_i \left(y_j + \Delta_2 \left(1 - \frac{x - x_i}{\Delta_1} \right) \right) \right], \end{aligned}$$

у трикутниках 1б та у вигляді

$$u_\pi(x, y) = h \left(1 - \frac{x - x_i}{\Delta_1} + \frac{y - y_j}{\Delta_2} \right) [\varphi_j(x) + \psi_i(y) - \varphi_j(x_i)] + (4.2.9а)$$

$$\begin{aligned}
& + h \left(\frac{x - x_i}{\Delta_1} \right) \left[\varphi_j \left(x + i + \Delta_1 \left(\frac{x - x_i}{\Delta_1} - \frac{y - y_j}{\Delta_2} \right) \right) + \right. \\
& + \bar{\eta}_{i-j+1} \left(x_i + \Delta_1 \left(1 + \frac{y - y_j}{\Delta_2} \right) \right) - \varphi_j(x_{i+1}) \left. \right] - h \left(\frac{y - y_j}{\Delta_2} \right) \times \\
& \times \left[\psi_i \left(y_j - \Delta_2 \left(-\frac{x - x_i}{\Delta_1} + \frac{y - y_j}{\Delta_2} \right) \right) + \bar{\eta}_{i-j+1}(x) - \psi_i(y_{j-1}) \right], \\
& \varphi_j(x_i) = \psi_i(y_j), \bar{\eta}_{i-j+1}(x_i) = \psi_i(y_{j-1}), \bar{\eta}_{i-j+1}(x_{i-1}) = \varphi_j(x_{i+1}),
\end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned}
\bar{u}_\pi(x, y) &= h \left(1 - \frac{x - x_i}{\Delta_1} + \frac{y - y_j}{\Delta_2} \right) [\varphi_j(x) + \psi_i(y) - \varphi_j(x_i)] + \\
& + h \left(\frac{x - x_i}{\Delta_1} \right) \left[\varphi_j(x) + \bar{\eta}_{i-j+1} \left(x_i + \Delta_1 \left(1 + \frac{y - y_j}{\Delta_2} \right) \right) - \right. \\
& - \varphi_j \left(x_i + \Delta_1 \left(1 + \frac{y - y_j}{\Delta_2} \right) \right) \left. \right] + (4.2.10a) \\
& - h \left(\frac{y - y_j}{\Delta_2} \right) \left[\psi_i(y) + \bar{\eta}_{i-j+1}(x) - \psi_i \left(y_j - \Delta_2 \left(1 - \frac{x - x_i}{\Delta_1} \right) \right) \right]
\end{aligned}$$

у трикутниках 2б.

Далі, якщо це однозначно не впливатиме з контексту, будемо наголошувати, яка з формул (4.3.7), (4.2.9), (4.2.7а), (4.2.9а) чи (4.2.8), (4.2.10), (4.2.8а), (4.2.10а) використовується. Звертаємо увагу на те, що функції $\varphi_i(x)$, $\psi_j(x)$, $\eta_k(x)$, $\bar{\eta}_k(x)$ при розбитті (4.2.3) – (4.2.4) задовольняють умови

$$\varphi_j(x_i) = \psi_i(y_j) = \eta_{i+j-1}(x_i) = u_{ij},$$

а при розбитті (4.2.3) – (4.2.4а) – умови

$$\varphi_j(x_i) = \psi_i(y_j) = \bar{\eta}_{j-i}(x_i) = u_{ij}. \quad (4.2.11)$$

Виконання цих умов необхідне для того, щоб таким чином побудовані функції $u_\pi(x, y)$ та $\bar{u}_\pi(x, y)$ в усій області G належали до класу $C(G) \cap W_2^{(1)}(G)$ і мали такі інтерлінаційні властивості:

$$\begin{aligned}
u_\pi(x_i, y) &= \bar{u}_\pi(x_i, y) = \psi_i(y), & i &= 0, \pm 1, \dots, \pm M, \\
u_\pi(x, y_j) &= \bar{u}_\pi(x, y_j) = \varphi_j(x), & j &= 0, \pm 1, \dots, \pm N,
\end{aligned} \quad (4.2.12)$$

$$u_\pi(x, \Delta_2 \left(-\frac{x}{\Delta_1} + k \right)) = \eta_k(x), \quad k = \overline{-M+1, N-1},$$

$$u_\pi(x, \Delta_2(\frac{x}{\Delta_1} + k)) = \bar{\eta}_k(x), \quad k = \overline{-N+1, M-1}.$$

Тому, взявши $\varphi_{\pm M}(y) = \psi_{\pm N}(x) = 0, u_{ij} = 0, \forall (x_i, y_j) \in \partial G$, отримаємо, що функція $u_\pi(x, y)$ задовольнятиме граничну умову (4.2.2) незалежно від вибору інших функцій $\varphi_j(x), \psi_i(y), \eta_k(x), \bar{\eta}_k(x)$ та сталих u_{ij} . Підставивши $u_\pi(x, y)$ у функціонал $J(u)$, що відповідає граничній задачі (4.2.1)–(4.2.2) можемо записати

$$J(u_\pi) = \frac{1}{2} \sum_{T_\mu \subset G} \iint_{T_\mu} \left[a \left(\frac{\partial u_\pi}{\partial x} \right)^2 + b \left(\frac{\partial u_\pi}{\partial y} \right)^2 + cu_\pi^2 - 2fu_\pi \right] dx dy,$$

де сума поширюється на всі трикутники $T_\mu \subset G$.

Згідно з методом Рітца, оптимальна функція u_π повинна надавати мінімуму функціоналу $J(u_\pi)$ порівняно з усіма функціями, що задовольняють граничну умову задачі і зображуються у вигляді формули для u_π , відповідної даній області інтегрування і даному розбиттю цієї області на елементарні підобласті. Це означає, що оптимально повинні знаходитись всі компоненти (невідомі сталі та невідомі функції однієї змінної) за допомогою яких будується функція u_π .

Аналогічне твердження справедливе і для $J(\bar{u}_\pi)$, а також коли G – довільний багатокутник, триангульований за допомогою трикутників вигляду 1а, 1б, 2а, 2б. У цьому випадку треба взяти $\varphi_i(y) = 0 \forall (x_i, y) \in \partial G, \psi_j(x) = 0 \forall (x, y_j) \in \partial G, \eta_k(x) = 0 \forall (x, y) \in \{x/\Delta_1 + y/\Delta_2 = k\} \cap \partial G \neq \emptyset, u_{i,j} = 0 \forall (x_i, y_j) \in \partial G$.

Якщо розв'язок задачі (4.2.1)–(4.2.2) має симетрію, можна розглядати лише четверть області G , яка лежить у I квадранті. Наша мета – відшукати $\varphi_j(x), \psi_i(y), \eta_k(x)$ та константи u_{ij} за умови досягнення мінімуму функціоналу $J(u_\pi)$:

$$J(u_\pi) \rightarrow \inf_{u_{ij}, \varphi_j(x), \psi_i(y)}.$$

Для цього напишемо рівняння Ейлера, розв'язками яких є невідомі функції. Методика одержання рівнянь така. Функціонал $J(u_\pi)$, що є означеним інтегралом по даній області G (наприклад, по трикутнику 1а), можна зобразити у вигляді (тут вважаємо, що функціонал $J_1(u_\pi)$ не залежить від $\varphi_j(x)$), $x_i \leq x \leq x_{i+1}$

$$J(u_\pi) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} F_{ij}(x, \varphi_j(x), \varphi_j'(x), \dots) dx + J_1(u_\pi).$$

Потім для функції $\varphi_j(x)$ треба записати рівняння Ейлера

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F_{ij}}{\partial \varphi_j'(x)} \right) - \frac{\partial F_{ij}}{\partial \varphi_j(x)} = 0, \quad x \in (x_i, x_{i+1}),$$

$$\varphi_j(x_i) = u_{ij}, \quad \varphi_j(x_{i+1}) = u_{i+1,j}.$$

Взагалі, функція $F_{ij}(x, \varphi_j(x), \varphi_j'(x), \dots)$ є сумою аналогічних функцій, отриманих для кожного з трикутників, що мають спільну сторону $(x_i, y_j) - (x_{i+1}, y_j)$.

Таким же чином одержуємо рівняння для $\psi_i(y)$ та $\eta_k(x)$, $k = i + j - 1$, $\bar{\eta}_k(x)$, $k = j - i$, які мінімізують $J(u_\pi)$ по конкретних областях (трикутниках $T_{ij}^{(\nu)}$; $\nu = 1a, 2a, 1b, 2b$), при підстановці в $J(u_\pi)$ формул відповідно (4.2.7), (4.2.9), (4.2.7a), (4.2.9a) або (4.2.8), (4.2.10), (4.2.8a), (4.2.10a).

Якщо область G має криволінійну межу і трикутник 1a (або 1b, 2a, 2b) має криволінійну гіпотенузу, що є частиною межі ∂G області G , то формули (4.2.7), (4.2.9), (4.2.7a), (4.2.9a) або (4.2.8), (4.2.10), (4.2.8a), (4.3.10a) треба замінити відповідними формулами інтерлінації на трикутнику з криволінійною гіпотенузою. Аналогічне зауваження справедливе для випадку, коли при розбитті області на елементи отримуємо чотирикутник, в якого три сторони, паралельні осям координат, – прямі, а одна – криволінійна. В цьому випадку формули інтерлінації на прямокутному елементі не міняються. В цих формулах відповідний вузол треба вважати не сталою, а функцією. Тобто у випадку областей складеної форми можна використовувати як прямокутні, так і трикутні елементи (у тому числі з криволінійними сторонами). Це дозволяє точно задовольнити граничні умови на границі довільної області, обмеженої дугами відомих кривих.

Нижче для $h(t) \equiv t$ наведено конкретні рівняння Ейлера, необхідні для розв'язання конкретних прикладів.

4.2.2. Рівняння Ейлера. Випадок $a = 1, b = 1, c = 0, f = 2$

П р и к л а д 1. Припустимо, що в трикутнику T вигляду 1a, $x_i = 0, y_j = 0, \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta$, функція $u_\pi(x, y)$ задовольняє властивості $u_\pi(x, 0) = \varphi(x)$, $u_\pi(0, y) = \psi(y)$, $u_\pi(x, \Delta - x) = \eta(x) = 0$. У цьому випадку $u_\pi(x, y)$ можна зобразити у вигляді (якщо $\varphi(0) = \psi(0) = c$, $\varphi(\Delta) = \psi(\Delta) = 0$)

$$\begin{aligned} u_\pi(x, y) = & \left(1 - \frac{y}{\Delta}\right) \varphi(x) - \frac{x}{\Delta} \varphi(\Delta - y) + \left(1 - \frac{x}{\Delta}\right) \psi(y) - \\ & - \frac{y}{\Delta} \psi(\Delta - x) - c \left(1 - \frac{x}{\Delta} - \frac{y}{\Delta}\right). \end{aligned} \quad (4.2.12a)$$

Запишемо $J(u_\pi)$ у вигляді інтеграла по цьому трикутнику:

$$\begin{aligned} J(u_\pi) = & \int_0^\Delta \int_0^{\Delta-x} \left[\left(\left(1 - \frac{y}{\Delta}\right) \varphi'(x) - \frac{\varphi(\Delta - y)}{\Delta} - \frac{\psi(y)}{\Delta} + \frac{y}{\Delta} \psi'(\Delta - x) + \frac{c}{\Delta} \right)^2 + \right. \\ & \left. + \left(-\frac{\varphi(x)}{\Delta} + \frac{x}{\Delta} \varphi'(\Delta - y) + \left(1 - \frac{x}{\Delta}\right) \psi'(y) - \frac{\psi(\Delta - x)}{\Delta} + \frac{c}{\Delta} \right)^2 - 4 \left(\left(1 - \frac{y}{\Delta}\right) \times \right. \right. \end{aligned}$$

$$\times \varphi(x) - \frac{x}{\Delta} \varphi(\Delta - y) + \left(1 - \frac{x}{\Delta}\right) \psi(y) - \frac{y}{\Delta} \psi(\Delta - x) - c \left(1 - \frac{x}{\Delta} - \frac{y}{\Delta}\right) \Big] dx dy.$$

Очевидно, що $J(u_\pi) = \bar{J}(\varphi, \psi)$. Хай $g(x), g(0) = 0, g(\Delta) = 0$ – довільна диференційовна функція. Тоді рівняння Ейлера для функції $\varphi(x)$ отримується прирівнюванням до нуля варіації $\delta_\varphi \bar{J}(\varphi, \psi)$ по функції φ , тобто з рівності

$$\left. \frac{d\bar{J}(\varphi + \epsilon g(x), \psi)}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = 0.$$

В усіх прикладах методика отримання рівняння Ейлера $L_2\varphi(x) - \bar{f}(x) = 0$ для функції однієї змінної $\varphi(x)$ така. Шляхом зміни порядку інтегрування, інтегрування частинами та проведення елементарних перетворень у формулі для варіації від подвійного інтеграла треба перейти до рівняння вигляду ($g(x)$ – довільна функція)

$$\int_0^\Delta [L_2\varphi(x) - \bar{f}(x)]g(x)dx = 0, \quad g(0) = g(\Delta) = 0.$$

Тому запишемо детально послідовність дій тільки для цього прикладу: $\left. \frac{d\bar{J}(\varphi + \epsilon g(x), \psi)}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = 0 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_0^\Delta \int_0^{\Delta-x} & \left[\left(\left(1 - \frac{y}{\Delta}\right) \varphi'(x) - \frac{\varphi(\Delta - y)}{\Delta} - \frac{\psi(y)}{\Delta} + \frac{y}{\Delta} \psi'(\Delta - x) + \frac{c}{\Delta} \right) \times \right. \\ & \times \left(\left(1 - \frac{y}{\Delta}\right) g'(x) - \frac{g(\Delta - y)}{\Delta} \right) + \\ & + \left(-\frac{\varphi(x)}{\Delta} + \frac{x}{\Delta} \varphi'(\Delta - y) + \left(1 - \frac{x}{\Delta}\right) \psi'(y) - \frac{\psi(\Delta - x)}{\Delta} + \frac{c}{\Delta} \right) \times \\ & \times \left(-\frac{g(x)}{\Delta} + \frac{x}{\Delta} g'(\Delta - y) \right) - \\ & \left. - 2 \left(\left(1 - \frac{y}{\Delta}\right) g(x) - \frac{x}{\Delta} g(\Delta - y) \right) \right] dx dy = 0. \end{aligned}$$

В останній рівності перейдемо до повторних інтегралів для кожного доданка:

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\Delta} g'(x) dx \int_0^{\Delta-x} \left(1 - \frac{y}{\Delta}\right) \left[\left(1 - \frac{y}{\Delta}\right) \varphi'(x) - \frac{\varphi(\Delta-y)}{\Delta} - \frac{\psi(y)}{\Delta} + \frac{y}{\Delta} \psi'(\Delta-x) + \right. \\
& \left. + \frac{c}{\Delta} \right] dy - \int_0^{\Delta} \frac{g(\Delta-y) dy}{\Delta} \int_0^{\Delta-y} \left[\left(1 - \frac{y}{\Delta}\right) \varphi'(x) - \frac{\varphi(\Delta-y)}{\Delta} - \frac{\psi(y)}{\Delta} + \right. \\
& \left. + \frac{y}{\Delta} \psi'(\Delta-x) + \frac{c}{\Delta} \right] dx - \int_0^{\Delta} \frac{g(x) dx}{\Delta} \int_0^{\Delta-x} \left[-\frac{\varphi(x)}{\Delta} + \frac{x}{\Delta} \varphi'(\Delta-y) + \right. \\
& \left. + \left(1 - \frac{x}{\Delta}\right) \psi'(y) - \frac{\psi(\Delta-x)}{\Delta} + \frac{c}{\Delta} \right] dy + \\
& + \int_0^{\Delta} g'(\Delta-y) dy \int_0^{\Delta-y} \frac{x}{\Delta} \left[-\frac{\varphi(x)}{\Delta} + \frac{x}{\Delta} \varphi'(\Delta-y) + \left(1 - \frac{x}{\Delta}\right) \psi'(y) - \frac{\psi(\Delta-x)}{\Delta} + \right. \\
& \left. + \frac{c}{\Delta} \right] dx - 2 \left(\int_0^{\Delta} g(x) dx \int_0^{\Delta-x} \left(1 - \frac{y}{\Delta}\right) dy - \int_0^{\Delta} g(\Delta-y) dy \int_0^{\Delta-y} \frac{x}{\Delta} dx \right) = 0.
\end{aligned}$$

У першій та четвертій групі доданків виконаємо інтегрування частинами. При цьому позаінтегральні члени анулюються, бо $g(t)|_0^{\Delta} = 0$. Крім того, зробимо заміну змінної $\Delta - x \rightarrow t$. У результаті отримаємо

$$\begin{aligned}
& - \int_0^{\Delta} g(x) dx \left\{ \left[\int_0^{\Delta-x} \left(1 - \frac{y}{\Delta}\right) \left(\left(1 - \frac{y}{\Delta}\right) \varphi'(x) - \frac{\varphi(\Delta-y)}{\Delta} - \frac{\psi(y)}{\Delta} + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \frac{y}{\Delta} \psi'(\Delta-x) + \frac{c}{\Delta} \right) dy \right]_x' + \right. \\
& \left. + \int_0^{\Delta-y} \left(\left(1 - \frac{y}{\Delta}\right) \varphi'(x) - \frac{\varphi(\Delta-y)}{\Delta} - \frac{\psi(y)}{\Delta} + \frac{y}{\Delta} \psi'(\Delta-x) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{c}{\Delta} \right) \frac{dx}{\Delta} \right|_{\Delta-y \rightarrow t; x \rightarrow y; t \rightarrow x} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^{\Delta-x} \left(-\frac{\varphi(x)}{\Delta} + \frac{x}{\Delta} \varphi'(\Delta-y) + \left(1 - \frac{x}{\Delta}\right) \psi'(y) - \frac{\psi(\Delta-x)}{\Delta} + \frac{c}{\Delta} \right) \frac{dy}{\Delta} + \\
& + \left[\left[\int_0^{\Delta-y} \frac{x}{\Delta} \left(-\frac{\varphi(x)}{\Delta} + \frac{x}{\Delta} \varphi'(\Delta-y) + \left(1 - \frac{x}{\Delta}\right) \psi'(y) - \frac{\psi(\Delta-x)}{\Delta} + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \frac{c}{\Delta} \right) dx \right] \Big|_{\Delta-y \rightarrow t; x \rightarrow y; t \rightarrow x} \right]' - \frac{x^2}{\Delta} + \frac{\Delta}{2} \Big\} = 0.
\end{aligned}$$

Тут використано позначення

$$\int_0^{\Delta-y} F(x, y) dx \Big|_{\Delta-y \rightarrow t; x \rightarrow y; t \rightarrow x} = \int_0^t F(y, \Delta-t) dy \Big|_{t \rightarrow x} = \int_0^x F(y, \Delta-x) dy.$$

Враховуючи довільність функції $g(x)$, множник під знаком інтеграла у фігурних дужках має дорівнювати нулю. В результаті після виконання операції диференціювання за правилом

$$\frac{d}{dx} \int_{a(x)}^{b(x)} F(x, y) dy = b'(x)F(x, b(x)) - a'(x)F(x, a(x)) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} dy$$

та зведення подібних отримаємо

$$\frac{\Delta^2}{3} \varphi''(x) - \varphi(x) - \frac{\Delta^2}{6} \psi''(\Delta-x) - \psi(\Delta-x) - 2x^2 + \Delta^2 + \frac{c}{\Delta} = 0. \quad (4.2.13)$$

Приклад 2. Хай у трикутнику типу 2а ($x_i = \Delta, y_j = 0$) шукана функція має властивості $u_\pi(x, 0) = \varphi(x)$, $u_\pi(\Delta, y) = u_\pi(x, -x) = 0$, $\varphi(0) = \varphi(\Delta) = 0$. З формули (4.2.10) отримаємо

$$u_\pi = \left(1 + \frac{y}{\Delta}\right) \varphi(x) + \left(\frac{x}{\Delta} - 1\right) \varphi(-y), \quad (4.2.13a)$$

і для $\varphi(x)$, що мінімізує відповідний функціонал, маємо рівняння Ейлера

$$\frac{\Delta^2}{3} \varphi''(x) - \varphi(x) - 2(x - \Delta)^2 + \Delta^2 = 0. \quad (4.2.14)$$

Приклад 3. Хай область G – прямокутник, $G = \{|x| \leq \Delta_1, |y| \leq \Delta_2\}$. Розіб'ємо його на два трикутники діагоналлю $\frac{x}{\Delta_1} -$

$\frac{y}{\Delta_2} = 0$: перший (типу 2б) обмежений діагоналлю та прямими $x = -\Delta_1$, $y = \Delta_2$; другий (типу 1б) обмежений діагоналлю та прямими $x = \Delta_1$, $y = -\Delta_2$. Хай

$$u_\pi(\pm\Delta_1, y) = u_\pi(x, \pm\Delta_2) = 0, \quad u_\pi(y\Delta_1/\Delta_2, y) = \eta(y), \quad \eta(\pm\Delta_2) = 0.$$

Тоді, використавши формули (4.2.7а) та (4.2.9а) для $u_\pi(x, y)$, одержимо $u_\pi(x, y) =$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{y}{\Delta_2}\right) \eta\left(\frac{\Delta_2}{\Delta_1}x\right) + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{x}{\Delta_1}\right) \eta(y), & (x, y) \in G, y \geq \frac{\Delta_2}{\Delta_1}x, \\ \frac{1}{2} \left(1 + \frac{y}{\Delta_2}\right) \eta\left(\frac{\Delta_2}{\Delta_1}x\right) + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{\Delta_1}\right) \eta(y), & (x, y) \in G, y \leq \frac{\Delta_2}{\Delta_1}x. \end{cases}$$

Мінімізувавши відповідний цій області функціонал $J_G(u_\pi)$ за $\eta(y)$, отримуємо для знаходження $\eta(y)$ рівняння

$$((\Delta_2^2 + 3y^2)\eta'(y))' - 9\eta(y) + 6(y^2 + \Delta_2^2) = 0. \quad (4.2.15)$$

На основі рівнянь (4.2.13) – (4.2.15) нижче розв'язано задачі (4.2.1) – (4.2.2) для різних типів областей G і різного розбиття G на трикутники.

4.2.3. Приклади наближених розв'язків

П р и к л а д 1. Хай $G = [-\Delta_1, \Delta_1] \times [-\Delta_2, \Delta_2]$. Почнемо з рівняння (4.2.15). Частинний його розв'язок має вигляд

$$\eta_0(y) = \frac{14}{27}\Delta_2^2 - \frac{2}{3}y^2.$$

Загальний розв'язок шукатимемо у вигляді

$$\eta(y) = C\eta_1(y) + \eta_0(y),$$

де C – довільна стала; $\eta_1(y)$ – гіпергеометрична функція,

$$\eta_1(y) = -\frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\prod_{r=1}^n (r^2 - r - 3)}{2^n (n!)^2} \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \frac{n}{n-k} C_{n-k}^k 2^{n-2k-1} \frac{(\Delta_2^2 + 3y^2)^k}{\Delta_2^{2k}}.$$

Після задовільнення граничних умов $\eta(\pm\Delta_2) = 0$ матимемо

$$C_1 = \Delta_2^2 \frac{4}{27} / \left[\frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \prod_{r=1}^n (r^2 - r - 3) (n!)^{-2} \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \frac{n}{n-k} C_{n-k}^k - \frac{1}{2} \right],$$

$$\eta(y) = \eta_0(y) + \frac{4\Delta_2^2 \left[\sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \frac{n}{n-k} C_{n-k}^k \frac{\prod_{\rho=1}^n (\rho^2 - \rho - 3)}{2^{2k} (n!)^2} \left(\frac{\Delta_2^2 + 3y^2}{\Delta_2^2} \right)^k - 1 \right]}{27 \left[\sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \frac{n}{n-k} C_{n-k}^k \frac{\prod_{\rho=1}^n (\rho^2 - \rho - 3)}{(n!)^2} - 1 \right]}.$$

Зробивши заміну $y = \frac{\Delta_2}{\Delta_1} x$, одержимо функцію $\eta\left(\frac{\Delta_2}{\Delta_1} x\right)$. Підставивши знайдену функцію $\eta(y)$ у (4.2.15), дістанемо, при $\Delta_1 = \Delta_2 = 1$, що $u_\pi(0, 0) = \eta(0) = 0,586$. Точне значення $u(0, 0) = 0,5894$. Для жорсткості на кручення \bar{C} маємо $\bar{C}_\pi = 2,2692$. Точне значення $C := 2 \iint_G u(x, y) dx dy$ і складає $2,2496$.

Як бачимо, в цьому прикладі досягнуто високої точності наближення $u_\pi(x, y)$ до функції $u(x, y)$ при розбитті області всього на два трикутники.

П р и к л а д 2. Хай G – квадрат, $|x| + |y| \leq \Delta$. Розіб'ємо його на чотири трикутники осями координат. Уведемо позначення $u_\pi(0, y) = \psi(y)$, $u_\pi(x, 0) = \varphi(x)$, $u_\pi(x, \Delta - x) = \eta(x) \equiv 0$. Врахувавши повну симетрію розв'язку, зобразимо наближений розв'язок формулою (4.2.12а) в T_1 , узнявши $\varphi(x) \equiv \psi(x)$. У результаті рівняння (4.2.13) перетвориться:

$$\frac{\Delta^2}{3} \varphi''(x) - \varphi(x) - \frac{\Delta^2}{6} \varphi''(\Delta - x) - \varphi(\Delta - x) - 2x^2 + \Delta^2 + \frac{u_{00}}{\Delta} = 0, \quad x \in (0, \Delta), \quad (4.2.16)$$

причому

$$\varphi(0) = u_{00} - \text{невідоме число}, \quad \varphi(\Delta) = 0. \quad (4.2.17)$$

Для частинного розв'язку неоднорідного симетрично-граничного диференціального рівняння (4.2.16) отримаємо

$$\varphi_r(x) = \frac{2}{3\Delta} x^3 - 2x^2 + \Delta x + \frac{u_{00}}{2\Delta}. \quad (4.2.18)$$

Запишемо лінійно незалежну систему розв'язків однорідного рівняння (4.2.16):

$$\varphi_1 = x - \Delta/2, \quad \varphi_2 = \operatorname{ch} \frac{2\sqrt{3}}{\Delta} \left(x - \frac{\Delta}{2} \right).$$

Загальний розв'язок, таким чином, має вигляд

$$\varphi(x) = C_1 \left(x - \frac{\Delta}{2} \right) + C_2 \operatorname{ch} \frac{2\sqrt{3}}{\Delta} \left(x - \frac{\Delta}{2} \right) + \varphi_r(x). \quad (4.2.19)$$

Задовольнивши граничні умови (4.2.17), одержимо

$$C_1 = \frac{\Delta}{3} - \frac{u_{00}}{\Delta}, \quad C_2 = \frac{3u_{00}\Delta - 3u_{00} + \Delta^3}{6\Delta \operatorname{ch}\sqrt{3}}.$$

Для знаходження u_{00} прирівняємо до нуля похідну $\frac{dJ(u_\pi)}{du_{00}} = 0$:

$$\int_0^\Delta \int_0^{\Delta-x} \left[\left(\left(1 - \frac{y}{\Delta}\right) \varphi'(x) - \frac{\varphi(\Delta-y)}{\Delta} - \frac{\psi(y)}{\Delta} + \frac{y}{\Delta} \psi'(\Delta-x) + \frac{u_{00}}{\Delta} \right) \frac{1}{\Delta} + \left(-\frac{\varphi(x)}{\Delta} + \frac{x}{\Delta} \varphi'(\Delta-y) + \left(1 - \frac{x}{\Delta}\right) \psi'(y) - \frac{\psi(\Delta-x)}{\Delta} + \frac{u_{00}}{\Delta} \right) \frac{1}{\Delta} + 2 \left(1 - \frac{x}{\Delta} - \frac{y}{\Delta}\right) \right] dx dy = 0.$$

Після нескладних перетворень останнє рівняння зведеться до

$$\int_0^\Delta \varphi(x) dx = \frac{\Delta^3}{6}.$$

Підставивши в нього $\varphi(x)$ у вигляді (4.2.19)–(4.2.20), одержимо $u_{00} = \Delta^2 \cdot 0,2814$. При $\Delta = \sqrt{2}$ (це відповідає квадратові зі стороною $a = 2$) отримуємо $u_{00} = 0,563$. При цьому жорсткість на кручення $C_\pi = 2,2403$.

П р и к л а д 3. Хай G – паралелограм, $0 \leq x \leq \Delta$, $-x \leq y \leq \Delta - x$. Розіб'ємо його прямою $y = 0$ на два трикутники. Використавши позначення $u_\pi(x, 0) = \varphi(x)$, запишемо рівняння типу (4.2.14) для кожного трикутника і, додавши їх, отримуємо рівняння для $\varphi(x)$ (тут $\eta_1(x) = \eta_2(x) = \psi_1(y) = \psi_2(y) = 0$):

$$\frac{\Delta^2}{3} \varphi''(x) - \varphi(x) - x^2 + \Delta^2 - (x - \Delta)^2 = 0, \quad x \in (0, \Delta), \varphi(0) = \varphi(\Delta) = 0.$$

Його розв'язок

$$\varphi(x) = \frac{4}{3} \Delta^2 \operatorname{ch} \frac{\sqrt{3}}{\Delta} x + \frac{4}{3} \Delta^2 \frac{\operatorname{sh} \frac{\sqrt{3}x}{\Delta}}{\operatorname{sh} \sqrt{3}} (1 - \operatorname{ch} \sqrt{3}) - 2x^2 + 2\Delta x - \frac{4}{3} \Delta^2.$$

Підставивши його у формулу типу (4.2.13а) для $u_\pi(x, y)$ в кожному з трикутників, одержимо $u_\pi(x, y)$ у паралелограмі. При цьому жорсткість на кручення $C_\pi = 2 \int_G f = 0,026\Delta^2$.

П р и к л а д 4. Хай G – рівнобічна трапеція,

$$x + y \geq 0, \quad 1 - \frac{x}{\Delta} - \frac{y}{\Delta} \geq 0, \quad x \leq \Delta, \quad y \leq \Delta.$$

Розіб'ємо її осями координат на три однакових трикутники. Позначимо $u_\pi(0, y)$ через $\psi(y)$, $u_\pi(x, 0)$ через $\varphi(x)$. Врахувавши симетрію, отримаємо $\varphi(x) = \psi(x)$. Використавши рівняння (4.2.13) та (4.2.14) для знаходження функції $\varphi(x)$, яка дає екстремум функціоналові $J(u_\pi)$, запишемо симетрично-граничне рівняння

$$\frac{2}{3}\Delta^2\varphi''(x) - 2\varphi(x) - \frac{\Delta^2}{6}\varphi''(\Delta - x) - \varphi(\Delta - x) - 4x(x - \Delta) = 0, \quad x \in (0, \Delta),$$

яке треба розв'язувати при граничних умовах $\varphi(0) = 0, \varphi(\Delta) = 0$. Частинний розв'язок неоднорідного рівняння

$$\varphi_0(x) = -\frac{4}{3}x^2 + \frac{4}{3}\Delta x - \frac{4}{9}\Delta^2.$$

Лінійно незалежна система розв'язків однорідного рівняння має такий вигляд:

$$\varphi_1(x) = \operatorname{sh} \frac{\sqrt{1,2}}{\Delta} \left(x - \frac{\Delta}{2} \right), \quad \varphi_2(x) = \operatorname{ch} \frac{\sqrt{6}}{\Delta} \left(x - \frac{\Delta}{2} \right),$$

звідки

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x).$$

Задовольнивши граничні умови, одержимо

$$\varphi(x) = \frac{4\Delta^2 \operatorname{ch} \frac{\sqrt{6}}{\Delta} \left(x - \frac{\Delta}{2} \right)}{9 \operatorname{ch} \frac{\sqrt{6}}{2}} + \varphi_0(x).$$

При цьому $u_\pi(x, y)$ буде визначатися формулами типу (4.2.12a), (4.2.13a) у кожному з трьох трикутників відповідно:

$$u_\pi(x, y) = \begin{cases} (1 + \frac{x}{\Delta})\varphi(y) - (1 - \frac{y}{\Delta})\varphi(-x), & -\Delta \leq x \leq 0, -x \leq y \leq 0, \\ (1 - \frac{x}{\Delta})\varphi(y) + (1 - \frac{y}{\Delta})\varphi(x) - \\ -\frac{x}{\Delta}\varphi(\Delta - y) - \frac{y}{\Delta}\varphi(\Delta - x), & x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq \Delta, \\ (1 + \frac{x}{\Delta})\varphi(x) - (1 - \frac{x}{\Delta})\varphi(-y), & 0 \leq x \leq \Delta, -x \leq y \leq 0. \end{cases}$$

Жорсткість на кручення (інтегральна характеристика розв'язку) складає $C_\pi = 2 \int \int_G u_\pi(x, y) dx dy = 0,181\Delta^2$, що на 1 % відрізняється

від точного значення. Дотичне напруження $\bar{\tau}_m$ визначають за допомогою значення нормальної похідної в точці $(0,0)$:

$$\bar{\tau}_m = [u_{\pi}^{(1,0)}(0,0) + u_{\pi}^{(0,1)}(0,0)]/\sqrt{2} = \frac{8\Delta}{3\sqrt{2}} \left(1 - \frac{\sqrt{6}}{3} \operatorname{th} \frac{\sqrt{6}}{2}\right) = 0,835h,$$

де h – висота трапеції. Це на 17 % відрізняється від точного значення

$$\tau_m/G\theta = [u^{(1,0)}(0,0) + u^{(0,1)}(0,0)]/\sqrt{2} = h.$$

П р и к л а д 5. Хай G – рівнобедрений трикутник, $0 \leq x \leq \Delta$, $|y| \leq \Delta - x$, $u_{\pi}(x,0) = \varphi(x)$, $\varphi(0) = \varphi(\Delta) = 0$. Розіб'ємо його на два трикутники прямою $y = 0$. Зобразимо $u_{\pi}(x,y)$ у вигляді

$$u_{\pi}(x,y) = \begin{cases} \left(1 - \frac{y}{\Delta}\right) \varphi(x) - \frac{x}{\Delta} \varphi(\Delta - y), & (x,y) \in G, y \geq 0, \\ \left(1 + \frac{y}{\Delta}\right) \varphi(x) - \frac{x}{\Delta} \varphi(\Delta + y), & (x,y) \in G, y \leq 0. \end{cases}$$

Врахуємо, що функція $\varphi(x)$, яка дає мінімум функціоналові

$$J(u_{\pi}) = \int_0^{\Delta} \int_{x-\Delta}^0 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_{\pi}}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_{\pi}}{\partial y} \right)^2 - 2u_{\pi} \right] dx dy,$$

де $u_{\pi}(x,y)$ дорівнює нижній для $u_{\pi}(x,y)$ формулі, має задовольняти диференціальне рівняння (4.2.13) при $\psi(x) \equiv 0$:

$$\frac{\Delta^2}{3} \varphi''(x) - \varphi(x) - 2x^2 + \Delta^2 = 0, \quad x \in (0, \Delta). \quad (4.2.20)$$

Тоді одержимо для функції, яка дає мінімум $J(u_{\pi})$ по всій області G , теж рівняння (4.2.20). Розв'язок (4.2.20), з урахуванням граничних умов має вигляд

$$\varphi(x) = \frac{\Delta^2}{3} \operatorname{ch} \frac{\sqrt{3}}{\Delta} x + \frac{7\Delta^2 - \Delta^2 \operatorname{ch} \sqrt{3}}{3 \operatorname{sh} \sqrt{3}} \operatorname{sh} \frac{\sqrt{3}}{\Delta} x - 2x^2 - \frac{\Delta^2}{3}.$$

Підставивши $\varphi(x)$ у формулу для $u_{\pi}(x,y)$, знайдемо жорсткість на кручення та напруження в точці $(0,0)$ при $\Delta = 1$:

$$C_{\pi} = 0,023, \quad C = 0,026,$$

$$\bar{\tau}_{\pi} = \varphi'(0) = \frac{7 - \operatorname{ch} \sqrt{3}}{\sqrt{3}} \operatorname{cth} \sqrt{3} = 0,862, \quad \tau = u^{(1,0)}(0,0) = 0,649.$$

Наведені приклади показують, що навіть при невеликій кількості елементів (прямокутників, трикутників), на які розбивається область інтегрування, метод ЛІДР дає наближення до точного розв'язку з високою точністю як за інтегральними, так і за диференціальними характеристиками розв'язку.

Викладений метод знаходження невідомих функцій, що входять у структуру наближеного розв'язку, без змін переноситься на випадок областей G , складених як з прямокутників, так і з трикутників (у тому числі – з криволінійною стороною). Підкреслимо, що метод ЛІДР дає змогу будувати наближені розв'язки крайових задач для областей складеної форми з точним задовільненням граничних умов при різних типах граничних умов на різних частинах межі області інтегрування.

4.3. Оцінка швидкості збіжності методу ЛІДР

Хай розв'язок граничної задачі

$$Au =: \sum_{|\alpha| \leq n} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (a_\alpha(x) D^\alpha u(x)) = g(x), \quad x \in G, x = (x_1, x_2), \quad (4.3.1)$$

$$\partial^s u(x) / \partial \nu^s = 0, \quad x \in \partial G, \quad s = \overline{0, n} \quad (4.3.2)$$

належить класові $u(x) \in W_2^{2n}(G)$. Тут G – деякий багатокутник, межа якого ∂G складена з відрізків прямих, паралельних осям координат; ν – нормаль до ∂G ; $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$.

Сформулюємо обмеження на коефіцієнти $a_\alpha(x)$ у вигляді нерівностей $\forall u, v \in W_2^n(G)$

$$\exists \sigma_1, \sigma_2 > 0: |a_{n,G}(u, v)| \leq \sigma_2 \|u\|_{W_2^n(G)} \|v\|_{W_2^n(G)}, \quad (4.3.3)$$

$$\sigma_1 \|u\|_{W_2^n(G)}^2 \leq |a_{n,G}(u, u)|, \quad (4.3.4)$$

де $a_{n,G}(u, v)$ – білінійна форма,

$$a_{n,G}(u, v) = \sum_{|\alpha| \leq n} \int_G a_\alpha(x) D^\alpha u(x) D^\alpha v(x) dx. \quad (4.3.5)$$

Уведемо до розгляду: скалярний добуток

$$(u, v)_G = \int_G uv dx, \quad \|u\|_{L_2(G)} = \sqrt{(u, u)_G},$$

замкнутий підпростір

$$\overset{\circ}{W}_2^n(G) = \{u(x) \in W_2^n(G) : \partial^s u(x) / \partial \nu^s = 0, x \in \partial G, s = \overline{0, n-1}\},$$

функціонал

$$J_{n,G}(u) = \frac{1}{2} a_{n,G}(u, u) - (g, u)_G, \quad (4.3.6)$$

для якого рівняння (4.3.1) є рівнянням Ейлера.

Задачі (4.3.1), (4.3.2) відповідає мінімізаційна задача

$$J_{n,G}(v) \longrightarrow \inf, v \in \overset{\circ}{W}_2^n(G); J_{n,G}(u) = \inf_{v \in \overset{\circ}{W}_2^n(G)} J_{n,G}(v). \quad (4.3.7)$$

Як відомо, задача (4.3.7) має єдиний розв'язок (Φ . С'ярле, [1, с. 15]). На практиці замість $\overset{\circ}{W}_2^n(G)$ часто використовують деякі скінченновимірні та нескінченновимірні замкнуті підпростори U_h , де h — параметр розбиття області G . При цьому задача: знайти $u_h^* \in U_h$ таку, що

$$J_{n,G}(u_h^*) = \inf_{v \in U_h} J_{n,G}(v), \quad (4.3.8)$$

також має єдиний розв'язок. Крім того, задача (4.3.8) еквівалентна задачі

$$a_{n,G}(u_h^*, v) = (g, v)_G, \quad \forall v \in U_h. \quad (4.3.9)$$

Теорема 4.3.1 (лема Сеа). *Існує така стала $C = \sigma_2/\sigma_1$, незалежна від простору U_h , що*

$$\|u - u_h^*\|_{W_2^n(G)} \leq C \inf_{v \in U_h} \|u - v\|_{W_2^n(G)}. \quad (4.3.10)$$

Хай Δ — довжина найбільшої сторони елементів, на які розбивається область інтегрування G . Нерівність (4.3.10) показує, що задача оцінки швидкості збіжності до нуля відносно параметра Δ (що дорівнює довжині найбільшої сторони елементів, на які розбивається область інтегрування G), похибки наближення розв'язків граничних задач елементами розглядуваних нескінченновимірних підпросторів, одержуваних за допомогою інтерлінації, зводиться до такої задачі апроксимації: знайти відстань

$$\rho(u, U_h) = \inf_{v \in U_h} \|u - v\|_{W_2^n(G)}. \quad (4.3.11)$$

Із нерівності (4.3.10) випливає, що оцінка похибки наближення була б найкращою для елемента $Eu \in U_h$ такого, що

$$\|u - Eu\|_{W_2^n(G)} = \rho(u, U_h). \quad (4.3.12)$$

На практиці методу скінченних елементів при одержанні оцінок похибки наближення елемент найкращого наближення Eu замінюється відповідним інтерполантом $E_G u$ розв'язку u . При цьому враховується нерівність

$$\|u - u_h^*\|_{W_2^n(G)} \leq C \|u - E_G u\|_{W_2^n(G)}. \quad (4.3.13)$$

Тому скористаємося нерівністю (4.3.13), вважаючи, що $E_G u$ — відповідний інтерліант u , бо із побудованих нижче лінійних нескінченновимірних підпросторів видно, що серед їхніх елементів є інтерліанти.

Схарактеризуємо ті нескінченновимірні підпростори U_h , в яких будемо шукати наближений розв'язок методом ЛПДР граничної задачі (4.3.1), (4.3.2), якщо G – багатокутник.

Розіб'ємо G на прямокутники (елементи)

$\Pi_i = [x_{1i_1}, x_{1,i_1+1}] \times [x_{2i_2}, x_{2,i_2+1}] \subset G$ ($i = (i_1, i_2)$),
та в цих елементах розглянемо систему прямих

$$x_k = x_{ki_k j_k}, \quad i_k = \overline{0, M_k - 1} :$$

$$x_{k i_k} = x_{k i_k 0} < x_{k i_k 1} < \dots < x_{k i_k, M_k - 1} = x_{k, i_k + 1}, \quad k = 1, 2$$

(зрозуміло, якщо $M_k = 2$, то через внутрішні точки елементів Π_i ніяких додаткових прямих не проводимо).

Кожній з цих прямих інтерлінації поставимо у відповідність множину шуканих функцій $\varphi_{k i_k j_k s_k}(x_{3-k})$ та множину сталих $C_{i,j,s}$ ($j = (j_1, j_2)$, $s = (s_1, s_2)$), які відповідають вузловій точці $(x_{1i_1 j_1}, x_{2i_2 j_2}) \in G$, $\Pi_i \subset G$, $j_k = \overline{0, M_k - 1}$, $s_k = \overline{0, n - 1}$. Візьмемо всі функції $\varphi_{k i_k j_k s_k}(x_{3-k})$ такими, що дорівнюють тождоно нулю на відрізках прямих $x_k = x_{k i_k j_k}$, належних межі ∂G або не належних області G . Для задовільнення граничних умов (4.3.2) візьмемо $s_k = \overline{0, n - 1}$, $k = 1, 2$:

$$\varphi_{k i_k j_k s_k}^{(s_{3-k})}(x_{3-k, i_{3-k}, j_{3-k}}) = C_{i,j,s} = 0 \quad \forall (x_{1i_1 j_1}, x_{2i_2 j_2}) \in \partial G. \quad (4.3.14)$$

Хай $h_{k i_k j_k s_k}(x_k)$ – поліноми або сплайни від однієї змінної із властивостями

$$h_{k i_k j_k s_k}^{(p_k)}(x_{k i_k j_k'}) = \delta_{j_k j_k'} \delta_{s_k p_k}, \quad j_k, j_k' = \overline{0, M_k - 1}; 0 \leq s_k, p_k \leq n - 1.$$

Побудуємо в кожному елементі $\Pi_i \subset G$ функцію

$$u_i(x) \equiv E_i u(x) =: \quad (4.3.15)$$

$$\begin{aligned} &=: \sum_{k=1}^2 \sum_{j_k=0}^{M_k-1} \sum_{s_k=0}^{n-1} h_{k i_k j_k s_k}(x_k) \varphi_{k i_k j_k s_k}(x_{3-k}) - \\ &- \sum_{j_1=0}^{M_1-1} \sum_{j_2=0}^{M_2-1} \sum_{s_1=0}^{n-1} \sum_{s_2=0}^{n-1} C_{i,j,s} \prod_{k=1}^2 h_{k i_k j_k s_k}(x_k), \quad x \in \Pi_i \subset G. \end{aligned}$$

Функції

$$v(x) \in B_M^n(G) =: \{v(x) | v(x) = u_i(x), x \in \Pi_i \subset G\} \implies v(x) \in C^{n-1, n-1}(G)$$

мають такі інтерлінаційні властивості:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{s_k} v}{\partial x_k^{s_k}} \Big|_{x_k = x_{k i_k j_k}} &= \varphi_{k i_k j_k s_k}(x_{3-k}) + \\ &+ \sum_{j_{3-k}=0}^{M_{3-k}-1} \sum_{s_{3-k}=0}^{n-1} h_{3-k, i_{3-k}, j_{3-k}, s_{3-k}}(x_{3-k}) [\varphi_{3-k, i_{3-k}, j_{3-k}, s_{3-k}}(x_{k i_k j_k}) - C_{i,j,s}], \end{aligned} \quad (4.3.16)$$

$$D^s v \Big|_{\substack{x_1 = x_{1i_1j_1s_1} \\ x_2 = x_{2i_2j_2s_2}}} = \varphi_{1i_1j_1s_1}^{(s_2)}(x_{2i_2j_2}) + \varphi_{2i_2j_2s_2}^{(s_1)}(x_{1i_1j_1}) - C_{i,j,s} \quad (4.3.17)$$

$$\forall (x_{1i_1j_1}, x_{2i_2j_2}) \in G; x_{k,i_k,j_k} \in [x_{k,i_k}, x_{k,i_k+1}], j_k = \overline{0, M_k - 1}; \Pi_i \subset G.$$

Очевидно, що $B_M^n(G)$ є нескінченновимірним підпростором простору $W_2^n(G)$. Оптимальна функція $u^* \in B_M^n(G)$, котра є розв'язком задачі

$$J_{n,G}(v) \longrightarrow \inf, \quad (4.3.18)$$

$$v(x) \in \overset{0}{B}_M^n(G) := \left\{ v(x) \in B_M^n(G) : \frac{\partial^\mu v(x)}{\partial \nu^\mu} = 0, x \in \partial G, \mu = \overline{0, n-1} \right\},$$

матиме коефіцієнти $C_{i,j,s}$ та функції $\varphi_{k i_k j_k s_k}(x_{3-k})$, які знаходяться із таких систем рівнянь:

$$\partial J_{n,G}(v) / \partial C_{i,j,s} = 0, \quad (4.3.19)$$

$$\frac{\partial J_{n,G}(v)}{\partial D_{k,i,j,s}} = 0, \quad D_{k,i,j,s} =: \varphi_{k i_k j_k s_k}^{(s_3-k)}(x_{3-k, i_3-k, j_3-k}) \quad k = 1, 2,$$

$$\delta_{\varphi_{1i_1j_1s_1}(x_2)} J_{n,G}(v) = 0, \quad (4.3.20)$$

$$\delta_{\varphi_{2i_2j_2s_2}(x_1)} J_{n,G}(v) = 0, \quad (i, j, s) \in \mathfrak{R}, v \in \overset{\circ}{B}_M^n(G), \quad (4.3.21)$$

$$\mathfrak{R} = \left\{ i = (i_1, i_2), j = (j_1, j_2), s = (s_1, s_2) \mid \right. \\ \left. \Pi_i \subset G, 0 \leq j_k \leq M_k - 1, 0 \leq s_k \leq n - 1, k = 1, 2 \right\}.$$

Тут $\delta_\varphi J(\varphi)$ – варіація функціоналу $J(\dots, \varphi, \dots)$ за функцією φ .

Системи рівнянь (4.3.19) – (4.3.21) мають розв'язуватися сумісно, із врахуванням граничних умов (4.3.14) та умов типу (4.3.17а):

$$\varphi_{1i_1j_1s_1}^{(s_2)}(x_{2i_2j_2}) = c_{ijs} = \varphi_{2i_2j_2s_2}^{(s_1)}(x_{1i_1j_1}), s_1, s_2 = \overline{0, n-1}. \quad (4.3.17a)$$

У межах даного підрозділу вважаємо, що ці системи розв'язані точно.

Наступна теорема дає змогу оцінити швидкість зменшення похибки методу ЛІДР як функції h при $h \rightarrow 0$.

Теорема 4.3.2. *Хай $u(x) \in \overset{\circ}{W}_2^n(G) \cap L_2^{p_1, p_2}(G)$ ($n \leq p_k \leq nM_k$, $k = 1, 2$) точний розв'язок задачі (4.4.7); $u^*(x) \in \overset{\circ}{B}_M^n(G)$ – точний розв'язок задачі (4.4.18). Тоді*

$$\|u - u^*\|_{W_2^n(G)} \leq Ch^{p_1 + p_2 - n} \quad (h \rightarrow 0, h = \max_{k, i_k} \Delta_{k, i_k}), \quad (4.3.22)$$

$\Delta_{k,i_k} = \max_{j_k k} (x_{k,i_k,j_k+1} - x_{k,i_k,j_k})$. Стала C не залежить від h .

Д о в е д е н н я. Оскільки

$$v(x) \in \mathring{B}_M^n(G) \implies v(x) = u_i(x), x \in \Pi_i \subset G,$$

тобто $v(x) = E_G(u)$ – інтерліант точного розв’язку u , можна записати з урахуванням теорем 4.3.1, 3.4.2, 3.4.3 та наслідків до них:

$$\|u - u^*\|_{W_2^n(G)} \leq C_3 \|u - E_G u\|_{W_2^n(G)} \leq Ch^{p_1+p_2-n}, \quad h \rightarrow 0.$$

Теорему 4.3.2 доведено.

Зауваження. Оцінка (4.3.22) може бути поліпшена, якщо точний розв’язок u належить до більш високого класу диференційовності і при цьому використовується наближення сплайн-інтерліантантами, допоміжні функції яких є сплайни більш високої гладкості.

Крім того, якщо наближений розв’язок задачі (4.3.1), (4.3.2) шукати методом скінченних елементів у вигляді сплайна з невідомими сталими $C_{i,j,s}$

$$w_\pi(x, y) = \sum_{j_1=0}^{M_1-1} \sum_{j_2=0}^{M_2-1} \sum_{s_1=0}^{n-1} \sum_{s_2=0}^{n-1} C_{i,j,s} \prod_{k=1}^2 h_{k i_k j_k s_k}(x_k), \quad x \in \Pi_i \subset G,$$

то для похибки наближення виконуватиметься оцінка

$$\|u - w_\pi\|_{W_2^n(G)} \leq ch^{q-n}, \quad q = \min\{p_1, p_2\}.$$

Тобто нерівність (4.3.22) показує: якщо для досягнення деякої точності за методом скінченних елементів (МСЕ) треба розбивати область G на h^{-2} ($h \rightarrow 0$) елементів, то за методом ЛІДР для отримання тієї ж точності можна використати h^{-1} елементів. Це зауваження свідчить на користь методу ЛІДР, особливо в тих задачах, де бажано одержувати розв’язок в аналітичній формі і якраз у вигляді інтерліантанта на сім’ї ліній, заданих дослідником.

Зауважимо, що в ряді випадків для спеціалістів такий вибір інформації про невідомий розв’язок є достатньо інформативним (наприклад, епюри напружень досить часто виводяться якраз таким чином – на фіксованих лініях).

4.4. Про чисельну реалізацію методу ЛІДР

4.4.1. Сплайн-інтерполяція на основі інтерліанації

У попередніх підрозділах розглянуто конкретні приклади чисельної реалізації методу ЛІДР. У всіх прикладах розв’язувана гранична задача зводиться до граничної задачі для систем звичайних лінійних інтегродиференціальних рівнянь. Для випадку, коли диференціальний

оператор крайової задачі є диференціальним оператором зі змінними коефіцієнтами, одержувана система також містить змінні коефіцієнти. Тому виникає питання про її чисельний розв'язок. Природно вимагати, щоб метод чисельного її розв'язку зберігав точність, яку має метод ЛДР. Нижче пропонується такий метод. У його основу покладено формули кусково-поліноміальної інтерлінації. Цей метод фактично є методом скінченних елементів, у якому при розбитті області інтегрування G на елементи одночасно використовують дві вкладені одна в одну сітки з різними кроками Δ_1, Δ_2 . Ці кроки розрізняються не сталими множниками, а порядком ($\Delta_1 = 1/n, \Delta_2 = \Delta_1^2, n \rightarrow \infty$).

Спочатку побудуємо інтерполяційні формули на основі відповідних формул інтерлінації, що інтерлінують функцію двох змінних $f(x, y)$ на системі взаємно перпендикулярних прямих у квадраті $E = [0, 1]^2$. Поширення цих формул на випадок, коли прямі інтерлінації розміщені на площині нерегулярно, а також на випадок, коли на цих прямих задано сліди функції та сліди її нормальних похідних до заданого порядку, ґрунтуються на таких міркуваннях.

Хай деякий інтерлінаційний оператор O_{MN} інтерлінує функцію $f(x, y)$ та її нормальні похідні до порядку N на M прямих Γ_k ($k = \overline{1, M}$). Хай при цьому допускається похибка Δ^α , де Δ – деякий параметр; $\Delta \rightarrow 0$ при збільшенні числа елементів і зменшенні їхнього діаметра. Якщо сліди φ_{ks} , $k = \overline{1, M}, s = \overline{0, N}$, $\varphi_{ks}|_{\Gamma_k} = \partial^s f / \partial \nu_k^s|_{\Gamma_k}$, котрі є функціями однієї змінної – x_1 або x_2 , замінити відповідними інтерполяційними (одновимірними!) кусково-поліноміальними функціями з тією ж самою похибкою Δ^α , то інтерлінант перетвориться на інтерполянт, з тим же порядком α похибки наближення, що її має інтерлінант.

Нижче проілюструємо викладене на прикладі інтерлінації з використанням лінійних сплайнів по кожній змінній.

Хай $f^{(p,q)}(x, y) \in C(E)$ ($0 \leq p, q \leq 2$), $E = [0, 1]^2$;

$$|f^{(2,0)}(x, y)|, |f^{(0,2)}(x, y)|, |f^{(2,2)}(x, y)| \leq M, (x, y) \in E;$$

$h(t)$ – кусково-лінійна функція ($h(t) = 0 \forall |t| \geq 1$),

$$h(t) = \frac{1}{2} [|t-1| - 2|t| + |t+1|], h(0) = 1, h(-1) = h(1) = 0.$$

Тоді функція

$$Lf(x, y) = \sum_{k=0}^{m^2} \sum_{l=0}^{n^2} f\left(\frac{k}{m^2}, \frac{l}{n^2}\right) h(m^2 x - k) h(n^2 y - l) \quad (4.4.1)$$

є класичним кусково-білінійним інтерполянтом із властивостями

$$Lf\left(\frac{k}{m^2}, \frac{l}{n^2}\right) = f\left(\frac{k}{m^2}, \frac{l}{n^2}\right), \quad k = \overline{0, m^2}, l = \overline{0, n^2}.$$

При цьому для залишку справедливі співвідношення

$$\|f - Lf\|_C = O\left(\frac{1}{m^4}\right) + O\left(\frac{1}{n^4}\right) + O\left(\frac{1}{m^4 n^4}\right), \quad m, n \rightarrow \infty. \quad (4.4.2)$$

Зауважимо, що при такій класичній інтерполяції для одержання похибки наближення з порядком $O(\Delta^4)$, $\Delta = \max\left\{\frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right\}$ треба $(m^2 + 1)(n^2 + 1) \asymp \Delta^{-4}$ значень функції $f(x, y)$.

Уведемо оператор-інтерліант

$$\begin{aligned} Of(x, y) &= \sum_{i=0}^m h(mx - i) f\left(\frac{i}{m}, y\right) + \sum_{j=0}^n h(ny - j) f\left(x, \frac{j}{n}\right) - \\ &- \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n f\left(\frac{i}{m}, \frac{j}{n}\right) h(mx - i) h(ny - j) \end{aligned} \quad (4.4.3)$$

із властивостями

$$Of\left(\frac{i}{m}, y\right) = f\left(\frac{i}{m}, y\right); \quad Of\left(x, \frac{j}{n}\right) = f\left(x, \frac{j}{n}\right), \quad i = \overline{0, m}; j = \overline{0, n}.$$

Очевидно, що похибка наближення функції $f(x, y)$ з його допомогою має порядок

$$\|f - Of\|_C = O\left(\frac{1}{m^2 n^2}\right) = O(\Delta^4), \quad \Delta \rightarrow 0.$$

Заміна у формулі (4.4.3) кожної з функцій $f\left(\frac{i}{m}, y\right)$, $f\left(x, \frac{j}{n}\right)$ її відповідним інтерполантом (при $m = n$)

$$f\left(\frac{i}{m}, y\right) \approx \sum_{l=0}^{n^2} f\left(\frac{i}{m}, \frac{l}{n^2}\right) h(n^2 y - l),$$

$$f\left(x, \frac{j}{n}\right) \approx \sum_{k=0}^{m^2} f\left(\frac{k}{m^2}, \frac{j}{n}\right) h(m^2 x - k),$$

теж дає похибку порядку $O(\Delta^4)$.

Тобто одержуємо в результаті інтерполянт

$$\begin{aligned}
 Jf(x, y) &= \sum_{i=0}^m h(mx - i) \sum_{\substack{l=0 \\ l \neq 0, n, 2n, \dots, n^2}}^{n^2} f\left(\frac{i}{m}, \frac{l}{n^2}\right) h(n^2y - l) + \\
 &+ \sum_{j=0}^n h(ny - j) \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq 0, m, 2m, \dots, m^2}}^{m^2} f\left(\frac{k}{m^2}, \frac{j}{n}\right) h(m^2x - k) + \\
 &+ \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n f\left(\frac{i}{m}, \frac{j}{n}\right) [h(mx - i)h(n^2y - jn) + \\
 &+ h(ny - j)h(m^2x - im) - h(mx - i)h(ny - j)]
 \end{aligned}$$

з такими інтерполяційними властивостями:

$$Jf\left(\frac{i}{m}, \frac{l}{n^2}\right) = f\left(\frac{i}{m}, \frac{l}{n^2}\right), \quad i = \overline{0, m}, \quad l = \overline{0, n^2},$$

$$Jf\left(\frac{k}{m^2}, \frac{j}{n}\right) = f\left(\frac{k}{m^2}, \frac{j}{n}\right), \quad k = \overline{0, m^2}, \quad j = \overline{0, n}.$$

Він наближує функцію $f(x, y)$ з похибкою $O(\Delta^4)$. Отже, порядок похибки відносно $\Delta \rightarrow 0$ такий же, як і порядок похибки наближення формулами (4.4.1) та (4.4.3): $|f(x, y) - Jf(x, y)| = O(\Delta^4)$, $(x, y) \in E$. Проте для його побудови використовується лише $(m+1)(n^2+1) + (n+1)(m^2-m) \asymp \Delta^{-3}$ значень функції $f(x, y)$, що (при $m, n \rightarrow \infty$) на порядок менше, ніж кількість даних $(m^2+1)(n^2+1) \asymp \Delta^{-4}$, котра використовується в інтерполяційній формулі (4.4.1) для одержання порівнянної точності.

4.4.2. Схеми МСЕ, що мають точність методу ЛІДР

Викладемо суть методу скінченних елементів (МСЕ), який дає чисельну реалізацію методу ЛІДР із порівнянною похибкою. Зразу ж відмітимо, що цей метод має значну перевагу над класичним методом МСЕ, в якому використовують регулярні сітки: для досягнення тієї ж похибки він потребує знаходження меншого числа невідомих сталих, що входять у структуру наближеного розв'язку.

Розгляд проведемо на прикладі тестової граничної задачі

$$-\Delta u(x, y) = g(x, y), \quad (x, y) \in G = [0, 1]^2, \quad (4.4.4)$$

$$u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \partial G. \quad (4.4.5)$$

Підрахуємо число арифметичних операцій, необхідних для розв'язання задачі (4.4.4), (4.4.5) методом Рітца у вигляді

$$\begin{aligned} u_{m^2 n^2}(x, y) &= \sum_{k=1}^{m^2-1} \sum_{l=1}^{n^2-1} C_{kl} h(m^2 x - k) h(n^2 y - l), \quad (x, y) \in G, \\ u_{m^2 n^2} \Big|_{\partial G} &= 0. \end{aligned} \quad (4.4.6)$$

Для знаходження C_{kl} ($1 \leq k \leq m^2 - 1, 1 \leq l \leq n^2 - 1$) одержимо систему рівнянь

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m^2-1} \sum_{l=1}^{n^2-1} \left[(h'_k, h'_i)(\bar{h}_l, \bar{h}_j) + (h_k, h_i)(\bar{h}'_l, \bar{h}'_j) \right] C_{kl} &= \quad (4.4.7) \\ &= \iint_G g(x, y) h_i(x) \bar{h}_j(y) dx dy, \quad 1 \leq i \leq m^2 - 1, 1 \leq j \leq n^2 - 1, \\ h_k(x) &= h(m^2 x - k), \quad \bar{h}_l(y) = h(n^2 y - l), \\ (h_k^{(s)}, h_i^{(s)}) &= \int_0^1 h_k^{(s)}(x) h_i^{(s)}(x) dx, \quad s = 0, 1, \quad k, i = \overline{1, m^2 - 1}, \\ (\bar{h}_l^{(s)}, \bar{h}_j^{(s)}) &= \int_0^1 \bar{h}_l^{(s)}(y) \bar{h}_j^{(s)}(y) dy, \quad s = 0, 1, \quad l, j = \overline{1, n^2 - 1}. \end{aligned}$$

Система (4.4.7) має $(m^2 - 1)(n^2 - 1)$ алгебричних рівнянь. У загальному випадку для розв'язання методом Гаусса системи N лінійних алгебричних рівнянь треба затратити $\frac{2}{3} N^3$ арифметичних операцій, тобто для розв'язання системи (4.4.7) треба приблизно $\frac{2}{3}(m^2 - 1)^3(n^2 - 1)^3$ арифметичних операцій.

Вважаємо, що похибка наближення функції $u(x, y) \in C^{2,2}(G)$ операторами (4.4.6) має оцінку швидкості збіжності $O(\Delta^4)$, $\Delta \rightarrow 0$, де $\Delta = \max\{\frac{1}{m}, \frac{1}{n}\}$. Шукатимемо розв'язок задачі (4.4.4), (4.4.5) у вигляді формули (4.4.3), яку запишемо інакше

$$\begin{aligned} u^*(x, y) &= \sum_{p=1}^{m-1} H_p(x) \sum_{l=1}^{n^2-1} u_{pm,l} \bar{h}_l(y) + \quad (4.4.8) \\ &+ \sum_{q=1}^{n-1} H_q(y) \sum_{k=1}^{m^2-1} u_{k,qn} \bar{h}_k(x) - \sum_{p=1}^{m-1} \sum_{q=1}^{n-1} u_{pm,qn} H_p(x) H_q(y). \end{aligned}$$

Тут введено такі позначення: $H_p(x) = h(mx - p)$, $H_q(y) = h(ny - q)$,

$$\bar{h}_k(x) = h(m^2 x - k), \quad \bar{h}_l(y) = h(n^2 y - l).$$

Очевидно, що формула (4.4.8) має такі інтерполяційні властивості (при $u^*|_{\partial G} = 0$):

$$\begin{aligned} u^*\left(\frac{p}{m}, \frac{l}{n^2}\right) &= u_{pm,l}, \quad p = \overline{1, m-1}; l = \overline{1, n^2-1}, \\ u^*\left(\frac{k}{n^2}, \frac{q}{n}\right) &= u_{k,qn}, \quad k = \overline{1, m^2-1}; q = \overline{1, n-1}. \end{aligned} \quad (4.4.9)$$

При цьому можна стверджувати, що похибка наближення функції $u(x, y)$ за допомогою інтерполянта (4.4.8) має порядок $O(\Delta^4)$ такий, як і похибки наближення інтерлінантом (4.4.3) та інтерполянтом (4.4.6):

$$|u(x, y) - Ou(x, y)| \asymp m^{-2}n^{-2} \asymp \Delta^4,$$

$$|u(x, y) - u^*(x, y)| \asymp \Delta^4 \quad (m, n \rightarrow \infty).$$

Для знаходження невідомих $u_{im,l}, l = \overline{1, n^2-1}, u_{k,jm}, k = \overline{1, m^2-1}$ у формулі (4.4.8) методом Гальоркіна одержуємо систему лінійних алгебричних рівнянь

$$(Lu^* - g, H_\mu \bar{h}_\nu) = 0, \quad \mu = \overline{1, m-1}, \nu = \overline{1, n^2-1}, \nu \neq jn, j = \overline{1, n-1},$$

$$(Lu^* - g, \bar{h}_\mu H_\nu) = 0, \quad \mu = \overline{1, m^2-1}, \mu \neq im, i = \overline{1, m-1}, \nu = \overline{1, n-1},$$

$$(Lu^* - g, H_\mu \bar{h}_{\nu n} + \bar{h}_{\mu m} H_\nu - H_\mu H_\nu) = 0, \quad \mu = \overline{1, m-1}, \nu = \overline{1, n-1},$$

яка в більш детальному записі, з позначеннями

$[\varphi_k \psi_l, \varphi_i \psi_j] = (\varphi_k', \varphi_i')(\psi_l, \psi_j) + (\varphi_k, \varphi_i)(\psi_l', \psi_j')$ має такий вигляд:

$$\sum_{p=1}^{m-1} \sum_{l=1}^{n^2-1} u_{pm,l} [H_p \bar{h}_l, H_\mu \bar{h}_\nu] + \sum_{k=1}^{m^2-1} \sum_{q=1}^{n-1} u_{k,qn} [\bar{h}_k H_q, H_\mu \bar{h}_\nu] - \quad (4.4.10)$$

$$- \sum_{p=1}^{m-1} \sum_{q=1}^{n-1} u_{pm,qn} [H_p H_q, H_\mu \bar{h}_\nu] = \iint_G f(x, y) H_\mu(x) \bar{h}_\nu(y) dx dy,$$

$$1 \leq \mu \leq m-1, \quad \nu = \overline{1, n^2-1}, \quad \nu \neq n, 2n, \dots, n^2,$$

$$\sum_{p=1}^{m-1} \sum_{l=1}^{n^2-1} u_{pm,l} [H_p \bar{h}_l, \bar{h}_\mu H_\nu] + \sum_{k=1}^{m^2-1} \sum_{q=1}^{n-1} u_{k,qn} [\bar{h}_k H_q, \bar{h}_\mu H_\nu] - \quad (4.4.11)$$

$$- \sum_{p=1}^{m-1} \sum_{q=1}^{n-1} u_{pm,qn} [H_p H_q, \bar{h}_\mu H_\nu] = \iint_G f(x, y) \bar{h}_\mu(x) H_\nu(y) dx dy,$$

$$1 \leq \mu \leq m^2-1, \quad \mu \neq m, 2m, \dots, m^2, \quad \nu = \overline{1, n-1},$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{p=1}^{m-1} \sum_{l=1}^{n^2-1} u_{pm,l} [H_p \bar{h}_l, \varphi_{\mu\nu}] + \sum_{q=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{m^2-1} u_{k,qn} [\bar{h}_k H_q, \varphi_{\mu\nu}] - \\
& - \sum_{p=1}^{m-1} \sum_{q=1}^{n-1} u_{pm,qn} [H_p H_q, \varphi_{\mu\nu}] = \iint_G f(x, y) \varphi_{\mu\nu}(x, y) dx dy, \\
& 1 \leq \mu \leq m-1, \quad 1 \leq \nu \leq n-1, \\
& \varphi_{\mu\nu}(x, y) = H_\mu(x) \bar{h}_{\nu m}(y) + \bar{h}_{\mu m}(x) H_\nu(y) - H_\mu(x) H_\nu(y).
\end{aligned} \tag{4.4.12}$$

Система лінійних алгебричних рівнянь (4.4.10)–(4.4.12) має $N_0 = (m-1)(n^2-1) + (n-1)(m^2-1) - (m-1)(n-1) = (m-1)(n-1)(m+n+1) \asymp 2n_0^3$, $n_0 = \min\{m, n\}$ рівнянь, що на порядок (при $m, n \rightarrow \infty$) менше від кількості рівнянь у системі (4.4.8). Тобто для розв'язання цієї системи треба близько $N_0^3 \asymp n_0^9$ АО. Прості підрахунки показують, що цю кількість операцій представляє головний член у загальному числі операцій, необхідних для наближеного обчислення коефіцієнтів системи (4.4.11)–(4.4.13) та правих частин і для знаходження її розв'язку.

Отже, запропонована схема МСЕ (4.4.10)–(4.4.12) дає вигоду у кількості АО порівняно зі звичайною схемою МСЕ (система (4.4.7)) при збереженні точності методу ЛІДР, який відповідає розбиттю області інтегрування лише на mn елементів-прямокутників.

Той факт, що для знаходження наближеного розв'язку треба розв'язувати меншу (на порядок!) кількість алгебричних рівнянь, ніж у звичайній схемі МСЕ, відіграє немалу роль в обчислювальній доступності методу: одна справа розв'язувати близько n_0^4 рівнянь і зовсім інша – $2n_0^3$ рівнянь.

Запропонований метод можна застосувати й у випадку диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами та у випадку областей складеної форми, обмежених дугами відомих кривих.

Звичайно, наведені вище міркування про обчислювальні достоїнства запропонованого методу мають коригуватися, якщо врахувати, що одержувані системи містять розріджені матриці, як і в МСЕ. Адже у випадку тридіагональних матриць для розв'язання відповідних систем методом прогонки потрібно близько $14n_0$ АО, а не $\frac{2}{3}n_0^3$. Система (4.4.10)–(4.4.12) теж містить розріджену матрицю, що напевно можна врахувати для зменшення кількості АО при її розв'язанні. Система (4.4.10)–(4.4.12) ще до того ж має вигляд, зручний для побудови алгоритмів із розпаралелюванням (особливо при використанні ітераційних методів для розв'язання СЛАР).

Зауважимо, що після знаходження структури невідомих функцій у методі ЛІДР, НІДР, ОМСЕ (див. підрозділи 4.5–4.6), приходимо до звичайного методу Рітца або Гальоркіна.

4.5. Метод НІДР. Задача Діріхле для рівняння Пуассона.

Метод НІДР полягає

(1) в побудові наближеного розв'язку крайової задачі для диференціальних рівнянь з частинними похідними у вигляді сплайн-інтерліанта, точно задовольняючого граничним умовам;

(2) в знаходженні всіх функцій і сталих, які входять в структуру наближеного розв'язку з умови мінімуму функціонала, відповідного даній крайовій задачі.

Розглянемо приклади у яких використовується розбиття області інтегрування на прямокутні підобласті. Загальний випадок оснований на використанні формул сплайн-інтерліанації з точним задовільненням граничним умовам на лініях, що є границями областей складеної форми.

Приклад 1. Знайти розв'язок $u(x, y)$ крайової задачі

$$u''_{xx} + u''_{yy} = -2, \quad (x, y) \in G, \quad (4.5.1)$$

$$u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \partial G, \quad G = (-a, a) \times (-b, b) \quad (4.5.2)$$

методом НІДР, використавши найпростішу форму представлення наближеного розв'язку

$$\tilde{u}(x, y) = \varphi(x)\psi(y), \quad (4.5.3)$$

де обидві функції $\varphi(x), \psi(y)$ вважаються невідомими функціями, що задовольняють наступним крайовим умовам

$$\varphi(-a) = 0, \varphi(a) = 0; \quad \psi(-b) = 0, \psi(b) = 0. \quad (4.5.4)$$

Підставляючи цей наближений розв'язок у функціонал

$$J(\tilde{u}) = \int_{-a}^a \int_{-b}^b ((\tilde{u}'_x)^2 + (\tilde{u}'_y)^2 + 4\tilde{u}) dx dy$$

і прирівнюючи до нуля його варіації по функціях φ, ψ , отримаємо два нелінійних інтегро-диференціальних рівняння, яким повинні задовольняти ці невідомі функції

$$A_1(\psi)\varphi''(x) - B_1(\psi')\varphi(x) = -2C_1(\psi), \quad -a < x < a, \quad (4.5.5)$$

$$A_2(\varphi)\psi''(y) - B_2(\varphi')\psi(y) = -2C_2(\varphi), \quad -b < y < b, \quad (4.5.6)$$

де використані наступні позначення

$$A_1(\psi) = \int_{-b}^b \psi^2(y) dy, \quad B_1(\psi') = \int_{-b}^b \psi'^2(y) dy, \quad C_1(\psi) = \int_{-b}^b \psi(y) dy, \quad (4.5.7)$$

$$A_2(\varphi) = \int_{-a}^a \varphi^2(x) dx, \quad B_2(\varphi') = \int_{-a}^a \varphi'^2(x) dx, \quad C_2(\varphi) = \int_{-a}^a \varphi(x) dx. \quad (4.5.8)$$

Розв'язки цих рівнянь можна зобразити у вигляді (із врахуванням граничних умов)

$$\varphi(x) = \frac{2C_1}{B_1} \varphi_0(x), \quad \varphi_0(x) = \left(1 - \frac{ch(\lambda x)}{ch(\lambda a)}\right), \quad (4.5.9)$$

$$\psi(y) = \frac{2C_2}{B_2} \psi_0(y), \quad \psi_0(y) = \left(1 - \frac{ch(\mu y)}{ch(\mu b)}\right), \quad (4.5.10)$$

де числа λ, μ є додатніми коренями наступних рівнянь

$$A_1 \lambda^2 - B_1 = 0, \quad (4.5.11)$$

$$A_2 \mu^2 - B_2 = 0. \quad (4.5.12)$$

Розв'язок системи рівнянь (4.5.11)-(4.5.12) для випадку $a = b$ має вигляд

$$\lambda = \frac{1.6061152988027673641}{a}, \quad \mu = \frac{1.6061152988027673641}{b}.$$

Напишемо необхідні вирази для написаних вище інтегралів.

$$C_2 = \frac{2C_2}{B_2} \int_{-a}^a \varphi_0(x) dx = \frac{2C_2}{B_2} \left(2a - \frac{2sh\lambda a}{\lambda ch\lambda a}\right),$$

$$A_2 = \left(\frac{2C_2}{B_2}\right)^2 \int_{-a}^a \varphi_0^2(x) dx = \\ = \left(\frac{2C_2}{B_2}\right)^2 \left[ch^{-2}(\lambda a) \left(a + 2ach^2(\lambda a) - \frac{3sh(2\lambda a)}{2\lambda} \right) \right],$$

$$B_2 = \left(\frac{2C_2}{B_2}\right)^2 \int_{-a}^a \varphi_0'^2(x) dx = \left(\frac{2C_1}{B_1}\right)^2 \int_{-a}^a \left(\frac{\lambda sh\lambda x}{ch\lambda a}\right)^2 (x) dx = \\ = \frac{\lambda^2}{ch^2(\lambda a)} \left(\frac{sh(2\lambda a)}{2\lambda} - a \right),$$

$$C_1 = \frac{2C_1}{B_1} \int_{-b}^b \psi_0(y) dy = \frac{2C_1}{B_1} \left(2b - \frac{2sh\mu b}{\mu ch\mu b} \right),$$

$$A_1 = \left(\frac{2C_1}{B_1} \right)^2 \int_{-b}^b \psi_0^2(y) dy =$$

$$= \left(\frac{2C_1}{B_1} \right)^2 \left[ch^{-2}(\mu b) \left(b + 2bch^2(\mu b) - \frac{3sh(2\mu b)}{2\mu} \right) \right],$$

$$B_1 = \left(\frac{2C_1}{B_1} \right)^2 \int_{-b}^b \psi_0'^2(y) dy = \left(\frac{2C_1}{B_1} \right)^2 \int_{-a}^a \left(\frac{\mu sh\mu y}{ch\mu b} \right)^2 (y) dy =$$

$$= \frac{\mu^2}{ch^2(\mu b)} \left(\frac{sh(2\mu b)}{2\mu} - b \right),$$

З цих виразів можна зробити висновок, що система рівнянь (4.5.11), (4.5.12) еквівалентна наступній системі

$$A_{10}\lambda^2 - B_{10} = 0, \quad (4.5.13)$$

$$A_{20}\mu^2 - B_{20} = 0, \quad (4.5.14)$$

де

$$A_{10} = \int_{-b}^b \psi_0^2(y) dy = ch^{-2}(\mu b) \left(b + 2ach^2(\mu b) - \frac{3sh(2\mu b)}{2\mu} \right) \quad (4.5.15)$$

$$B_{10} = \int_{-b}^b \psi_0'^2(y) dy = \frac{\mu^2}{ch^2(\mu b)} \left(\frac{sh(2\mu b)}{2\mu} - b \right) \quad (4.5.16)$$

$$A_{20} = \int_{-a}^a \varphi_0^2(x) dx = ch^{-2}(\lambda a) \left(a + 2ach^2(\lambda a) - \frac{3sh(2\lambda a)}{2\lambda} \right) \quad (4.5.17)$$

$$B_{20} = \int_{-a}^a \varphi_0'^2(x) dx = \frac{\lambda^2}{ch^2(\lambda a)} \left(\frac{sh(2\lambda a)}{2\lambda} - a \right) \quad (4.5.18)$$

Таким чином, для знаходження λ, μ треба розв'язати наступну систему трансцендентних рівнянь

$$\left(b + 2bch^2(\mu b) - \frac{3sh(2\mu b)}{2\mu}\right) \frac{\lambda^2}{ch^2(\mu b)} = \frac{\mu^2}{ch^2(\mu b)} \left(\frac{sh(2\mu b)}{2\mu} - b\right) \quad (4.5.19)$$

$$\left(a + 2ach^2(\lambda a) - \frac{3sh(2\lambda a)}{2\lambda}\right) \frac{\mu^2}{ch^2(\lambda a)} = \frac{\lambda^2}{ch^2(\lambda a)} \left(\frac{sh(2\lambda a)}{2\lambda} - a\right). \quad (4.5.20)$$

або

$$\left(b + 2bch^2(\mu b) - \frac{3sh(2\mu b)}{2\mu}\right) \lambda^2 = \mu^2 \left(\frac{sh(2\mu b)}{2\mu} - b\right) \quad (4.5.21)$$

$$\left(a + 2ach^2(\lambda a) - \frac{3sh(2\lambda a)}{2\lambda}\right) \mu^2 = \lambda^2 \left(\frac{sh(2\lambda a)}{2\lambda} - a\right). \quad (4.5.22)$$

В останній системі зробимо заміну змінних $\lambda a = t_1, \mu b = t_2$. В результаті отримаємо систему

$$\left(1 + 2ch^2(t_2) - \frac{3sh(2t_2)}{2t_2}\right) \left(\frac{t_1}{a}\right)^2 = \left(\frac{t_2}{b}\right)^2 \left(\frac{sh(2t_2)}{2t_2} - 1\right) \quad (4.5.23)$$

$$\left(1 + 2ch^2(t_1) - \frac{3sh(2t_1)}{2t_1}\right) \left(\frac{t_2}{b}\right)^2 = \left(\frac{t_1}{a}\right)^2 \left(\frac{sh(2t_1)}{2t_1} - 1\right). \quad (4.5.24)$$

Задаючи значення a, b і розв'язуючи цю систему за допомогою якого-небудь наближеного методу, знаходимо $\lambda = \lambda(a, b), \mu = \mu(a, b)$.

Таким чином, знайшовши числа λ, μ отримаємо наближений розв'язок у вигляді

$$\tilde{u}(x, y) = \varphi(x)\psi(y) = h(a, b)\varphi_0(x)\psi_0(y),$$

$$h(a, b) = \frac{4C_1C_2}{B_1B_2}.$$

Це означає, що сталу $h = h(a, b)$ можна знайти з умови мінімуму функціоналу

$$F(h) = (A_{20}B_{10} + A_{10}B_{20})h^2 - 4hC_{10}C_{20},$$

$$h = \frac{2C_{10}C_{20}}{A_{20}B_{10} + A_{10}B_{20}},$$

$$C_{10} = \int_{-a}^a \varphi_0(x)dx = 2a - \frac{2sh(\lambda a)}{\lambda ch(\lambda a)}, C_{20} = \int_{-b}^b \psi_0(y)dy = 2b - \frac{2sh(\mu b)}{\mu ch(\mu b)}.$$

Це дозволяє уникнути розв'язання системи рівнянь відносно невідомих C_1, C_2, B_1, B_2 .

Нижче, в табл.4.5.1 для випадку $a = 0.5$ та різних значень $z = a/b$ наведені нетривіальні розв'язки цієї системи. В табл.

4.5.1 наведені значення $\tilde{u}(0,0), u(0,0), \tilde{J}_T = 2 \int_{-a}^a \int_{-a}^a \tilde{u}(x,y) dx dy, J_T =$

$2 \int_{-a}^a \int_{-a}^a u(x,y) dx dy, \tilde{\tau} = \left. \frac{\partial \tilde{u}(x,0)}{\partial x} \right|_{x=-a}, \tau = \left. \frac{\partial u(x,0)}{\partial x} \right|_{x=-a}$. Точні значення

отримані за допомогою формули

$$u(x,y) = b^2 - y^2 + \frac{32b^2}{\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k-1)^3} \frac{ch \frac{(2k-1)\pi x}{2b}}{ch \frac{(2k-1)\pi a}{2b}} \cos \frac{(2k-1)\pi y}{2b}$$

Приклад 2. Знайдемо методом НІДР наближений розв'язок задачі ($0 < c < a$; $0 < d < b$)

$$u''_{xx}(x,y) + u''_{yy}(x,y) = -2, (x,y) \in G \quad (4.5.25)$$

$$u(x,y) = 0, (x,y) \in \partial G,$$

де G - кут: $G = \{(x,y) | 0 < x < a, 0 < y < d; 0 < x < c, d \leq y < b\}$. Розіб'ємо \bar{G} на три підобласті $G_1 = \{c \leq x \leq a, 0 \leq y \leq d\}$, $G_2 = \{0 \leq x \leq c, 0 \leq y \leq d\}$, $G_3 = \{0 \leq x \leq c, d \leq y \leq b\}$. У кожній з цих підобластей шукаємо наближений розв'язок \bar{u} у вигляді відповідного інтерлінанта:

$$\bar{u}(x,y) = u_1(x,y) = h_1(x)\psi(y), (x,y) \in G_1,$$

$$\bar{u}(x,y) = u_2(x,y) = \varphi(x)H_2(y) + h_2(x)\psi(y), (x,y) \in G_2,$$

$$\bar{u}(x,y) = u_3(x,y) = \varphi(x)H_3(y), (x,y) \in G_3.$$

Тут вважається, що невідомі функції $\varphi(x), \psi(y)$ задовольняють наступним граничним умовам $\varphi(0) = \varphi(c) = 0, \psi(0) = \psi(d) = 0$, а невідомі функції $h_1(x), h_2(x), H_1(y), H_3(y)$ - наступним умовам $h_1(c) = H_3(d) = h_2(c) = H_2(d) = 1, h_1(a) = h_2(0) = H_2(0) = H_3(b) = 0$. При таких обмеженнях на відомі і невідомі функції наближений розв'язок $\bar{u}(x,y)$ точно задовольняє граничним умовам на границі області інтегрування G . Підставляючи ці вирази у функціонал

$$J_1(u) = \int_G \left[(u'_x(x,y))^2 + (u'_y(x,y))^2 + 4u(x,y) \right] dx dy$$

із врахуванням того, що

$$\int_G = \int_{G_1} + \int_{G_2} + \int_{G_3}$$

Табл. 4.5.1.

$\frac{a}{b} = z$	Значення параметрів	$\frac{a}{b} = z$	Значення параметрів
1	$t_1 = 1,6061152988$ $t_2 = 1,60611528$ $w(0,0) = 0,14624167$ $u(0,0) = 0,14734271$ $2 \int \int w = 0,14042358$ $2 \int \int u = 0,14057702$ $\tau^* = 0,705620893$ $\tau = 0,67531448$	3,5	$t_1 = 5,5425012263$ $t_2 = 0,5568034613$ $w(0,0) = 0,02014146$ $u(0,0) = 0,02023563$ $2 \int \int w = 0,00637063831$ $2 \int \int u = 0,0063746154$ $\tau^* = 0,2892282285$ $\tau = 0,2838172$
1,2	$t_1 = 1,91736571$ $t_2 = 1,34923181$ $w(0,0) = 0,11957995$ $u(0,0) = 0,12047304$ $2 \int \int w = 0,09602996$ $2 \int \int u = 0,0961336$ $\tau^* = 0,658525986$ $\tau = 0,6323034$	4	$t_1 = 6,3326420034$ $t_2 = 0,509209386$ $w(0,0) = 0,01550111$ $u(0,0) = 0,01556477$ $2 \int \int w = 0,0043853236$ $2 \int \int u = 0,0043877025$ $\tau^* = 0,2533538422$ $\tau = 0,24924316$
1,4	$t_1 = 2,23040558$ $t_2 = 1,16818258$ $w(0,0) = 0,09800351$ $u(0,0) = 0,09872118$ $2 \int \int w = 0,06804235$ $2 \int \int u = 0,06811372$ $\tau^* = 0,609857076$ $\tau = 0,58725084$	4,5	$t_1 = 7,1229042467$ $t_2 = 0,4720023797$ $w(0,0) = 0,01227936$ $u(0,0) = 0,01232398$ $2 \int \int w = 0,00314412956$ $2 \int \int u = 0,00314566603$ $\tau^* = 0,2251168877$ $\tau = 0,22191549$
1,5	$t_1 = 2,3873392199$ $t_2 = 1,0966176741$ $w(0,0) = 0,08893164$ $u(0,0) = 0,08957456$ $2 \int \int w = 0,05794358$ $2 \int \int u = 0,0580032$ $\tau^* = 0,5860211653$ $\tau = 0,56504149$	5	$t_1 = 7,91324352$ $t_2 = 0,441905247$ $w(0,0) = 0,0099597781584$ $u(0,0) = 0,00999$ $2 \int \int w = 0,002329502$ $2 \int \int u = 0,002330534$ $\tau^* = 0,2024258003$ $\tau = 0,19987413$
1,6	$t_1 = 2,5444675433$ $t_2 = 1,0345167484$ $w(0,0) = 0,08086254$ $u(0,0) = 0,08143879$ $2 \int \int w = 0,04969008$ $2 \int \int u = 0,0497401$ $\tau^* = 0,5628726939$ $\tau = 0,54340224$	5,5	$t_1 = 8,7036340656$ $t_2 = 0,0851304014$ $w(0,0) = 0,00894282493$ $u(0,0) = 0,00826144348$ $2 \int \int w = 0,0019250347$ $2 \int \int u = 0,001773923$ $\tau^* = 0,1838432008$ $\tau = 0,181766$

1	2	3	4
1,8	$t_1 = 2,8591555916$ $t_2 = 0,9323270821$ $w(0,0) = 0,06730735$ $u(0,0) = 0,06777164$ $2 \int \int w = 0,03724659$ $2 \int \int u = 0,0372824$ $\tau^* = 0,5192181687$ $\tau = 0,50243518$	6	$t_1 = 9,4940608611$ $t_2 = 0,3957323945$ $w(0,0) = 0,00692508507$ $u(0,0) = 0,0069432877$ $2 \int \int w = 0,00138059767$ $2 \int \int u = 0,0013811088$ $\tau^* = 0,1683653952$ $\tau = 0,16664486$
2,0	$t_1 = 3,1742496238$ $t_2 = 0,8520083658$ $w(0,0) = 0,05656006$ $u(0,0) = 0,05693592$ $2 \int \int w = 0,02855915$ $2 \int \int u = 0,0285852$ $\tau^* = 0,4795268856$ $\tau = 0,46503013$	7	$t_1 = 11,0749855515$ $t_2 = 0,3615362118$ $w(0,0) = 0,00509048371$ $u(0,0) = 0,00510186415$ $2 \int \int w = 8,8400588 \cdot 10^{-4}$ $2 \int \int u = 8,8431919 \cdot 10^{-4}$ $\tau^* = 0,144082700$ $\tau = 0,14285326$
2,3	$t_1 = 3,6473800369$ $t_2 = 0,7596631181$ $w(0,0) = 0,04435251$ $u(0,0) = 0,04462959$ $2 \int \int w = 0,01988338$ $2 \int \int u = 0,0199002$ $\tau^* = 0,4274799544$ $\tau = 0,4157815$	8	$t_1 = 12,6559717402$ $t_2 = 0,3349060328$ $w(0,0) = 3,89885701 \cdot 10^{-3}$ $u(0,0) = 3,90622188 \cdot 10^{-3}$ $2 \int \int w = 5,9958351 \cdot 10^{-4}$ $2 \int \int u = 5,9975188 \cdot 10^{-4}$ $\tau^* = 0,1259273935$ $\tau = 0,1250007067$
2,5	$t_1 = 3,9630175538$ $t_2 = 0,7113524192$ $w(0,0) = 0,03814599$ $u(0,0) = 0,03837391$ $2 \int \int w = 0,01594661$ $2 \int \int u = 0,0159594$ $\tau^* = 0,3974114295$ $\tau = 0,38722797$	10	$t_1 = 15,8180468744$ $t_2 = 0,2955942198$ $w(0,0) = 2,49633522 \cdot 10^{-3}$ $u(0,0) = 2,49999922 \cdot 10^{-3}$ $2 \int \int w = 3,12255349 \cdot 10^{-4}$ $2 \int \int u = 3,1232504 \cdot 10^{-4}$ $\tau^* = 0,1005794176$ $\tau = 0,1000000244$
3,0	$t_1 = 4,7525684479$ $t_2 = 0,6205479086$ $w(0,0) = 0,0271191$ $u(0,0) = 0,02726275$ $2 \int \int w = 0,00974566172$ $2 \int \int u = 0,0097524789$ $\tau^* = 0,3358057662$ $\tau = 0,32847929$		

отримаємо

$$\begin{aligned}
 J_1(\bar{u}) &= J(\varphi, \psi, h_1, h_2, H_2, H_3) = \\
 &= \int_{G_1} \left[((u_1)'_x(x, y))^2 + ((u_1)'_y(x, y))^2 + 4u_1(x, y) \right] dx dy + \\
 &+ \int_{G_2} \left[((u_2)'_x(x, y))^2 + ((u_2)'_y(x, y))^2 + 4u_2(x, y) \right] dx dy + \\
 &+ \int_{G_3} \left[((u_3)'_x(x, y))^2 + ((u_3)'_y(x, y))^2 + 4u_3(x, y) \right] dx dy = \\
 &= \int_c^a \int_0^d \left[(h_1'(x)\psi(y))^2 + (h_1(x)\psi'(y))^2 + 4h_1(x)\psi(y) \right] dx dy + \\
 &+ \int_0^c \int_0^d \left[(\varphi'(x)H_2(y) + h_2'(x)\psi(y))^2 + (\varphi(x)H_2'(y) + h_2(x)\psi'(y))^2 + \right. \\
 &\quad \left. + 4(\varphi(x)H_2(y) + h_2(x)\psi(y)) \right] dx dy + \\
 &+ \int_0^c \int_d^b \left[(\varphi'(x)H_3(y))^2 + (\varphi(x)H_3'(y))^2 + 4\varphi(x)H_3(y) \right] dx dy
 \end{aligned}$$

Записуючи цей функціонал у вигляді $J(\varphi, \psi, h_1, h_2, H_2, H_3) = \int_0^c F_1(\varphi, \varphi') dx$ і прирівнюючи його варіацію по функції φ до нуля, отримаємо

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial F_1(\varphi, \varphi')}{\partial \varphi'} - \frac{\partial F_1(\varphi, \varphi')}{\partial \varphi} = 0 \implies$$

$$A_1 \varphi''(x) - B_1 \varphi(x) + \psi H h_2''(x) - D \psi H h_2(x) - 2d_1 = 0, 0 < x < c, \quad (4.5.26)$$

$$A_1 = \int_0^b \tilde{H}^2(y) dy; \quad B_1 = \int_0^b \left(\tilde{H}'(y) \right)^2 dy;$$

$$\psi H = \int_0^d \psi(y) H_2(y) dy; \quad D \psi H = \int_0^d \psi'(y) H_2'(y) dy;$$

$$d_1 = \int_0^b \tilde{H}(y) dy, \quad \tilde{H}(y) = H_2(y), 0 \leq y \leq d; \quad \tilde{H}(y) = H_1(y), d \leq y \leq b.$$

Аналогічно, записуючи цей функціонал у вигляді $J(\varphi, \psi, h_1, h_2, H_2, H_3) = \int_0^b F_2(\psi, \psi') dy$ і прирівнюючи до нуля його варіацію по функції ψ , отримуємо наступне рівняння

$$\frac{d}{dy} \frac{\partial F_2(\psi, \psi')}{\partial \psi'} - \frac{\partial F_2(\psi, \psi')}{\partial \psi} = 0 \implies$$

$$A_2 \psi''(y) - B_2 \psi(y) + \varphi h H_2''(y) - D \varphi h H_2(y) - 2d_2 = 0, 0 < y < d, \quad (4.5.27)$$

$$A_2 = \int_0^a \tilde{h}^2(x) dx; \quad B_1 = \int_0^a (\tilde{h}'(x))^2 dx;$$

$$\varphi h = \int_0^c \varphi(x) h_2(x) dx; \quad D \varphi h = \int_0^c \varphi'(x) h_2'(x) dx;$$

$$d_2 = \int_0^a \tilde{h}(x) dx; \quad \tilde{h}(x) = h_2(x), 0 \leq x \leq c; \quad \tilde{h}(x) = h_1(x), c \leq x \leq a.$$

Загальний розв'язок рівняння (4.5.26) запишемо у вигляді

$$\varphi(x) = c_1 ch \lambda x + c_2 sh \lambda x - \gamma_1 + \varphi_1(x), \quad (4.5.28)$$

де c_1, c_2 – довільні сталі, $\gamma_1 = 2d_1/B_1, \varphi_1(x)$ – частинний розв'язок рівняння

$$A_1 \varphi''(x) - B_1 \varphi(x) + \psi H h_2''(x) - D \psi H h_2(x) = 0,$$

залежний від вибору функцій h_2, H_2, H_3 .

Загальний розв'язок рівнянь (4.5.27) запишемо у вигляді

$$\psi(y) = c_3 ch \mu y + c_4 sh \mu y - \gamma_2 + \psi_1(y), \quad (4.5.29)$$

де c_3, c_4 – довільні сталі, $\gamma_2 = 2d_2/B_2, \psi_1(y)$ – частинний розв'язок рівняння

$$A_2 \psi''(y) - B_2 \psi(y) + \varphi h H_2''(y) - D \varphi h H_2(y) = 0,$$

залежний від вибору функцій H_2, h_2, h_1 .

Для знаходження сталих $c_1, c_2, c_3, c_4, \varphi h, D \varphi h, \psi H, D \psi H$ отримуємо наступну систему рівнянь (в рівняння цієї системи треба підставити замість функцій $\varphi(x), \psi(y)$) вирази (4.5.22) та (4.5.23), відповідно.

$$\varphi(0) = 0, \varphi(c) = 0, \psi(0) = 0, \psi(d) = 0,$$

$$\varphi h = \int_0^c \varphi(x) h_2(x) dx,$$

$$D\varphi h = \int_0^c \varphi'(x) h_2'(x) dx,$$

$$\psi H = \int_0^d \psi(y) H_2(y) dy,$$

$$D\psi H = \int_0^d \psi'(y) H_2'(y) dy.$$

Розв'язуючи цю систему восьми лінійних алгебраїчних рівнянь відносно восьми невідомих сталих $c_1, c_2, c_3, c_4, \varphi h, D\varphi h, \psi H, D\psi H$ і підставляючи її розв'язок у формули (4.5.22) та (4.5.23), отримуємо явні вирази для невідомих функцій φ, ψ , що входять у вираз для наближеного розв'язку $\bar{u}(x, y)$.

Зокрема, якщо покласти $h_1(x) = (x - a)/(c - a), h_2(x) = x/c, H_2(y) = y/d, H_3(y) = (y - b)/(d - b)$, то отримуємо

$$A_1 = b/3, B_1 = \frac{b}{d(b-d)}, A_2 = a/3, B_2 = \frac{a}{c(a-c)},$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{3}{d(b-d)}}, \mu = \sqrt{\frac{3}{c(a-c)}},$$

$$\gamma_1 = d(b-d); \gamma_2 = c(a-c),$$

$$h_2''(x) \equiv 0, H_2''(y) \equiv 0, D\varphi h = 0, D\psi H = 0.$$

$$c_1 = \gamma_1, c_3 = \gamma_2, c_2 = \frac{\gamma_1(1 - ch\lambda c)}{sh\lambda c}, c_4 = \frac{\gamma_2(1 - ch\mu d)}{sh\mu d}.$$

Тобто

$$\varphi(x) = \gamma_1(ch\lambda x - 1 - \frac{sh\lambda x}{sh\lambda c}(ch\lambda c - 1)),$$

$$\psi(y) = \gamma_2(ch\mu y - 1 - \frac{sh\mu y}{sh\mu d}(ch\mu d - 1)),$$

Наступний крок полягає в тому, щоб знайти невідомі функції $h_1(x), h_2(x), H_1(y), H_2(y)$. Запишемо функціонал задачі у вигляді $J(\varphi, \psi, h_1, h_2, H_2, H_3) = \int_c^a F_2(h_1, h_1') dx$ і прирівнюючи до нуля варіацію по функції h_1 , отримаємо наступне рівняння

$$K_1 h_1''(x) - K_2 h_1(x) - 2K_3 = 0,$$

$$K_1 = \int_0^d \psi^2(y) dy, K_2 = \int_0^d \psi'^2(y) dy, K_3 = \int_0^d \psi(y) dy.$$

Безпосереднє обчислення цих інтегралів із використанням знайдених на попередньому кроці функцій $\varphi(x), \psi(y)$ дає наступні вирази

$$K_1 = \gamma_2^2 \int_0^d (ch\mu y - 1 - \frac{sh\mu y}{sh\mu d} (ch\mu d - 1))^2 dy$$

$$K_2 = \gamma_2^2 \mu^2 \int_0^d (sh\mu y - \frac{ch\mu y}{sh\mu d} (ch\mu d - 1))^2 dy$$

$$K_3 = \gamma_2 \int_0^d (ch\mu y - 1 - \frac{sh\mu y}{sh\mu d} (ch\mu d - 1)) dy$$

Таким чином, розв'язуючи отримане диференціальне рівняння відносно функції $h_1(x)$, отримаємо загальний розв'язок у вигляді

$$h_1(x) = C_1 ch\alpha x + C_2 sh\alpha x + \gamma_3,$$

де сталі α, γ_3 знаходяться за наступними формулами

$$K_1 \alpha^2 - K_2 = 0 \Rightarrow \alpha = \sqrt{K_2/K_1}, \gamma_3 = K_3/K_2,$$

а сталі C_1, C_2 знаходяться з граничних умов:

$$h_1(c) = 1 \Rightarrow C_1 ch(\alpha c) + C_2 sh(\alpha c) + \gamma_3 = 1;$$

$$h_1(a) = 0 \Rightarrow C_1 ch(\alpha a) + C_2 sh(\alpha a) + \gamma_3 = 0.$$

$$C_1 = \Delta_1/\Delta, C_2 = \Delta_2/\Delta,$$

$$\Delta = ch(\alpha c)sh(\alpha a) - sh(\alpha c)ch(\alpha a) = sh(\alpha(a - c)),$$

$$\Delta_1 = (1 - \gamma_3)sh(\alpha a) + \gamma_3 ch(\alpha a)$$

$$\Delta_2 = -ch(\alpha c)\gamma_3 - (1 - \gamma_3)ch(\alpha a).$$

В результаті для інтегральної $J_T = 2 \int_G \bar{u}(x, y) dx dy$ та диференціальної $\bar{\tau} = \left. \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right|_{x=0, y=b/2}$ характеристик отримаємо наступні вирази

$$\begin{aligned} \bar{J}_T = \bar{J}_T(a, b, c, d) = \gamma_1 \frac{b}{2} \left(\frac{sh\lambda c}{\lambda} - c - \frac{(ch\lambda c - 1)^2}{\lambda sh\lambda c} \right) + \\ + \gamma_2 \frac{a}{2} \left(\frac{sh\mu d}{\mu} - d - \frac{(ch\mu d - 1)^2}{\mu sh\mu d} \right), \end{aligned} \quad (4.5.30)$$

$$\bar{\tau} = \bar{\tau}(a, b, c, d) = \gamma_1 \lambda \frac{1 - ch\lambda c}{sh\lambda c} H_3(b/2) = \gamma_1 \lambda \frac{1 - ch\lambda c}{sh\lambda c} \frac{b/2}{b - d}. \quad (4.5.31)$$

Нижче, в таблиці 4.5.2 наведемо результати обчислень вказаних характеристик за написаними вище формулами (4.5.24), (4.5.25). Для порівняння наведемо також ці значення, взяті на с. 263 книги Прочность, устойчивость, колебания.: Справ.: В 3 т. / Под ред. И. А. Биргера, Я. Г. Пановко. М.: Машиностроение, 1968. Т. 1. : при $a = b, c = d, \frac{b}{d} \geq 2$, $J_T = \frac{2}{3}(1 - 0,942\frac{d}{b})bd^3$; $\tau = 1,18d$

Таблиця 4.5.2.

b/d	\bar{J}_T	J_T	$\bar{\tau}$	τ
2	0.048	0.044	0.606	0.59
2.5	0.027	0.027	0.517	0.472
10/3	0.012	0.013	0.407	0.354
5	0.003721	0.00433	0.283	0.236
10	0.0004839	0.0006039	0.146	0.118

З цієї таблиці видно, що інтегральна та диференціальна характеристики наближеного розв'язку мають дуже високу точність. Цей факт пояснюється вибором функцій $h_1, h_2, H_1, H_2, \varphi, \psi$. Таким чином, ще раз підкреслимо основні характерні властивості методу НІДР, що зводить крайову задачу для диференціального рівняння з частинними похідними до системи звичайних нелінійних диференціальних рівнянь відносно написаних вище функцій.

Особливість 1. В методі НІДР вважається, що у формулі для наближеного розв'язку $\bar{u}(x, y)$ невідомі всі функції $\varphi, \psi, h_1, h_2, H_1, H_2$, що входять у структуру наближеного розв'язку.

Особливість 2. Всі функції $\varphi, \psi, h_1, h_2, H_1, H_2$ знаходяться з умови мінімуму функціоналу $J(\bar{u})$, відповідного поставленій крайовій задачі.

4.6. Метод НІДР. Бігармонійне рівняння. 1-ша крайова задача

Метод НІДР зводить крайову задачу для бігармонійного рівняння до системи звичайних нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь. Цей метод умовно можна виконати за такими кроками.

Крок 1. Будуємо структуру наближеного розв'язку крайової задачі у вигляді нелінійного інтерліаннта з невідомими слідами на заданій системі ліній і з невідомими допоміжними функціями (див. Литвин О.М. [6]). Проілюструємо його на прикладі задачі про прогин прямокутної пластинки. Задача про прогин прямокутної пластинки із сталим одиничним навантаженням, защемленої по всьому контуру, приводить нас до бігармонійного рівняння з граничними умовами першого роду

$$\Delta^2 W(x, y) = 1, (x, y) \in G = (-a, a) \times (-b, b), \quad (4.6.1)$$

$$W(\pm a, y) = 0 \quad (4.6.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} W(\pm a, y) = 0$$

$$W(x, \pm b) = 0 \quad (4.6.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} W(x, \pm b) = 0$$

На першому кроці шукатимемо розв'язок у вигляді: $W(x, y) = \varphi_1(x)\psi_1(y)$, де $\varphi_1(x), \psi_1(y)$ – невідомі функції, що задовольняють граничні умови:

$$\varphi_1(\pm a) = 0, \quad \varphi_1'(\pm a) = 0 \quad (4.6.4)$$

$$\psi_1(\pm b) = 0, \quad \psi_1'(\pm b) = 0 \quad (4.6.5)$$

і які знаходимо з такої системи нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь:

$$\int_{-a}^a [\Delta^2(\varphi_1(x)\psi_1(y)) - 1]\varphi_1(x)dx = 0 \quad (4.6.6)$$

$$\int_{-b}^b [\Delta^2(\varphi_1(x)\psi_1(y)) - 1]\psi_1(y)dy = 0 \quad (4.6.7)$$

Цю систему інтегруванням частинами перетворимо до (4.6.8)-(4.6.9):

$$A_1\psi_1^{IV}(y) - 2B_1\psi_1''(y) + C_1\psi_1(y) = \int_{-a}^a \varphi_1(x)dx, \quad (4.6.8)$$

де

$$A_1 = \int_{-a}^a \varphi_1^2(x)dx \quad B_1 = \int_{-a}^a (\varphi_1'(x))^2 dx \quad C_1 = \int_{-a}^a (\varphi_1''(x))^2 dx$$

$$A_2\varphi_1^{IV}(x) - 2B_2\varphi_1''(x) + C_2\varphi_1(x) = \int_{-b}^b \psi_1(y)dy, \quad (4.6.9)$$

де

$$A_2 = \int_{-b}^b \psi_1^2(y) dy \quad B_2 = \int_{-b}^b (\psi_1'(y))^2 dy \quad C_2 = \int_{-b}^b (\psi_1''(y))^2 dy$$

Це ті рівняння з яких ми маємо отримати $\varphi_1(x)$ та $\psi_1(y)$ з урахуванням граничних умов (4.6.4.), (4.6.5).

Задамо деяке початкове наближення $\psi_{10}(y)$, наприклад $\psi_{10}(y) = \cos^2\left(\frac{\pi y}{2b}\right)$.

Обчисливши сталі A_2, B_2, C_2 і підставивши їх у рівняння (4.6.9), отримаємо лінійне диференційне рівняння зі сталими коефіцієнтами і сталою правою частиною. Так як граничні умови на сторонах $x = +a$, $x = -a$, а також $y = +b$, $y = -b$ однакові, розв'язок має бути парною функцією. Характеристичне рівняння $A_2 t^4 - 2B_2 t^2 + C_2 = 0$, відповідне диференціальному рівнянню (4.6.9), є бікватратним. Теоретично існує декілька випадків розташування його коренів. Якщо ввести заміну $z = t^2$, то з квадратного рівняння $A_2 z^2 - 2B_2 z + C_2 = 0$, яке має всього два корені ($z_1, z_2 \in \mathbf{R}, z_1 < z_2$, або $z_1 = z_2 \in \mathbf{R}$, або $z_1 = \alpha + i\beta, z_2 = \alpha - i\beta$), для коренів бікватратного рівняння можна написати таку таблицю:

Таблиця 4.6.1.

z_1	z_2	$t_1 = -\sqrt{z_1}$	$t_2 = \sqrt{z_1}$	$t_3 = -\sqrt{z_2}$	$t_4 = \sqrt{z_2}$
$\alpha_1 \in \mathbf{R}$	$\alpha_1 < \alpha_2$	$-\sqrt{\alpha_1}$	$\sqrt{\alpha_1}$	$-\sqrt{\alpha_2}$	$\sqrt{\alpha_2}$
$\alpha_1 \in \mathbf{R}$	$\alpha_2 = \alpha_1$	$-\sqrt{\alpha_1}$	$\sqrt{\alpha_1}$	$-\sqrt{\alpha_1}$	$\sqrt{\alpha_1}$
$z_1 \in \mathbf{C}$	$z_2 = \bar{z}_1$	$-\alpha_1 - i\beta_1$	$-\alpha_1 + i\beta_1$	$\alpha_1 + i\beta_1$	$\alpha_1 - i\beta_1$

Розглянемо, наприклад, найбільш громіздкий випадок $t_{1,2,3,4} = \pm(\alpha_1 \pm i\beta_1)$, де $\alpha_1 \neq 0$ та $\beta_1 \neq 0$. В цьому разі загальний розв'язок диференціального рівняння (4.6.9) можна написати у вигляді (з урахуванням його парності):

$$\varphi_{11}(x) = K_1 ch(\alpha_1 x) \cos(\beta_1 x) + K_4 sh(\alpha_1 x) \sin(\beta_1 x) + \frac{d}{C_2},$$

де $d = \int_{-b}^b \psi_2(y) dy$. Сталі K_1, K_4 знаходяться з граничних умов:

$$K_1 = -\frac{(\alpha_1 ch(\alpha_1 a) \sin(\beta_1 a) + \beta_1 sh(\alpha_1 a) \cos(\beta_1 a))d}{D_2},$$

$$K_4 = \frac{(\alpha_1 sh(\alpha_1 a) \cos(\beta_1 a) - \beta_1 ch(\alpha_1 a) \sin(\beta_1 a))d}{D_2},$$

$$D_2 = (ch(\alpha_1 a) \cos(\beta_1 a)(\alpha_1 a) \sin(\beta_1 a) + \beta_1 sh(\alpha_1 a) \cos(\beta_1 a)) - sh((\alpha_1 a) \sin(\beta_1 a)((\alpha_1 ch(\alpha_1 a) \sin(\beta_1 a) + \beta_1 sh(\alpha_1 a) \cos(\beta_1 a))).$$

Підставимо φ_{11} в (4.6.8) і знайдемо $\psi_{11}(y)$, використовуючи корені характеристичного рівняння $\alpha_{1,1}, \beta_{1,1}$. Таким чином, ми виконали перший крок ітераційного процесу, результатом якого є $\varphi_{11}(x) = \varphi_{11}(x, \alpha_{1,1}, \beta_{1,1})$ і $\psi_{11}(y) = \psi_{11}(y, \alpha_{2,1}, \beta_{2,1})$. Далі знову повторюємо цей ітераційний процес, підставляючи $\psi_{11}(y)$ в (9) і знаходячи $\varphi_{1,2}(x) = \varphi_{1,2}(x, \alpha_{1,2}, \beta_{1,2})$, а потім $\psi_{1,2}(y) = \psi_{1,2}(y, \alpha_{2,2}, \beta_{2,2})$ т.д., доки $\alpha_{j,k}, \beta_{j,k}$ та $\alpha_{j,k-1}, \beta_{j,k-1}, j = 1, 2$ не будуть відрізнятися на величину $\varepsilon > 0$. Отже, ми знаходимо $\varphi_1(x) = \varphi_{1,k}(x)$ та $\psi_1(y) = \psi_{1,k}(y)$:

$$\varphi_1(x) = b_1 ch(\alpha_{1,k}x) \cos(\beta_{1,k}x) + b_4 sh(\alpha_{1,k}x) \sin(\beta_{1,k}x) + f_1,$$

$$\psi_1(y) = a_1 ch(\alpha_{2,k}y) \cos(\beta_{2,k}y) + a_4 sh(\alpha_{2,k}y) \sin(\beta_{2,k}y) + f_2.$$

На другому кроці шукаємо розв'язок у вигляді $w(x, y) = \varphi_1(x)\psi_1(y) + \varphi_2(x)\psi_2(y)$, де $\varphi_1(x)$ та $\psi_2(y)$ ми вже знайшли. Невідомі $\varphi_2(x)$ та $\psi_2(y)$ мають задовольняти умовам

$$\varphi_2(\pm a) = 0, \quad \varphi_2'(\pm a) = 0 \quad (4.6.10)$$

$$\psi_2(\pm b) = 0, \quad \psi_2'(\pm b) = 0 \quad (4.6.11)$$

$\psi_2(x)$ та $\psi_2(y)$ будемо знаходити з такої системи НІДР:

$$\int_{-a}^a [\Delta^2(\varphi_2(x)\psi_2(y)) - 1 + \Delta^2(\varphi_1(x)\psi_1(y))] \varphi_2(x) dx = 0, \quad (4.6.12)$$

$$\int_{-b}^b [\Delta^2(\varphi_2(x)\psi_2(y)) - 1 + \Delta^2(\varphi_1(x)\psi_1(y))] \psi_2(y) dy = 0. \quad (4.6.13)$$

Цю систему інтегруванням частинами перетворимо до вигляду:

$$A_1 \psi_2^{IV}(y) - 2B_1 \psi_2''(y) + C_1 \psi_2(y) = f_{1,2}(y), \quad (4.6.14)$$

де

$$f_{1,2}(y) = \int_{-a}^a [1 - \Delta^2(\varphi_1(x)\psi_1(y))] \varphi_2(x) dx,$$

$$A_1 = \int_{-a}^a \varphi_2^2(x) dx \quad B_1 = \int_{-a}^a (\varphi_2'(x))^2 dx \quad C_1 = \int_{-a}^a (\varphi_2''(x))^2 dx$$

$$A_2 \varphi_2^{IV}(x) - 2B_2 \varphi_2''(x) + C_2 \varphi_2(x) = f_{2,2}(x), \quad (4.6.15)$$

де

$$f_{2,2}(x) = \int_{-b}^b [1 - \Delta^2(\varphi_1(x)\psi_1(y))] \psi_2(y) dy,$$

$$A_2 = \int_{-b}^b \psi_2^2(y) dy \quad B_2 = \int_{-b}^b (\psi_2'(y))^2 dy \quad C_2 = \int_{-b}^b (\psi_2''(y))^2 dy$$

Це ті рівняння, з яких ми маємо з урахуванням граничних умов (4.6.10), (4.6.11) отримати $\varphi_2(x)$ та $\psi_2(x)$. Візьмемо початкове наближення $\psi_{20}(y) = y^2 sh^2(y^2 - b^2)$. У правій частині (4.6.15) маємо:

$$f_{2,2}(x) = N_1 \varphi_1^{(IV)}(x) + N_2 \varphi_2''(x) + N_3 \varphi_1(x) + f$$

$$\text{де } N_1 = - \int_{-b}^b \psi_1 \psi_{20} dy; \quad N_2 = -2 \int_{-b}^b \psi_1'' \psi_{20} dy = 2 \int_{-b}^b \psi_1' \psi_{20}' dy;$$

$$N_3 = - \int_{-b}^b \psi_1^{IV} \psi_{20} dy = - \int_{-b}^b \psi_1'' \psi_{20}'' dy; \quad f = \int_{-b}^b \psi_2 dy.$$

Після зведення подібних отримаємо:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= b_1 ch \alpha_1 x \cos \beta_1 x + b_4 sh \alpha_1 x \sin \beta_1 x + f_1 \implies \\ &\implies N_1 \varphi_1^{(IV)}(x) + N_2 \varphi_1''(x) + N_3 \varphi_1(x) + f = \\ &= \{N_3 b_1 + N_2 [b_1 (\alpha_1^2 - \beta_1^2) + 2b_4 \alpha_1 \beta_1] + N_1 [b_1 (\alpha_1^4 - 6\alpha_1^2 \beta_1^2 - \beta_1^4) + \\ &\quad + 4b_4 (\alpha_1^2 - \beta_1^2) \beta_1 \alpha_1]\} ch(\alpha_1 x) \cos(\beta_1 x) + \\ &+ \{N_3 b_4 + N_2 [-2b_1 \alpha_1 \beta_1 + b_4 (\alpha_1^2 - \beta_1^2)] + N_1 [b_4 (\alpha_1^4 - 6\alpha_1^2 \beta_1^2 + \beta_1^4) - \\ &\quad - 4b_1 (\alpha_1^2 - \beta_1^2) \beta_1 \alpha_1]\} sh(\alpha_1 x) \sin(\beta_1 x) + N_3 f_1 + f = \\ &= \tilde{K}_1 ch(\alpha_1 x) \cos(\beta_1 x) + \tilde{K}_4 sh(\alpha_1 x) \sin(\beta_1 x) + N_3 f_1 + f, \\ \tilde{K}_1 &= N_3 b_1 + N_2 [b_1 (\alpha_1^2 - \beta_1^2) + 2b_4 \alpha_1 \beta_1] + N_1 [b_1 (\alpha_1^4 - 6\alpha_1^2 \beta_1^2 - \beta_1^4) + \\ &\quad + 4b_4 (\alpha_1^2 - \beta_1^2) \beta_1 \alpha_1], \\ \tilde{K}_4 &= N_3 b_4 + N_2 [-2b_1 \alpha_1 \beta_1 + b_4 (\alpha_1^2 - \beta_1^2)] + N_1 [b_4 (\alpha_1^4 - 6\alpha_1^2 \beta_1^2 + \beta_1^4) - \\ &\quad - 4b_1 (\alpha_1^2 - \beta_1^2) \beta_1 \alpha_1]. \end{aligned}$$

Як і на першому кроці існує декілька випадків розміщення коренів характеристичного рівняння $A_2 t^4 - 2B_2 t^2 + C_2 = 0$.

Розглянемо, наприклад, випадок $t_{1,2,3,4} = \pm \alpha_3 \pm i \beta_3$, де $\alpha_3 \neq 0$ та $\beta_3 \neq 0$ і $\alpha_3 \neq \alpha_1$ та $\beta_3 \neq \beta_1$. (В інших випадках дії виконуються аналогічно).

Частинний розв'язок рівняння (4.6.15) має такий же вигляд, як і права частина, але з іншими коефіцієнтами. Тобто шукаємо частинний розв'язок рівняння (4.6.15) у вигляді: $\varphi_{\text{неод}}(x) = \varphi_{2,\text{неод}}(x) + \frac{N_3 f_1 + f}{C_2}$,

$$\varphi_{2,\text{неод}}(x) = d_1 ch(\alpha_1 x) \cos(\beta_1 x) + d_4 sh(\alpha_1 x) \sin(\beta_1 x). \quad (4.6.16)$$

Для знаходження d_1 і d_4 підставляємо формулу (4.6.16) у диференціальне рівняння (4.6.15) і прирівнюємо коефіцієнти при

$ch(\alpha_1 x) \cos(\beta_1 x)$ та $sh(\alpha_1 x) \sin(\beta_1 x)$ у лівій та правій частинах отриманого рівняння. В результаті отримуємо систему відносно d_1 і d_4 :

$$\begin{cases} a_{11}d_1 + a_{12}d_4 = \tilde{K}_1, \\ a_{21}d_1 + a_{22}d_4 = \tilde{K}_4, \end{cases}$$

де

$$a_{11} = A_2[(\alpha_1^2 - \beta_1^2)^2 - 4(\alpha_1\beta_1)^2] - 2B_2(\alpha_1^2 - \beta_1^2) + C_2;$$

$$a_{12} = 4A_2(\alpha_1^2 - \beta_1^2)\alpha_1\beta_1 - 4B_2\alpha_1\beta_1;$$

$$a_{21} = -4A_2(\alpha_1^2 - \beta_1^2)\alpha_1\beta_1 + 4B_2\alpha_1\beta_1;$$

$$a_{22} = [A_2(\alpha_1^2 - \beta_1^2)^2 - 4(\alpha_1\beta_1)^2] - 2B_2(\alpha_1^2 - \beta_1^2) + C_2.$$

З цієї системи знаходимо d_1 та d_4 . Таким чином, ми знаємо частинний розв'язок рівняння (4.6.15) у вигляді

$$\varphi_{2,\text{неод}}(x) = d_1 ch(\alpha_1 x) \cos(\beta_1 x) + d_4 sh(\alpha_1 x) \sin(\beta_1 x) + \frac{N_3 f_1 + f}{C_2}.$$

Загальний розв'язок однорідного рівняння в силу його парності має вигляд

$$\varphi_{2,\text{однор}}(x) = K_1 ch(\alpha_3 x) \cos(\beta_3 x) + K_4 sh(\alpha_3 x) \sin(\beta_3 x), \quad (4.6.17)$$

$$\varphi'_{2,\text{однор}}(x) = K_1[\alpha_3 sh(\alpha_3 x) \cos(\beta_3 x) - \beta_3 ch(\alpha_3 x) \sin(\beta_3 x)] +$$

$$+ K_4[\alpha_3 ch(\alpha_3 x) \sin(\beta_3 x) + \beta_3 sh(\alpha_3 x) \cos(\beta_3 x)]$$

Враховувавши граничні умови (в силу парності функції $\varphi_2(x)$, при $x = -a$ ці умови матимуть такий же вигляд, як і при $x = a$)

$$\varphi_2(a) = \varphi_{2,\text{однор}}(a) + \varphi_{2,\text{неод}}(a) = 0,$$

$$\varphi'_2(a) = \varphi'_{2,\text{однор}}(a) + \varphi'_{2,\text{неод}}(a) = 0,$$

отримуємо систему

$$\begin{cases} b_{11}K_1 + b_{12}K_4 = b_1 \\ b_{21}K_1 + b_{22}K_4 = b_2, \end{cases}$$

де $b_{11} = ch(\alpha_3 a) \cos(\beta_3 a)$, $b_{12} = sh(\alpha_3 a) \sin(\beta_3 a)$;

$$b_{21} = \alpha_3 sh(\alpha_3 a) \cos(\beta_3 a) - \beta_3 ch(\alpha_3 a) \sin(\beta_3 a);$$

$$\begin{aligned}
 b_{22} &= \alpha_3 ch(\alpha_3 a) sin(\beta_3 a) + \beta_3 sh(\alpha_3 a) cos(\beta_3 a); \\
 b_1 &= -\varphi_{2\text{неод}}(a); \\
 b_2 &= -\varphi'_{2\text{неод}}(a).
 \end{aligned}$$

З цієї системи знаходимо K_1 та K_4 . Отже, ми повністю знаємо $\varphi_{21}(x)$:

$$\begin{aligned}
 \varphi_{21}(x) &= K_1 ch(\alpha_3 x) cos(\beta_3 x) + K_4 sh(\alpha_3 x) sin(\beta_3 x) + \\
 &+ d_1 ch(\alpha_1 x) cos(\beta_1 x) + d_4 sh(\alpha_1 x) sin(\beta_1 x) + \frac{f}{C_2}. \quad (4.6.18)
 \end{aligned}$$

Далі робимо як і на першому кроці - підставляємо $\varphi_{21}(x)$ в (4.6.14) і знаходимо $\psi_{21}(y)$ і т.д. Таким чином ми отримали наближений розв'язок $w(x, y) = \varphi_1(x)\psi_1(y) + \varphi_2(x)\psi_2(y)$.

Зауважимо, що для знаходження функцій $\varphi_1(x)$, $\psi_1(y)$, $\varphi_2(x)$, $\psi_2(y)$ вказаним ітераційним методом (цей метод у деяких працях називають методом "фліп-флоп") достатньо однієї ітерації.

Наведемо чисельні результати для $a = b = 0,5$ (тобто для одиної квадратної пластинки). Точний розв'язок відомий у вигляді ряду. Взявши перші 20 членів, отримаємо $W(0, 0) = 0,00126531902480738$. Згинний момент $M_x = DM^*$, $M^* = (u''_{xx} + u''_{yy})$, D - циліндрична жорсткість пластинки, $M_x(0, 0) = 0,0231430826738$. (Взявши 25 членів ряду, ми отримали ті ж результати). Наведемо значення цих характеристик $W_N = W_N(0, 0)$, $M_N = -((W_N)''_{xx}(0, 0) + \nu W_N''_{yy}(0, 0))$, $\nu = 0,3$

для знайдених наближених розв'язків $W_N(x, y) = \sum_{i=1}^N \varphi_k(x)\psi_k(y)$ при $N = 1$ та $N = 2$.

$$W_1 = 0.00126350189340471,$$

$$M_1 = 0.02263018402798646,$$

$$W_2 = 0.00126579601346,$$

$$M_2 = 0.02293280494384.$$

Порівняння наближених характеристик з їх точними значеннями із вказаної таблиці підтверджують дуже високу точність методу НІДР для $N = 1, 2$ (див. також с. 557 книги Прочність, устійчивість, колебання, т.1, де в табл. 26 наведені ці характеристики для різних значень $b/a, b \geq a$).

Запитання і вправи для самостійної роботи

1. Які узагальнення методу Л.В.Каторовича зведення до систем звичайних диференціальних рівнянь (методу ДР) ви знаєте?
2. Чому метод ЛІДР називають методом зведення до системи звичайних лінійних інтегро-диференціальних рівнянь?
3. Чому метод НІДР називають методом зведення до системи звичайних нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь?
4. Чим відрізняється метод ЛІДР від методу ДР?
5. Чим відрізняється метод НІДР від методу ДР? від методу ЛІДР?
6. Як можна точно задовольнити граничним умовам за допомогою R -функцій?
7. Як можна точно задовольнити граничним умовам за допомогою сплайн - інтерлінації функцій?
8. Як можна використати оператори інтерлінації із збереженням класу диференційовності (глава 2) для побудови структур наближених розв'язків крайових задач для випадку, коли на границі задані нормальні похідні точного розв'язку?
9. Яку точність має метод скінченних елементів, побудований на основі операторів сплайн-інтерлінації? Порівняйте цю точність з точністю класичного методу скінченних елементів.
10. Знайти наближений розв'язок задачі (4.5.1)-(4.5.2) методом НІДР для прямокутної області (див. приклад 1 у п.4.5) у формі

$$\tilde{u}_n(x, y) = \sum_{k=1}^n \varphi_k(x) \psi_k(y), n = 2.$$

Порівняти наближений розв'язок $\tilde{u}_n(x, y)$ з точним розв'язком $u(x, y)$ у вигляді ряду.

11. Розв'язати задачу 10 у загальному випадку (тобто, для $n \geq 2$).
12. Що треба змінити у формулі для наближеного розв'язку бігармонійної задачі при інших граничних умовах?
13. Доведіть теорему 4.3.1 (див. Литвин О.М.[1]).

Глава 5. Задача радонівської комп'ютерної томографії

5.1. Деякі особливості томографічних методів

Слово “томографія” походить від грецьких слів *τομος* – шматок, тонкий зріз і *γραφωσ* – пишу. Тобто томографія дослівно означає “писати зріз, шар”. Однак в останні роки цей термін об'єднує нові, перспективні напрями отримання та обробки інформації про досліджуваний об'єкт методами рентгенодіагностики, які дають змогу отримувати зображення перетинів об'єкта. В багатьох працях сучасних учених з томографією пов'язується новий метод обчислювальної діагностики – метод комп'ютерної томографії. Комп'ютерною (обчислювальною) томографією (КТ) називають чисельне відновлення функцій двох і більше змінних за відомими їх лінійними інтегралами (уздовж прямих із даної системи прямих) або площинними інтегралами (інтегралами по площинах із даної системи площин). В основу практичного використання комп'ютерної томографії покладено принцип комп'ютерної томографії, реалізація якого здійснюється за таким алгоритмом:

1) досліджуваний об'єкт опромінюють (або він випромінює) в різних ракурсах;

2) детекторами вимірюють характеристики випромінювання (наприклад, коефіцієнт поглинання випромінювання біотканинами), яке пройшло крізь достатньо тонкий шар об'єкта; ці результати реєструють;

3) отримані результати перетворюють у цифрові коди, вводять в електронно-обчислювальні пристрої як експериментальні дані;

4) за допомогою сучасних методів обчислювальної математики та програмування на основі цих експериментальних даних (даних Радона, або інакше – проєкцій) знаходять просторовий розподіл кількісних фізичних характеристик об'єкта (наприклад, його густини);

5) отримані результати візуалізують за допомогою спеціальних пристроїв (екранів дисплеїв, моніторів).

Стрімке зростання кількості досліджень у галузі томографії пов'язане з її можливістю “заглянути” всередину об'єкта, не руйнуючи його. Така можливість знайшла широке застосування в медицині під час діагностики різних захворювань. Широко відомою томографія стала завдяки появі та вдосконаленню медичних томографів (у першу чергу – рентгенівських).

У 1979 р. А. Кормаку і Г. Хаунсфілду за створення комп'ютерного томографа з використанням математичного апарата інтегрального перетворення Радона було присуджено Нобелівську премію. У 1982 р. А. Клуґ був удостоєний Нобелівської премії за використання томографів у біохімії. Ці факти теж сприяли розвитку томографії. Крім того, у багатьох випадках результати, отримані за допомогою КТ (і зокрема, за допомогою рентгенівської комп'ютерної томографії – РКТ) нині не можуть бути отримані жодними іншими методами.

Приблизно за 20 років було створено рентгенівські комп'ютерні томографи п'яти поколінь. Основну роль при їх створенні відіграє математичне проектування. При цьому здійснюється математичне моделювання вузлів, застосовуються сучасні методи оптимізації. Кожне нове покоління томографів відрізняється від попереднього більшими можливостями ідентифікації об'єкта, меншим часом сканування (отримання проєкцій) та обробки даних, ширшими можливостями для повторного аналізу цих даних тощо. На сьогодні очевидним є те, що томографію по праву можна назвати відкриттям ХХ ст., але всю революційність томографії можна буде оцінити лише в майбутньому.

Сьогодні томографічні методи використовуються в медицині, астрономії, астрофізиці та фізиці атмосфери Землі, при діагностиці плазми, в радіолокації, оптиці, при аналізі теплообміну в поверхневому шарі океану, в геології, геофізиці, фізіології, при неруйнівному контролі якості об'єктів (дефектоскопії), в мікроскопії та інших підрозділах науки і техніки.

У РКТ найпоширеніші математичні методи, що ґрунтуються на використанні прямого перетворення Радона [1]

$$Rf(s, \theta) = p(s, \theta) := \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - s) dx dy = \quad (5.1.1)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(s \cos \theta - t \sin \theta, s \sin \theta + t \cos \theta) dt = \int_{\Gamma} f dt, \Gamma : x \cos \theta + y \sin \theta = s$$

та оберненого перетворення

$$f(x, y) = [R^{-1}p](x, y) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial p(s, \theta)}{\partial s} \frac{ds d\theta}{x \cos \theta + y \sin \theta - s}. \quad (5.1.2)$$

Серед алгоритмів відновлення функцій за даними Радона найбільш відомі кілька алгоритмів, які описано нижче.

Алгоритм згортки й оберненої проєкції. Введемо функцію

$$p^{\Pi}(s, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} p(s', \theta) \Pi(s - s') ds',$$

де $\Pi(s)$ – функція з властивостями

$$\Pi \in L_1(\mathbf{R}), \Pi(-s) = \Pi(s), \int_{-\infty}^{\infty} \Pi(s) ds = 1.$$

На практиці Π – локалізована в околі нуля функція (деяка регуляризація δ -функції $\delta(s)$.) Наприклад,

$$\Pi(s) = 1/h, \text{ якщо } |s| < h/2; \Pi(s) = 0, \text{ якщо } |s| > h/2,$$

або

$$\Pi(s) = \frac{1}{\sqrt{\pi}h} e^{-s^2/h^2}.$$

Тут параметр h є порядком апертури детектора томографа.

Вважатимемо відомими такі експериментальні дані (проекції):

$$p^{\Pi}(s_j, \theta_k), s_j = j\Delta s, j = \overline{-N_1, N_1}, \theta_k = k\Delta\theta, \Delta\theta = \pi/N_2, k = \overline{0, N_2 - 1},$$

а також, що N_1 – достатньо велике число і $p^{\Pi}(s_j, \theta_k) = 0 \quad \forall j > N_1$. Для алгоритму згортки й оберненої проекції зручно використовувати замість формули (5.1.2) такий вираз для оберненої формули Радона:

$$f(x, y) = \int_0^{\pi} \Psi(x \cos \theta + y \sin \theta, \theta) d\theta, \quad (5.1.2a)$$

$$\Psi(a, \theta) = \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2p(a, \theta) - p(a+t, \theta) - p(a-t, \theta)}{t^2} dt.$$

Стосовно негладких функцій формула (5.1.2a) втрачає сенс, і для побудови алгоритму використовується її регуляризований варіант

$$f^*(x, y) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \tilde{\Psi}(x \cos \theta + y \sin \theta, \theta) d\theta, \quad (5.1.2б)$$

$$\tilde{\Psi}(a, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} H(a-s') p(s', \theta) ds', \quad (5.1.2в)$$

де H – регуляризація узагальненої функції $-1/(2\pi^2 a^2)$, причому

$$H(s) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda s} |\lambda| R(\lambda) d\lambda.$$

Функцію $R(\lambda)$ називають ефективним регуляризатором, вона має такі властивості:

$$R(\lambda) = 1 + O(|\lambda|) \quad (|\lambda| \rightarrow 0), \quad R(\lambda) \rightarrow 0 \quad (|\lambda| \rightarrow \infty).$$

Крім того вважається, що ця функція залежить від параметра регуляризації $\Lambda^{-1} : R(\lambda) \rightarrow 1$ ($|\Lambda| \rightarrow \infty$).

Найпростіший варіант методу згортки й обернених проєкцій полягає в застосуванні квадратурних формул прямокутників до інтегралів у виразах (5.1.2б), (5.1.2в).

Фур'є-алгоритм. Припустимо, що густина образу описується функцією $f(x, y)$, $\text{sup } f = [-c, c] \times [-c, c]$ і її перетворення Радона $p(s, \theta)$ має компактний носій $\text{sup } p(s, \theta) = [-d, d] \times [0, \pi]$, $d \leq c\sqrt{2}$. Тоді $p(s, \theta)$ можна виразити формулою

$$p(s, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{p}(\rho, \theta) e^{i2\pi\rho s} d\rho, \quad (5.1.3)$$

де

$$\hat{p}(\rho, \theta) = \int_{-d}^d p(s, \theta) e^{-i2\pi\rho s} ds - \quad (5.1.4)$$

одновимірне перетворення Фур'є функції $p(s, \theta)$ за змінною s . Фур'є-алгоритм істотно використовує пряме перетворення Фур'є

$$\hat{f}(\xi, \eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i2\pi(\xi x + \eta y)} dx dy \quad (5.1.5)$$

та обернене перетворення

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi, \eta) e^{i2\pi(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta. \quad (5.1.6)$$

Якщо підставити в (5.1.4) замість $p(s, \theta)$ формулу (5.1.1) і зробити заміну змінних

$$x = s \cos \theta - t \sin \theta, \quad y = s \sin \theta + t \cos \theta,$$

$$s = x \cos \theta + y \sin \theta, \quad t = x \sin \theta + y \cos \theta,$$

то отримаємо, враховуючи фінітність p, f ,

$$\hat{p}(\rho, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} p(s, \theta) e^{-i2\pi\rho s} ds = \int_{-d}^d p(s, \theta) e^{-i2\pi\rho s} ds =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-d}^d \int_{-\infty}^{\infty} f(s \cos \theta - t \sin \theta, s \sin \theta + t \cos \theta) dt e^{-i2\pi \rho s} ds = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i2\pi \rho [x \cos \theta + y \sin \theta]} dx dy = \hat{f}(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta).
\end{aligned}$$

Таким чином, маємо співвідношення

$$\hat{p}(\rho, \theta) = \hat{f}(\xi, \eta), \quad \xi = \rho \cos \theta, \quad \eta = \rho \sin \theta, \quad (5.1.7)$$

$$\hat{f}(\xi, \eta) = \hat{p}(\sqrt{\xi^2 + \eta^2}, \arctg(\eta/\xi)), \quad (5.1.8)$$

яке відоме під назвою *теорема про центральний шар, або про центральний переріз*.

Формула (5.1.6) дає змогу відновити функцію оригіналу f через її перетворення Радона p . Опишемо цю процедуру по кроках.

Крок 1. Задаємо $\hat{p}(\rho, \theta)$ за допомогою $p(s, \theta)$ і формули (5.1.4).

Крок 2. Знаходимо $\hat{f}(\xi, \eta)$ за формулою (5.1.8).

Крок 3. Знаходимо функцію оригіналу $f(x, y)$ за допомогою $\hat{f}(\xi, \eta)$, користуючись її перетворенням Фур'є (5.1.5).

Для чисельної реалізації цих трьох кроків слід дискретизувати (5.1.4), (5.1.5). Для цього використовують відповідні квадратурні формули (при $\Delta s = 2d/M$):

$$\hat{p}(\rho, \theta) \approx \frac{2d}{M} \sum_{j=-M/2}^{M/2-1} p(j\Delta s, \theta) e^{-i2\pi \rho 2dj/M}. \quad (5.1.9)$$

Для ефективного обчислення за допомогою швидкого перетворення Фур'є за $O(M \log M)$ арифметичних операцій формулу (5.1.9) обчислюємо при $\rho_m = m/(2d)$:

$$\hat{p}(\rho_m, \theta) \approx \frac{2d}{M} \sum_{j=-M/2}^{M/2-1} p(j\Delta s, \theta) e^{-i2\pi j m/M}, \quad -M/2 \leq m \leq M/2. \quad (5.1.10)$$

Таким чином, крок 1 на практиці замінюється обчисленнями за формулами (5.1.10).

Щоб обчислити густину $f(x, y)$ у точках $x_k = 2ck/N, y_l = 2cl/N$ згідно з кроком 3, скористаємося формулами

$$f(x_k, y_l) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi, \eta) e^{i4\pi c(\xi k + \eta l)/N} d\xi d\eta, \quad -\frac{N}{2} \leq k, l \leq \frac{N}{2}. \quad (5.1.11)$$

Для того щоб у (5.1.11) використати швидке перетворення Фур'є (ШПФ), цей подвійний інтеграл дискретизується теж ($-N/2 \leq k, l \leq N/2$):

$$f(x_k, y_l) = \sum_{\nu=-N/2}^{N/2} \sum_{\mu=-N/2}^{N/2} \hat{f}\left(\frac{\nu}{2c}, \frac{\mu}{2c}\right) e^{i2\pi c(k\nu+l\mu)/N}. \quad (5.1.11a)$$

Відмітимо основний недолік прямого Фур'є-методу: для використання ШПФ треба знати значення $\hat{f}(\nu/(2c), \mu/(2c))$. Проте, згідно з теоремою про центральний переріз (5.1.7)-(5.1.8), ці значення даються за допомогою чисел $\hat{p}(\sqrt{\mu^2 + \nu^2}/(2c), \text{arctg}(\mu/\nu))$. Можна наближено обчислювати лише $\hat{p}(m/(2d), \theta)$. Тобто виникає проблема інтерполяції значень з точок на полярній сітці для використання в точках декартової сітки. Застосовується кілька алгоритмів інтерполяції, які тут не розглядаються.

Алгебричні алгоритми відновлення. В них істотно використовується метод Качмажа для розв'язання інтегрального рівняння Радона. Різні способи дискретизації приводять до різних алгебричних методів. У випадку повної дискретизації припустимо, що $\text{supp } f(x, y) = G \subseteq \Omega = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$. Для проведення дискретизації розіб'ємо Ω на малі квадрати $S_m, m = \overline{1, M}$ і замінимо f вектором $F \in \mathbf{R}^M$, у котрого компонента F_m дорівнює деякому функціоналу від f на S_m . Наприклад,

$$F_m = f(x_m, y_m),$$

де (x_m, y_m) – деяка точка S_m .

Хай $L_j, j = \overline{1, N}$ – фіксована система прямих, що перетинають Ω , a_{jm} – довжина $L_j \cap S_m$, $a_j = (a_{j1}, \dots, a_{jM})^T$. При розв'язанні системи рівнянь

$$\int_{L_j} f(x, y) ds = g_j, \quad j = \overline{1, N}, \quad (5.1.12)$$

де L_j – прямі, запишемо її у вигляді

$$a_j^T F = g_j, \quad j = \overline{1, N}. \quad (5.1.13)$$

Згідно з методом Качмажа, один крок ітерації алгебричного алгоритму відновлення можна описати такою послідовністю формул:

$$F^j = F^{j-1} + \frac{\omega}{|a_j|^2} (g_j - a_j^T F^{j-1}) a_j, \quad j = \overline{1, N}.$$

Тут $\omega \in (0, 2)$ – параметр релаксації. При невеликій кількості кроків цей метод потребує такої ж кількості АО, як і метод згортки та оберненої проєкції. Якщо система (5.1.13) сумісна (що малоймовірно), то

її розв'язок F_ω має мінімальну норму. Інакше F_ω прямує до вектора, який мінімізує функціонал

$$\sum_{j=1}^N \frac{(g_j - a_j^T F_\omega)^2}{|a_j|^2}.$$

Існують також інші алгоритми відновлення, котрі не використовуються на даний час при побудові томографів.

Відмітимо, що математичний апарат, який застосовують при розв'язанні задач КТ, включає Фур'є-аналіз, інтегральне перетворення Гільберта, різні квадратурні та інтерполяційні формули, спеціальні функції, дискретне перетворення Фур'є, швидке перетворення Фур'є, сучасні алгоритми розв'язання великих систем алгебричних рівнянь, зокрема метод Качмажа тощо.

В останні роки набирають широкого поширення алгоритми розв'язання великих систем алгебричних рівнянь на комп'ютерах з розпаралелюванням. Це дає змогу значно скоротити час на відновлення конкретних об'єктів і навіть відновлювати динамічні об'єкти (наприклад, рухоме серце) в реальному масштабі часу.

КТ використовують, якщо внутрішня структура об'єкта досліджується за допомогою деякого випромінювання, що поширюється по прямій L з інтенсивністю

$$I = I_0 \exp\left(-\int_L f(\mathbf{x}) ds\right),$$

де I_0 – початкова інтенсивність прямолінійного променя L ; I – інтенсивність після проходження променя крізь тіло; $f(\mathbf{x}) = f(x, y, z)$ – коефіцієнт поглинання випромінювання (наприклад, рентгенівського). В результаті сканування отримуються значення лінійних інтегралів $\int_L f(\mathbf{x}) ds = -\ln(I/I_0)$. Задача трансмісійної КТ : за сукупністю інтегралів $\int_L f(\mathbf{x}) ds$ треба відновити f .

Якщо ж джерела випромінювання знаходяться всередині досліджуваного об'єкта (це емісійна комп'ютерна томографія – ЕКТ, широко використовується в ядерній медицині), то потрібно знайти розподіл цих джерел. Тобто потрібно знайти розподіл радіоактивного медичного препарату в тілі (в деякому зрізі тіла) за інтенсивністю випромінювання, вимірюючи за межами тіла.

Відмітимо також деякі особливості томографічних методів дослідження.

1. Треба особливо підкреслити: томографічні методи відрізняються від традиційних перш за все тим, що в них використовується великий обсяг інформації про досліджуваний об'єкт (до $5 \cdot 10^5$ і більше проєкцій, тобто експериментальних даних). Обробка та інтерпретація такого обсягу неможлива без сучасних методів обчислювальної ма-

тематики, розвинутого програмного забезпечення, високоефективних засобів обчислювальної техніки.

2. У галузі створення та використання нових томографічних методів характерна відсутність вичерпної інформації про пакети програм для КТ (автори обмежуються тільки описом цих пакетів). Це пояснюється, по-перше, тим, що кожен такий чинний пакет програм є ноу-хау і може принести його творцям чималі кошти. По-друге, кожен такий пакет є дуже дорогою продукцією і далеко не всі можуть його купити. Тому той, хто хоче розробляти нові методи в томографії, має також самотужки створювати програмне забезпечення і для вже відомих "діючих" методів, щоб мати можливість порівняти їх ефективність.

3. Для збільшення точності томографів класичні схеми РКТ потребують збільшення числа проєкцій, тобто кількості опромінювань. З іншого боку, медичні томографи мають опромінювати тіло лише в невеликих дозах. Крім того, в ряді випадків потрібно відтворювати внутрішню структуру досліджуваного об'єкта в реальному масштабі часу (наприклад, при дослідженні рухомого серця). Очевидно, збільшення кількості проєкцій призводить до збільшення часу на сканування, обробку та візуалізацію. Тому актуальною є задача оптимізації (зменшення) обсягу експериментальних даних (проєкцій) для отримання результатів з потрібною точністю.

4. У більшості алгоритмів розв'язання плоскої задачі РКТ використовують пряме та обернене перетворення Радона. Їх аналіз показує, що задачу оптимізації кількості проєкцій для відновлення функцій із заданих класів (тобто відновлення об'єктів з характеристиками, що описуються функціями із заданих класів) поки що не розв'язано.

5. Перспективними методами розв'язання задач РКТ є методи теорії наближення функцій n ($n \geq 2$) змінних, що ґрунтуються на використанні інтерлінації функцій. Справедливість такого твердження впливає в першу чергу з того, що останні десятиліття в теорії наближення функцій позначено інтенсивним розвитком досліджень, пов'язаних з оптимізацією обсягу експериментальних даних, кількості АО тощо, потрібних для відновлення функцій із заданою точністю. Зауважимо, що оператори інтерлінації (інтерфлетації) відновлюють функції (можливо, наближено) за відомими їх слідами на даній системі ліній (поверхонь). Тобто інтеграли від таких операторів по вказаних лініях чи поверхнях (лінійні інтеграли) дорівнюють інтегралам від самої відновлюваної функції. Отже, інтерлінація функцій є математичним апаратом, природно пов'язаним із задачею відновлення характеристик об'єктів за відомими їх проєкціями.

З урахуванням згаданої вище тенденції розвитку теорії наближення функцій і природного зв'язку інтерлінації (інтерфлетації) з КТ можна сподіватися, що їх використання в КТ дасть змогу розв'язати задачу оптимізації кількості проєкцій. Таким чином, актуальною є задача дослідження можливостей інтерлінації (інтерфлетації) функцій для розв'язання задачі РКТ. У дальших підрозділах подано деякі

конкретні формули інтерлінації, котрі можуть бути використані при розв'язанні плоскої задачі РКТ.

5.2. Явні формули для поліномів, що відновлюють функції за допомогою даних Радона (проекцій)

5.2.1. Поліноми, що відновлюють функції $f(x_1, x_2)$ за їхніми проекціями на M ($M \geq 2$) прямих

Нижче подано явні формули відновлення (можливо, наближеного) функції $f(x) = f(x_1, x_2) \in C^q(\Omega)$, $1 \leq q \leq M$, $\Omega \subset [0, 1]^2$ у вигляді полінома $T_M f(x)$ степеня $M-1$ за даними $\gamma_k = \int_{\Gamma_k} f(x) ds$, $\Gamma_k : \omega_k(x) := a_k x_1 + b_k x_2 - p_k = 0$, $a_k^2 + b_k^2 = 1$, $k = \overline{1, Q}$, $Q = M(M+1)/2$, в які явно входять перші M даних γ_k , $k = \overline{1, M}$. Тобто для знаходження інших невідомих коефіцієнтів полінома $T_M f(x)$ треба розв'язувати тільки $Q - M$ рівнянь. Дано інтегральне зображення залишку $R_M f(x) = (I - T_M)f(x)$, якщо $f(x) \in C^q(\Omega)$, $1 \leq q \leq M$. Наведено приклад.

Як і в теорії інтерполяції, щоб знайти інтерполяційний поліном, можна розв'язувати систему лінійних алгебричних рівнянь відносно коефіцієнтів полінома, а можна відразу його записати у вигляді полінома Лагранжа. Тому, на нашу думку, наведені в цій праці формули поліноміальної двовимірної РКТ відкривають нові можливості для використання методів теорії наближення функцій.

Зауваження 1. Інтерполяційний поліном Лагранжа степеня $M-1$ повністю відновлює довільний поліном степеня $M-1$. Запропоновані нижче формули дають змогу явно врахувати тільки частину відомих проекцій.

Накладемо на множину прямих $\{\Gamma_k\}$, $k = \overline{1, M}$ такі обмеження:

1⁰. Жодні три прямі з множини $\{\Gamma_k\}$ не перетинаються в одній точці: $\{\Gamma_k\} \cap \{\Gamma_l\} \cap \{\Gamma_r\} = \emptyset \forall k, l, r \in \mathcal{M} = \{1, 2, \dots, M\}$, $k \neq l \neq r$.

2⁰. Кожна пряма Γ_i з множини $\{\Gamma_k\}$ перетинається з усіма іншими прямими: $\Gamma_i, \Gamma_p \in \{\Gamma_k\} \Rightarrow \Gamma_i \cap \Gamma_p = A_{ip} \neq \emptyset$; $A_{ip} \in \Omega$; $i, p \in \mathcal{M}$, $i \neq p$, тобто серед прямих $\{\Gamma_k\}$ нема паралельних і кожна пряма перетинає область Ω .

3⁰. Для чисел $\delta_k := \int_{\Gamma_k} H_k^*(x) ds$ виконуються нерівності

$$\delta_k := \int_{\Gamma_k} H_k^*(x) ds \neq 0, H_k^*(x) := \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^M \omega_i(x), k \in \mathcal{M}.$$

Тут і далі використовуються позначення $\dot{x}_k(t) = \frac{dx_k(t)}{dt}$, $k = 1, 2$;

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_k} g(x) ds &= |\Gamma_k : x_1(t) = a_k p_k + b_k t, x_2(t) = b_k p_k - a_k t, \alpha_k \leq t \leq \beta_k| = \\ &= \int_{\alpha_k}^{\beta_k} f(x_1(t), x_2(t)) \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2} dt = \\ &= \int_{\alpha_k}^{\beta_k} f(x_1(t), x_2(t)) \sqrt{a_k^2 + b_k^2} dt = \int_{\alpha_k}^{\beta_k} f(a_k p_k + b_k t, b_k p_k - a_k t) dt. \end{aligned}$$

Теорема 5.2.1. *Хайї*

$$f(x) \in K(\Omega) = C(\Omega) \cap \left\{ f(x) : \exists \int_{\Gamma} f(x) ds < \infty, \forall \Gamma, \Gamma \cap \Omega \neq \emptyset \right\}.$$

Тоді оператор

$$T_M f(x) = \sum_{k=1}^M H_k(x) \left[\int_{\Gamma_k} f(x) ds - \int_{\Gamma_k} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^M f(A_{kl}) h_{kl}(x) ds \right] + I_{M-2} f(x), \quad (5.2.1)$$

де використано позначення $\mathcal{N} = \{(k, l) | k, l \in \mathcal{M}, k \neq l\}$, $H_k(x) = H_k^*(x)/\delta_k$; $M = 2 \Rightarrow h_{12}(x) \equiv 1$; $M > 2 \Rightarrow h_{kl}(x) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k, l}}^M \frac{\omega_i(x)}{\omega_i(A_{kl})}$, $(k, l) \in \mathcal{N}$; $I_{M-2} f(x) = \sum_{(k, l) \in \mathcal{N}} f(A_{kl}) h_{kl}(x)$, задовольняє умови

$$\int_{\Gamma_l} T_M f(x) ds = \int_{\Gamma_l} f(x) ds =: \gamma_l, \quad l \in \mathcal{M}; \quad (5.2.2)$$

$$T_M x^\alpha \equiv x^\alpha, \quad 0 \leq |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 \leq M - 1; \quad x^\alpha =: x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}, \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2). \quad (5.2.3)$$

Теорема 5.2.2. *Хайї* $f(x) \in C^q(\Omega)$, $1 \leq q \leq M$. Тоді для залишку $R_M f(x) = f(x) - T_M f(x)$ виконується рівність $\forall x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) \in \Omega$

$$R_M f(x) = \int_0^1 \left[\frac{\partial^q}{\partial t^q} f(x^{(0)} + t(x - x^{(0)})) \right] \frac{(1-t)^{q-1}}{(q-1)!} dt -$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{k=1}^M H_k(x) \left\{ \int_{\Gamma_k} ds \int_0^1 \left[\frac{\partial^q}{\partial t^q} f(x^{(0)} + t(x - x^{(0)})) \right] \frac{(1-t)^{q-1}}{(q-1)!} dt - \right. \\
& \left. - \int_{\Gamma_k} ds \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^M h_{kl}(x) \int_0^1 \left[\frac{\partial^q}{\partial t^q} f(x^{(0)} + t(A_{kl} - x^{(0)})) \right] \frac{(1-t)^{q-1}}{(q-1)!} dt \right\} - \\
& - \sum_{(k,l) \in \mathcal{N}} h_{kl}(x) \int_0^1 \left[\frac{\partial^q}{\partial t^q} f(x^{(0)} + t(A_{kl} - x^{(0)})) \right] \frac{(1-t)^{q-1}}{(q-1)!} dt. \quad (5.2.4)
\end{aligned}$$

Для доведення теорем 5.2.1 і 5.2.2 треба використати лему, сформульовану нижче.

Лема 5.2.1. *Інтерполяційний оператор I_{M-2} має властивості*

$$I_{M-2} f(A_{kl}) = f(A_{kl}), \quad (k, l) \in \mathcal{N}, \quad (5.2.5)$$

$$I_{M-2} x^\alpha \equiv x^\alpha, \quad 0 \leq |\alpha| \leq M-2, \quad (5.2.6)$$

$$\forall f \in C^q(\Omega), \quad 1 \leq q \leq M-1 \Rightarrow f(x) = (I_{M-2} + r_{M-2})f(x), \quad (5.2.7)$$

$$\begin{aligned}
r_{M-2} f(x) &= \int_0^1 \left[\frac{\partial^q}{\partial t^q} f(x^{(0)} + t(x - x^{(0)})) \right] \frac{(1-t)^{q-1}}{(q-1)!} dt - \\
& - \sum_{(k,l) \in \mathcal{N}} h_{kl}(x) \int_0^1 \left[\frac{\partial^q}{\partial t^q} f(x^{(0)} + t(A_{kl} - x^{(0)})) \right] \frac{(1-t)^{q-1}}{(q-1)!} dt. \quad (5.2.8)
\end{aligned}$$

Доведення леми 5.2.1. Врахуємо, що система поліномів $\{h_{kl}\}$ степеня $M-2$ є розкладом одиниці з властивостями

$$\sum_{(k,l) \in \mathcal{N}} h_{kl}(x) \equiv 1, \quad h_{kl}(A_{\mu\nu}) = \delta_{k\mu} \delta_{l\nu} (k, l, \mu, \nu \in \mathcal{M}) \quad (5.2.9)$$

а також із властивостями

$$I_{M-2} h_{kl}(x) \equiv h_{kl}(x) \forall (k, l) \in \mathcal{N}, \quad (5.2.10)$$

тобто є лінійно незалежною системою C_M^2 поліномів степеня $M - 2$. Кожний поліном $P_{M-2}(x)$ степеня $M - 2$ може бути єдиним способом зображений у вигляді лінійної комбінації функцій h_{kl}

$$I_{M-2}P_{M-2}(x) \equiv P_{M-2}(x)\forall P_{M-2}(x) = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq M-2} a_\alpha x^\alpha. \quad (5.2.11)$$

Звідси випливає, що

$$r_{M-2}P_{M-2}f(x) \equiv 0\forall P_{M-2}(x). \quad (5.2.12)$$

Тому, підставивши у формулу $r_{M-2}f(x) = f(x) - I_{M-2}f(x)$ функцію

$$f(x) = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq q-1} f^{(\alpha)}(x^{(0)}) \frac{(x - x^{(0)})^\alpha}{\alpha!} + \int_0^1 \left[\frac{\partial^q}{\partial t^q} f(x^{(0)} + t(x - x^{(0)})) \right] \frac{(1-t)^{q-1}}{(q-1)!} dt \quad (5.2.13)$$

і враховуючи (5.2.12), приходимо до формули (5.2.8).

Лему 5.2.1 доведено.

П р и к л а д. Хай $M = 2, \Gamma_k : \omega_k(x) =: x_k - c_k = 0; 0 \leq x_k \leq 1, c_k \neq 1/2; k = 1, 2; \Omega = [0, 1]^2$. Тоді поліном

$$T_2(x) \equiv T_2(\{\gamma_1, \gamma_2\}; u_{12}; x) := \sum_{k=1}^2 H_k(x)[\gamma_k - u_{12}] + u_{12},$$

$$H_k(x) = \frac{x_k - c_k}{0,5 - c_k}, \quad k = 1, 2$$

має властивості

$$\int_0^1 T_2(c_1, x_2) dx_2 = \gamma_2; \quad \int_0^1 T_2(x_1, c_2) dx_1 = \gamma_1 \forall u_{12} \in \mathbf{R}.$$

Виберемо сталу u_{12} з умови $\int_{\Gamma_3} T_2(x) ds = \gamma_3, \Gamma_3 : \omega_3(x) =: x_2 - x_1 = 0, 0 \leq x_1, x_2 \leq 1$. У результаті отримаємо

$$\int_{\Gamma_3} T_2(x) ds = \gamma_3 \Rightarrow |\Gamma_3 : x_1 = t, x_2 = t, 0 \leq t \leq 1| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \left[\frac{t - c_2}{0,5 - c_2} (\gamma_1 - u_{12}) + \frac{t - c_1}{0,5 - c_1} (\gamma_2 - u_{12}) + u_{12} \right] \sqrt{2} dt = \gamma_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_{12} = \gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 / \sqrt{2},$$

$$T_2(x) = \frac{x_2 - c_2}{0,5 - c_2} (\gamma_3 / \sqrt{2} - \gamma_2) + \frac{x_1 - c_1}{0,5 - c_1} (\gamma_3 / \sqrt{2} - \gamma_1) + \gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 / \sqrt{2}.$$

Отже, поліном першого степеня $T_2(x)$ має властивості

$$\int_0^1 T_2(c_1, x_2) dx_2 = \gamma_2, \quad \int_0^1 T(x_1, c_2) dx_1 = \gamma_1 \quad \forall u_{12} \in \mathcal{R},$$

$$\int_{\Gamma_3} T_2(x) ds = \gamma_3, \quad \Gamma_3 : \omega_3(x) =: x_2 - x_1 = 0, \quad 0 \leq x_1, x_2 \leq 1$$

незалежно від вибору сталих $c_1, c_2 \neq 1/2, 0 < c_1, c_2 < 1$.

5.2.2. Поліноми, що відновлюють $f(x)$, $x \in [0, 1]^3$ за їхніми проєкціями на $M (M \geq 3)$ прямих у \mathbf{R}^3

У попередньому підрозділі наведено явні формули для поліномів від двох змінних, які відновлюють (можливо, наближено) функції $f(x_1, x_2)$ за відомими інтегралами від них (проєкціями) вздовж $M (M \geq 2)$ прямих у \mathbf{R}^2 . Нижче подано формули для поліномів $T_{M-2} f(x)$, $x = (x_1, x_2, x_3)$ від трьох змінних, які відновлюють (можливо, наближено) функції $f(x)$ за даними

$$\gamma_k = \int_{\Gamma_k} f(x) ds, \quad k = \overline{1, Q_2}, \quad Q_2 \geq Q = \frac{(M+1)(M-1)M}{6}, \quad M \geq 3, \quad M \in \mathbf{N}.$$

У ці формули явно входять $Q_1 = (M-1)M/2$ чисел γ_k , $k = \overline{1, Q_1}$. Це дає змогу для знаходження всіх коефіцієнтів полінома $T_{M-1} f(x)$ розв'язувати не Q , а $Q - Q_1$ лінійних алгебричних рівнянь.

Дано інтегральне зображення залишку $R_{M-2} f(x) = (I - T_{M-2}) f(x)$, якщо $f(x) \in C^q(\Omega)$, $1 \leq q \leq M-1$, $\Omega \subset \mathbf{R}^3$.

Уведемо до розгляду $M (M \geq 3)$ площин $\Pi_i : \omega_i(x) = 0$, $i = \overline{1, M}$; $\omega_i(x) =: \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_j - p_i$; $\nu_i = (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}) \perp \Pi_i$, $|\nu_i|^2 = \sum_{j=1}^3 a_{ij}^2 = 1$. На них накладемо такі обмеження:

1^0 . Жодні чотири площини не перетинаються в одній точці: $\Pi_i \cap \Pi_j \cap \Pi_k \cap \Pi_l = \emptyset \forall i, j, k, l \in \mathcal{M} = \{1, 2, \dots, M\}, i \neq j \neq k \neq l$.

2⁰. Кожна площина $\Pi_j \in \{\Pi_i\}$ перетинається з усіма іншими площинами: $\Pi_i \cap \Pi_j = \Gamma_{ij} \neq \emptyset$; $\Omega \cap \Gamma_{ij} = \Gamma_{ij}^* \neq \emptyset \forall i, j \in \mathcal{N}_2 = \{i, j \in \mathcal{M} | i \neq j\}$, тобто серед площин $\{\Pi_i\}$ нема паралельних і кожна пряма Γ_{ij} перетинає область Ω .

3⁰. Кожні три площини перетинаються в одній точці, яка належить області Ω : $\Pi_i \cap \Pi_j \cap \Pi_k = A_{ijk} \neq \emptyset$, $A_{ijk} \in \Omega$, $(i, j, k) \in \mathcal{N}_3 = \{i, j, k \in \mathcal{M} | i \neq j \neq k\}$.

4⁰. Для чисел $\delta_{ij} := \int_{\Gamma_{ij}^*} H_{ij}^*(x) ds$ виконуються нерівності

$$\delta_{ij} := \int_{\Gamma_{ij}^*} H_{ij}^*(x) ds \neq 0, \quad H_{ij}^*(x) := \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i, j}}^M \omega_l(x), \quad (i, j) \in \mathcal{N}_2.$$

Тут і далі використовуємо такі позначення:

$$H_{ij}(x) = H_{ij}^*(x) / \delta_{ij},$$

$$\int_{\Gamma_{ij}^*} g(x) ds = |\Gamma_{ij} : x(t) = x^0 + (\nu_i \times \nu_j)t = (x_1(t), x_2(t), x_3(t)), \alpha_{ij} \leq t \leq$$

$$\leq \beta_{ij}, x^0 = (x_{10}, x_{20}, x_{30}) \in \Gamma_{ij}| = \int_{\alpha_{ij}}^{\beta_{ij}} g(x(t)) \sqrt{\dot{x}_1^2(t) + \dot{x}_2^2(t) + \dot{x}_3^2(t)} dt,$$

$$\dot{x}_k(t) = \frac{dx_k(t)}{dt}; h_{123}(x) = 1, \quad M = 3; \quad h_{ijk}(x) = \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i, j, k}}^M \frac{\omega_l(x)}{\omega_l(A_{ijk})}, \quad M > 3,$$

$$I_{M-3}f(x) := \sum_{(i, j, k) \in \mathcal{N}_3} f(A_{ijk}) h_{ijk}(x),$$

$$K(\Omega) := \left\{ f(x) \in C(\Omega) \mid \int_{\Gamma^*} f(x) ds < \infty \forall \Gamma^* = \Gamma \cap \Omega \neq \emptyset \right\}.$$

Теорема 5.2.3 *Хай $f(x) \in K(\Omega)$. Тоді оператор*

$$T_{M-2}f(x) = \sum_{(i, j) \in \mathcal{N}_2} H_{ij}(x) \left[\gamma_{ij} - \int_{\Gamma_{ij}} I_{M-3}f(x) ds \right] + I_{M-3}f(x) \quad (5.2.14)$$

задовольняє умови

$$\int_{\Gamma_{\mu\nu}} T_{M-2}f(x) ds = \gamma_{\mu\nu} := \int_{\Gamma_{\mu\nu}} f(x) ds \forall (\mu, \nu) \in \mathcal{N}_2, \quad (5.2.15)$$

$$T_{M-2}x^\alpha \equiv x^\alpha, \quad 0 \leq |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \leq M - 2, \quad (5.2.16)$$

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3}, \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3).$$

Теорема 5.2.4. *Хай $f(x) \in K(\Omega) \cap C^q(\Omega)$ ($1 \leq q \leq M - 1$). Тоді для залишку $R_{M-2}f(x) = f(x) - T_{M-2}f(x)$ справедлива рівність $\forall x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}) \in \Omega$:*

$$\begin{aligned} R_{M-2}f(x) &= \int_0^1 \left[\frac{\partial^q}{\partial t^q} f(x^{(0)} + t(x - x^{(0)})) \right] \frac{(1-t)^{q-1}}{(q-1)!} dt - \\ &- \sum_{(i,j) \in \mathcal{N}_2} H_{ij}(x) \left\{ \int_{\Gamma_{ij}} ds \int_0^1 \left[\frac{\partial^q}{\partial t^q} f(x^{(0)} + t(x - x^{(0)})) \right] \frac{(1-t)^{q-1}}{(q-1)!} dt - \right. \\ &- \left. \int_{\Gamma_{ij}} ds \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i,j}} h_{ijk}(x) \int_0^1 \left[\frac{\partial^q}{\partial t^q} f(x^{(0)} + t(A_{ijk} - x^{(0)})) \right] \frac{(1-t)^{q-1}}{(q-1)!} dt \right\} + \\ &+ \sum_{(i,j,k) \in \mathcal{N}_3} h_{ijk}(x) \int_0^1 \left[\frac{\partial^q}{\partial t^q} f(x^{(0)} + t(A_{ijk} - x^{(0)})) \right] \frac{(1-t)^{q-1}}{(q-1)!} dt. \end{aligned}$$

Для доведення теорем 5.2.3 і 5.2.4 необхідно довести лему, подану нижче.

Лема 5.2.2. *Інтерполяційний оператор $I_{M-3}f(x)$ має такі властивості:*

$$I_{M-3}f(A_{ijk}) = f(A_{ijk}) \quad \forall (i, j, k) \in \mathcal{N}_3, \quad (5.2.17)$$

$$I_{M-3}x^\alpha = x^\alpha \quad (0 \leq |\alpha| \leq M - 3), \quad (5.2.18)$$

$$\forall f(x) \in C^q(\Omega), \quad 1 \leq q \leq M - 2 \Rightarrow f(x) = (I_{M-3} + r_{M-3})f(x),$$

$$\begin{aligned} r_{M-3}f(x) &= \int_0^1 \left[\frac{\partial^q}{\partial t^q} f(x^{(0)} + t(x - x^{(0)})) \right] \frac{(1-t)^{q-1}}{(q-1)!} dt - \\ &- \sum_{(i,j,k) \in \mathcal{N}_3} h_{ijk}(x) \int_0^1 \left[\frac{\partial^q}{\partial t^q} f(x^{(0)} + t(A_{ijk} - x^{(0)})) \right] \frac{(1-t)^{q-1}}{(q-1)!} dt. \end{aligned} \quad (5.2.19)$$

Зауваження 3. Розв'язок системи (5.2.15) дає поліном, котрий має дані проєкції на Q прямих. При цьому слід розв'язувати не Q рівнянь, а $Q - M$ рівнянь при $Q = C_M^2$.

В и с н о в о к 1. Існує єдиний набір чисел $\{\gamma_{ij}\}; \{c_{ijk}\}$, для якого поліном $T_{M-2}(\{\gamma_{ij}\}; \{c_{ijk}\}; x) :=$

$$=: \sum_{(i,j) \in \mathcal{N}_2} H_{ij}(x) \left[\gamma_{ij} - \int_{\Gamma_{ij}} \sum_{(i',j',k') \in \mathcal{N}_3} c_{i'j'k'} h_{i'j'k'}(x) ds \right] + \\ + \sum_{(i',j',k') \in \mathcal{N}_3} c_{i'j'k'} h_{i'j'k'}(x)$$

тотожно збігається з фіксованим поліномом степеня $M - 2$:

$$\forall P_{M-2}(x) \exists! \gamma_{ij}, c_{ijk} \in \mathbf{R} : T_{M-2}(\{\gamma_{ij}\}; \{c_{ijk}\}; x) \equiv P_{M-2}(x).$$

В и с н о в о к 2. Функція $T_{M-2}(\{\gamma_{ij}\}; c_{ijk}; x)$ задовольняє умови

$$\int_{\Gamma_{\mu\nu}} T_{M-2}(\{\gamma_{ij}\}; \{c_{ijk}\}; x) ds = \gamma_{\mu\nu} \forall (\mu, \nu) \in \mathcal{N}_3 \forall c_{ijk} \in \mathbf{R}.$$

Тому, ввівши додаткову множину прямих Γ_μ , $\mu = \overline{Q_1 + 1, Q_2}$, $Q_1 = C_M^2$, $\Gamma_\mu \cap \Omega \neq \emptyset$, знайдемо невідомі c_{ijk} із системи лінійних алгебричних рівнянь (при $Q_2 = Q = C_M^3$)

$$\int_{\Gamma_\mu} T_{M-2}(\{\gamma_{ij}\}; \{c_{ijk}\}; x) ds = \gamma_\mu =: \int_{\Gamma_\mu} f(x) ds \quad (\mu = \overline{Q_1 + 1, Q_2}),$$

або із системи рівнянь (при $Q_2 > Q$)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial c_{ijk}} = 0, \quad (i, j, k) \in \mathcal{N}_3, \quad \dim \mathcal{N}_3 = Q - Q_1,$$

$$\Phi =: \sum_{\mu=Q_1+1}^{Q_2} \left[\int_{\Gamma_\mu} T_{M-2}(\{\gamma_{ij}\}; \{c_{ijk}\}; x) ds - \gamma_\mu \right]^2 + \\ + \beta \|T_{M-2}(\{\gamma_{ij}\}; \{c_{ijk}\}; *)\|_{L_2(\Omega)} \rightarrow \min_{c_{ijk}}.$$

5.3. Оператори з коефіцієнтами Фур'є $a_0(f), \dots, a_n(f)$, які інтерполюють функцію $f(x)$ у точках $x = x_1, \dots, x = x_r$

Хай $f(x) \in C^q(I)$, $I = [0, 1]$, $q \geq 1$.

Теорема 5.3.1. *Хай $x_k = kh = k/r$, $k = \overline{1, r}$, $h = 1/r$. Тоді система $\varphi_{n,r,k}(x)$, $k = \overline{1, r}$ тригонометричних поліномів степеня $n + r$, що визначаються формулами*

$$\varphi_{n,r,k}(x) = \frac{1}{r} \sum_{j=1}^r e^{i2\pi(n+j)(x-x_k)}, \quad k = \overline{1, r}, \quad (5.3.1)$$

задовольняє умови

$$\varphi_{n,r,k}(x_p) = \delta_{k,p}, \quad k, p = \overline{1, r}. \quad (5.3.2)$$

Д о в е д е н н я. Хай $p = k$. Тоді, врахувавши, що $e^0 = 1$, отримаємо $\varphi_{n,r,k}(x_k) = 1$. Припустимо, що $p \neq k$. У результаті матимемо:

$$\begin{aligned} \varphi_{n,r,k}(x_p) &= \frac{1}{r} \sum_{j=1}^r e^{i2\pi(n+j)(x_p-x_k)} = \\ &= \frac{1}{r} e^{i2\pi(n+1)\frac{p-k}{r}} \sum_{j=1}^r e^{i2\pi(j-1)\frac{p-k}{r}} = \frac{1}{r} e^{i2\pi(n+1)\frac{p-k}{r}} \sum_{j=1}^r \left(e^{i2\pi\frac{p-k}{r}} \right)^{j-1} = \\ &= \left(1 + q + q^2 + \dots + q^{r-1} = \frac{1-q^r}{1-q} \right) = \\ &= \frac{1}{r} e^{i2\pi(n+1)\frac{p-k}{r}} \frac{1 - \left(e^{i2\pi\frac{p-k}{r}} \right)^r}{1 - e^{i2\pi\frac{p-k}{r}}} = \frac{1}{r} e^{i2\pi(n+1)\frac{p-k}{r}} \frac{1 - e^{i2\pi(p-k)}}{1 - e^{i2\pi\frac{p-k}{r}}} = 0, \end{aligned}$$

$p \neq k$, $p, k = \overline{1, r}$. Тут використано рівність

$$e^{\pm i2\pi(p-k)} = \cos 2\pi(p-k) \pm i \sin 2\pi(p-k) = 1, \quad \forall k, p = 1, 2, \dots$$

Таким чином доведено, що $\varphi_{n,r,k}(x_p) = \delta_{k,p}$, $k, p = \overline{1, r}$.

Теорему 5.3.1 доведено.

Теорема 5.3.2. *Хай $x_k = k/r$, $k = \overline{1, r}$. Для дійсних частин $R\varphi_{n,r,k}(x) = \operatorname{Re}\varphi_{n,r,k}(x) = \frac{1}{r} \sum_{j=1}^r \cos(2\pi(n+j)(t-x_k))$ та уявних $\varphi_{n,r,k}^*(x) = \operatorname{Im}\varphi_{n,r,k}(x) = \frac{1}{r} \sum_{j=1}^r \sin(2\pi(n+j)(t-x_k))$ функцій $\varphi_{n,r,k}(x)$ виконуються співвідношення*

$$\int_0^1 R\varphi_{n,r,k}(x) dx = \int_0^1 \varphi_{n,r,k}^*(x) dx = 0, \quad k = \overline{1, r}.$$

Д о в е д е н н я в и т і к а є з р і в н о с т е й $\int_0^1 e^{i2\pi(n+j)(t-k/r)} dt = 0, j = 0, 1, \dots; n = 0, 1, \dots; n + j \neq 0$.

Н а с л і д о к. Отже, оператор

$$L_{1,0,r}(f, x) = \int_0^1 f(t) dt + \sum_{k=1}^r [f(x_k) - \int_0^1 f(t) dt] \frac{1}{r} \sum_{j=1}^r \cos(2\pi j(x - \frac{k}{r}))$$

має властивості, визначені співвідношеннями

$$\int_0^1 L_{1,0,r}(f, t) dt = \int_0^1 f(t) dt, \quad L_{1,0,r}(f, \frac{p}{r}) = f(\frac{p}{r}), \quad p = 1, 2, \dots, r.$$

Тобто оператори $L_{1,0,r}(f, x)$ інтерполюють функцію $f(t)$ у точках $p/r, p = 1, \dots, r$ і також мають таке ж значення інтегралу $\int_0^1 L_{1,0,r}(f, t) dt$, що і функція $f(t)$.

5.4. Оператори з коефіцієнтами Фур'є $a_{ij}(f), i, j \in \{0, \dots, n\}$, які інтерполюють функцію $f(x, y)$ у r^2 точках $x = x_k, y = y_l, k, l \in \{1, \dots, r\}$

Введемо позначення $x_k = \frac{k}{r}, y_l = \frac{l}{r}, k, l = \overline{0, r}$. Будемо використовувати також позначення $\psi_{n,r,k}(x) = R\varphi_{n,r,k}(x)$ для функцій, введених у попередньому підрозділі.

Теорема 5.4.1. *Хай $f(x, y) \in C^{1,1}(I^2)$. Оператор $L_{n,r}(f; x, y)$,*

$$\begin{aligned} L_{n,r}(f; x, y) &= \frac{a_{00}}{4} + \sum_{i=1}^n \frac{a_{i0}}{2} \cos i2\pi x + \sum_{j=1}^n \frac{a_{0j}}{2} \cos j2\pi y + \\ &+ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \cos i2\pi x \cos j2\pi y + \\ &+ \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^r \left\{ \left[f(x_k, y_l) - \left(\frac{a_{00}}{4} + \sum_{i=1}^n \frac{a_{i0}}{2} \cos i2\pi x_k + \sum_{j=1}^n \frac{a_{0j}}{2} \cos j2\pi y_l + \right. \right. \right. \\ &\left. \left. \left. + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \cos i2\pi x_k \cos j2\pi y_l \right) \right] \psi_{n,r,k}(x) \psi_{n,r,l}(y) \right\}, \quad (5.4.1) \end{aligned}$$

де

$$a_{ij} = 4 \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) \cos i2\pi x \cos j2\pi y \, dx dy, \quad i, j = \overline{0, n},$$

$\varphi_{n,r,k}(x)$ визначаються формулою (5.3.1), має такі властивості:

$$L_{n,r}(f; x_\mu, y_\nu) = f(x_\mu, y_\nu), \quad \mu, \nu = \overline{1, r}, \quad (5.4.2)$$

$$4 \int_0^1 \int_0^1 L_{n,r}(f; x, y) \cos p2\pi x \cos q2\pi y \, dx dy = a_{pq}, \quad p, q = \overline{0, n}. \quad (5.4.3)$$

Д о в е д е н н я . Властивості (5.4.2) доводяться безпосередньо перевіркою із врахуванням наступних рівностей

$$\psi_{n,r,k}(x_\mu) \psi_{n,r,l}(y_\nu) = \delta_{k,\mu} \delta_{l,\nu}, \quad \mu, \nu = \overline{1, r}.$$

Властивості (5.4.3) витікають з того, що

$$\int_0^1 \int_0^1 \psi_{n,r,k}(x) \psi_{n,r,l}(y) \cos p2\pi x \cos q2\pi y \, dx dy = 0, \quad p, q = \overline{0, n}$$

$$4 \int_0^1 \int_0^1 T_{n,n}(x, y) \cos p2\pi x \cos q2\pi y \, dx dy = a_{p,q}, \quad p, q = \overline{0, n},$$

$$T_{n,n}(x, y) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n b_{i,j} \cos i2\pi x \cos j2\pi y,$$

$\forall b_{i,j} = a_{i,j} 2^{-c}$, $c = 2$, якщо $i = 0, j = 0$; $c = 1$, якщо $i = 0, j > 0$ або $i > 0, j = 0$; $c = 0$, якщо $i > 0, j > 0$.

5.5. Оператори сплайн-інтерлінації із заданими проєкціями на системі прямих, паралельних осям координат

5.5.1. Загальні твердження

Викладемо загальний метод наближеного розв'язання плоскої задачі РКТ за допомогою інтерлінації функцій.

Припустимо, що досліджуваний об'єкт повністю розміщений у підобласті G одиничного квадрата: $\text{supp } f = G \subseteq E^2$, $E = [0, 1]$ (хоч

це обмеження не є істотним). Позначимо його невідому густину через $f(x, y)$ і вважатимемо, що $f(x, y) = 0$, $(x, y) \notin G$. Проведемо через область G прямі Γ_k , $k = \overline{1, N}$. Вважатимемо відомими інтеграли вздовж цих прямих (проекції або дані Радона)

$$\begin{aligned} \gamma_k &= \int_{\Gamma_k} f(x, y) ds = |\Gamma_k : x = x_k(t_k), y = y_k(t_k), a_k \leq t_k \leq b_k| \Rightarrow \\ &\Rightarrow \gamma_k := \int_{a_k}^{b_k} f(x_k(t_k), y_k(t_k)) \sqrt{(\dot{x}_k)^2 + (\dot{y}_k)^2} dt, \quad k = \overline{1, N}. \end{aligned}$$

Побудуємо оператор інтерлінації $O_N(\{f_k\}; U; x, y)$, який інтерлінує функцію f на вибраній системі прямих Γ_k , $k = \overline{1, N}$, тобто задовольняє такі умови: $O_N(\{f_k\}; U; x, y) =$

$$= f(x, y) = f(x_k(t_k), y_k(t_k)) = f_k(t_k), \quad (x, y) \in \Gamma_k, \quad (5.5.1)$$

де t_k – деякий параметр на прямій Γ_k ; $U = [u_{ij}]_{i=\overline{1, r}}^{j=\overline{1, p}}$ – деяка матриця невідомих сталих.

Теорема 5.5.1. *Існують такі оператори $J_k = J_k(\gamma_k; U; t_k) \approx f_k(t_k)$, $k = \overline{1, N}$, що оператор $O_N(\{J_k\}; U; x, y)$ задовольняє рівності*

$$\int_{\Gamma_p} O_N(\{J_k\}; U; x, y) ds = \gamma_p, \quad p = \overline{1, N} \quad (5.5.2)$$

незалежно від вибору матриці U .

Д о в е д е н н я. Викладемо алгоритм фактичної побудови такого оператора. Він складається з двох кроків.

Крок 1. Припустимо, що кожна пряма з вибраної сім'ї прямих $\{\Gamma_k\}$ перетинається з усіма іншими, тобто серед них нема паралельних прямих (це обмеження не є істотним). Хай

$$\Gamma_k \cap \Gamma_i = A_{ki}, \quad i, k = \overline{1, N}, \quad f(A_{ki}) = U_{ki} = U_{ik}.$$

Будуємо систему функцій однієї змінної $f_k(t_k)$, $k = \overline{1, N}$ з властивостями (при $i = \overline{1, N}$, $i \neq k$; $k = \overline{1, N}$)

$$\int_{a_k}^{b_k} f_k(t_k) \sqrt{(\dot{x}_k)^2 + (\dot{y}_k)^2} dt_k = \gamma_k, \quad f_k(t_{ki}) = U_{ki}, \quad (5.5.3)$$

де t_{ki} — значення параметра t_k , що відповідає точкам A_{ki} перетину прямої Γ_k з іншими прямими Γ_i .

Побудова таких функцій може бути виконана методом, викладеним у підрозд. 5.3.

Крок 2. Підставляємо ці функції у формулу для інтерлінанта $O_N(\{f_k\}; U; x, y)$, тобто робимо заміну $J_k = f_k$, $k = \overline{1, N}$. При цьому треба перейти від змінної t_k до змінних x, y за допомогою формул $t_k = t_k(x, y)$: якщо $\Gamma_k : \omega_k(x, y) := a_k x + b_k y - c_k = 0$, то $t_k = t_k(x, y) = b_k x - a_k y$.

Враховавши властивості (5.5.1) побудованого інтерлінанта, отримуємо (при $p = \overline{1, N}$):

$$\int_{\Gamma_p} O_N(\{J_k\}; U; x, y) ds = \int_{a_p}^{b_p} f_p(t_p) \sqrt{(\dot{x}_p)^2 + (\dot{y}_p)^2} dt_p = \gamma_p. \quad (5.5.4)$$

Теорему 5.5.1 доведено.

5.5.2. Оператори сплайн-інтерлінації з даними проєкціями на прямих, паралельних осям координат

У сучасних рентгенівських томографах використовується в основному п'ять схем сканування, так чи інакше пов'язаних із переміщенням випромінювача рентгенівських променів і детекторів (приймачів) по колу навколо об'єкта. Продемонструємо викладений вище метод на прикладі наближеного розв'язання плоскої задачі комп'ютерної томографії, згідно з яким проєкції задаються на системі прямих, паралельних осям координат.

Хай $x_i = i/(m+1)$, $i = \overline{0, m+1}$, $\gamma_i^2 = \int_0^1 f(x_i, y) dy$, $y_j = j/(n+1)$, $\gamma_j^1 = \int_0^1 f(x, y_j) dx$, $j = \overline{1, n}$ — задані числа.

Теорема 5.5.2. *Задамо оператор $O_{MN}(x, y) := O_{MN}(\{\gamma_i^2, \gamma_j^1\}; x, y)$,*

$$O_{MN}(x, y) = \sum_{i=1}^m h_i(x) \left[\gamma_i^{(2)} + \sum_{j=1}^n (U_{ij} - \gamma_i^{(2)}) \phi_j(y) \right] + \quad (5.5.5)$$

$$+ \sum_{j=1}^n H_j(y) \left[\gamma_j^{(1)} + \sum_{i=1}^m (U_{ij} - \gamma_j^{(1)}) \psi_i(x) \right] - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n h_i(x) H_j(y) U_{ij},$$

де $\psi_i(x) = \frac{1}{r} \sum_{j=1}^r \cos(2\pi j(x - \frac{i}{r}))$ (аналогічно знаходять функції $\phi_j(y)$);

$h_i(x), i = \overline{1, m}; H_j(y), j = \overline{1, n}$ -базисні інтерполяційні сплайни з властивостями

$$h_i(x_p) = \delta_{i,p}, i, p = \overline{1, m},$$

$$H_j(y_q) = \delta_{j,q}, j, q = \overline{1, n}.$$

Тоді

$$\int_0^1 O_{MN}(x_k, y) dy = \int_0^1 F(x_k, y) dy = \gamma_k^{(2)}, \quad k = \overline{1, m},$$

$$\int_0^1 O_{MN}(x, y_j) dx = \int_0^1 F(x, y_j) dx = \gamma_j^{(1)}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Зауваження 1. У цій формулі можуть бути задані тільки числа $\gamma_k^{(2)}, \gamma_j^{(1)}$ (дані проєкції, які надходять від томографа). Інтерполяційні дані U_{kl} є невідомими величинами. Знайдемо їх із умови

$$I = \sum_{\nu=0}^1 \alpha_\nu \left\{ \sum_{i=1}^m \int_0^1 \left[\frac{d^\nu}{dy^\nu} \left(\gamma_i^{(2)} + \sum_{j=1}^n (U_{ij} - \gamma_i^{(2)}) \phi_j(y) \right) \right]^2 dy + \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^n \int_0^1 \left[\frac{d^\nu}{dx^\nu} \left(\gamma_j^{(1)} + \sum_{i=1}^m (U_{ij} - \gamma_j^{(1)}) \psi_j(x) \right) \right]^2 dx \right\} + \quad (5.5.6)$$

$$+ \alpha \sum_{k=1}^m \sum_{\ell=1}^n U_{k,\ell}^2 \rightarrow \min_{U_{k,\ell}}, \alpha_0, \alpha_1 \geq 0, \alpha_0 + \alpha_1 = 1.$$

α -параметр регуляризації. Обґрунтуємо вигляд функціоналу (5.5.6). Класична схема апроксимації функції n змінних $f(x), x = (x_1, \dots, x_n), x \in D \subset \mathbf{R}^n$ за допомогою даних функціоналів $z_i = \gamma_i(f), i = \overline{1, M}$ у вигляді деякої функції $F(x, c_1, \dots, c_M)$ може бути зображена у вигляді

$$J(c) := \sum_{i=1}^M \alpha_i (\gamma_i(F(*, c_1, \dots, c_M)) - z_i)^2 + \sum_{|j|=0}^Q \beta_j \|D^j F\|_{L_2(D)}^2 \rightarrow \min_{c_1, \dots, c_M}, \quad (5.5.7)$$

де $\alpha_i > 0, i = \overline{1, M}, \beta_j \geq 0$ – вагові коефіцієнти, $c = (c_1, \dots, c_M)$,

$$\sum_{i=1}^M \alpha_i = 1, \sum_{|j|=0}^Q \beta_j = 1,$$

$$D^j F = \frac{\partial^{|j|} F}{\partial_1^{j_1} \dots \partial_n^{j_n}}, j = (j_1, \dots, j_n).$$

Якщо ж формула $F(x, c_1, \dots, c_M)$ вибрана так, що $\gamma_i(F(*, c_1, \dots, c_M)) = z_i, i = \overline{1, M} \forall c_1, \dots, c_M \in \mathbf{R}$, то перша група доданків у цьому виразі дорівнює нулю. Тобто в цьому випадку мінімізувати треба тільки другу групу доданків. Зокрема, якщо z_i – проекції вздовж прямих Γ_i , то отримуємо функціонал (5.5.6).

Розв'язання задачі (5.5.6) відносно невідомих U_{kl} зводиться до такої системи лінійних алгебричних рівнянь (при $p = \overline{1, m}, q = \overline{1, n}$):

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial U_{pq}} = \sum_{\nu=0}^1 \alpha_{\nu} \left\{ \int_0^1 \left[\frac{d^{\nu}}{dy^{\nu}} \left(\gamma_p^{(2)} + \sum_{j=1}^n (U_{pj} - \gamma_p^{(2)}) \phi_j(y) \right) \right] \frac{d^{\nu}}{dy^{\nu}} \phi_q(y) dy + \right. \\ \left. + \int_0^1 \left[\frac{d^{\nu}}{dx^{\nu}} \left(\gamma_q^{(1)} + \sum_{i=1}^m (U_{iq} - \gamma_q^{(1)}) \psi_i(x) \right) \right] \frac{d^{\nu}}{dx^{\nu}} \psi_p(x) dx \right\} + \\ + \alpha U_{p,q} = 0 \end{aligned} \quad (5.5.8)$$

Розв'яжемо цю систему методом регуляризації А.Н. Тихонова і знайдені числа $U_{k,l}$ підставимо у формулу $O_{MN}(x, [U_{k,l}]) = O_{MN}(x)$

Зауваження 2. Умову (5.5.8) можна розглядати як деякий дискретний аналог написаної нижче умови

$$\Phi(U) \rightarrow \min_{U_{kl}} \quad (5.5.9)$$

де

$$\Phi(U) = \int_0^1 \int_0^1 O_{m,n}^2(\{\gamma_k^2\}; \{\gamma_l^1\}; U; x, y) dx dy + \alpha \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n U_{kl}^2.$$

Умова (5.5.9) може бути отримана з умови (5.5.7) при $Q = 0$.

Зауважимо, що вище розглянуто найбільш простий випадок, коли проекції $\{\gamma_k^2\}; \{\gamma_l^1\}$ отримуються лише у двох взаємно перпендикулярних напрямках. Загальний випадок використовує аналогічний підхід.

Запитання і вправи для самостійної роботи

1. Доведіть теореми 5.2.1 та 5.2.2. (див. Литвин О.М. [5, розд.5]).
2. Очевидно, що кожна пряма Γ_k , $k = \overline{M+1, Q}$ не повинна збігатися з жодною прямою Γ_k , $k = \overline{1, M}$ і її положення визначається з умови, згідно з якою детермінант системи алгебричних рівнянь (5.2.15) не дорівнює нулю при $Q = C_M^2$.
3. Доведіть лему 5.2.2. та теореми 5.2.3, 5.2.4 (О.М. Литвин [5, розд.5]).
4. Із викладеного вище можна зробити висновок, що існують такі набори прямих (площин), при яких поліноми, побудовані за описаними алгоритмами, дають найкраще наближення до функції $f(x)$. Як знайти розміщення цих прямих (площин)?
5. Припустимо, що ми вибрали найпростіший варіант вибору вузлів у теоремі 5.3.1 у вигляді $x_k = a + kh$, $k = \overline{1, r}$, де $a, h \in (0, 1)$ —деякі числа. Як можна вибрати числа $a, h \in (0, 1)$, щоб усі вузли $x_k \in [0, 1]$, $k = \overline{1, r}$ були розміщені симетрично відносно середини відрізка $[0, 1]$? (О.М. Литвин [5, розд. 5]).
6. Напишіть оператори $L_{1,n,r}(f; x)$ у більш загальному вигляді, що включає загальний розклад як по косинусах, так і по синусах кратних дуг (О.М. Литвин [5, розд. 5]).
7. Звертаємо увагу на те, що властивості (5.2.2) виконуються для довільної системи прямих Γ_l , $l = \overline{1, M}$, що задовольняє умову 3, а тотожності (5.2.3) вдалося довести лише для системи прямих, що задовольняють умови $1^0 - 3^0$. Чи не можна послабити умову 2^0 на взаємне розміщення системи прямих Γ_k , $k = \overline{1, M}$, допускаючи наявність паралельних прямих? Якщо можна, сформулюйте і доведіть заново твердження теорем 5.2.1 та 5.2.2. (Відповідь: можна).
8. Доведіть теорему 5.3.3 і наслідок (О.М. Литвин [5, розд.5]).
9. Доведіть теореми 5.4.1 та 5.4.2 (О.М. Литвин [5, розд.5]).
10. Запишіть оператори $L_{n,r}(f; x, y)$, $r = (r_1, r_2)$ також у більш загальному вигляді, що включає загальний розклад як по косинусах, так і по синусах кратних дуг без використання детермінантів (О.М. Литвин [5, розд.5]).
11. Напишіть явні формули для коефіцієнтів і правих частин системи лінійних алгебраїчних рівнянь (5.5.8). Проведіть обчислювальний експеримент з метою дослідження точності такого методу. При цьому не слід забувати, що такий метод може дати точне відновлення лише функцій вигляду $f(x, y) = \xi(x) + \eta(y)$.
12. Доведіть теорему 5.5.2 (О.М. Литвин [5, розд. 5]).
13. Як з (5.5.7) отримати (5.5.9)?

Глава 6. Кубатурні формули

6.1. Кубатурні формули на основі інтерлінації функцій

6.1.1. Кубатурні формули на основі сплайн-інтерполяції підінтегральної функції

Задача наближеного обчислення кратних інтегралів

$$I(f) = \int \cdots \int_D f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n,$$

де $D \subset \mathbf{R}^n$, є однією з найважливіших задач обчислювальної математики. Для її розв'язання у випадках областей інтегрування D простої форми (прямокутник, коло, куля) ефективно використовується метод послідовного застосування квадратурних формул за змінними x_1, \dots, x_n відповідно. Цей метод безпосередньо пов'язаний з формулою зведення кратного інтеграла до повторного: $D = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \Rightarrow$

$$\Rightarrow I(f) = \int_{a_1}^{b_1} \left\{ \int_{a_2}^{b_2} \left\{ \cdots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, x_n) dx_n \cdots \right\} dx_2 \right\} dx_1$$

та обчислення кожного з інтегралів за змінними x_n, x_{n-1}, \dots, x_1 за допомогою відповідних квадратурних формул.

Наприклад, хай $n = 2$, $a_k \leq x_{k,1} < \cdots < x_{k,N_k} \leq b_k$, $k = 1, 2$,

$$\int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \approx I_{1,N_1}(f) := \sum_{k_1=1}^{N_1} c_{1,k_1} \int_{a_2}^{b_2} f(x_{1,k_1}, x_2) dx_2,$$

$$\int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} f(x_1, x_2) dx_2 \approx I_{2,N_2}(f) := \sum_{k_2=1}^{N_2} c_{2,k_2} \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_{2,k_2}) dx_1.$$

Тоді відповідна кубатурна формула може бути записана у вигляді

$$\begin{aligned} \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 &\approx I_{1,N_1}(I_{2,N_2}(f)) = I_{2,N_2}(I_{1,N_1}(f)) = \\ &= \sum_{k_1=1}^{N_1} c_{1,k_1} \sum_{k_2=1}^{N_2} c_{2,k_2} f(x_{1,k_1}, x_{2,k_2}). \end{aligned} \quad (6.1.1)$$

Важлива характеристика таких кубатурних формул (6.5.1) полягає в тому, що залишок $r_N(f) := I(f) - I_{1,N_1}(I_{2,N_2}(f)) = I(f) - I_N(f)$, $N =$

(N_1, N_2) наближення інтегралів за їх допомогою задовольняє співвідношення

$$r_{N_1, N_2}(f) = (I - I_{1, N_1})(f) + (I - I_{2, N_2})(f) - \quad (6.1.2)$$

$$-(I - I_{1, N_1})((I - I_{2, N_2})(f)) = r_{1, N_1}(f) + r_{2, N_2}(f) - r_{1, N_1}(r_{2, N_2}f),$$

де $r_{i, N_i}(f) = I(f) - I_{i, N_i}(f)$, $i = 1, 2$. З цієї рівності випливає, що у випадку

$$r_{i, N_i}(f) = O\left(\frac{1}{N_i^p}\right), N_i \rightarrow \infty, i = 1, 2, p > 0,$$

отримаємо асимптотичну рівність (при $\tilde{N} = \min\{N_1, N_2\}$)

$$r_N(f) = O\left(\frac{1}{N_1^p}\right) + O\left(\frac{1}{N_2^p}\right) + O\left(\frac{1}{(N_1 N_2)^p}\right) = O\left(\frac{1}{\tilde{N}^p}\right), \tilde{N} \rightarrow \infty.$$

Н а с л і д о к. Похибка двовимірної кубатурної формули $I_N(f)$ асимптотично наближається до більшої з двох похибок квадратурних формул. Аналогічну похибку мають і кубатурні формули для функцій n ($n \geq 3$) змінних.

Зауваження 1. До кубатурних формул (6.1.1) можна прийти шляхом заміни підінтегральної функції відповідним сплайном

$$I_{1, N_1}(I_{2, N_2}(f)) = I(\text{sp}_N f), \quad (6.1.3)$$

$$\text{sp}_N f(x_1, x_2) = \sum_{k=1}^{N_1} \sum_{l=1}^{N_2} f(x_{1,k}, x_{2,l}) \text{sp}_{1,k}(x_1) \text{sp}_{2,l}(x_2),$$

де $\text{sp}_{1,k}(x_1) = \text{sp}_{1, N_1, k}(x_1)$, $\text{sp}_{2,l}(x_2) = \text{sp}_{2, N_2, l}(x_2)$ — фундаментальні сплайни степенів $0, 1, 2, 3, \dots$ з властивостями $\text{sp}_{i,k}(x_{i,j}) = \delta_{j,k}$, $1 \leq j, k \leq N_i$, $i = 1, 2$. Для таких сплайнів справедливе зображення $\text{sp}_N(x_1, x_2) = \text{Sp}_{1, N_1} \text{Sp}_{2, N_2} f(x_1, x_2)$, де

$$\text{Sp}_{i, N_i} f(x_1, x_2) = \sum_{j=1}^{N_i} f(x_1, x_2)|_{x_i=x_{i,j}} \text{sp}_{i,j}(x_i), \quad i = 1, 2.$$

У результаті інтегрування отримаємо

$$I(\text{sp}_N f) = \sum_{k=1}^{N_1} \sum_{l=1}^{N_2} f(x_{1,k}, x_{2,l}) c_{1,k} c_{2,l},$$

$$c_{1,k} = \int_0^1 \text{sp}_{1,k}(x_1) dx_1, \quad c_{2,l} = \int_0^1 \text{sp}_{2,l}(x_2) dx_2.$$

Числа $c_{1,k}, c_{2,l}$ не залежать від функції f , і тому їх треба обчислювати тільки один раз. Враховуючи формули $\text{sp}_N f = S_{1,N_1} S_{2,N_2} f$, $(I - \text{sp}_N)f(x_1, x_2) = (I - S_{1,N_1} S_{2,N_2})f(x_1, x_2) = ((I - S_{1,N_1}) + (I - S_{1,N_2}) - (I - S_{1,N_1})(I - S_{1,N_2}))f(x_1, x_2)$, для похибки кубатурної формули $R_N(f) = \int_0^1 \int_0^1 (I - \text{sp}_N)f(x_1, x_2) dx_1 dx_2$ отримаємо $R_N(f) = \int_0^1 \int_0^1 [(I - S_{1,N_1}) + (I - S_{1,N_2}) - (I - S_{1,N_1})(I - S_{1,N_2})]f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_0^1 R_{1,N_1} \left(\int_0^1 f(x, y) dy \right) dx + \int_0^1 R_{2,N_2} \left(\int_0^1 f(x, y) dx \right) dy - \int_0^1 R_{1,N_1} \left(\int_0^1 R_{1,N_2}(f) dx \right) dy$.

Зауваження 2. Якщо знаходиться інтеграл

$$\int_a^b dx_1 \int_{h1(x_1)}^{h2(x_1)} f(x_1, x_2) dx_2,$$

то викладене вище для інтеграла $\mathcal{I}(f) = \int_0^1 \int_0^1 f(x) dx$ має змінитися тільки в тій частині, яка стосується вигляду квадратурної формули для обчислення внутрішнього інтеграла. У цьому випадку кількість N_2 вузлів за змінною x_2 буде змінною: $N_2 = N_2(x_{1,k})$. Проте формули (6.1.1) і (6.1.2), а також наслідок щодо похибки залишаються без змін.

Нижче пропонується кубатурна формула для обчислення інтеграла $\mathcal{I}(f)$, де теж використовують квадратурні формули, але результат має по порядку вдвічі вищу точність.

Теорема 6.1.1. Якщо для наближеного обчислення інтеграла

$$\mathcal{I}(f) = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} f(x) dx$$
 використати формулу

$$\mathcal{I}(f) \approx \tilde{I}_N(f) := (I_{1,N_1} I_2 + I_1 I_{2,N_2} - I_{1,N_1} I_{2,N_2})(f), \quad (6.1.4)$$

$$I_k(f) = \int_{a_k}^{b_k} f(x) dx, \quad k = 1, 2,$$

то для залишку наближення $\tilde{R}_N(f) = (I - \tilde{I}_N)(f)$ виконуватиметься рівність

$$\tilde{R}_N(f) = r_{1,N_1} (r_{2,N_2} f).$$

Тобто отримуватиметься співвідношення

$$\tilde{R}_N(f) = O\left(\frac{1}{(N_1 N_2)^p}\right), \quad N_1, N_2 \rightarrow \infty.$$

Д о в е д е н н я. Запишемо

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(f) - \tilde{I}_N(f) &= (I_1 I_2 - I_{1,N_1} I_2 - I_1 I_{2,N_2} + I_{1,N_1} I_{2,N_2})(f) = \\ &= (I_1 - I_{1,N_1})(I_2 - I_{2,N_2})(f) = r_{1,N_1}(r_{2,N_2}(f)). \end{aligned}$$

Отже, отримано доведення відповідного співвідношення для залишку. Його оцінка впливає очевидним чином з оцінок одновимірних кубатурних формул

$$\mathcal{I}(f) - I_{k,N_k}(f) = O(N_k^{-p}), \quad k = 1, 2, p > 0.$$

Теорему 6.1.1 доведено.

Ця формула для наближеного обчислення інтеграла $\mathcal{I}(f)$ збігається до точного значення, якщо $N_1 \rightarrow \infty$ або $N_2 \rightarrow \infty$.

Ще раз підкреслимо, що класична кубатурна формула (6.1.1) $I_{1N_1}(I_{2,N_2})(f)$ збігається до точного значення тільки за умови, що $\tilde{N} \rightarrow \infty$, $\tilde{N} = \min\{N_1, N_2\}$, тобто обидві величини N_1, N_2 прямують до нескінченності.

Зауваження. Кубатурна формула (6.1.4) може бути отримана шляхом заміни підінтегральної функції відповідною сплайн-інтерплінаційною формулою

$$\tilde{I}_N(f) = I(O_N f), \quad (6.1.5)$$

$$O_N f(x) = (\text{sp}_{1,N_1} + \text{sp}_{2,N_2} - \text{sp}_{1,N_1} \text{sp}_{2,N_2})f(x), \quad x = (x_1, x_2).$$

У більш детальному записі формула (6.1.5) має вигляд

$$\begin{aligned} \tilde{I}_N(f) &= I(O_N f) = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \left(\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^{N_i} f(x_1, x_2) |_{x_i=x_{i,j}} \text{sp}_{i,j}(x_i) - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{k_1=1}^{N_1} \sum_{k_2=1}^{N_2} f(x_{1,k_1}, x_{2,k_2}) \text{sp}_{1,k_1}(x_1) \text{sp}_{2,k_2}(x_2) \right) dx_1 dx_2 = \\ &= \sum_{k_1=1}^{N_1} \int_{a_1}^{b_1} \text{sp}_{1,k_1}(x_1) dx_1 \int_{a_2}^{b_2} f(x_{1,k_1}, x_2) dx_2 + \\ &\quad + \sum_{k_2=1}^{N_2} \int_{a_2}^{b_2} \text{sp}_{2,k_2}(x_2) dx_2 \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_{2,k_2}) dx_1 - \end{aligned}$$

$$- \sum_{k_1=1}^{N_1} \sum_{k_2=1}^{N_2} \int_{a_1}^{b_1} \text{sp}_{1,k_1}(x_1) dx_1 \int_{a_2}^{b_2} \text{sp}_{2,k_2}(x_2) dx_2 f(x_{1,k_1}, x_{2,k_2}).$$

З цього виразу видно, що формули (6.5.4) і (6.5.5) фактично ще не є кубатурними формулами у звичайному розумінні цього терміна, бо для наближеного обчислення інтеграла $\mathcal{I}(f)$ треба ще знайти інтеграли

$$\int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_{2,l}) dx_1, 1 \leq l \leq N_2, \quad \int_{a_2}^{b_2} f(x_{1,k}, x_2) dx_2, 1 \leq k \leq N_1.$$

Ці інтеграли можна обчислювати за допомогою якої-небудь квадратурної формули з такою кількістю вузлових параметрів, яка б гарантувала збереження того самого порядку похибки:

$$\int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_{2,l}) dx_1 \approx I_{N_1^*, l}^*(f) = \sum_{p=1}^{N_1^*} c_{1,p} f(x_{1,p}^*, x_{2,l}), 1 \leq l \leq N_2,$$

$$\int_{a_2}^{b_2} f(x_{1,k}, x_2) dx_2 \approx I_{k, N_2^*}^*(f) = \sum_{q=1}^{N_2^*} c_{2,q} f(x_{1,k}, x_{2,q}^*), 1 \leq k \leq N_1,$$

$$\left| \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_{2,l}) dx_1 - I_{N_1^*, l}^*(f) \right| = o\left(\frac{1}{(N_1 N_2)^p}\right), 1 \leq l \leq N_2,$$

$$\left| \int_{a_2}^{b_2} f(x_{1,k}, x_2) dx_2 - I_{k, N_2^*}^*(f) \right| = o\left(\frac{1}{(N_1 N_2)^p}\right), 1 \leq k \leq N_1.$$

Очевидно, що ці асимптотичні співвідношення виконуються, якщо сталі N_1^*, N_2^* задовольняють умову $N_1^*, N_2^* > > N_1 N_2$.

У результаті отримуємо кубатурну формулу

$$\begin{aligned} AP_N(f) &= \sum_{k_1=1}^{N_1} \int_{a_1}^{b_1} \text{sp}_{1,k_1}(x_1) dx_1 I_{N_2^*, k_1}^*(f) + \\ &+ \sum_{k_2=1}^{N_2} \int_{a_2}^{b_2} \text{sp}_{2,k_2}(x_2) dx_2 I_{N_1^*, k_2}^*(f) - \end{aligned} \quad (6.1.6)$$

$$- \sum_{k_1=1}^{N_1} \sum_{k_2=1}^{N_2} \int_{a_1}^{b_1} \text{sp}_{1,k_1}(x_1) dx_1 \int_{a_2}^{b_2} \text{sp}_{2,k_2}(x_2) dx_2 f(x_{1,k_1}, x_{2,k_2}).$$

Формула (6.1.6) має той же порядок похибки, що й (6.1.5). У ній використовується всього $Q_2 = N_1 N_2^* + N_2 N_1^* - N_1 N_2$ значень функції f (за умови, що вузли (x_{1,k_1}, x_{2,k_2}) входять у кількість вузлів $(x_{1,p}^*, x_{2,l}), (x_{1,k}, x_{2,q}^*)$). Якщо $\text{sp}_{i,j}(x_i)$ кусково-сталі або лінійні сплайни і $f(x_1, x_2) \in C^{2,2}(D)$, $N_1 = N_2 = n$, $N_1^* = N_2^* = Cn^2$, то $Q_2 = O(n^3)$. При цьому інтеграл $I(f)$ обчислюється з похибкою $O(n^{-4})$. Зауважимо, що за цих умов для досягнення похибки $O(n^{-4})$ за допомогою формули (6.1.1) треба використати $Q_1 = O(n^4)$ значень функції f .

Таким чином, кубатурна формула (6.1.6) використовує для досягнення однієї і тієї ж точності на порядок меншу кількість значень функції f порівняно з класичною кубатурною формулою (6.1.1). Значимо, що формула (6.1.6) може бути записана також у вигляді

$$AP_N(f) = M_{N_1, N_2^*} + M_{N_1^*, N_2} - M_{N_1, N_2},$$

якщо $\text{sp}_{i, N_i}(x_i), i = 1, 2$ є відповідними кусково-сталими сплайнами.

6.1.2. Кубатурні формули для складених областей на основі інтерлінації підінтегральної функції

Уведемо деякі означення.

Означення 1. Елементарною називатимемо область D , що може бути описана нерівністю

$$D : \{x = (x_1, x_2) \in R^2 | \omega(x, y) \geq 0\},$$

де $\omega(x)$ – елементарна функція двох змінних.

Означення 2. Область $D \subset R^2$ будемо називати складеною, якщо вона складається з об'єднання деякої множини елементарних областей $D_{k,l} = \{x = (x_1, x_2) \in R^2 | \omega_{k,l}(x, y) \geq 0\}$:

$$D = \bigcup_{k=1}^M \bigcap_{l=1}^{n_k} D_{k,l}.$$

Задача наближеного обчислення подвійних інтегралів по складених областях є однією з найбільш трудомістких задач, що виникають, зокрема, при розв'язанні крайових задач варіаційними методами. Зупинимось детальніше на причинах цієї трудомісткості. Як відомо, крайова задача для самоспряженого еліптичного оператора

$$L_{2m} u(x) := \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^\alpha D^\alpha (a_\alpha(x) D^\alpha u(x)) = f(x), x \in D,$$

$$B_j u(x) = g_j(x), x \in \partial D, j = 0, \dots, m-1,$$

де $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$; $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$; $D^\alpha = D_{x_1}^{\alpha_1} D_{x_2}^{\alpha_2}$, $D_{x_k}^{\alpha_k} = \partial^{\alpha_k} / \partial x_k^{\alpha_k}$; ∂D – межа області D ; $B_j = \partial^j / \partial \nu^j$; ν – зовнішня нормаль до ∂D , може бути зведена до мінімізації відповідного функціоналу

$$J_m(u) = \int_D \left(\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) (D^\alpha u)^2 - 2f(x)u \right) dx.$$

Наближений розв'язок такої варіаційної задачі методом Рітца (або Гальоркіна) знаходиться у вигляді

$$u_N(x) = \psi_0(x) + \sum_{k=1}^N c_k \psi_k(x),$$

де c_k – невідомі сталі; $\psi_k \in W_2^m(D)$ ($k = 1, \dots, N$) – фіксована система лінійно незалежних функцій, що забезпечує задоволення однорідних граничних умов на межі ∂D . Функція $\psi_0(x)$ задовольняє неоднорідні граничні умови. В результаті для знаходження c_k , $k = 1, \dots, N$ потрібно розв'язати систему Рітца

$$\sum_{k=1}^N A_{l,k} c_k = f_l, l = 1, \dots, N,$$

$$A_{l,k} = \int_D \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha \psi_k(x) D^\alpha \psi_l(x) dx,$$

$$f_l = \int_D [f(x) - L_{2m} \psi_0(x)] \psi_l(x) dx.$$

Враховуючи, що під знак інтегралів $A_{l,k}$ входять похідні від координатних функцій ψ_k порядку не більше ніж m , на практиці використовують функції ψ_k з класу $\psi_k \in W_2^m(D)$. Це означає, що підінтегральні функції в інтегралах $A_{l,k}$ можуть мати невисокий порядок диференційовності. Тому класичні формули інтегрування для таких задач будуть неефективними. Останнє пояснюється тим, що відомі квадратні формули (прямокутників, парабол тощо) мають високу точність тільки для випадків, коли підінтегральна функція має обмежені похідні 2, 4-го тощо порядку. Якщо ж підінтегральна функція є недиференційовною, то для неї використання формул парабол і формул більш високого порядку не дає такого ж виграшу в точності, як у випадку диференційовних підінтегральних функцій.

На практиці при обчисленні інтегралів по складених областях від неперервних функцій або від функцій з інтегровними особливостями в деяких точках (частіше це кутові точки області інтегрування D) використовують різні ефективні прийоми. Наприклад, можна зменшувати крок інтегрування поблизу точок з особливостями (тобто згущувати вузли навколо цієї точки); можна виділяти з підінтегральної функції член з особливістю та інтегрувати його окремо; можна замінити область інтегрування деякою близькою областю з вилученими особливими точками тощо.

Вважаємо, що інформація про точки з особливостями відсутня. Тому викладемо найпростішу версію (без використання похідних) запропонованого алгоритму для $f(x) \in C^r(D)$, $r = 0, 1, 2, \dots$.

Крок 1. Розбиваємо область D на підобласті D_k , $k = (k_1, k_2)$ прямими $x_i = x_{i,k_i}$, $0 \leq k_i \leq N_i$, $i = 1, 2$. В результаті такого розбиття область D буде об'єднанням підобластей трьох типів:

- тип 1 (прямокутники): $D_k = \Pi_k := \{x_i \in [x_{i,k_i-1}, x_{i,k_i}], i = 1, 2\}$;
- тип 2 (прямокутники з однією, взагалі кажучи, криволінійною

стороною, що є частиною межі ∂D): $D_k = \Pi_k^{(\nu)}$, $\nu = 1, 2, 3, 4$;

$$\Pi_k^{(1)} := \{[x_{1,k_1-1}, g_{1,k_1}(x_2)] \times [x_{2,k_2-1}, x_{2,k_2}], x_{1,k_1-1} < g_{1,k_1}(x_2)\};$$

$$\Pi_k^{(2)} := \{[x_{1,k_1-1}, x_{1,k_1}] \times [x_{2,k_2-1}, g_{2,k_2}(x_1)], x_{2,k_2-1} < g_{2,k_2}(x_1)\};$$

$$\Pi_k^{(3)} := \{[q_{1,k_1-1}(x_2), x_{1,k_1}] \times [x_{2,k_2-1}, x_{2,k_2}], q_{1,k_1-1}(x_2) < x_{1,k_1}\};$$

$$\Pi_k^{(4)} := \{[x_{1,k_1-1}, x_{1,k_1}] \times [q_{2,k_2-1}(x_1), x_{2,k_2}], q_{2,k_2-1}(x_1) < x_{2,k_2}\};$$

– тип 3 (прямокутні трикутники із, взагалі кажучи, криволінійною гіпотенузою, що є частиною межі ∂D): $D_k = T_k^{(\nu)}$, $\nu = 1, 2, 3, 4$;

$$T_k^{(1)} := \{[x_{1,k_1}, g_{1,k_1+1}(x_2)] \times [x_{2,k_2}, x_{2,k_2+1}]\},$$

$$g_{1,k_1+1}(x_2, k_2) = x_{1,k_1+1}, g_{1,k_1+1}(x_2, k_2+1) = x_{1,k_1};$$

$$T_k^{(2)} := \{[g_{1,k_1-1}(x_2), x_{1,k_1}] \times [x_{2,k_2}, x_{2,k_2+1}]\},$$

$$g_{1,k_1-1}(x_2, k_2) = x_{1,k_1-1}, g_{1,k_1-1}(x_2, k_2+1) = x_{1,k_1};$$

$$T_k^{(3)} := \{[g_{1,k_1-1}(x_2), x_{1,k_1}] \times [x_{2,k_2-1}, x_{2,k_2}]\},$$

$$g_{1,k_1-1}(x_2, k_2-1) = x_{1,k_1}, g_{1,k_1-1}(x_2, k_2) = x_{1,k_1-1};$$

$$T_k^{(4)} := \{[x_{1,k_1}, g_{1,k_1+1}(x_2)] \times [x_{2,k_2-1}, x_{2,k_2}]\},$$

$$g_{1,k_1+1}(x_2, k_2) = x_{1,k_1+1}, g_{1,k_1+1}(x_2, k_2-1) = x_{1,k_1}.$$

Крок 2. Будуємо в кожній із цих підобластей оператори інтерполяції $OP_k f(x)$, $OP_k^\nu f(x)$, $OT_k^{(\nu)} f(x)$, $\nu = 1, 2, 3, 4$ з властивостями:

$$OP_k f(x) = f(x), x \in \partial \Pi_k :$$

$$O\Pi_k f(x_{1,j}, x_2) = f(x_{1,j}, x_2), j = k_1 - 1, k_1; x_{2,k_2-1} \leq x_2 \leq x_{2,k_2};$$

$$O\Pi_k f(x_1, x_{2,j}) = f(x_1, x_{2,j}), j = k_2 - 1, k_2; x_{1,k_1-1} \leq x_1 \leq x_{1,k_1};$$

$$|f(x) - O\Pi_k(x)| = O(\Delta_{1,k_1}^2, \Delta_{2,k_2}^2), x \in \Pi_k \in D,$$

$$\Delta_{i,k_i} = x_{i,k_i} - x_{i,k_i-1}, i = 1, 2; O\Pi_k^{(\nu)} f(x) = f(x), x \in \partial\Pi_k^{(\nu)},$$

$$|f(x) - O\Pi_k^{(\nu)} f(x)| = O(\Delta_{1,k_1}^2, \Delta_{2,k_2}^2), x \in \Pi_k^{(\nu)} \in D;$$

$$OT_k^{(\nu)} f(x) = f(x), x \in \partial T_k^{(\nu)},$$

$$|f(x) - OT_k^{(\nu)} f(x)| = O(\Delta_{1,k_1}^2, \Delta_{2,k_2}^2), x \in T_k^{(\nu)} \in D.$$

Крок 3. Кожну із функцій $f(x_{1,k_1}, x_2)$, $f(x_1, x_{2,k_2})$,

$$f(g_{1,k_1\pm 1}(x_2), x_2), f(x_1, g_{2,k_2\pm 1}(x_1)),$$

що є слідами функції $f(x)$ на лініях розбиття і на межі області інтегрування, замінюємо (як функції однієї змінної) відповідними сплайнами з точністю $O(\Delta_{1,k_1}^2, \Delta_{2,k_2}^2)$. У результаті отримуємо функцію

$$\tilde{u}(x) = \tilde{u}(F; x) = \sum_{k \in G} f(x_k^*) \psi_k(x),$$

де $F = (f(x_k^*))_{k \in G}$, $G = \{k = (k_1, k_2) | x_k^* = (x_{1,k_1}^*, x_{2,k_2}^*) \in D\}$; $\psi_k(x)$ – відповідні базисні сплайни; x_k^* – вузлові точки вказаних вище сплайнів.

Крок 4. Знаходимо

$$I(\tilde{u}(F; x)) = \sum_{k \in G} f(x_k^*) \int_D \psi_k(x) dx.$$

Це і є кубатурна формула, у якій для досягнення потрібної точності використовується на порядок менше значень підінтегральної функції, ніж під час застосування формули, що отримується заміною даної криволінійної області деяким прямокутним багатокутником, і повторного використання в ній квадратурних формул.

6.2. Кубатурні формули для коефіцієнтів Фур'є з використанням інтерлінації функцій

6.2.1. Квадратурні формули для коефіцієнтів Фур'є

Задача наближеного обчислення коефіцієнтів Фур'є функцій однієї змінної $f(x)$

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

та багатьох змінних $f(x), x = (x_1, \dots, x_n), n \geq 2$

$$c_k(f) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\pi}^{\pi} \dots \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx, \quad k = (k_1, \dots, k_n),$$

$kx = k_1 x_1 + \dots + k_n x_n, k_i = 0, \pm 1, \dots; i = \overline{1, n}$ виникає в цифровій обробці сигналів, при розв'язанні задач комп'ютерної томографії тощо.

Характерною ознакою таких задач є необхідність по заданих значеннях деяких функціоналів від підінтегральної функції f (наприклад, при даних значеннях цієї функції у фіксованій системі точок або при даних значеннях проєкцій, тобто лінійних інтегралів від неї вздовж фіксованої системи прямих тощо) відновити функцію із потрібною точністю за дуже короткий час. Наприклад, якщо за допомогою томографа одержано проєкції рухомого серця, то швидкість їх отримання та обробки має бути пов'язана з періодичністю стискування серця (тобто проходити дуже швидко). При цьому слід зазначити, що для отримання достатньої точності в медицині використовується величезна кількість даних ($5 \cdot 10^5$ і більше).

Для подальшого викладу потрібно навести деякі результати з теорії квадратурних формул для швидкоосцилюючих підінтегральних функцій.

Хай треба обчислити інтеграл $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{i\omega x} dx$, де

$$\omega 2\pi \gg 1; \tag{6.2.1}$$

$f(x)$ – гладка функція. Функції

$$\operatorname{Re}(f(x) e^{i\omega x}) = f(x) \cos(\omega x), \quad \operatorname{Im}(f(x) e^{i\omega x}) = f(x) \sin(\omega x)$$

на $[-\pi, \pi]$ дорівнюють нулю приблизно в 2ω точках-тригонометричний поліном порядку n має на $[-\pi, \pi]$ не більше ніж $2n$ коренів (нулів).

Тому задовільне наближення таких функцій тригонометричними поліномами порядку n можна отримати лише за умови $n \gg 2\omega$.

Тобто перший із можливих методів практичного обчислення таких інтегралів вимагає використання квадратурних формул, точних для поліномів високого степеня. Зауважимо, що при цьому, очевидно, **при малих значеннях ω (коли підінтегральна функція не має сильної осциляції) можна користуватися звичайною квадратурною формулою прямокутників або формулою парабол**. Таке зауваження залишається справедливим у цьому розділі.

Інший підхід був запропонований Файлоном. Він полягає в заміні функції $f(x)$ інтерполяційним поліномом Лагранжа степеня $n - 1$

$$L_n(x) = \sum_{j=1}^n f(x_j) \prod_{k=1, k \neq j}^n \frac{x - x_k}{x_j - x_k}, \quad (6.2.2)$$

$-\pi \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq \pi$ і точному знаходженні інтеграла $\int_{-\pi}^{\pi} L_n f(x) e^{i\omega x} dx$, який може бути обчислений в явному вигляді:

$$\int_{-\pi}^{\pi} L_n f(x) e^{i\omega x} dx = S_n^{\omega}(f) = \sum_{j=1}^n p_j f(x_j),$$

$$p_j = \int_{-\pi}^{\pi} \prod_{k=1, k \neq j}^n \frac{x - x_k}{x_j - x_k} e^{i\omega x} dx.$$

Для оцінки залишкового члена цієї формули

$$R_n(f) = \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - L_n f(x)] e^{i\omega x} dx$$

скористаємося відомою формулою для залишку інтерполяційної формули Лагранжа (можна також використати формулу $R_n g$ на с.30):

$$\exists \zeta \in [x_1, x_n] : f(x) - L_n f(x) = \frac{f^{(n)}(\zeta)}{n!} \prod_{j=1}^n (x - x_j) \quad \forall f(x) \in C^n[-\pi, \pi].$$

У результаті, враховуючи рівність $|e^{i\omega x}| = 1$, отримаємо

$$|R_n(f)| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - L_n f(x)| dx \leq \frac{M_n C_n}{n!},$$

$$M_n = \max_{-\pi \leq x \leq \pi} |f^{(n)}(x)|; C_n = \int_{-\pi}^{\pi} \prod_{j=1}^n |x - x_j| dx.$$

Зауважимо, що $p_j = p_j(x_1, \dots, x_n)$, $j = \overline{1, n}$; $C_n = C_n(x_1, \dots, x_n)$ не залежать від функції $f(x)$. Тобто їхні значення можна обчислити тільки один раз для даної фіксованої системи вузлів x_1, \dots, x_n . При обчисленні інтеграла

$$\int_a^b f(x) e^{i\omega x} dx$$

можна використовувати такі вузли інтерполяції:

$$x_j = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} d_j, \quad d_j \in [-1, 1], j = \overline{1, n}.$$

Зокрема, при $n = 3$: $d_1 = -1$, $d_2 = 0$, $d_3 = 1$; при $n = 5$: $d_1 = -1$, $d_2 = -0,5$, $d_3 = 0$, $d_4 = 0,5$, $d_5 = 1$.

Зауважимо, що при збільшенні номера ω коефіцієнта Фур'є і фіксованому значенні степеня полінома n можна отримати неправильні результати (див. Бахвалов Н.С. Жидков Н.П., Кобельков Г.М. с. 117).

6.2.2. Кубатурні формули для коефіцієнтів Фур'є на основі операторів сплайн-інтерлінації

Розглянемо задачу обчислення інтегралів Фур'є вигляду

$$c_k = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \exp(-i(k_1 t_1 + k_2 t_2)) dt_1 dt_2, k = (k_1, k_2) \in Z^2.$$

Тут $t = (t_1, t_2) \in D = [-\pi, \pi]^2$; $f(t) \in A(D)$, де $A(D)$ – клас функцій, інформація про які задана не більше ніж у N точках $t^{(q)} = (t_1^{q_1}, t_2^{q_2}) \in D$ області D , $q = (q_1, q_2)$. Задача формулюється так: побудувати на основі інтерлінації функцій методи наближеного обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій такі, які для досягнення заданої точності $\epsilon > 0$ відновлення цих інтегралів потребували б меншої кількості даних N , ніж класичні методи, що ґрунтуються на використанні класичної сплайн-інтерполяції.

Основна ідея полягає в такому.

1. Будуємо інтерлінант $O(f; t)$, що забезпечує потрібну точність $\epsilon > 0$ наближення функції $f(t)$ в області D

$$|f(t) - O(f; t)| \leq \epsilon, t = (t_1, t_2) \in D$$

і збігається з функцією $f(t)$ на деякій системі прямих $\{\Gamma_k\}$, $k = \overline{1, K}$: $f(t)|_{t \in \Gamma_k} = \varphi_k(s)$, де $k = \overline{1, K}$; s – параметр на прямій Γ_k . Як правило, $s = t_1$ або $s = t_2$.

2. Замінюємо сліди $\varphi_k(s)$ як функції однієї змінної сплайн-інтерполянтами з похибкою $\varepsilon_1 \leq \varepsilon$. У результаті отримуємо інтерполянт $J_N(f; t)$, що використовує N значень функції $f(t^{(q)})$, $t^{(q)} \in D$ і наближує $f(t)$ в області D з похибкою ε :

$$|f(t) - J_N(f; t)| \leq \varepsilon, t \in D.$$

Цей інтерполянт можна умовно записати у вигляді

$$J_N(f; t) = \sum_{q=1}^N f(t^{(q)}) \psi_q(t),$$

де $\psi_q(t)$ – відповідна система базисних сплайн-функцій двох змінних із властивостями $\psi_q(t^{(p)}) = \delta_{p,q}$, $p, q = \overline{1, N}$.

3. Коефіцієнти Фур'є c_k , $k = (k_1, k_2)$ наближено обчислюємо за формулами

$$\begin{aligned} c_k \approx \tilde{c}_k &:= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} J_N(f; t) \exp(-i(k_1 t_1 + k_2 t_2)) dt = \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{q=1}^N f(t^{(q)}) \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi_q(t) \exp(-i(k_1 t_1 + k_2 t_2)) dt. \end{aligned}$$

Функції $\psi_q(t)$ не залежать від функції $f(t)$. Тому значення величин

$$\beta_{k,q} = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi_q(t) \exp(-i(k_1 t_1 + k_2 t_2)) dt$$

потрібно обчислювати тільки один раз. Таким чином, основну увагу можна сконцентрувати на організації обчислень з найменшою кількістю арифметичних операцій за формулами

$$\tilde{c}_k = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{q=1}^N \beta_{k,q} f(t^{(q)}), |k| := |k_1| + |k_2| \leq M, \quad \text{або} \quad |k_1 k_2| \leq M.$$

Тут M – фіксоване натуральне число.

Наведемо приклад, коли підінтегральна функція $f(x, y)$, $(x, y) \in [0, 1]^2$ замінюється білінійним сплайном, побудованим на основі сплайн-інтерлінації (див. с.150)

$$s(x, y) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{m^2} f\left(\frac{i}{m}, \frac{j}{m^2}\right) h(mx - i)h(m^2y - j) +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=0}^{m^2} \sum_{j=0}^m f\left(\frac{i}{m^2}, \frac{j}{m}\right) h(m^2x - i)h(my - j) - \\
& - \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m f\left(\frac{i}{m}, \frac{j}{m}\right) h(mx - i)h(my - j), \\
& \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy \approx \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{m^2} f\left(\frac{i}{m}, \frac{j}{m^2}\right) A_{m,i} A_{m^2,j} + \\
& \sum_{i=0}^{m^2} \sum_{j=0}^m f\left(\frac{i}{m^2}, \frac{j}{m}\right) A_{m^2,i} A_{m,j} - \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m f\left(\frac{i}{m}, \frac{j}{m}\right) A_{m,i} A_{m,j}, \\
& A_{m,i} = \int_0^1 h(mx - i) dx; A_{m,0} = A_{m,m} = \frac{1}{2m}; A_{m,i} = \frac{1}{m}, 1 \leq i \leq m - 1.
\end{aligned}$$

У наступному підрозділі використовується формули, що отримуються заміною підінтегральної функції кусково-сталими сплайнами класичними та побудованими на основі операторів кусково-сталої інтерлінації (див. підрозд. 8.5).

До теми даного розділу відносяться також кубатурні формули Смоляка С. А. [1,2] і Делвоса Ф.Й.[1].

6.3. Приклади.

Приклад 1. Хай $f(x, y) = (x + y)/(1 + xy)$. Знайдемо інтеграл

$$c(f) = \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy = 2(\ln 4 - 1) \approx 0.77258872$$

за допомогою класичної формули центральних прямокутників

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy \approx J_{m,n}(f) := \frac{(b-a)(d-c)}{mn} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f_{i,j}, \quad (6.3.1)$$

де $f_{i,j} = f(a + (2i-1)(b-a)/(2m), c + (2j-1)(d-c)/(2n))$ та за допомогою мішаної формули центральних прямокутників, побудованої на основі кусково-сталої сплайн-інтерполяції з використанням кусково-сталої сплайн-інтерлінації.

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy \approx B_{m,n}(f) := J_{m,mn}(f) + J_{mn,n}(f) - J_{m,n}(f), \quad (6.3.2)$$

де

$$J_{m,mn}(f) = \frac{(b-a)(d-c)}{m^2n} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{mn} f \left(a + (2i-1) \frac{b-a}{2m}, c + (2j-1) \frac{d-c}{2mn} \right),$$

$$J_{mn,n}(f) = \frac{(b-a)(d-c)}{mn^2} \sum_{i=1}^{mn} \sum_{j=1}^n f \left(a + (2i-1) \frac{b-a}{2mn}, c + (2j-1) \frac{d-c}{2n} \right).$$

Звертаємо увагу на те, що класична кубатурна формула центральних прямокутників $J_{m,n}(f)$ отримується інтегруванням кусково-сталого сплайна інтерполяційного типу (див.розділ 8)

$$S(x, y) = f \left(a + (2i-1) \frac{b-a}{2m}, c + (2j-1) \frac{d-c}{2n} \right), (x, y) \in \Pi_{i,j}, \quad (6.3.3)$$

$\Pi_{i,j} = [(i-1)/m, i/m] \times [(j-1)/n, j/n]$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$. Цей сплайн можна також написати у вигляді

$$S(x, y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f \left(a + (2i-1) \frac{b-a}{2m}, c + (2j-1) \frac{d-c}{2n} \right) \chi_{\Pi_{i,j}}(x, y),$$

де $\chi_D(x, y) = 1$, $(x, y) \in D$; $\chi_D(x, y) = 0$, $(x, y) \notin D$.

Мішана формула центральних прямокутників $B_{m,n}(f)$ отримується інтегруванням кусково-сталого сплайна, який можна написати у вигляді

$$\begin{aligned} BS(x, y) = & \quad (6.3.4) \\ & = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{mn} f \left(a + (2i-1) \frac{b-a}{2m}, c + (2j-1) \frac{d-c}{2mn} \right) \chi_{\Pi_{1,i,j}}(x, y) + \\ & \sum_{i=1}^{mn} \sum_{j=1}^n f \left(a + (2i-1) \frac{b-a}{2mn}, c + (2j-1) \frac{d-c}{2n} \right) \chi_{\Pi_{2,i,j}}(x, y) - S(x, y), \end{aligned}$$

де $\Pi_{1,i,j} = [(i-1)/m, i/m] \times [(j-1)/(mn), j/(mn)]$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, mn}$, $\Pi_{2,i,j} = [(i-1)/(mn), i/(mn)] \times [(j-1)/n, j/n]$, $i = \overline{1, mn}$, $j = \overline{1, n}$.

В табл. 6.3.1 наведемо похибки $e_1 = c(f) - B_{n,n}(f)$, $e_2 = c(f) - J_{N,N}(f)$ наближення для різних значень n, N обома формулами $B_{n,n}$ та $J_{N,N}$, які наближують точно значення інтегралу з однаковою точністю. При цьому для порівняння наведено кількість значень підінтегральної функції, яку використовує класична формула центральних прямокутників ($Q_2 = N^2$) та формула центральних прямокутників,

побудована за допомогою сплайн-інтерлінації ($Q1 = 2n^3 + n^2$ для $m = 2k$; $Q1 = 2n^3 - n^2$ для $m = 2k - 1$; $k = 1, 2, \dots$).

На основі аналізу цієї таблиці можна зробити беззаперечний висновок про те, що формула центральних прямокутників, побудована з використанням сплайн-інтерлінації, вимагає для досягнення однієї і тієї ж точності значно меншої кількості значень підінтегральної функції, ніж класична кубатурна формула центральних прямокутників.

Таблиця 6.3.1.

n	e1	Q1	N	e2	Q2
2	-0,001274	20	4	-0.0014775	16
—	—	—	5	-0.0009467	25
3	-0.000231	63	10	-0.000234	100
4	-0.0000707	144	18	-0.0000721	324
5	-0.0000285	225	28	-0.00002981	784
—	—	—	29	-0.00002779	841
6	-0.0000136	468	42	-0.0000133	1764
7	-0.00000731	735	57	-0.00000719	3249
8	-0.00000427	1088	74	-0.00000427	5476

Приклад 2. Обчислимо значення інтегралу (для $k = 10, l = 10, f(x, y) = (x + y)/(1 + xy)$)

$$c(f) = \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) e^{-i(kx+ly)} dx dy$$

В табл. 6.3.2 наведемо похибки $e1 = |c(f) - B_{n,n}(F)|$, $e2 = |c(f) - J0_{n,n}(f)|$ наближення $c(f)$ для різних значень n формулами $B_{n,n}(F)$, $F(x, y) = f(x, y)e^{-i(kx+ly)}$ та $J0_{N,N}(f)$ відповідно для різних значень n, N з порівнянню точністю.

В табл. 6.3.3 наведемо похибки $e3 = |c(f) - JB_{n,n}(f)|$, $e4 = |c(f) - J_{N,N}(F)|$ наближення $c(f)$ для різних значень n, N формулами $JB_{n,n}(f)$ та $J_{N,N}(F)$ відповідно для різних значень n, N з порівнянню точністю.

Порівняння цих результатів підтверджує велику ефективність методу інтегрування $JB_{n,n}(f)$, побудованого з одночасним використанням ідеї Файлона та сплайнів, побудованої на основі сплайн-інтерлінації. Крім того, чітко видно, що класична формула центральних прямокутників $J_{N,N}(F)$ значно гірше наближує значення $c(f)$.

$$J0_{m,n}(f) = \int_0^1 \int_0^1 S_{m,n}(x, y) e^{-i(kx+ly)} dx dy, \quad (6.3.5)$$

$$JB_{m,n}(f) = \int_0^1 \int_0^1 BS_{m,n}(x,y)e^{-i(kx+ly)} dx dy, \quad (6.3.6)$$

які наближують точне значення інтегралу з порівнянно однаковою точністю. Результати наведені для $m = n$ із використанням наступних позначень $S_{m,n}(x,y) = S(x,y)$, $BS_{m,n}(x,y) = BS(x,y)$. $S(x,y)$, $BS(x,y)$ визначені в (6.3.1), (6.3.2), відповідно. При цьому для порівняння наведено кількість значень підінтегральної функції, яку використовує класична кубатурна формула центральних прямокутників ($Q2 = N^2$), кубатурна формула центральних прямокутників, побудована за допомогою сплайн-інтерлінації ($Q1 = 2n^3 + n^2$).

Таблиця 6.3.2.

n	e1	Q1	N	e2	Q2
2	0.3	12	2	0.02	12
3	0.007	45	3	0.005	45
4	0.002	112	4	0.002	112
5	0.0005	225	8	0.0006	960
—	—	—	9	0.0004	1377
7	0.0001	637	18	0.0001	11340
8	0.00007	960	19	0.00009	13357

Таблиця 6.3.3.

n	e3	Q3	N	e4	Q4
2	0.009	12	5	0.02	25
	-	-	6	0.008	36
3	0.007	45	15	0.001	225
4	0.0007	112	16	0.0009	256
5	0.0002	225	32	0.0002	1024
6	0.00009	396	50	0.00009	2500

Запитання і вправи для самостійної роботи

1. Напишіть формулу для обчислення подвійного інтегралу $\int_a^b \int_c^d f(x,y) dx dy$ за допомогою класичної кубатурної формули центральних прямокутників та за допомогою кубатурної формули мішаних центральних прямокутників.

2. Які переваги має кубатурна формула мішаних центральних прямокутників перед класичною кубатурною формулою центральних прямокутників?

3. Який зв'язок існує між формулами інтерлінації функцій та кубатурною формулою мішаних центральних прямокутників?

4. У чому полягає метод Файлона обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій?

5. Які переваги має кубатурна формула для обчислення коефіцієнтів Фур'є від функцій багатьох змінних, побудована на основі інтерлінації функцій, порівняно з класичними кубатурними формулами?

Глава 7. Інтерфлотація функцій

7.1. Раціональна інтерфлотація на M площинах в \mathbf{R}^n , $n \geq 3$

7.1.1. Інтерфлотація функцій. Означення

Хай $\Gamma_k, k = \overline{1, M}$ – система ν -вимірних поверхонь ($0 \leq \nu \leq n - 1$) в $\mathbf{R}^n, n \geq 3$. При $\nu = 0$ ці поверхні є точками в \mathbf{R}^n , а при $\nu = 1$ – лініями в \mathbf{R}^n . Функцію $f(x), x = (x_1, \dots, x_n)$ будемо вважати визначеною разом із системою операторів (диференціальних, інтегральних, інтегродиференціальних) $B_\alpha f(x), \alpha = \overline{0, m - 1}$ у точках $\Gamma_k, k = \overline{1, M}$.

О з н а ч е н н я 1. Оператор $L_{n, \nu, M}(f; \{\Gamma_k\}; x)$ з властивостями

$$B_\alpha L_{n, \nu, M}(f; \{\Gamma_k\}; x)|_{\Gamma_q} = B_\alpha f(x)|_{\Gamma_q}, \quad q = \overline{1, M}, \alpha = \overline{0, m - 1} \quad (7.1.1)$$

будемо називати оператором інтерфлотації (інтерполяції при $\nu = 0$, інтерлінації при $\nu = 1$) функції f зі слідами операторів $B_\alpha f(x), \alpha = \overline{0, m - 1}$ на системі ν -вимірних поверхонь $\Gamma_k, k = \overline{1, M}$.

Нагадаємо, що interflation походить від англ. inter – між, flat – плоска поверхня; interlineation – inter–між, line – лінія; interpolation – inter–між, pole – полюс.

Хай $g_{k, \alpha}(x)|_{\Gamma_k} = B_{k, \alpha} f(x)|_{\Gamma_k}, k = \overline{1, M}, \alpha = \overline{0, m - 1}$ і оператор інтерфлотації має вигляд $L(f; \{\Gamma_k\}; \{B_{k, \alpha}\}; \{g_{k, \alpha}\}; x) =$

$$= \sum_{i=1}^M \sum_{\alpha=0}^{m-1} \mathcal{L}_{i, \alpha}(\{B_{k, \alpha}\}; \{\Gamma_k\}; \{g_{k, \alpha}\}; x) \psi_{i, \alpha}(x), \quad (7.1.2)$$

де $\psi_{i, \alpha}(x)$ – деяка система допоміжних функцій, побудова котрих залежить від параметрів $\{\Gamma_k\}$ і не залежить від функції $f(x)$, а

$$\mathcal{L}_{i, \alpha}(\{B_{k, \alpha}\}; \{\Gamma_k\}; \{g_{k, \alpha}\}; x) -$$

деяка система лінійних диференціальних операторів.

О з н а ч е н н я 2. Оператор інтерфлотації $L(f; \{\Gamma_k\}; \{B_{k, \alpha}\}; \{g_{k, \alpha}\}; x)$ з властивостями (7.1.1) будемо називати лінійним оператором поліноміальної інтерфлотації, сплайн-інтерфлотації, тригонометричної інтерфлотації, раціональної інтерфлотації тощо, якщо допоміжні функції $\psi_{i, \alpha}(x)$ є, відповідно, алгебраїчними поліномами, сплайнами, тригонометричними поліномами, раціональними функціями тощо.

Це означення повністю поширюється на випадок довільної системи поверхонь в \mathbf{R}^n різної розмірності.

Нижче побудовано явні формули для операторів раціональної інтерфлотації. Такого типу оператори знаходять застосування при розв'язанні крайових задач варіаційними методами тощо.

7.1.2. Рациональна інтерфлетация на M площинах без збереження класу $C^r(\mathbf{R}^n)$, $n \geq 3$

Хай площини Γ_k визначаються нормальними рівняннями

$$\Gamma_k : \omega_k(x) := \sum_{i=1}^n a_{ki}x_i - c_k = 0, \quad \sum_{i=1}^n a_{ki}^2 = 1.$$

Уведемо позначення:

$$\nu_k = (a_{k1}, \dots, a_{kn}) = \nabla \omega_k(x); \quad \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right),$$

$$D_0^{(k)} = I; \quad D_s^{(k)} = (\nu_k, \nabla)^s = \left(a_{k1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + a_{kn} \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^s,$$

$$\mathfrak{R} = \{1, \dots, M\},$$

$$D_1^{(k)} \omega_l = \nabla_{kl} = \nabla_{lk} = \sum_{i=1}^n a_{ki} a_{li}.$$

Зауважимо, що оператори $D_s^{(k)} f(x) = \partial^s f(x) / \partial \nu_k^s$ є операторами s -кратного диференціювання за нормаллю до поверхні Γ_k . Уведемо систему функцій (при $\omega_i = \omega_i(x)$)

$$H_{kN}(x) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}} \omega_i^{\bar{N}} \bigg/ \sum_{\mu=1}^M \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq \mu}} \omega_i^{\bar{N}}, \quad k = \overline{1, M},$$

$$\bar{N} = \begin{cases} N+1, & \text{якщо } N = 2m+1, \\ N+2, & \text{якщо } N = 2m, \end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^M H_{kN}(x) = 1.$$

Теорема 7.1.1. *Хай $\varphi_{ks}(x) \in C^{r-s}(\mathbf{R}^n)$, $k = \overline{1, M}$, $s = \overline{0, \bar{N}}$, $r > 2N$, $G = \{\Gamma_i \cap \Gamma_k, i \neq k\}$. Тоді оператор*

$$O_{MN}(\{\varphi_{ks}\}; x) = \sum_{k=1}^M H_{kN}(x) \sum_{s=0}^{\bar{N}} \varphi_{ks}(x - \omega_k(x) \nabla \omega_k(x)) \frac{\omega_k^s(x)}{s!} \quad (7.1.3)$$

має властивості

$$O_{MN}(\{\varphi_{ks}\}; x) \in C^{r-N}(\mathbf{R}^n \setminus G), \quad (7.1.4)$$

$$\frac{\partial^p O_{MN}(\{\varphi_{ks}\}; x)}{\partial \nu_q^p} \Big|_{\Gamma_q} = \varphi_{qp}(x) \Big|_{\Gamma_q}, \quad q = \overline{1, M}, p = \overline{0, N}. \quad (7.1.5)$$

При цьому, якщо $f(x) \in C^r(\mathbf{R}^2)$, $r \geq 2N$ – довільна функція, котра задовольняє умови

$$\frac{\partial^s f(x)}{\partial \nu_k^s} \Big|_{\Gamma_k} = \varphi_{ks}(x) \Big|_{\Gamma_k} \quad k = \overline{1, M}, s = \overline{0, N},$$

то для залишку $r_{MN} f(x) = (I - O_{MN})f(x)$ ($O_{MN} f(x) := O_{MN}(\{\varphi_{ks}\}; x)$) справедлива рівність $r_{MN} f(x) =$

$$= \sum_{k=1}^M H_{kN}(x) \int_0^{\omega_k(x)} (D_{N+1}^{(k)} f)(x - (\omega_k(x) - t)\nabla\omega_k(x)) \frac{(\omega_k(x) - t)^N}{N!} dt. \quad (7.1.6)$$

Д о в е д е н н я. Зауважимо, що

$$\Phi_{kN}(x) = \sum_{s=0}^N \varphi_{ks}(x - \omega_k(x)\nabla\omega_k(x)) \frac{\omega_k^s(x)}{s!} \in C^{r-N}(\mathbf{R}^n),$$

бо $\varphi_{ks}(x - \omega_k(x)\nabla\omega_k(x)) \in C^{r-s}(\mathbf{R}^2)$, $s = \overline{0, N}$, взагалі кажучи. Функції $\varphi_{ks}(x - \omega_k(x)\nabla\omega_k(x))$ задовольняють співвідношення

$$\begin{aligned} D_p^{(k)} \varphi_{ks}(x - \omega_k(x)\nabla\omega_k(x)) &= D_{p-1}^{(k)} \sum_{i=1}^n a_{ki} \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi_{ks}(x - \omega_k(x)\nabla\omega_k(x)) = \\ &= D_{p-1}^{(k)} \sum_{i=1}^n a_{ki} \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial \varphi_{ks}}{\partial x_j} \right] (x - \omega_k(x)\nabla\omega_k(x)) \times (\delta_{i,j} - a_{ki}a_{kj}) = \\ &= D_{p-1}^{(k)} \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial \varphi_{ks}}{\partial x_j} \right] (x - \omega_k(x)\nabla\omega_k(x)) \sum_{i=1}^n a_{ki} (\delta_{i,j} - a_{ki}a_{kj}) = \\ &= D_{p-1}^{(k)} \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial \varphi_{ks}}{\partial x_j} \right] (x - \omega_k(x)\nabla\omega_k(x)) \left(a_{kj} - a_{kj} \sum_{i=1}^n a_{ki}^2 \right) = 0, p \geq 1. \end{aligned}$$

Тому

$$D_p^{(k)} \Phi_{kN} \Big|_{\Gamma_k} = \varphi_{kp} \Big|_{\Gamma_k}, p = \overline{0, N}, k = \overline{1, M}.$$

Знаменники функцій $H_{kN}(x)$, очевидно, анулюються в тих точках, де перетинаються поверхні $\Gamma_i, \Gamma_k, i, k = \overline{1, M}$. У цих точках функції

$H_{kN}(x)$ не визначені. У всіх інших точках ці функції визначені, неперервні та неперервно диференційовні довільну кількість разів. Цим доведено властивість (7.1.4).

Для доведення властивостей (7.1.5) слід врахувати, що

$$\left. \frac{\partial^p H_{kN}(x)}{\partial \nu_q^p} \right|_{\Gamma_q} = \delta_{kq} \delta_{op}, \quad k, q \in \mathfrak{R}, \quad 0 \leq p \leq N. \quad (7.1.7)$$

Властивості (7.1.7) можна встановити безпосередньою перевіркою. Враховуючи (7.1.7) і $\partial^p \Phi_{kN} / \partial \nu_k^p|_{\Gamma_k} = \varphi_{kp}(x)|_{\Gamma_k}$, $p = \overline{0, N}$, властивості (7.1.5) теж можна встановити безпосередньою перевіркою.

Оскільки $\sum_{k=1}^M H_{kN}(x) = 1$,

$$f(x) = \sum_{s=0}^N \varphi_{ks}(x - \omega_k(x, y)) \nabla \omega_k(x, y) \frac{\omega^s(x)}{s!} + \\ + \int_0^{\omega_k(x)} (D_{N+1}^{(k)} f)(x - (\omega_k(x, y) - t) \nabla \omega_k(x, y)) \frac{(\omega_k(x) - t)^N}{N!} dt,$$

одержимо

$$f(x) = \sum_{k=1}^N H_{kN}(x) f(x) = \\ = \sum_{k=1}^N H_{kN}(x) \left[\sum_{s=0}^N \varphi_{ks}(x - \omega_k(x, y)) \nabla \omega_k(x, y) \frac{\omega^s(x)}{s!} + \right. \\ \left. + \int_0^{\omega_k(x)} (D_{N+1}^{(k)} f)(x - (\omega_k(x, y) - t) \nabla \omega_k(x, y)) \frac{(\omega_k(x) - t)^N}{N!} dt \right] = \\ = O_{MN} f(x) + r_{MN} f,$$

звідки й випливає доведення рівності (7.1.6).

Теорему 7.1.1 доведено.

Н а с л і д о к. Із формули (7.1.6) для залишку випливає, що оператор $O_{MN} f(x)$ є точним на поліномах від n змінних степеня до N включно (при $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$):

$$O_{MN} x^\alpha \equiv x^\alpha, \quad 0 \leq |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n \leq N.$$

Для функції $f(x) = \omega_1^{N+1} \cdots \omega_M^{N+1}$ маємо $O_{MN}f(x) \equiv 0$. Отже, цей оператор не є точним на поліномах степеня $M(N+1)$. Нескладні приклади (при $M = 3, N = 0$) показують, що оператори $O_{MN}f(x)$ не є точними, взагалі кажучи, навіть на поліномах степеня $N+1$.

Зауважимо, що при побудові функцій $H_{kN}(x)$ можна вважати \bar{N} довільним числом (навіть не натуральним), більшим за N : $\bar{N} \geq N$. При цьому $0 \leq \overline{H_{kN}}(x) \leq 1$ лише при \bar{N} парному, або лише в точках $x: \omega_i(x) > 0, i = \overline{1, M}$.

Можна показати так, як і у випадку операторів інтерлінації, що існують такий набір \mathfrak{R} мультиіндексів $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathfrak{R}$ і такий набір лінійних функціоналів $C_\alpha(f), C_\alpha(f) \in \mathfrak{R}$, що оператор

$$\bar{O}_{MN}f(x) = O_{MN}f(x) + \sum_{\alpha \in \mathfrak{R}} C_\alpha(f)x^\alpha \prod_{k=1}^M \omega_k^{\bar{N}}(x) / \sum_{i=1}^M \prod_{k \neq i} \omega_k^{\bar{N}}(x)$$

буде мати максимально можливу алгебричну точність

$$O_{MN}x^\alpha \equiv x^\alpha, \quad 0 \leq |\alpha| \leq MN - 1.$$

Зауваження. Якщо у формулі (7.1.3) вважати функції $\omega_i(x, y), i = \overline{1, M}$ такими, що $\frac{\partial^s \omega_i(x, y)}{\partial \nu_i^s} \Big|_{\Gamma_i} = \delta_{1, s}, s = \overline{0, N}$, де Γ_i – довільні поверхні, а не обов'язково площини, ν_i – нормалі до цих поверхонь, то формула (7.1.3) буде мати властивості (7.1.5), але формула для залишкового члена (7.1.6) не буде виконуватись, взагалі кажучи.

7.2. Поліноміальна інтерфлетація функцій $n, n \geq 3$ змінних зі слідами на системі площин, паралельних координатним

7.2.1. Інтерфлетація на системі $n (n \geq 3)$ площин, паралельних координатним

Побудуємо оператор інтерфлетації $P_{m,n}f(x)$, сліди $P_{m,n}f|_{x_\mu = a_\mu}$ якого на фіксованій системі площин $x_i = a_i, i = \overline{1, n}, n \geq 3$, паралельних координатним, збігаються зі слідами $f|_{x_\mu = a_\mu}, \mu = \overline{1, n}$ функції $f(x)$ на цих площинах. Хай $i = \overline{1, n}; k = (k_1, \dots, k_i); a_k^i = (a_{k_1}, \dots, a_{k_i});$ запис $x = a_k^i$ значить, що у векторі $x = (x_1, \dots, x_n)$ треба взяти $x_{k_j} = a_{k_j}, j = \overline{1, i}; 1 \leq k_1 < \dots < k_i \leq n$.

Теорема 7.2.1. *Хай $f(x) \in C^r(\mathbf{R}^n), r \geq n$. Тоді оператор*

$$P_{m,n}f(x) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_i \leq n} \sum_{s_{k_1}, \dots, s_{k_i} = 0}^{m-1} D_{x_{k_1}, \dots, x_{k_i}}^{s_{k_1}, \dots, s_{k_i}} f \Big|_{x=a_k^i} \times \quad (7.2.1)$$

$$\times \prod_{j=1}^i \frac{(x_{k_j} - a_{k_j})^{s_{k_j}}}{s_{k_j}!}$$

задовольняє умови

$$D_{x_\mu}^p P_{m,n} f(x)|_{x_\mu=a_\mu} = D_{x_\mu}^p f(x)|_{x_\mu=a_\mu}, p = \overline{0, m-1}, \mu = \overline{1, n} \quad (7.2.2)$$

Д о в е д е н н я. Здійсимо спочатку доведення для випадку $n = 3$.
У цьому випадку

$$\begin{aligned} P_{m,3} f(x) &= \sum_{1 \leq k_1 \leq 3} \sum_{s_{k_1}=0}^{m-1} \frac{(x_{k_1} - a_{k_1})^{s_{k_1}}}{s_{k_1}!} D_{x_{k_1}}^{s_{k_1}} f(x_1, x_2, x_3)|_{x_{k_1}=a_{k_1}} - \\ &- \sum_{1 \leq k_1 < k_2 \leq 3} \sum_{s_{k_1}=0}^{m-1} \sum_{s_{k_2}=0}^{m-1} \prod_{j=1}^2 \frac{(x_{k_j} - a_{k_j})^{s_{k_j}}}{s_{k_j}!} D_{x_{k_1}, x_{k_2}}^{s_{k_1}, s_{k_2}} f(x_1, x_2, x_3) \Big|_{\substack{x_{k_1}=a_{k_1} \\ x_{k_2}=a_{k_2}}} + \\ &+ \sum_{1 \leq k_1 < k_2 < k_3 \leq 3} \sum_{s_{k_1}=0}^{m-1} \sum_{s_{k_2}=0}^{m-1} \sum_{s_{k_3}=0}^{m-1} \prod_{j=1}^3 \frac{(x_{k_j} - a_{k_j})^{s_{k_j}}}{s_{k_j}!} \times \\ &\times D_{x_{k_1}, x_{k_2}, x_{k_3}}^{s_{k_1}, s_{k_2}, s_{k_3}} f(x_1, x_2, x_3) \Big|_{x_{k_1}=a_{k_1}, x_{k_2}=a_{k_2}, x_{k_3}=a_{k_3}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{x_1}^p P_{m,3} f(x)|_{x_1=a_1} &= D_{x_1}^p \left[\sum_{s_1=0}^{m-1} \frac{(x_1 - a_1)^{s_1}}{s_1!} D_{x_1}^{s_1} f(x_1, x_2, x_3) \Big|_{x_1=a_1} + \right. \\ &+ \sum_{s_2=0}^{m-1} \frac{(x_2 - a_2)^{s_2}}{s_2!} D_{x_2}^{s_2} f(x_1, x_2, x_3) \Big|_{x_2=a_2} + \\ &+ \sum_{s_3=0}^{m-1} \frac{(x_3 - a_3)^{s_3}}{s_3!} D_{x_3}^{s_3} f(x_1, x_2, x_3) \Big|_{x_3=a_3} - \\ &- \sum_{s_1=0}^{m-1} \sum_{s_2=0}^{m-1} \frac{(x_1 - a_1)^{s_1}}{s_1!} \frac{(x_2 - a_2)^{s_2}}{s_2!} D_{x_1, x_2}^{s_1, s_2} f(x_1, x_2, x_3) \Big|_{x_1=a_1, x_2=a_2} - \\ &- \sum_{s_1=0}^{m-1} \sum_{s_3=0}^{m-1} \frac{(x_1 - a_1)^{s_1}}{s_1!} \frac{(x_3 - a_3)^{s_3}}{s_3!} D_{x_1, x_3}^{s_1, s_3} f(x_1, x_2, x_3) \Big|_{x_1=a_1, x_3=a_3} - \\ &- \sum_{s_2=0}^{m-1} \sum_{s_3=0}^{m-1} \frac{(x_2 - a_2)^{s_2}}{s_2!} \frac{(x_3 - a_3)^{s_3}}{s_3!} D_{x_2, x_3}^{s_2, s_3} f(x_1, x_2, x_3) \Big|_{x_2=a_2, x_3=a_3} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{s_1, s_2, s_3=0}^{m-1} \prod_{j=1}^3 \frac{(x_j - a_j)^{s_j}}{s_j!} D_{x_1, x_2, x_3}^{s_1, s_2, s_3} f(x_1, x_2, x_3) \Big|_{x_1=a_1, x_2=a_2, x_3=a_3} \Big|_{x_1=a_1} = \\
& = D_{x_1}^p f(x_1, x_2, x_3) \Big|_{x_1=a_1} + \sum_{s_2=0}^{m-1} \frac{(x_2 - a_2)^{s_2}}{s_2!} D_{x_1, x_2}^{p, s_2} f(x_1, x_2, x_3) \Big|_{x_1=a_1, x_2=a_2} + \\
& + \sum_{s_3=0}^{m-1} \frac{(x_3 - a_3)^{s_3}}{s_3!} D_{x_1, x_3}^{p, s_3} f(x_1, x_2, x_3) \Big|_{x_1=a_1, x_3=a_3} - \\
& - \sum_{s_2=0}^{m-1} \frac{(x_2 - a_2)^{s_2}}{s_2!} D_{x_1, x_2}^{p, s_2} f(x_1, x_2, x_3) \Big|_{x_1=a_1, x_2=a_2} - \\
& - \sum_{s_3=0}^{m-1} \frac{(x_3 - a_3)^{s_3}}{s_3!} D_{x_1, x_3}^{p, s_3} f(x_1, x_2, x_3) \Big|_{x_1=a_1, x_3=a_3} - \\
& - \sum_{s_2=0}^{m-1} \sum_{s_3=0}^{m-1} \frac{(x_2 - a_2)^{s_2}}{s_2!} \frac{(x_3 - a_3)^{s_3}}{s_3!} D_{x_1, x_2, x_3}^{p, s_2, s_3} f(x_1, x_2, x_3) \Big|_{\substack{x_1=a_1 \\ x_2=a_2 \\ x_3=a_3}} + \\
& + \sum_{s_2=0}^{m-1} \sum_{s_3=0}^{m-1} \frac{(x_2 - a_2)^{s_2}}{s_2!} \frac{(x_3 - a_3)^{s_3}}{s_3!} D_{x_1, x_2, x_3}^{p, s_2, s_3} f(x_1, x_2, x_3) \Big|_{\substack{x_1=a_1 \\ x_2=a_2 \\ x_3=a_3}} = \\
& = D_{x_1}^p f(x_1, x_2, x_3) \Big|_{x_1=a_1}, p = \overline{0, m-1}.
\end{aligned}$$

Аналогічно доводиться, що (при $p = \overline{0, m-1}$)

$$D_{x_j}^p P_{m,3} f(x_1, x_2, x_3) \Big|_{x_j=a_j} = D_{x_j}^p f(x_1, x_2, x_3) \Big|_{x_j=a_j}, j = 2, 3.$$

У випадку $n \geq 3$ уведемо додаткові позначення:

$$L_j f(x) = \sum_{s_j=0}^{m-1} \frac{(x_j - a_j)^{s_j}}{s_j!} D_{x_j}^{s_j} f(x) \Big|_{x_j=a_j}, j = \overline{1, n}.$$

Тоді оператор $P_{m,n} f(x)$ може бути записаний у вигляді

$$P_{m,n} f(x) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} F_i(x),$$

де (для $i = \overline{1, n}$)

$$F_i(x) = \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_i \leq n} L_{k_1} \dots L_{k_i} f(x) =$$

$$= \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_i \leq n} \sum_{s_{k_1}, \dots, s_{k_i} = 0}^{m-1} \prod_{j=1}^i \frac{(x_{k_j} - a_{k_j})^{s_{k_j}}}{s_{k_j}!} D_{x_{k_1}, \dots, x_{k_i}}^{s_{k_1}, \dots, s_{k_i}} f(x) \Big|_{x=a_k^i}.$$

Безпосередньою перевіркою можна впевнитись у тому, що

$$\begin{aligned} D_{x_1}^p F_1(x) \Big|_{x_1=a_1} &= D_{x_1}^p \left[\sum_{j=1}^n \sum_{s_j=0}^{m-1} \frac{(x_j - a_j)^{s_j}}{s_j!} D_{x_j}^{s_j} f(x) \Big|_{x_j=a_j} \right] \Big|_{x_1=a_1} = \\ &= D_{x_1}^p f(x) \Big|_{x_1=a_1} + \sum_{j=2}^n \sum_{s_j=0}^{m-1} \frac{(x_j - a_j)^{s_j}}{s_j!} D_{x_1, x_j}^{p, s_j} f(x) \Big|_{x_1=a_1, x_j=a_j} = \\ &= D_{x_1}^p f(x) \Big|_{x_1=a_1} + \sum_{j=2}^n (D_{x_1}^p L_j f(x)) \Big|_{x_1=a_1} = \\ &= D_{x_1}^p f(x) \Big|_{x_1=a_1} + \sum_{j=2}^n (L_j D_{x_1}^p f(x)) \Big|_{x_1=a_1}, \quad p = \overline{0, m-1}. \end{aligned}$$

Далі

$$\begin{aligned} D_{x_1}^p F_2(x) \Big|_{x_1=a_1} &= D_{x_1}^p \left[\sum_{1 \leq k_1 < k_2 \leq n} L_{k_1} L_{k_2} f(x) \right] \Big|_{x_1=a_1} = \\ &= D_{x_1}^p \left[\sum_{1 \leq k_1 < k_2 \leq n} L_{k_1} L_{k_2} f(x) + \sum_{2 \leq k_1 < k_2 \leq n} L_{k_1} L_{k_2} f(x) \right] \Big|_{x_1=a_1} = \\ &= \sum_{2 \leq k_2 \leq n} L_{k_2} D_{x_1}^p f(x) \Big|_{x_1=a_1} + \sum_{2 \leq k_1 < k_2 \leq n} L_{k_1} L_{k_2} D_{x_1}^p f(x) \Big|_{x_1=a_1}. \end{aligned}$$

Таким чином, $D_{x_1}^p [F_1(x) - F_2(x)] \Big|_{x_1=a_1} =$

$$= D_{x_1}^p f(x) \Big|_{x_1=a_1} - \sum_{2 \leq k_1 < k_2 \leq n} L_{k_1} L_{k_2} D_{x_1}^p f(x) \Big|_{x_1=a_1}.$$

Якщо врахувати r , $r < n$ доданків, то прийдемо до рівності

$$\begin{aligned} D_{x_1}^p [F_1(x) - F_2(x) + \dots + (-1)^{r+1} F_r(x)] \Big|_{x_1=a_1} &= D_{x_1}^p f(x) \Big|_{x_1=a_1} + \\ &+ (-1)^{r+1} \sum_{2 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_r \leq n} L_{k_1} \dots L_{k_r} D_{x_1}^p f(x) \Big|_{x_1=a_1}. \end{aligned}$$

Припустимо, що $r = n - 1$. Тоді

$$D_{x_1}^p [F_1(x) - F_2(x) + \dots + (-1)^{n-1} F_{n-1}(x)] \Big|_{x_1=a_1} = Z_{n-1}(x) :=$$

$$= D_{x_1}^p f(x)|_{x_1=a_1} + (-1)^n \sum_{2 \leq k_1 < \dots < k_{n-1} \leq n} L_{k_1} \cdots L_{k_{n-1}} D_{x_1}^p f(x)|_{x_1=a_1}.$$

З іншого боку, $D_{x_1}^p F_n(x)|_{x_1=a_1} =$

$$\begin{aligned} &= D_{x_1}^p [L_1 L_2 \cdots L_n f(x)]|_{x_1=a_1} = L_2 \cdots L_n D_{x_1}^p f(x)|_{x_1=a_1} = \\ &= \sum_{2 \leq k_1 < \dots < k_{n-1} \leq n} L_{k_1} \cdots L_{k_{n-1}} D_{x_1}^p f(x)|_{x_1=a_1}. \end{aligned}$$

Тому для $p = \overline{0, m-1}$ отримаємо

$$D_{x_1}^p L_{m,n}(x)|_{x_1=a_1} = Z_{n-1}(x) + (-1)^{n+1} D_{x_1}^p F_n(x)|_{x_1=a_1} = D_{x_1}^p f(x)|_{x_1=a_1}.$$

Таким чином, доведено твердження теореми 7.2.1 для випадку $\mu = 1$. Для випадків $2 \leq \mu \leq n$ доведення аналогічні, якщо врахувати перестановність операторів L_i :

$$L_i L_j f(x) = L_j L_i f(x) \forall i, j \in \{1, \dots, n\}.$$

Теорему 7.2.1 доведено.

Теорема 7.2.2. *Хай $f(x) \in C^{m, \dots, m}(R^n)$. Тоді для залишку $r_{m,n} f(x) = (I - L_{m,n}) f(x)$ виконується рівність $r_{m,n} f(x) =$*

$$= \int_{a_1}^{x_1} \cdots \int_{a_n}^{x_n} D_{t_1, \dots, t_n}^{m, \dots, m} f(t_1, \dots, t_n) \prod_{j=1}^n \frac{(x_j - t_j)^{m-1}}{(m-1)!} dt_1 \cdots dt_n. \quad (7.2.3)$$

Д о в е д е н н я. Перш за все доведемо, що

$$r_{m,n} f(x) = \prod_{j=1}^n (I - L_j) f(x). \quad (7.2.4)$$

де I – тотожний оператор. Для цього скористаємося рівністю

$$1 - \prod_{j=1}^n (1 - l_j) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_i \leq n} \prod_{j=1}^i l_{k_j},$$

де l_1, \dots, l_n – деякі дійсні числа. Якщо тепер у цю рівність підставимо замість 1 тотожний оператор I , а замість чисел l_j підставимо оператори L_j , то отримаємо оператор $L_{m,n}$:

$$I - \prod_{j=1}^n (I - L_j) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_i \leq n} \prod_{j=1}^i L_{k_j} = L_{m,n}.$$

Тому для залишку $r_{m,n}f(x)$ отримаємо рівність

$$r_{m,n}f(x) = (I - L_{m,n})f(x) = \prod_{j=1}^n (1 - L_j)f(x).$$

Тобто отримано доведення співвідношення (7.2.4). Для доведення формули (7.2.3) скористаємося залишковим членом формули Тейлора в інтегральній формі (при $j = \overline{1, n}$):

$$\begin{aligned} f(x) - L_j f(x) &= r_j f(x) = f(x) - \sum_{s_j=0}^{m-1} \frac{(x_j - a_j)^{s_j}}{s_j!} D_{x_j}^{s_j} f(x)|_{x_j=a_j} = \\ &= \int_{a_j}^{x_j} D_{t_j}^m f(\dots, t_j, \dots) \frac{(x_j - t_j)^{m-1}}{(m-1)!} dt_j. \end{aligned}$$

Підставивши ці рівності у формулу (7.2.4) і врахувавши, що оператори $r_j f(x)$ діють тільки на змінну t_j функції $f(t_1, \dots, t_n)$, отримаємо формулу (7.2.3).

Теорему 7.2.2 доведено.

Зауваження. У формулі (7.2.2) для оператора $L_{m,n}f(x)$ використовуються частинні похідні різних порядків у точках перерізу різних площин $x_j = a_j, j \in \{1, \dots, n\}$ або в кутовій точці (при (a_1, \dots, a_n)): $D_{x_{k_1}, \dots, x_{k_1}}^{s_{k_1}, \dots, s_{k_1}} f(x)|_{x=a_k^i}$. Але насправді всі ці дані можна отримати з mn слідів $g_{j,p}(x) = D_{x_j}^p f(x)|_{x_j=a_j}, j = \overline{1, n}, p = \overline{0, m-1}$.

Наприклад,

$$\begin{aligned} D_{x_1, x_2}^{s_1, s_2} f(x)|_{x_1=a_1, x_2=a_2} &= D_{x_2}^{s_2} g_{1, s_1}(a_1, x_2, x_3, \dots, x_n)|_{x_2=a_2} = \\ &= D_{x_1}^{s_1} g_{2, s_2}(x_1, a_2, x_3, \dots, x_n)|_{x_1=a_1}, \quad s_1, s_2 = \overline{0, m-1}. \end{aligned}$$

Це зауваження справедливе для всіх формул інтерфлетації, що аналізуються нижче.

Для практики важливим є випадок $m = 1$. У цьому випадку:

$$P_{1,2}f(x_1, x_2) = f(a_1, x_2) + f(x_1, a_2) - f(a_1, a_2),$$

$$P_{1,2}f(x_1, x_2)|_{x_j=a_j} = f(x_1, x_2)|_{x_j=a_j}, j = 1, 2;$$

$$\begin{aligned} P_{1,3}f(x_1, x_2, x_3) &= f(a_1, x_2, x_3) + f(x_1, a_2, x_3) + f(x_1, x_2, a_3) - \\ &- f(x_1, a_2, a_3) - f(a_1, x_2, a_3) - f(a_1, a_2, x_3) + f(a_1, a_2, a_3), \end{aligned}$$

$$P_{1,3}f(x_1, x_2, x_3)|_{x_j=a_j} = f(x_1, x_2, x_3)|_{x_j=a_j}, j = \overline{1, 3}.$$

7.2.2. Лагранжева інтерфлетация на системі площин, паралельних координатним

Проаналізуємо тепер загальний випадок, коли по кожній змінній $x_i, i = \overline{1, n}$ сліди функції $f(x)$ задаються на кількох площинах, паралельних координатним. Хай $f(x_1, \dots, x_n) = f(x) \in C(E^n), E = [0, 1]$. Розіб'ємо E^n на паралелепіеди площинами $x_i = x_{i,j}, j_i = \overline{0, N_i + 1}; N_i \geq 0; \pi_i : 0 = x_{i,0} < x_{i,1} < \dots < x_{i, N_i + 1} = 1, i = \overline{1, n}$. Позначимо отримане розбиття через $\pi = \pi_1 \times \pi_2 \times \dots \times \pi_n$. Уведемо також скорочені позначення для частинних похідних:

$$D^{\bar{\alpha}} = \frac{\partial^{|\bar{\alpha}|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, f_{\bar{k}, \bar{l}}^{\bar{q}}(x) = D^{(q_1, \dots, q_i)} f(x)|_{x_{l_s} = x_{l_s, k_s}},$$

$\bar{\alpha} = (\alpha_1 \dots \alpha_n), s = \overline{1, i}; \bar{l} = (l_1, \dots, l_i), \bar{k} = (k_1, \dots, k_i), \bar{q} = (q_1, \dots, q_i)$.
Уведемо до розгляду базисні інтерполяційні поліноми Лагранжа

$$l_{i,j}(x_i) = \prod_{\substack{r=0 \\ r \neq j}}^{N_i+1} \frac{x_i - x_{i,r}}{x_{i,j} - x_{i,r}}, i = \overline{1, n}, j = \overline{0, N_i + 1}$$

і систему інтерполяційних операторів за однією змінною x_i

$$\text{Lag}_i f(x) = \sum_{j=0}^{N_i+1} l_{i,j}(x_i) f(x)|_{x_i = x_{i,j}}, i = \overline{1, n}$$

з властивостями

$$\text{Lag}_i f(x)|_{x_i = x_{i,r}} = f(x)|_{x_i = x_{i,r}}, r = \overline{0, N_i + 1}, i = \overline{1, n}. \quad (7.2.5)$$

Теорема 7.2.3. *Хай $N + 1 = (N_1 + 1, \dots, N_n + 1)$. Тоді оператор*

$$Pl_{N+1} f(x) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_i \leq n} \text{Lag}_{k_1} \dots \text{Lag}_{k_i} f(x) \quad (7.2.6)$$

має такі властивості:

$$Pl_{N+1} f(x)|_{x_\mu = x_{\mu, j_\mu}} = f(x)|_{x_\mu = x_{\mu, j_\mu}}, j_\mu = \overline{0, N_\mu + 1}, \mu = \overline{1, n}. \quad (7.2.7)$$

Доведення проводиться по аналогії з доведенням теореми 7.2.1 із урахуванням властивостей (7.2.5) операторів $\text{Lag}_i f(x)$.

Теорема 7.2.4. *Хай $f(x) \in C^{m_1, \dots, m_n}(E^n), 1 \leq m_i \leq N_i + 2, i = \overline{1, n}$. Тоді для залишку $r_{N+1} f(x) = (I - Pl_{N+1}) f(x)$ виконується рівність*

$$r_{N+1} f(x) = \prod_{i=1}^n r_{i, m_i} f(x), \quad (7.2.8)$$

$$r_{i,m_i} f(x) = \quad (7.2.9)$$

$$= \sum_{j_i=0}^{N_i+1} l_{i,j_i}(x_i) \int_{x_{i,j_i}}^{x_i} D_{t_i}^{m_i} f(\cdots, x_{i-1}, t_i, x_{i+1}, \cdots) \frac{(x_{i,j_i} - t_i)^{m_i-1}}{(m_i-1)!} dt_i.$$

Зокрема, якщо $N+2 = (N_1+2, \cdots, N_n+2)$, $f(x) \in C^{N+2}(E^n)$, то

$$\exists \eta = (\eta_1, \cdots, \eta_n) \in E^n : r_N f(x) = [D^{(N+2)} f](\eta) \prod_{i=1}^n \frac{w_i(x_i)}{(N_i+2)!}, \quad (7.2.10)$$

$$w_i(x_i) = \prod_{j=0}^{N_i+1} (x_i - x_{i,j}).$$

Д о в е д е н н я. Рівність (7.2.8) доводиться по аналогії з рівністю (7.2.4). Рівність (7.2.9) встановлюється інтегруванням частинами за змінною t_i під знаками інтегралів. Рівність (7.2.10) є наслідком формули (7.2.8) і класичної формули для виразу залишку інтерполяційної формули Лагранжа через похідну, порядок якої на одиницю вищий, ніж порядок інтерполяційного полінома.

Теорему 7.2.4 доведено.

7.3. Оператори сплайн-інтерфлетації функцій n , $n \geq 3$ змінних зі слідами на системі площин, паралельних координатним

Ермітові інтерполяційні сплайни степеня $2m-1$ є сплайнами степеня $2m-1$ дефекту m за кожною змінною: $f(x) \in C^r(\mathbf{R}^n)$ ($r \geq m-1$) $\Rightarrow S_{i,j,q}(x_i) \in C^{m-1}(\mathbf{R}) \Rightarrow Sp_i f(x) \in C^{m-1}(\mathbf{R}^n)$. У них використовується інформація про функцію та її похідні $D_{x_i}^s f(x)|_{x_i=x_{i,j}}$, $s = \overline{0, m-1}$, $j = \overline{0, N_j+1}$, $i = \overline{1, n}$. Нижче дослідимо сплайн-інтерфлетацію, що використовує лише сліди $f(x)|_{x_i=x_{i,j}}$, $j = \overline{0, N_j+1}$, $i = \overline{1, n}$.

Уведемо систему базисних сплайнів $S_{i,j}(x_i) \in C^{2m-2}(\mathbf{R})$ з властивостями $S_{i,p}(x_{i,q}) = \delta_{p,q}$, $p, q = \overline{0, N_i+1}$ та інтерполяційні сплайни $Sp_i f(x)$ змінної x_i степеня $2m-1$ дефекту 1:

$$Sp_i f(x) = \sum_{j_i=0}^{N_i+1} S_{i,j_i}(x_i) f(x)|_{x_i=x_{i,j_i}}, \quad i = \overline{1, n},$$

$$Sp_i f(x)|_{x_i=x_{i,j}} = f(x)|_{x_i=x_{i,j}}, \quad j = \overline{0, N_j+1}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Теорема 7.3.1. Оператор

$$SP_{m,\pi} f(x) = \sum_{\nu=1}^n (-1)^{\nu+1} SP_{\nu}(x), \quad (7.3.1)$$

де

$$SP_\nu(x) = \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_\nu \leq n} Sp_{k_1} \cdots Sp_{k_\nu} f(x),$$

має властивості $SP_{m,\pi} f(x) \in C^{2m-2, \dots, 2m-2}(\mathbf{R}^n)$,

$$SP_{m,\pi} f(x)|_{x_i=x_{i,j}} = f(x)|_{x_i=x_{i,j}}, j = \overline{0, N_i + 1}, i = \overline{1, n}. \quad (7.3.2)$$

При цьому для похибки $RSP_{m,\pi,r} f(x) = (I - SP_{m,\pi})f(x)$ виконується аналог формули (7.3.5)

$$RSP_{m,\pi,r} f(x) = \prod_{i=1}^n r\text{sp}_i f(x), x \in E^n, \quad (7.3.3)$$

$$r\text{sp}_{i,r} f(x) = (I - Sp_i) f(x), i = \overline{1, n},$$

$$\|RSP_{m,\pi,r} f\|_{C(E^n)} = O\left(\prod_{i=1}^n \Delta_i^r\right) \forall f(x) \in C^{r, \dots, r}(\mathbf{R}^n), 1 \leq r \leq 2N + 2,$$

$$\Delta_i = \max_{1 \leq j \leq N_i + 1} (x_{i,j} - x_{i,j-1}), i = \overline{1, n}.$$

Доведення цієї теореми ґрунтується на твердженнях теореми 7.3.1, та відомих оцінках похибки наближення диференційовних функцій однієї змінної сплайнами дефекту 1.

Зауважимо, що на практиці для наближення функцій з невисоким порядком диференційовності використовуються, як правило, сплайни невисокого степеня. Сплайни степеня $2r - 1$ дефекту 1 збігаються до неперервної функції $f \in C(E^n)$ лише за умови $\max \Delta_i / \min \Delta_i \leq C_r$, де C_r — деякі числа, неоднакові для сплайнів різних степенів. Цю властивість мають і оператори сплайн-інтерфлетації.

7.4. Економні схеми сплайн-інтерполяції функцій трьох змінних, побудовані за допомогою інтерфлетації

Припустимо, що $u(x, y, z) \in C^{r,r,r}(G), r = 1, 2$. Тоді

$$\left| u^{(p,q,s)}(x, y, z) \right| \leq M, \quad (x, y, z) \in G, \quad 0 \leq p, q, s \leq r,$$

$G = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$. Уведемо до розгляду трилінійний сплайн-інтерполянт

$$\begin{aligned} L_n u(x, y, z) &= \\ &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^n u\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}, \frac{k}{n}\right) h(nx - i) h(ny - j) h(nz - k), \end{aligned} \quad (7.4.1)$$

де $h(t) = (|t-1| - 2|t| + |t+1|)/2$. Він відновлює функцію $u(x, y, z) \in C^{(r,r,r)}(\bar{G})$, $r = 1, 2$ з похибкою

$$|u - L_n u| = O(n^{-r}), \quad r = 1, 2$$

за допомогою $(n+1)(n+1)(n+1) \asymp n^3, n \rightarrow \infty$ значень цієї функції та має такі властивості:

$$L_n u \left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}, \frac{k}{n} \right) = u \left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}, \frac{k}{n} \right), \quad i = \overline{0, n}, \quad j = \overline{0, n}, \quad k = \overline{0, n}. \quad (7.4.2)$$

Побудуємо інший кусково-трилінійний інтерполянт, який відновлює функцію $u(x, y, z) \in C^{(r,r,r)}(G)$, $r = 1, 2$ з точністю, яка має той самий порядок відносно величини $1/n$, але потребує меншої кількості значень цієї функції.

Хай

$$\begin{aligned} & \tilde{I}_1 u(x, y, z) = \\ & = (i+1-nx) \left\{ \sum_{j=0}^{n^{3/2}} \sum_{k=0}^{n^3} u \left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n^{3/2}}, \frac{k}{n^3} \right) h(n^{3/2}y-j)h(n^3z-k) + \right. \\ & + \sum_{j=0}^{n^3} \sum_{k=0}^{n^{3/2}} u \left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n^3}, \frac{k}{n^{3/2}} \right) h(n^3y-j)h(n^{3/2}z-k) - \\ & \left. - \sum_{j=0}^{n^{3/2}} \sum_{k=0}^{n^{3/2}} u \left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n^{3/2}}, \frac{k}{n^{3/2}} \right) h(n^{3/2}y-j)h(n^{3/2}z-k) \right\} + \\ & + (nx-i) \left\{ \sum_{j=0}^{n^{3/2}} \sum_{k=0}^{n^3} u \left(\frac{i+1}{n}, \frac{j}{n^{3/2}}, \frac{k}{n^3} \right) h(n^{3/2}y-j)h(n^3z-k) + \right. \\ & + \sum_{j=0}^{n^3} \sum_{k=0}^{n^{3/2}} u \left(\frac{i+1}{n}, \frac{j}{n^3}, \frac{k}{n^{3/2}} \right) h(n^3y-j)h(n^{3/2}z-k) - \\ & \left. - \sum_{j=0}^{n^{3/2}} \sum_{k=0}^{n^{3/2}} u \left(\frac{i+1}{n}, \frac{j}{n^{3/2}}, \frac{k}{n^{3/2}} \right) h(n^{3/2}y-j)h(n^{3/2}z-k) \right\}, \end{aligned}$$

$$\frac{i}{n} \leq x \leq \frac{i+1}{n}, \quad i = \overline{0, n-1}, \quad y, z \in [0, 1];$$

$$\tilde{I}_2 u(x, y, z) =$$

$$\begin{aligned} &= (j+1-ny) \left\{ \sum_{i=0}^{n^{3/2}} \sum_{k=0}^{n^3} u \left(\frac{i}{n^{3/2}}, \frac{j}{n}, \frac{k}{n^3} \right) h(n^{3/2}x-i)h(n^3z-k) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=0}^{n^3} \sum_{k=0}^{n^{3/2}} u \left(\frac{i}{n^3}, \frac{j}{n}, \frac{k}{n^{3/2}} \right) h(n^3x-i)h(n^{3/2}z-k) - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{i=0}^{n^{3/2}} \sum_{k=0}^{n^{3/2}} u \left(\frac{i}{n^{3/2}}, \frac{j}{n}, \frac{k}{n^{3/2}} \right) h(n^{3/2}x-i)h(n^{3/2}z-k) \right\} + \\ &\quad + (ny-j) \left\{ \sum_{i=0}^{n^{3/2}} \sum_{k=0}^{n^3} u \left(\frac{i}{n^{3/2}}, \frac{j+1}{n}, \frac{k}{n^3} \right) h(n^{3/2}x-i)h(n^3z-k) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=0}^{n^3} \sum_{k=0}^{n^{3/2}} u \left(\frac{i}{n^3}, \frac{j+1}{n}, \frac{k}{n^{3/2}} \right) h(n^3x-i)h(n^{3/2}z-k) - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{i=0}^{n^{3/2}} \sum_{k=0}^{n^{3/2}} u \left(\frac{i}{n^{3/2}}, \frac{j+1}{n}, \frac{k}{n^{3/2}} \right) h(n^{3/2}x-i)h(n^{3/2}z-k) \right\}, \end{aligned}$$

$$x, z \in [0, 1], \quad \frac{j}{n} \leq y \leq \frac{j+1}{n}, \quad j = \overline{0, n-1};$$

$$\tilde{I}_3 u(x, y, z) =$$

$$\begin{aligned} &= (k+1-nz) \left\{ \sum_{i=0}^{n^{3/2}} \sum_{j=0}^{n^3} u \left(\frac{i}{n^{3/2}}, \frac{j}{n^3}, \frac{k}{n} \right) h(n^{3/2}x-i)h(n^3y-j) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=0}^{n^3} \sum_{j=0}^{n^{3/2}} u \left(\frac{i}{n^3}, \frac{j}{n^{3/2}}, \frac{k}{n} \right) h(n^3x-i)h(n^{3/2}y-j) - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{i=0}^{n^{3/2}} \sum_{j=0}^{n^{3/2}} u \left(\frac{i}{n^{3/2}}, \frac{j}{n^{3/2}}, \frac{k}{n} \right) h(n^{3/2}x - i)h(n^{3/2}y - j) \Big\} + \\
& + (nz - k) \left\{ \sum_{i=0}^{n^{3/2}} \sum_{j=0}^{n^3} u \left(\frac{i}{n^{3/2}}, \frac{j}{n^3}, \frac{k+1}{n} \right) h(n^{3/2}x - i)h(n^3y - j) + \right. \\
& + \sum_{i=0}^{n^3} \sum_{j=0}^{n^{3/2}} u \left(\frac{i}{n^3}, \frac{j}{n^{3/2}}, \frac{k+1}{n} \right) h(n^3x - i)h(n^{3/2}y - j) - \\
& \left. - \sum_{i=0}^{n^{3/2}} \sum_{j=0}^{n^{3/2}} u \left(\frac{i}{n^{3/2}}, \frac{j}{n^{3/2}}, \frac{k+1}{n} \right) h(n^{3/2}x - i)h(n^{3/2}y - j) \right\},
\end{aligned}$$

$$x, y \in [0, 1], \quad \frac{k}{n} \leq z \leq \frac{k+1}{n}, \quad k = \overline{0, n-1},$$

$$\tilde{I}_1 \tilde{I}_2 u(x, y, z) =$$

$$\begin{aligned}
& = (i+1 - nx) \left[(j+1 - ny) \sum_{k=0}^{n^3} u \left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}, \frac{k}{n^3} \right) h(n^3z - k) + \right. \\
& + (ny - j) \sum_{k=0}^{n^3} u \left(\frac{i}{n}, \frac{j+1}{n}, \frac{k}{n^3} \right) h(n^3z - k) \Big] + \\
& + (nx - i) \left[(j+1 - ny) \sum_{k=0}^{n^3} u \left(\frac{i+1}{n}, \frac{j}{n}, \frac{k}{n^3} \right) h(n^3z - k) + \right. \\
& \left. + (ny - j) \sum_{k=0}^{n^3} u \left(\frac{i+1}{n}, \frac{j+1}{n}, \frac{k}{n^3} \right) h(n^3z - k) \right],
\end{aligned}$$

$$\frac{i}{n} \leq x \leq \frac{i+1}{n}, \quad \frac{j}{n} \leq y \leq \frac{j+1}{n}, \quad i, j = \overline{0, n-1}, \quad z \in [0, 1];$$

$$\tilde{I}_1 \tilde{I}_3 u(x, y, z) =$$

$$\begin{aligned}
&= (i+1-nx) \left[(k+1-nz) \sum_{j=0}^{n^3} u \left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n^3}, \frac{k}{n} \right) h(n^3y-j) + \right. \\
&\quad \left. + (nz-k) \sum_{j=0}^{n^3} u \left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n^3}, \frac{k+1}{n} \right) h(n^3y-j) \right] + \\
&\quad + (nx-i) \left[(k+1-nz) \sum_{j=0}^{n^3} u \left(\frac{i+1}{n}, \frac{j}{n^3}, \frac{k}{n} \right) h(n^3y-j) + \right. \\
&\quad \left. + (nz-k) \sum_{j=0}^{n^3} u \left(\frac{i+1}{n}, \frac{j}{n^3}, \frac{k+1}{n} \right) h(n^3y-j) \right], \\
&\frac{i}{n} \leq x \leq \frac{i+1}{n}, \frac{k}{n} \leq z \leq \frac{k+1}{n}, i, k = \overline{0, n-1}, y \in [0, 1];
\end{aligned}$$

$$\tilde{I}_2 \tilde{I}_3 u(x, y, z) =$$

$$\begin{aligned}
&= (j+1-ny) \left[(k+1-nz) \sum_{i=0}^{n^3} u \left(\frac{i}{n^3}, \frac{j}{n}, \frac{k}{n} \right) h(n^3x-i) + \right. \\
&\quad \left. + (nz-k) \sum_{i=0}^{n^3} u \left(\frac{i}{n^3}, \frac{j}{n}, \frac{k+1}{n} \right) h(n^3x-i) \right] + \\
&\quad + (ny-j) \left[(k+1-nz) \sum_{i=0}^{n^3} u \left(\frac{i}{n^3}, \frac{j+1}{n}, \frac{k}{n} \right) h(n^3x-i) + \right. \\
&\quad \left. + (nz-k) \sum_{i=0}^{n^3} u \left(\frac{i}{n^3}, \frac{j+1}{n}, \frac{k+1}{n} \right) h(n^3x-i) \right], \\
&\frac{j}{n} \leq y \leq \frac{j+1}{n}, \frac{k}{n} \leq z \leq \frac{k+1}{n}, j, k = \overline{0, n-1}, x \in [0, 1];
\end{aligned}$$

$$I_{n,1} I_{n,2} I_{n,3} u(x, y, z) = \tilde{I}_1 \tilde{I}_2 \tilde{I}_3 u(x, y, z) := (i+1-nx) \times$$

$$\times \left\{ (j+1-ny) \left[(k+1-nz) u \left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}, \frac{k}{n} \right) + (nz-k) \times \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& \times u \left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}, \frac{k+1}{n} \right) \Big] + (ny - j) \left[(k+1 - nz) u \left(\frac{i}{n}, \frac{j+1}{n}, \frac{k}{n} \right) + \right. \\
& \left. + (nz - k) u \left(\frac{i}{n}, \frac{j+1}{n}, \frac{k+1}{n} \right) \right] \Big\} + (nx - i) \left\{ (j+1 - ny) \times \right. \\
& \times \left[(k+1 - nz) u \left(\frac{i+1}{n}, \frac{j}{n}, \frac{k}{n} \right) + (nz - k) u \left(\frac{i+1}{n}, \frac{j}{n}, \frac{k+1}{n} \right) \right] + \\
& \left. + (ny - j) \left[(k+1 - nz) u \left(\frac{i+1}{n}, \frac{j+1}{n}, \frac{k}{n} \right) + \right. \right. \\
& \left. \left. + (nz - k) u \left(\frac{i+1}{n}, \frac{j+1}{n}, \frac{k+1}{n} \right) \right] \right\},
\end{aligned}$$

$(x, y, z) \in [i/n, (i+1)/n] \times [j/n, (j+1)/n] \times [k/n, (k+1)/n]$.

Теорема 7.4.1. *Хай $n \geq 4, \sqrt{n} \in \mathbf{N}$. Інтерполянт $Ku = \tilde{K}_n u$*

$$\begin{aligned}
\tilde{K}_n u(x, y, z) &= \tilde{I}_1 u(x, y, z) + \tilde{I}_2 u(x, y, z) + \tilde{I}_3 u(x, y, z) - \quad (7.4.3) \\
&- \tilde{I}_1 \tilde{I}_2 u(x, y, z) - \tilde{I}_1 \tilde{I}_3 u(x, y, z) - \tilde{I}_2 \tilde{I}_3 u(x, y, z) + \tilde{I}_1 \tilde{I}_2 \tilde{I}_3 u(x, y, z)
\end{aligned}$$

має такі інтерполяційні властивості:

$$\tilde{K} u \left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n^{3/2}}, \frac{k}{n^3} \right) = u \left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n^{3/2}}, \frac{k}{n^3} \right), \quad i = \overline{0, n}, \quad j = \overline{0, n^{3/2}}, \quad k = \overline{0, n^3},$$

$$\tilde{K} u \left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n^3}, \frac{k}{n^{3/2}} \right) = u \left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n^3}, \frac{k}{n^{3/2}} \right), \quad i = \overline{0, n}, \quad j = \overline{0, n^3}, \quad k = \overline{0, n^{3/2}},$$

$$\tilde{K} u \left(\frac{i}{n^{3/2}}, \frac{j}{n}, \frac{k}{n^3} \right) = u \left(\frac{i}{n^{3/2}}, \frac{j}{n}, \frac{k}{n^3} \right), \quad i = \overline{0, n^{3/2}}, \quad j = \overline{0, n}, \quad k = \overline{0, n^3},$$

$$\tilde{K} u \left(\frac{i}{n^3}, \frac{j}{n}, \frac{k}{n^{3/2}} \right) = u \left(\frac{i}{n^3}, \frac{j}{n}, \frac{k}{n^{3/2}} \right), \quad i = \overline{0, n^3}, \quad j = \overline{0, n}, \quad k = \overline{0, n^{3/2}},$$

$$\tilde{K} u \left(\frac{i}{n^{3/2}}, \frac{j}{n^3}, \frac{k}{n} \right) = u \left(\frac{i}{n^{3/2}}, \frac{j}{n^3}, \frac{k}{n} \right), \quad i = \overline{0, n^{3/2}}, \quad j = \overline{0, n^3}, \quad k = \overline{0, n},$$

$$\tilde{K} u \left(\frac{i}{n^3}, \frac{j}{n^{3/2}}, \frac{k}{n} \right) = u \left(\frac{i}{n^3}, \frac{j}{n^{3/2}}, \frac{k}{n} \right), \quad i = \overline{0, n^3}, \quad j = \overline{0, n^{3/2}}, \quad k = \overline{0, n},$$

$$\|u - \tilde{K} u\|_{C(G)} = O \left(\frac{1}{n^{3r}} \right) u \in C^{r,r,r}(G), \quad r = 1, 2. \quad (7.4.4)$$

Д о в е д е н н я. Як впливає з результатів підрозд. 7.2, оператор $K_n u(x, y, z) = I_{n,1} u(x, y, z) + I_{n,2} u(x, y, z) + I_{n,3} u(x, y, z) -$ (7.4.5)

$$- I_{n,1} I_{n,2} u(x, y, z) - I_{n,1} I_{n,3} u(x, y, z) - I_{n,2} I_{n,3} u(x, y, z) + \\ + I_{n,1} I_{n,2} I_{n,3} u(x, y, z),$$

$$I_{n,1} u(x, y, z) = (i + 1 - nx) u \left(\frac{i}{n}, y, z \right) + (nx - i) u \left(\frac{i+1}{n}, y, z \right),$$

$$i/n \leq x \leq (i+1)/n, \quad i = \overline{0, n-1};$$

$$I_{n,2} u(x, y, z) = (j + 1 - ny) u \left(x, \frac{j}{n}, z \right) + (ny - j) u \left(x, \frac{j+1}{n}, z \right),$$

$$j/n \leq y \leq (j+1)/n, \quad j = \overline{0, n-1};$$

$$I_{n,3} u(x, y, z) = (k + 1 - nz) u \left(x, y, \frac{k}{n} \right) + (nz - k) u \left(x, y, \frac{k+1}{n} \right),$$

$$k/n \leq z \leq (k+1)/n; \quad k = \overline{0, n-1};$$

$$I_{n,1} I_{n,2} u(x, y, z) = (i + 1 - nx) \left[(j + 1 - ny) u \left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}, z \right) + \right.$$

$$\left. + (ny - j) u \left(\frac{i}{n}, \frac{j+1}{n}, z \right) \right] + (nx - i) \times$$

$$\times \left[(j + 1 - ny) u \left(\frac{i+1}{n}, \frac{j}{n}, z \right) + (ny - j) u \left(\frac{i+1}{n}, \frac{j+1}{n}, z \right) \right],$$

$$(x, y) \in [i/n, (i+1)/n] \times [j/n, (j+1)/n], \quad i, j = \overline{0, n-1};$$

$$\begin{aligned} I_{n,1}I_{n,3}u(x, y, z) &= (i+1-nx) \left[(k+1-nz)u\left(\frac{i}{n}, y, \frac{k}{n}\right) + \right. \\ &+ \left. (nz-k)u\left(\frac{i}{n}, y, \frac{k+1}{n}\right) \right] + (nx-i) \times \\ &\times \left[(k+1-nz)u\left(\frac{i+1}{n}, y, \frac{k}{n}\right) + (nz-k)u\left(\frac{i+1}{n}, y, \frac{k+1}{n}\right) \right], \end{aligned}$$

$$(x, z) \in [i/n, (i+1)/n] \times [k/n, (k+1)/n], \quad i, k = \overline{0, n-1};$$

$$\begin{aligned} I_{n,2}I_{n,3}u(x, y, z) &= (j+1-ny) \left[(k+1-nz)u\left(x, \frac{j}{n}, \frac{k}{n}\right) + \right. \\ &+ \left. (nz-k)u\left(x, \frac{j}{n}, \frac{k+1}{n}\right) \right] + (ny-j) \times \\ &\times \left[(k+1-nz)u\left(x, \frac{j+1}{n}, \frac{k}{n}\right) + (nz-k)u\left(x, \frac{j+1}{n}, \frac{k+1}{n}\right) \right], \end{aligned}$$

$$(y, z) \in [j/n, (j+1)/n] \times [k/n, (k+1)/n], \quad j, k = \overline{0, n-1}$$

є кусково-трилінійним інтерфлетантом, який відновлює значення функції $u(x, y, z)$ у кубах $G_{ijk} = \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right] \times \left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right] \times \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$, $i = \overline{0, n-1}$, $j = \overline{0, n-1}$, $k = \overline{0, n-1}$ за її слідами на гранях цих кубів:

$$K_n u\left(\frac{i}{n}, y, z\right) = u\left(\frac{i}{n}, y, z\right) (i = \overline{0, n-1}),$$

$$K_n u\left(x, \frac{j}{n}, z\right) = u\left(x, \frac{j}{n}, z\right) (j = \overline{0, n-1}),$$

$$K u\left(x, y, \frac{k}{n}\right) = u\left(x, y, \frac{k}{n}\right) (k = \overline{0, n-1}).$$

При цьому щодо похибки наближення виконується співвідношення

$$\|K_n u - u\|_{C(G)} = O\left(\frac{1}{n^{3r}}\right) \forall u \in C^{r,r,r}(G), r = 1, 2.$$

Для відновлення функції $u(x, y, z)$ з похибкою $O(n^{-3r})$ за допомогою $K_n u$ використовується $3(n+1)$ слідів функції $u(x, y, z)$ на площинах, паралельних граням куба G . Відновлення проводиться послідовно на кубах G_{ijk} , $i = \overline{0, n-1}$, $j = \overline{0, n-1}$, $k = \overline{0, n-1}$; кількість цих кубів дорівнює $Q(K_n) = n^3$.

Зробимо в інтерфлетанті $K_n u$ такі заміни (вважаємо, що $\sqrt{n} \in \mathbf{N}$):

$$I_{n,k} \rightarrow \tilde{I}_k, k = 1, 2, 3; I_k I_q \rightarrow \tilde{I}_k \tilde{I}_q, k, q \in \{1, 2, 3\}, k \neq q.$$

При цьому допускаємо похибку

$$|(I_{n,k} - \tilde{I}_k)u| = O\left(\frac{1}{n^{3r}}\right), k = 1, 2, 3,$$

$$|(I_{n,k} I_{n,q} - \tilde{I}_k \tilde{I}_q)u| = O\left(\frac{1}{n^{3r}}\right).$$

Отже,

$$|\tilde{K}_n u - K_n u| = O\left(\frac{1}{n^{3r}}\right).$$

Звідси отримуємо доведення (7.4.4).

Інтерполяційні властивості, вказані у твердженні теореми 7.4.1, ґрунтуються на інтерфлетаційних властивостях операторів K_n та інтерполяційних властивостях операторів $\tilde{I}_k u(x, y, z)$, $k = 1, 2, 3$:

$$\tilde{I}_k u((x, y, z) = u(x, y, z), (x, y, z) = \left(\frac{i'}{n^{(\nu_1^2+2)/2}}, \frac{j'}{n^{(\nu_2^2+2)/2}}, \frac{k'}{n^{(\nu_3^2+2)/2}} \right)$$

$$i' = \overline{0, n^{(\nu_1^2+2)/2}}, j' = \overline{0, n^{(\nu_2^2+2)/2}}, k' = \overline{0, n^{(\nu_3^2+2)/2}},$$

$$(\nu_1, \nu_2, \nu_3) \in \{(0, 1, 2), (0, 2, 1), (1, 0, 2), (1, 2, 0), (2, 0, 1), (2, 1, 0)\}.$$

Теорему 7.4.1 доведено.

Н а с л і д о к. Інтерполянт $(\tilde{K}_n u(x, y, z))$, що визначається формулою (7.4.3), для наближення функції $u(x, y, z)$ на G з похибкою $\epsilon_2 = O(n^{-3r})$ потребує інтерполяційних даних у точках

$$\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n^{3/2}}, \frac{k}{n^3} \right), i = \overline{0, n}, j = \overline{0, n^{3/2}}, k = \overline{0, n^3},$$

$$\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n^3}, \frac{k}{n^{3/2}} \right), i = \overline{0, n}, j = \overline{0, n^3}, k = \overline{0, n^{3/2}},$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{i}{n^{3/2}}, \frac{j}{n}, \frac{k}{n^3} \right), i = \overline{0, n^{3/2}}, j = \overline{0, n}, k = \overline{0, n^3}, \\ & \left(\frac{i}{n^3}, \frac{j}{n}, \frac{k}{n^{3/2}} \right), i = \overline{0, n^3}, j = \overline{0, n}, k = \overline{0, n^{3/2}}, \\ & \left(\frac{i}{n^{3/2}}, \frac{j}{n^3}, \frac{k}{n} \right), i = \overline{0, n^{3/2}}, j = \overline{0, n^3}, k = \overline{0, n}, \\ & \left(\frac{i}{n^3}, \frac{j}{n^{3/2}}, \frac{k}{n} \right), i = \overline{0, n^3}, j = \overline{0, n^{3/2}}, k = \overline{0, n}. \end{aligned}$$

Число таких точок має (при $n \rightarrow \infty$) головний член $Q_2 = 6(n+1)(n^{3/2}+1)(n^3+1) \asymp 6n^{11/2}$.

Знаходимо звідси, що $n \asymp Q_2^{2/11}$. У результаті отримаємо

$$\epsilon_2 = O(n^{-3r}) = O(Q_2^{-6r/11}), 6r/11 = r \cdot 0,545454\dots$$

Для порівняння зазначимо, що сплайн-інтерполянт $L_{n^3}u$ для досягнення похибки наближення $\epsilon_1 = \|u - L_{n^3}u\|_{C(G)} \asymp \epsilon_2$ потребує $Q_1 = (n^3+1)^3 \asymp n^9$ значень функції у вузлах $(i/n^3, j/n^3, k/n^3)$, $i, j, k = \overline{0, n^3}$. Врахувавши, що $n = (Q_1)^{1/9}$, отримаємо

$$\epsilon_1 = O(n^{-3r}) = O(Q_1^{-r/3}), r/3 = r \cdot 0,333333\dots$$

Тобто у випадку $Q_1 = Q_2 = Q$ матимемо асимптотичне співвідношення

$$\epsilon_1/\epsilon_2 \asymp \frac{Q^{6r/11}}{Q^{r/3}} \asymp Q^{7r/33} \rightarrow \infty, Q \rightarrow \infty, 7r/33 = r0,212121\dots, r = 1, 2.$$

Зауваження 1. Звернемо увагу на те, що в операторах \tilde{K}_n використовуються три вкладені одна в одну сітки з кроками $1/n^{(\nu^2+2)/2}$, $\nu = 0, 1, 2$.

Зауваження 2. Всі твердження цього підрозділу можна поширити на випадки, коли в основі побудови інтерполяційних операторів лежать оператори сплайн-інтерфлетації, допоміжні функції яких є сплайнами степеня $\mu = 2, 3, 4, 5, \dots$ за умови, що наближувана функція належить до більш високого порядку диференційовності: $u(x, y, z) \in C^{\mu+1, \mu+1, \mu+1}(G)$. Крім того, вища (порівняно із застосуванням класичних сплайнів від трьох змінних) ефективність запропонованого методу сплайн-інтерполяції зберігається також для $u(x, y, z) \in L_\alpha M(G)$, належних класові Ліпшица.

7.5. Інтерфлетация на симплексі в \mathbf{R}^3

Введемо до розгляду симплекс $T = \{(x, y, z) : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, 1 - x - y - z \geq 0\}$, а також $\forall u(x, y, z) \in C(T)$ такі оператори:

$$T_0u(x, y, z) = xu(1 - y - z, y, z) + yu(x, 1 - x - z, z) + zu(x, y, 1 - x - y),$$

$$T_1u(x, y, z) = u(0, y, z), T_2u(x, y, z) = u(x, 0, z), T_3u(x, y, z) = u(x, y, 0).$$

Лема 7.5.1. *Оператор $T_0u(x, y, z)$ має такі властивості:*

$$T_0u(x, y, z)|_{1-x-y-z=0} = u(x, y, z)|_{1-x-y-z=0}. \quad (7.5.1)$$

Доведення. З рівняння $1 - x - y - z = 0$ отримуємо $z = 1 - x - y$. Тоді $T_0u(x, y, z)|_{1-x-y-z=0} = T_0u(x, y, 1 - x - y) = xu(1 - y - (1 - x - y), y, 1 - x - y) + yu(x, 1 - x - (1 - x - y), 1 - x - y) + (1 - x - y)u(x, y, 1 - x - y) = xu(x, y, 1 - x - y) + yu(x, y, 1 - x - y) + (1 - x - y)u(x, y, 1 - x - y) = u(x, y, 1 - x - y)$.

Аналогічно можна довести, що $T_0u(1 - y - z, y, z) = u(1 - y - z, y, z)$, $T_0u(x, 1 - x - z, z) = u(x, 1 - x - z, z)$.

Лема 1 доведена.

Лема 7.5.2. *Оператор*

$$T_{123}u(x, y, z) = (T_1 + T_2 + T_3 - T_1T_2 - T_1T_3 - T_2T_3 + T_1T_2T_3)u(x, y, z),$$

де $T_1T_2u(x, y, z) = u(0, 0, z)$, $T_1T_3u(x, y, z) = u(0, y, 0)$, $T_2T_3u(x, y, z) = u(x, 0, 0)$, $T_1T_2T_3u(x, y, z) = u(0, 0, 0)$, має такі властивості:

$$T_{123}u(0, y, z) = u(0, y, z), T_{123}u(x, 0, z) = u(x, 0, z),$$

$$T_{123}u(x, y, 0) = u(x, y, 0) \forall u \in C(\mathbf{R}^3).$$

Д о в е д е н н я. Для доведення першої з властивостей зауважимо, що $T_{123}u(0, y, z) = T_1T_{123}u(x, y, z) = T_1(T_1 + T_2 + T_3 - T_1T_2 - T_1T_3 - T_2T_3 + T_1T_2T_3)u(x, y, z)$. Тому

$T_{123}u(0, y, z) = (T_1T_1 + T_1T_2 + T_1T_3 - T_1T_1T_2 - T_1T_1T_3 - T_1T_2T_3 + T_1T_1T_2T_3)u(x, y, z) = (T_1 + T_1T_2 + T_1T_3 - T_1T_2 - T_1T_3 - T_1T_2T_3 + T_1T_2T_3)u(x, y, z) = T_1u(x, y, z) = u(0, y, z)$. Тут враховано, що $T_1T_1u = T_1u$. Отже, перша з властивостей доведена. Аналогічно доводяться інші дві властивості з урахуванням того, що $T_{123}u(x, 0, z) = T_2T_{123}u(x, y, z)$, $T_{123}u(x, y, 0) = T_3T_{123}u(x, y, z)$.

Лема 7.5.2 доведена.

Теорема 7.5.1. *Оператор*

$$O_4u(x, y, z) = (T_0 + T_{123} - T_0T_{123})u(x, y, z),$$

де $T_0T_{123}u(x, y, z) = xT_{123}u(1 - y - z, y, z) + yT_{123}u(x, 1 - x - z, z) + zT_{123}u(x, y, 1 - x - y)$ має такі властивості:

$$O_4u(x, y, z) = u(x, y, z), (x, y, z) \in \partial T, \quad (7.5.2)$$

де ∂T – границя симплекса T , що складається з чотирьох трикутників, які лежать на координатних площинах $x = 0, y = 0, z = 0$, а також на площині $1 - x - y - z = 0$.

Д о в е д е н н я. Враховуючи, що $T_0 u|_{1-x-y-z=0} = u|_{1-x-y-z=0}$, можна написати такий ланцюжок співвідношень:

$$\begin{aligned} O_4 u(x, y, z)|_{1-x-y-z=0} &= \left[T_0 u(x, y, z) + T_{123} u(x, y, z) \right] |_{1-x-y-z=0} - \\ &- T_0 T_{123} u(x, y, z)|_{1-x-y-z=0} = \left[u(x, y, z) + T_{123} u(x, y, z) \right] |_{1-x-y-z=0} - \\ &- T_{123} u(x, y, z)|_{1-x-y-z=0} = u(x, y, z)|_{1-x-y-z=0}. \end{aligned}$$

Отже, на одній площині, що є частиною симплекса, твердження теореми 7.5.1 виконується. Оскільки $O_4 u(x, y, z)|_{x=0} = T_1 O_4 u(x, y, z)$, то можна написати такий ланцюжок співвідношень $T_1 O_4 u(x, y, z) = T_1 (T_0 + T_{123} - T_0 T_{123}) u(x, y, z) = (T_1 T_0 + T_1 T_{123} - T_1 T_0 T_{123}) u(x, y, z) = (T_1 T_0 + T_1 - T_1 T_0 T_{123}) u(x, y, z) = T_1 u(x, y, z) = u(0, y, z)$. Аналогічно доводиться, що $T_2 O_4 u = T_2 u, T_3 O_4 u = T_3 u$.

Теорема 7.5.1 доведена.

7.6. Інтерфлетация на симплексі в \mathbb{R}^3 з однією криволінійною гранню

Введемо до розгляду симплекс $T = \{(x, y, z) : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, 1 - f(x) - g(y) - h(z) \geq 0\}$, де f, g, h монотонні на $[0, 1]$ функції, обернені до яких позначатимемо відповідно f^{-1}, g^{-1}, h^{-1} . В ньому три грані є частинами координатних площин, а четверта грань є частиною криволінійної поверхні $1 - f(x) - g(y) - h(z) = 0$. Для зручності напишемо деякі властивості використовуваних вище функцій f, g, h : $f(0) = g(0) = h(0) = 0, f(1) = g(1) = h(1) = 0, f(f^{-1}(x)) = x, g(g^{-1}(y)) = y, h(h^{-1}(z)) = z, 0 \leq x, y, z \leq 1$. Введемо також $\forall u(x, y, z) \in C(T)$ такі оператори:

$$\begin{aligned} T_0 u(x, y, z) &= f(x)u(f^{-1}(1 - g(y) - h(z)), y, z) + \\ &+ g(y)u(x, g^{-1}(1 - f(x) - h(z)), z) + h(z)u(x, y, h^{-1}(1 - f(x) - h(y))), \\ T_1 u(x, y, z) &= u(0, y, z), T_2 u(x, y, z) = u(x, 0, z), T_3 u(x, y, z) = u(x, y, 0). \end{aligned}$$

Лема 7.6.1. Оператор $T_0 u(x, y, z)$ має такі властивості:

$$T_0 u(x, y, z)|_{1-f(x)-g(y)-h(z)=0} = u(x, y, z)|_{1-f(x)-g(y)-h(z)=0}. \quad (7.6.1)$$

Д о в е д е н н я. З рівняння $1 - f(x) - g(y) - h(z) = 0$ отримуємо $z = h^{-1}(1 - f(x) - g(y))$. Тоді $T_0 u(x, y, z)|_{1-f(x)-g(y)-h(z)=0} = T_0 u(x, y, h^{-1}(1 - f(x) - g(y))) = f(x)u(f^{-1}(1 - g(y) - h(h^{-1}(1 - f(x) - g(y))))$

$$g(y)), y, h^{-1}(1-f(x)-g(y))) + g(y)u(x, g^{-1}(1-f(x)-h(h^{-1}(1-f(x)-g(y))))), h^{-1}(1-f(x)-g(y))) + (1-f(x)-g(y))u(x, y, h^{-1}(1-f(x)-g(y))) = f(x)u(x, y, h^{-1}(1-f(x)-g(y))) + g(y)u(x, y, h^{-1}(1-f(x)-g(y))) + (1-f(x)-g(y))u(x, y, h^{-1}(1-f(x)-g(y))) = u(x, y, h^{-1}(1-f(x)-g(y))).$$

Аналогічно можна довести, що $T_0u(f^{-1}(1-g(y)-h(z)), y, z) = u(f^{-1}(1-g(y)-h(z)), y, z)$, $T_0u(x, g^{-1}(1-f(x)-h(z)), z) = u(x, g^{-1}(1-f(x)-h(z)), z)$.

Лема 7.6.1 доведена.

Теорема 7.6.1. *Оператор*

$$O_4u(x, y, z) = (T_0 + T_{123} - T_0T_{123})u(x, y, z),$$

де $T_0T_{123}u(x, y, z) = f(x)T_{123}u(f^{-1}(1-g(y)-h(z)), y, z) + g(y)T_{123}u(x, g^{-1}(1-f(x)-h(z)), z) + h(z)T_{123}u(x, y, h^{-1}(1-f(x)-h(y)))$ має такі властивості:

$$O_4u(x, y, z) = u(x, y, z), (x, y, z) \in \partial T, \quad (7.6.2)$$

де ∂T – границя симплекса T , що складається з трьох прямокутних трикутників, які лежать на координатних площинах відповідно $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ і мають криволінійні (взагалі кажучи) гіпотенузи, а також з трикутника, що є частиною поверхні $1-f(x)-g(y)-h(z) = 0$. Оператор $T_{123}u$ визначений у лемі 7.5.2.

Д о в е д е н н я. Враховуючи, що $T_0u|_{1-f(x)-g(y)-h(z)=0} = u|_{1-f(x)-g(y)-h(z)=0}$, можна написати такий ланцюжок співвідношень:

$$\begin{aligned} O_4u(x, y, z)|_{1-f(x)-g(y)-h(z)=0} &= T_0u(x, y, z)|_{1-f(x)-g(y)-h(z)=0} + \\ &+ T_{123}u(x, y, z)|_{1-f(x)-g(y)-h(z)=0} - \\ -T_0T_{123}u(x, y, z)|_{1-f(x)-g(y)-h(z)=0} &= u(x, y, z)|_{1-f(x)-g(y)-h(z)=0} + \\ &+ T_{123}u(x, y, z)|_{1-f(x)-g(y)-h(z)=0} - \\ -T_{123}u(x, y, z)|_{1-f(x)-g(y)-h(z)=0} &= u(x, y, z)|_{1-f(x)-g(y)-h(z)=0}. \end{aligned}$$

Отже, на одній поверхні, що є частиною границі області T , твердження теореми 7.6.1 виконується.

Враховавши, що $O_4u(x, y, z)|_{x=0} = T_1O_4u(x, y, z)$ можна написати такий ланцюжок співвідношень

$$T_1O_4u(x, y, z) = T_1(T_0 + T_{123} - T_0T_{123})u(x, y, z) = (T_1T_0 + T_1T_{123} - T_1T_0T_{123})u(x, y, z) = (T_1T_0 + T_1 - T_1T_0T_{123})u(x, y, z) = T_1u(x, y, z) = u(0, y, z).$$

Аналогічно доводиться, що $T_2O_4u = T_2u$, $T_3O_4u = T_3u$.

Теорема 7.6.1 доведена.

7.7. Інтерфлєтація на паралелепієді в \mathbb{R}^3 з однією криволінійною гранню

Хай область D є паралелепієдом з однією криволінійною гранню $D = \{x = (x_1, x_2, x_3) | a_1 \leq x_1 \leq b_1, a_2 \leq x_2 \leq b_2, a_3 \leq x_3 \leq b_3(x, y); a_3 < b_3(x, y)\}$. Побудуємо оператор $Of(x)$ інтерфлєтації функції $f(x) \in C(D)$ на границі ∂D цього паралелепієда з властивостями

$$Of(x)|_{x_k=a_k} = f(x)|_{x_k=a_k}, k = \overline{1, 3}; Of(x)|_{x_k=b_k} = f(x)|_{x_k=b_k}, k = 1, 2, \quad (7.7.1)$$

$$Of(x_1, x_2, b_3(x, y)) = f(x_1, x_2, b_3(x, y)). \quad (7.7.2)$$

Введемо до розгляду такі оператори

$$O_1 f(x) = \frac{x_1 - b_1}{a_1 - b_1} f(a_1, x_2, x_3) + \frac{x_1 - a_1}{b_1 - a_1} f(b_1, x_2, x_3), \quad (7.7.3)$$

$$O_2 f(x) = \frac{x_2 - b_2}{a_2 - b_2} f(x_1, a_2, x_3) + \frac{x_2 - a_2}{b_2 - a_2} f(x_1, b_2, x_3), \quad (7.7.4)$$

$$O_3 f(x) = \frac{x_3 - b_3(x_1, x_2)}{a_3 - b_3(x_1, x_2)} f(x_1, x_2, a_3) + \frac{x_3 - a_3}{b_3(x_1, x_2) - a_3} f(x_1, x_2, b_3(x_1, x_2)). \quad (7.7.5)$$

Теорема 7.7.1. *Оператор*

$$Of(x) = (O_1 + O_2 + O_3 - O_3(O_1 + O_2) - O_1 O_2 + O_3 O_1 O_2) f(x)$$

є оператором інтерфлєтації з властивостями (7.7.1), (7.7.2) для $f(x) \in C(D)$.

Пропонуємо читачеві самостійно довести цю теорему безпосередньою перевіркою.

7.8. Інтерфлєтація на системі площин, паралельних координатним, та на границі довільної області $G \subset \mathbb{R}^3$

Опишемо алгоритм, який дає змогу задовольняти граничні умови Діріхле на границі тривимірної області $G \subset \mathbb{R}^3$, обмеженої частинами відомих поверхонь. Алгоритм зручно розбити на кроки. Не зменшуючи загальності, вважаємо, що $G \subset [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$.

Крок 1. Розіб'ємо область G на підобласті площинами $x = x_i, i = \overline{0, m_1}; y = y_j, j = \overline{0, m_2}; z = z_k, k = \overline{0, m_3}$, паралельними координатним, $a_1 = x_0 < x_1 < \dots < x_{m_1} = b_1; a_2 = y_0 < y_1 < \dots < y_{m_2} = b_2; a_3 = z_0 < z_1 < \dots < z_{m_3} = b_3$.

Ці підобласті будуть трьох типів

– паралелепіпеди: $\Pi_{ijk} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \times [z_k, z_{k+1}]$;
 – паралелепіпеди $\tilde{\Pi}_{ijk} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \times [z_k, z_{k+1}(x, y)]$ з однією криволінійною (взагалі кажучи) гранню, яка є частиною границі ∂G області G . Таких паралелепіпедів для кожної точки $A_{i,j,k}(x_i, y_j, z_k)$ може бути шість залежно від того, як розміщена криволінійна грань:

$$\tilde{\Pi}_{ijk}^{(1)} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \times [z_k, z_{k+1}(x, y)];$$

$$\tilde{\Pi}_{ijk}^{(2)} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \times [z_k(x, y), z_{k+1}];$$

$$\tilde{\Pi}_{ijk}^{(3)} = [x_i, x_{i+1}(y, z)] \times [y_j, y_{j+1}] \times [z_k, z_{k+1}];$$

$$\tilde{\Pi}_{ijk}^{(4)} = [x_i(y, z), x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \times [z_k, z_{k+1}];$$

$$\tilde{\Pi}_{ijk}^{(5)} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}(x, z)] \times [z_k, z_{k+1}];$$

$$\tilde{\Pi}_{ijk}^{(6)} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j(x, z), y_{j+1}] \times [z_k, z_{k+1}];$$

– піраміди (симплекси) T_{ijk} з однією криволінійною (взагалі кажучи) гранню, яка є частиною границі ∂G області G . Таких пірамід для кожної приграничної точки $A_{i,j,k}(x_i, y_j, z_k)$ може бути вісім залежно від того, як розміщена криволінійна грань:

$$T_{ijk}^{(1)} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}(x)] \times [z_k, z_{k+1}(x, y)]$$

$$T_{ijk}^{(2)} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}(x)] \times [z_k, z_{k+1}(x, y)]$$

$$T_{ijk}^{(3)} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}(x)] \times [z_k, z_{k+1}(x, y)]$$

$$T_{ijk}^{(4)} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j(x), y_{j+1}] \times [z_k, z_{k+1}(x, y)]$$

$$T_{ijk}^{(5)} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}(x)] \times [z_k(x, y), z_{k+1}]$$

$$T_{ijk}^{(6)} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}(x)] \times [z_k(x, y), z_{k+1}]$$

$$T_{ijk}^{(7)} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}(x)] \times [z_k(x, y), z_{k+1}]$$

$$T_{ijk}^{(8)} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j(x), y_{j+1}] \times [z_k(x, y), z_{k+1}]$$

Крок 2. Будуємо інтерфлетанти трьох типів: $OP_{ijk}(x, y, z)$, $O\tilde{\Pi}_{ijk}(x, y, z)$, $OT_{ijk}(x, y, z)$ з такими інтерфлетатійними властивостями: $OP_{ijk}(x, y, z) = u(x, y, z)$, $(x, y, z) \in \partial\Pi_{ijk}$, $O\tilde{\Pi}_{ijk}(x, y, z) = u(x, y, z)$, $(x, y, z) \in \partial\tilde{\Pi}_{ijk}$, $OT_{ijk}(x, y, z) = u(x, y, z)$, $(x, y, z) \in \partial T_{ijk}$.

Крок 3. Будуємо оператор Ou з властивостями

$$Ou(x, y, z) = \begin{cases} OP_{ijk}(x, y, z), & (x, y, z) \in \Pi_{ijk}, \\ O\tilde{\Pi}_{ijk}(x, y, z), & (x, y, z) \in \tilde{\Pi}_{ijk}, \\ OT_{ijk}(x, y, z), & (x, y, z) \in T_{ijk}. \end{cases}$$

Пропонуємо читачеві самостійно довести наступну теорему.

Теорема 7.8.1. Для кожної неперервної в області G функції $u(x, y, z) \in C(G)$ оператор $Ou(x, y, z)$ має властивості

$$Ou(x, y, z) \in C(G) \forall u(x, y, z) \in C(G),$$

$$Ou(x, y, z) = u(x, y, z), (x, y, z) \in \partial G,$$

$$Ou(x, y, z) = u(x, y, z), (x, y, z) \in GXYZ,$$

$$GXYZ = \{(x, y, z) : x = x_i, i = \overline{0, m_1}; y = y_j, j = \overline{0, m_2}; z = z_k, k = \overline{0, m_3}\}.$$

З а у в а ж е н н я 1. Таким чином, ця теорема стверджує, що оператор $Ou(x, y, z)$ точно задовольняє умови Діріхле на границі довільної тривимірної області G й інтерфлетує $u(x, y, z)$ на множині площин $GXYZ$.

З а у в а ж е н н я 2. При розв'язанні крайової задачі з граничними умовами Діріхле вважаються заданими сліди розв'язку диференціального рівняння лише на границі ∂G . В цьому разі вибором слідів на множині площин $GXYZ$ (з умови мінімуму відповідного функціоналу) можна добитись наближення до точного розв'язку з високою точністю. Така формула може бути використана також і для наближення $u(x, y, z)$ методом найменших квадратів, в томографії.

7.9. Картографія поверхні за даними її радіолокації на системі смуг.

Припустимо, що нам задана система смуг $S_i : \alpha_i \leq \omega_i(x, y) \leq \beta_i, i = \overline{1, n}, \omega_i(x, y) := a_i x + b_i y - c_i, a_i^2 + b_i^2 = 1$. Вважаємо відомими також рельєфи поверхні $S : z = f(x, y) \in C(\mathbf{R}^2)$ над кожною смугою: $f_i(x, y) = f(x, y)|_{S_i}, i = \overline{1, n}$. Треба за цією інформацією відновити (можливо, наближено) функцію $f(x, y)$. Така задача виникає, зокрема, в картографії поверхні за даними радіолокації поверхні, отриманих за допомогою супутника, який рухається над територією S по фіксованих траєкторіях (очевидно, дані радіолокації поверхні охоплюють рельєф деякої смуги вздовж заданої траєкторії). Нижче викладемо один з можливих підходів до розв'язання цієї задачі.

Перш за все відмітимо, що у випадку, коли всі смуги паралельні одній і мають спільні тільки границі (тобто не накладаються одна на одну)

$$S_i : \alpha_i \leq \omega(x, y) \leq \alpha_{i+1}, i = \overline{1, n}, -\infty < \alpha_1, \alpha_{n+1} < \infty,$$

то задача розв'язується тривіально - потрібний оператор задається так:

$$O(\{f_i\}; x, y) = f_k(x, y), (x, y) \in S_k, i = \overline{1, n}.$$

Тому приділимо більше уваги загальному випадку. Введемо до розгляду такі позначення:

$$S_{k,p} = S_k \cap S_p, f_{k,p}(x, y) = f(x, y)|_{S_{k,p}} = f_k(x, y)|_{S_{k,p}} = f_p(x, y)|_{S_{k,p}},$$

$$\Omega_i(x, y) = \begin{cases} \omega_i(x, y) - \alpha_i, & \omega_i(x, y) < \alpha_i \\ 0, & \alpha_i \leq \omega_i(x, y) \leq \beta_i \\ \omega_i(x, y) - \beta_i & \omega_i(x, y) > \beta_i \end{cases}$$

$$G_i(x, y) = \prod_{j=1, j \neq i}^n \Omega_j^2(x, y) / \sum_{k=1}^n \prod_{j=1, j \neq k}^n \Omega_j^2(x, y), i = \overline{1, n}.$$

Очевидно,

$$G_i(x, y) \Big|_{S_p} = \begin{cases} 1, & p = i, \\ 0, & p \neq i, \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^M G_i(x, y) \equiv 1.$$

Ці властивості функцій $G_i(x, y)$ дають змогу довести справедливність наступної теореми.

Теорема 7.9.1. *Оператор*

$$O(\{f_i\}; x, y) = \sum_{i=1}^n G_i(x, y) f_i(x, y) - \sum_{S_{k,p} \neq \emptyset} G_k(x, y) G_p(x, y) f_{k,p}(x, y)$$

має такі властивості:

$$f_i(x, y) \in C(\mathbf{R}^2), i = \overline{1, n} \implies O(\{f_i\}; x, y) \in C(\mathbf{R}^2);$$

$$O(\{f_i\}; x, y) \Big|_{S_q} = f_q(x, y) \Big|_{S_q}, q = \overline{1, n}.$$

Д о в е д е н н я. Запишемо (для $q = \overline{1, n}$)

$$\begin{aligned} O(\{f_i\}; x, y) \Big|_{S_q} &= \sum_{i=1}^n G_i(x, y) f_i(x, y) \Big|_{S_q} - \\ &- \sum_{S_{k,p} \neq \emptyset} G_k(x, y) G_p(x, y) f_{k,p}(x, y) \Big|_{S_q} = f_q(x, y) \Big|_{S_q} + \\ &+ \sum_{i=1, i \neq q}^n f_{i,q}(x, y) \Big|_{S_{i,q}} - \sum_{k=1, k \neq q}^n f_{k,q}(x, y) \Big|_{S_{k,q}} = f_q(x, y) \Big|_{S_q}. \end{aligned}$$

Теорема 7.9.1 доведена.

Отже, оператори $O(\{f_i\}; x, y)$ дають змогу відтворювати невідому поверхню у точках між смугами за інформацією про неї, заданою на вказаних смугах. Для більшого наближення до практики слід мати на увазі, що функції $f_i(x, y), i = \overline{1, n}$ можуть бути задані у вигляді набору

знімків, отриманих вздовж смуги, причому знімки можуть накладатися один на одного, тобто мати спільні підобласті, а не тільки спільні границі. Це означає, що для побудови $f_i(x, y), i = \overline{1, n}$ у точках \mathbf{R}^2 інколи треба використовувати для своєї побудови згладжуючі алгоритми, а не тільки алгоритми, що точно відновлюють поверхню заданої підобласті у смугі $S_i, i = \overline{1, n}$. Крім того, треба вміти продовжувати функції $f_i(x, y), i = \overline{1, n}$ за межі смуг $S_i, i = \overline{1, n}$. Наведемо один з можливих алгоритмів такого продовження. Хай смугі S_i відповідає місцева система координат $\omega_i(x, y) := a_i x + b_i y - c_i, \tau_i = -b_i x + a_i y$. Тоді функція (тут $\omega_i = \omega_i(x, y)$)

$$\tilde{f}_i(x, y) = \begin{cases} f_i(x, y), & (x, y) \in S_i, \\ f_i(x - (\omega_i - \alpha_i)a_i, y - (\omega_i - \alpha_i)b_i) & \omega_i < \alpha_i \\ f_i(x - (\omega_i - \beta_i)a_i, y - (\omega_i - \beta_i)b_i) & \omega_i > \beta_i \end{cases}$$

буде неперервною в \mathbf{R}^2 і $\tilde{f}_i(x, y) = f_i(x, y), (x, y) \in S_i$.

Такий підхід можна використати зокрема для наближеного опису поверхні Венери, яку не видно через її хмари в оптичний телескоп.

Відомо, що спостереження поверхні Венери у видимому діапазоні довжин хвиль утруднене близькістю розміщення Венери до Сонця на небосхилі, а також (і в основному) щільною атмосферою, яка ховає поверхню Венери. В цьому плані найбільш інформативні радіолокаційні дослідження. Зображення Венери отримане в ультрафіолетовому діапазоні хвиль 07.02.1974 р. міжпланетним кораблем "Маринер -10". Міжпланетні кораблі "Венера-15" та "Венера-16" у 1983 р. за допомогою радіохвиль провели картографування більшої частини північної півкулі Венери. Майже повне радарне картографування поверхні планети Венери було проведене штучним супутником Венери "Магелланом" (запущений 04.05.1989 р.; на орбіту Венери вийшов у серпні 1990 р.; закінчив картографування в 1994 р.). Отримані за ці кілька років (на кожному з численних витків навколо планети) супутником дані радіоспостережень за допомогою комп'ютерів учені США перетворили на зображення поверхні Венери. Крім того, із супутника надходили також дані про гравітаційне поле Венери, обробка яких також дає змогу виконати відповідні картографування. Загальне число таких даних дуже велике, їх аналіз та обробка немислимі без сучасних ПЕОМ, а також без сучасних математичних методів обробки відповідних експериментальних даних, які мають враховувати методіку отримання зазначених даних.

Автор не має даних про те, яким методом оброблялася така велика кількість знімків (можна припустити, що вони "вручну" розміщувались вздовж заданої траєкторії), але впевнений, що таку роботу можна зробити ефективно за допомогою операторів інтерлінації та інтерфлетатції функцій, доручивши її ПЕОМ.

Наведені приклади дедалі частіше виникають при розв'язанні важливих практичних задач. Цей клас задач (до якого сміливо можна

віднести більшість практичних задач, досліджуваних у цій книзі) можна схарактеризувати як клас задач, що мають ту або іншу невідзначеність. Наприклад, при картографуванні поверхні небесного тіла використовують дані про поверхню на різних підобластях (частинах) поверхні, причому ці частини можуть накладатися одна на одну. Крім того, треба враховувати, що вони можуть отримуватися під різними кутами і навіть у різні моменти часу (наприклад, при картографуванні Венери "Магелланом" одна і та ж частина поверхні потрапила в поле зору радара на різних витках з проміжком часу у кілька десятків місяців; за цей час вона була сильно зруйнована землетрусом, вірніше "венеротрусом"). Тобто треба враховувати, що стан цієї частини поверхні з часом може мати досить великі відхилення від стану, який був зафіксований на смузі під час руху супутника на одному з попередніх витків. Зауважимо, що у наведених вище алгоритмах не враховані зазначені відхилення (тобто вважається, що на кожній смузі інформація про поверхню отримана одночасно).

З цією задачею тісно пов'язана задача обробки відповідних фотознімків. У цьому разі, як і в комп'ютерній томографії, важливу роль відіграє процедура перетворення на відповідний цифровий код зображення, що міститься на знімках. Ця процедура перетворення зображення на знімках на функцію від двох змінних в останні роки виконується за допомогою спеціальних пристроїв, наприклад за допомогою цифрових фотоапаратів.

Для практики важливим є створення системи з відповідним програмним забезпеченням, яка б давала змогу розв'язувати цю задачу автоматично і з доступною точністю, або із заданою роздільною здатністю.

7.10. Рациональна інтерфлєтація $f(x, y, z)$ на системі площин зі збереженням класу $C^r(\mathbf{R}^3)$

Хай задана система площин $\Pi_k : \omega_k(x, y, z) := a_k x + b_k y + c_k z - \gamma_k = 0$, $k = \overline{1, M}$ - в \mathbf{R}^3 , $\nu_k = (a_k, b_k, c_k)$ - вектор нормалі до Π_k , $|\nu_k|^2 = a_k^2 + b_k^2 + c_k^2 = 1$, $(\tau_{k1}, \tau_{k2}, \nu_k)$ - система трьох взаємно ортогональних ортів, відповідних місцевій системі координат (u_k, v_k, ω_k) . Кожну функцію $f(x, y, z)$ можна зобразити у новій системі координат у вигляді $f(x, y, z) \equiv F_k(u_k, v_k, \omega_k) := f(x(u_k, v_k, \omega_k), y(u_k, v_k, \omega_k), z(u_k, v_k, \omega_k))$ за допомогою таких формул переходу від однієї системи до іншої: $u_k = u_k(x, y, z) = u_{k1}x + u_{k2}y + u_{k3}z$; $v_k = v_k(x, y, z) = v_{k1}x + v_{k2}y + v_{k3}z$; $\omega_k(x, y, z) = a_k x + b_k y + c_k z - \gamma_k$, де можна покласти зокрема $u_{k1} = b_k$, $u_{k2} = 0$, $u_{k3} = -a_k$; $a_k u_{k1} + c_k u_{k3} = -b_k$, $u_{k2} = 1$. Поклавши, наприклад $u_{k1} = -a_k b_k / (a_k^2 + c_k^2)$, $u_{k3} = -b_k c_k / (a_k^2 + c_k^2)$, отримаємо такі формули переходу від системи $Oxyz$ до системи $O_k u_k v_k \omega_k$:

$$u_k = c_k x - a_k z,$$

$$v_k = -\frac{a_k b_k}{a_k^2 + c_k^2} x + y - \frac{b_k c_k}{a_k^2 + c_k^2} z, a_k^2 + c_k^2 \neq 0,$$

$$\omega_k = a_k x + b_k y + c_k z - \gamma_k,$$

і навпаки,

$$\begin{aligned}x &= \frac{c_k}{a_k^2 + c_k^2} u_k - \frac{a_k b_k}{a_k^2 + b_k^2 + c_k^2} v_k + \frac{a_k}{a_k^2 + b_k^2 + c_k^2} \omega_k + \frac{a_k \gamma_k}{a_k^2 + b_k^2 + c_k^2}, \\y &= \frac{a_k + c_k^2}{a_k^2 + b_k^2 + c_k^2} v_k + \frac{b_k}{a_k^2 + b_k^2 + c_k^2} \omega_k + \frac{b_k \gamma_k}{a_k^2 + b_k^2 + c_k^2}, \\z &= -\frac{a_k}{a_k^2 + c_k^2} u_k - \frac{b_k c_k}{a_k^2 + b_k^2 + c_k^2} v_k + \frac{c_k}{a_k^2 + b_k^2 + c_k^2} \omega_k + \frac{c_k \gamma_k}{a_k^2 + b_k^2 + c_k^2}.\end{aligned}$$

У випадку $a_k^2 + b_k^2 + c_k^2 = 1$ останні вирази спростуються.

Це дає змогу написати формули для операторів раціональної інтерфлотації функцій трьох змінних зі збереженням класу диференційовності на довільній системі площин $\Pi_k : \omega_k(x, y, z) = 0, k = \overline{1, M}; \omega_k(x, y, z) := a_k x + b_k y + c_k z - \gamma_k, a_k^2 + b_k^2 + c_k^2 = 1$.

Алгоритм такої побудови значною мірою є узагальненням алгоритму (п. 2.3) раціональної інтерлінації функцій двох змінних зі збереженням класу диференційовності.

Сформулюємо цей алгоритм по кроках, вважаючи $N \geq 1$.

Крок 1. Будуємо оператори $D_{k,N} f(x, y, z)$ у вигляді узагальнення формули (2.4.4) $D_{k,N} f(x, y, z) = L_{2,3,N} F_k(u_k, v_k, \omega_k) =$

$$\begin{aligned}&= \sum_{0 \leq i+j \leq N} \lambda_{0,i,j} F_k(u_k + \beta_i \omega_k, v_k + \beta_j \omega_k, 0) + \\&+ \sum_{0 \leq s \leq N} \sum_{0 \leq i+j \leq N} \lambda_{s,i,j} \int_0^{\omega_k} F_k^{(0,0,s)}(u_k + t\beta_i, v_k + t\beta_j, 0) \frac{(\omega_k - t)^{s-1}}{(s-1)!} dt.\end{aligned} \quad (7.10.1)$$

Тут використано позначення $F_k^{(0,0,s)}(u_k, v_k, 0) = \left. \frac{\partial^s F_k(u_k, v_k, \omega_k)}{\partial \omega_k^s} \right|_{\omega_k=0}$; числа $\beta_0 < \beta_1 < \dots < \beta_N, \lambda_{s,i,j}, 0 \leq s \leq N, 0 \leq i+j \leq N$ знаходимо з умов (якщо це можливо)

$$f(x, y, z) \in C^r(\mathbf{R}^3), \quad (7.10.2)$$

$$\left. \frac{\partial^p D_{k,N} f(x, y, z)}{\partial \omega_k^p} \right|_{\omega_k=0} = F_k^{(0,0,p)}(u_k, v_k, 0), 0 \leq p \leq N.$$

Крок 2. Будуємо систему раціональних функцій (див. лему 2.3.1)

$$H_{Nk}(x, y, z) = \prod_{i=1, i \neq k}^M \omega_i(x, y, z) / \sum_{\mu=1}^M \prod_{i=1, i \neq \mu}^M \omega_i^{\hat{N}}(x, y, z).$$

Крок 3. Будуємо оператор у вигляді

$$O_{MN} f(x, y, z) = \sum_{k=1}^M H_{Nk}(x, y, z) D_{Nk} f(x, y, z)$$

з потрібними властивостями (див. теорему 2.3.1).

Запитання і вправи для самостійної роботи

1. Напишіть загальну формулу раціональної інтерфлетації функції трьох змінних $f(x, y, z)$ на системі M поверхонь $\Pi_k : \omega_k(x, y, z) = 0, k = \overline{1, M}$.

2. Напишіть формулу поліноміальної інтерфлетації функції трьох змінних на трьох площинах, паралельних координатним.

3. Напишіть формулу поліноміальної Лагранжевої інтерфлетації функції трьох змінних на трьох системах площин, паралельних координатним.

4. Яка ідея лежить у побудові економних схем інтерполяції функцій трьох змінних, побудованих за допомогою сплайн-інтерфлетації.

5. Введемо до розгляду піраміду $D = \{(x, y, z) : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, 1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b} - \frac{z}{c} \geq 0\}$ і симплекс $T^* = \{(x, y, z) : x = 0, y = 0, z = 0, 1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b} - \frac{z}{c} = 0, x \leq a, y \leq b, z \leq c\}$, що є границею цієї піраміди, а також $\forall u(x, y, z) \in C(T)$ такі оператори L_1, L_2, L_3, L_{123} , введені вище, оператори $T_0^* u(x, y, z) =$

$$= \frac{x}{a} u(a(1 - \frac{y}{b} - \frac{z}{c}), y, z) + \frac{y}{b} u(x, b(1 - \frac{x}{a} - \frac{z}{c}), z) + \frac{z}{c} u(x, y, c(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b})),$$

$$O_4^* u(x, y, z) = (T_0^* + L_{123} - T_0^* L_{123}) u(x, y, z).$$

Довести, що

$$T_0^* u(x, y, z) = u(x, y, z), \text{ якщо } 1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b} - \frac{z}{c} = 0,$$

$$O_4^* u(x, y, z) = u(x, y, z), \text{ якщо } (x, y, z) \in T^*.$$

6. Опишіть метод точного задовільнення граничних умов на границі довільної тривимірної області.

7. Чим відрізняється картографія поверхні за даними радіолокації на системі ліній і на системі смуг?

8. При яких граничних умовах виникає потреба в операторах наближення, що зберігають диференціальні властивості наближуваної функції?

Глава 8. Блендинг-апроксимація функцій

8.1. Апроксимація функцій двох змінних операторами, що діють на одну змінну. Загальні твердження

У цьому розділі розглянуто блендинг-апроксимацію (мішану апроксимацію) функцій n ($n \geq 2$) змінних операторами, побудованими за допомогою операторів, кожен із яких діє на одну змінну, але не є оператором інтерполяції по цій змінній. Отримувані в результаті оператори апроксимації є значно точнішими порівняно з класичними операторами апроксимації.

Хай $g(x, y) \in \tilde{C}^r(D)$, $D = [0, 1]^2$, $r \geq 1$; $g(x + 1, y) = g(x, y + 1) = g(x + 1, y + 1) = g(x, y) \forall (x, y) \in R^2$.

Оператори апроксимації будуватимемо у вигляді операторів класичної

$$L_{m,n}g = L_{x,m}L_{y,n}g$$

або у вигляді операторів мішаної

$$O_{m,n}g = (L_{x,m} + L_{y,n} - L_{x,m}L_{y,n})g,$$

апроксимації, де $L_{x,m}, L_{y,n}$ – оператори Фур'є ($s_{x,m}, s_{y,n}$), Фейєра ($fe_{x,m}, fe_{y,n}$), Валле Пуссена ($VP_{x,m}, VP_{y,n}$), що діють на функцію g як на функцію однієї змінної (відповідно x або y).

Слід зауважити, що написані нижче загальні твердження залишаються справедливими також і для неперіодичних функцій кількох змінних у випадку їх наближення операторами Бернштейна, кусково-сталими сплайнами, сумами Хаара тощо (див. підрозд. 8.4, 8.5, 8.6). Крім того, оператори $O_{m,n}g$ можуть використовуватись при побудові операторів двосторонньої апроксимації та в узагальненому методі найменших квадратів.

Т в е р д ж е н н я 8.1.1. Для похибки наближення $r_{m,n}g(x, y) = (I - L_{m,n})g(x, y)$ справедлива рівність

$$r_{m,n}g(x, y) = r_{x,m}g(x, y) + r_{y,n}g(x, y) - r_{x,m}r_{y,n}g(x, y).$$

Тут $r_{x,m} = I - L_{x,m}$; $r_{y,n} = I - L_{y,n}$, де I – тотожний оператор.

Доведення випливає з операторної тотожності

$$(I - L_{x,m}L_{y,n})g = [(I - L_{x,m}) + (I - L_{y,n}) - (I - L_{x,m})(I - L_{y,n})]g.$$

Т в е р д ж е н н я 8.1.2. Для похибки наближення $R_{m,n}g(x, y) = (I - O_{m,n})g(x, y)$ справедлива рівність

$$R_{m,n}g(x, y) = r_{x,m}r_{y,n}g(x, y).$$

Доведення впливає з операторної тотожності

$$(I - L_{xm} - L_{ym} + L_{xm}L_{yn})g = (I - L_{x,m})(I - L_{y,n})g.$$

Візьмемо до розгляду клас функцій $M^{r,r} \subset W_p^{r,r}(D)$, що задовольняють умови

$$M^{r,r} = \{f(x, y) \in W_p^{r,r}(D) : \sup_{0 \leq x \leq 1} \text{vrai} \|f^{(0,r)}(x, *)\|_p \leq 1,$$

$$\sup_{0 \leq y \leq 1} \text{vrai} \|f^{(r,0)}(*, y)\|_p \leq 1, \|f^{(r,r)}\|_p \leq 1\},$$

$$M^{0,0} = \{f(x, y) | \sup_{(x,y) \in D} \text{vrai} |f(x, y)| < \infty, f \in PC(D)\}.$$

Т в е р д ж е н н я 8.1.3. Хай для залишків наближення лінійними операторами $L_{x,m}, L_{y,n}$ можна написати інтегральні зображення

$$f(x, y) - L_{x,m}f(x, y) = r_{x,m}f(x, y) = \int_0^1 G_1(x, u)f^{(p,0)}(u, y)du,$$

$$f(x, y) - L_{y,n}f(x, y) = r_{y,n}f(x, y) = \int_0^1 G_2(y, v)f^{(0,q)}(x, v)dv.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \delta(f; x, y) &:= f(x, y) - L_{x,m}L_{y,n}f(x, y) = \int_0^1 G_1(x, u)f^{(p,0)}(u, y)du + \\ &+ \int_0^1 G_2(y, v)f^{(0,q)}(x, v)dv - \int_0^1 \int_0^1 G_1(x, u)G_2(y, v)f^{(p,q)}(u, v)dudv. \end{aligned}$$

Доведення впливає із твердження 8.1.1 .

Т в е р д ж е н н я 8.1.4. Справедливою є рівність $\tilde{\delta}(f; x, y) :=$

$$:= f(x, y) - O_{m,n}f(x, y) = \int_0^1 \int_0^1 G_1(x, u)G_2(y, v)f^{(p,q)}(u, v)dudv.$$

Доведення впливає із твердження 8.1.2.

Тобто, рівності (3.4.23), (3.4.24) і випливаючі з них твердження поширюються також на випадок апроксимації блендингами. Наведемо ці твердження.

Теорема 8.1.1 (Н.П. Корнейчук [1, т.7.3.2]). Хай $f \in M^{r,r}, 1 \leq p \leq \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1; G_i(x, y) \in M^{0,0}, i = 1, 2,$

$$r_{x,m}g = g(x, y) - L_{x,m}g(x, y) = \int_0^1 g^{(r,0)}(u, y)G_1(x, u)du,$$

$$r_{y,n}g = g(x, y) - L_{y,n}g(x, y) = \int_0^1 g^{(0,r)}(x, v)G_2(y, v)dv.$$

Тоді для оцінки похибки $eg(x, y) = (I - L_{x,m}L_{y,n})g(x, y)$ наближення функції $g(x, y) \in M^{r,r}$ операторами $L_{m,n}g = L_{x,m}L_{y,n}g(x, y)$ виконуються співвідношення

$$\begin{aligned} |eg(x, y)| &\leq \|G_1(x, *)\|_{p'} \left[\int_0^1 |f^{(r,0)}(u, y)|^p du \right]^{1/p} + \\ &+ \|G_2(y, *)\|_{p'} \left[\int_0^1 |f^{(0,r)}(x, v)|^p dv \right]^{1/p} + \\ &+ \|G_1(x, *)\|_{p'} \|G_2(y, *)\|_{p'} \left[\int_0^1 \int_0^1 |f^{(r,r)}(u, v)|^p dudv \right]^{1/p} \quad (x, y) \in G, \\ \sup_{g \in M^{r,r}} |eg(x, y)| &= \|G_1(x, *)\|_{p'} + \|G_2(y, *)\|_{p'} + \\ &+ \|G_1(x, *)\|_{p'} \|G_2(y, *)\|_{p'}, \quad (x, y) \in G, \\ \|eg\|_\infty &= \sup_{0 \leq x \leq 1} \|G_1(x, *)\|_{p'} + \sup_{0 \leq y \leq 1} \|G_2(y, *)\|_{p'} + \\ &+ \sup_{0 \leq x, y \leq 1} \|G_1(x, *)\|_{p'} \|G_2(y, *)\|_{p'}, \end{aligned} \quad (8.1.1)$$

$$\begin{aligned} \|eg\|_p &\leq \| \|G_1(x, *)\|_{p'} + \|G_2(y, *)\|_{p'} + \|G_1(x, *)\|_{p'} \|G_2(y, *)\|_{p'} \|_p \leq \\ &\leq \| \|G_1(x, *)\|_{p'} \|_p + \| \|G_2(y, *)\|_{p'} \|_p + \| \|G_1(x, *)\|_{p'} \|_p \| \|G_2(y, *)\|_{p'} \|_p, \end{aligned} \quad (8.1.1a)$$

$$\begin{aligned} \|f\|_p &= \left\{ \int_G |f(x, y)|^p dx dy \right\}^{1/p}, \quad \| \|G_2(y, *)\|_{p'} \|_p = \\ &= \left[\int_0^1 (\|G_2(y, *)\|_{p'})^p dy \right]^{1/p}, \quad \| \|G_1(x, *)\|_{p'} \|_p = \left[\int_0^1 (\|G_1(x, *)\|_{p'})^p dx \right]^{1/p}, \\ \|G_1(x, *)\|_{p'} &= \left[\int_0^1 |G_1(x, u)| du \right]^{1/p'}, \quad \|G_2(y, *)\|_{p'} = \left[\int_0^1 |G_2(y, v)| dv \right]^{1/p'}. \end{aligned}$$

У теоремі 8.1.1 складним було питання непокращуваності оцінки (8.1.1), бо для оцінювання в ній використовувався дуже грубий метод – кожний доданок у правій частині оцінювався за модулем незалежно від інших.

У наступній теоремі такої проблеми нема.

Теорема 8.1.2. *Хай $1 \leq p \leq \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Тоді для оцінювання похибки наближення функції $f(x, y) \in M^{r,r}$ операторами $O_{m,n}f = (L_{x,m} + L_{y,n} - L_{x,m}L_{y,n})f(x, y)$ виконується нерівність*

$$\begin{aligned} & \| (I - O_{m,n})f \|_{L_\mu[0,1]^2} = \| r_{x,m} r_{x,m} f \|_{L_\mu[0,1]^2} \leq \\ & \leq \| f^{(r,r)} \|_{L_p[0,1]^2} \| \| G_1(x, *) \|_{L_{p'}[0,1]} \|_{L_\mu[0,1]} \| \| G_2(y, *) \|_{L_{p'}[0,1]} \|_{L_\mu[0,1]}, \\ & \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \quad 1 \leq \mu \leq \infty. \end{aligned} \quad (8.1.2)$$

Таким чином, якщо $m = n$, $\| r_{x,n} g \|_p = O(n^{-\alpha})$, $\| r_{y,n} f \|_p = O(n^{-\alpha})$, $\alpha > 0$, то

$$\| (I - O_{m,n})f \|_\infty = O(n^{-2\alpha}).$$

Зауваження. Оператори $L_{x,m}f$, $L_{y,n}f$ діють на функцію f по одній змінній (x або y). При цьому використовуються деякі функціонали (інтеграли) від f , що діють на вказану змінну, а інша змінна вважається параметром. Тобто оператори блендинг-апроксимації $O_{m,n}f$ не є "класичними" операторами апроксимації функцій двох змінних типу Фур'є, для побудови яких застосовано функціонали від наближуючої функції f , що діють на f як на функцію двох змінних (наприклад, коефіцієнти Фур'є функції двох змінних). Цей факт використовується нижче для побудови операторів апроксимації, що мають порядок точності $O(n^{-2\alpha})$, як і оператори блендинг-апроксимації, але потребують тільки "класичної" інформації (наприклад, коефіцієнтів Фур'є функції двох змінних) із меншою загальною її кількістю.

Викладемо по кроках схему такої побудови.

Крок 1. Будуємо оператори $L_{x,n}f$, $L_{y,n}f$ у вигляді

$$L_{x,n}f(x, y) = \sum_{i=0}^n f_{1,i}(y) S_{n,i}(x), \quad L_{y,n}f(x, y) = \sum_{j=0}^n f_{2,j}(x) S_{n,j}(y),$$

де $S_{n,i}(t)$, $i = \overline{0, n}$ – відповідна ортогональна система функцій (наприклад, тригонометрична система функцій); $f_{1,i}(y) = F_{x,n,i}f(x, y)$, $f_{2,j}(x) = F_{y,n,j}f(x, y)$ – деякі інтеграли від функції $f(x, y)$ відповідно за змінними x та y .

Крок 2. Будуємо оператор $O_{n,n}f(x, y)$. Вважаючи, що

$$\| (I - O_{n,n})f \|_\infty = O(\varepsilon^2(n)), \quad \varepsilon(n) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

замінімо функції $f_{1,i}(y)$, $f_{2,j}(x)$ формулами апроксимації

$$f_{1,i}(y) \approx f_{1,i,N}(y) := \sum_{j=0}^N c_{1,i,j,N} S_{N,j}(y),$$

$$f_{2,j}(x) \approx f_{2,j,N}(x) := \sum_{i=0}^N c_{2,j,i,N} S_{N,i}(x),$$

в яких число N вибирається з умов

$$\|f_{1,i}(\cdot) - f_{1,i,N}(\cdot)\|_{\infty} = \varepsilon_1, \quad \varepsilon_1 = o(\varepsilon^2(n)),$$

$$\|f_{2,j}(\cdot) - f_{2,j,N}(\cdot)\|_{\infty} = \varepsilon_1, \quad \varepsilon_1 = o(\varepsilon^2(n)).$$

У результаті отримаємо оператор апроксимації

$$\begin{aligned} \tilde{O}_n f(x, y) &= \sum_{i=0}^n f_{1,i,N}(y) S_{n,i}(x) + \\ &+ \sum_{j=0}^n f_{2,j,N}(x) S_{n,j}(y) - \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n c_{i,j} S_{n,i}(x) S_{n,j}(y) \end{aligned}$$

із властивістю

$$\|g - \tilde{O}_n f\|_{\infty} = O(\varepsilon^2(n)).$$

Зауважимо, що під час вибору величини $\varepsilon_1 = o(\varepsilon^2(n))$ слід врахувати похибки округлення.

В операторі \tilde{O}_n використовується $O(2nN)$, $n < N \leq n^2$ функціоналів. Це число має менший порядок, ніж потребують класичні апроксимації типу $L_{x,N} L_{y,N} f(x, y)$ для наближення з тією ж самою точністю. У дальших підрозділах це підтверджується для конкретних типів операторів $L_{x,N}$, $L_{y,N}$.

8.2. Апроксимація періодичних функцій двох змінних операторами Фур'є, що діють на одну змінну

8.2.1. Класична та мішана апроксимації сумами Фур'є

Уведемо позначення

$$S_{m,\infty} f = \sum_{k=-m}^m f_{1,k}(y) e^{ikx}, \quad S_{\infty,n} f = \sum_{l=-n}^n f_{2,l}(x) e^{ily},$$

$$f_{1,k}(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u, y) e^{-iku} du, \quad f_{2,l}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x, v) e^{-ilv} dv,$$

$$c_{k,l}(f) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u, v) e^{-i(ku+lv)} dudv.$$

Т в е р д ж е н н я 8.2.1. Справедливими є рівності

$$S_{m,\infty} f(x, y) =$$

$$= \sum_{k=-m}^m \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_{k,l}(f) e^{i(kx+ly)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(\frac{2m+1}{2}(\xi-x))}{\sin(\frac{\xi-x}{2})} f(\xi, y) d\xi,$$

$$S_{\infty,n} f(x, y) =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-n}^n c_{k,l}(f) e^{i(kx+ly)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(\frac{2n+1}{2}(\eta-y))}{\sin(\frac{\eta-y}{2})} f(x, \eta) d\eta.$$

Це твердження випливає з відповідного інтегрального зображення сум Фур'є однієї змінної.

Т в е р д ж е н н я 8.2.2. Хай $f(x, y) \in C^r[-\pi, \pi]^2$ і функція f періодична з періодом 2π по кожній змінній. Тоді оператори (класичні суми Фур'є для функції двох змінних)

$$L_{m,n} f(x, y) = S_{m,\infty} S_{\infty,n} f(x, y) = \sum_{k=-m}^m \sum_{l=-n}^n c_{k,l}(f) e^{i(kx+ly)}$$

можна зобразити у вигляді

$$L_{m,n} f(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(\frac{2m+1}{2}(\xi-x))}{\sin(\frac{\xi-x}{2})} \frac{\sin(\frac{2n+1}{2}(\eta-y))}{\sin(\frac{\eta-y}{2})} f(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

Доведення випливає безпосередньо з твердження 8.2.1.

Означення 8.2.1. *Операторами блендинг-апроксимації (мішаної апроксимації) типу Фур'є назовемо оператори*

$$u_{m,n} f(x, y) = (S_{\infty,n} + S_{m,\infty} - S_{m,\infty} S_{\infty,n}) f(x, y).$$

Згідно із вказаним у підрозд. 8.1 для залишку наближення операторами блендинг-апроксимації $u_{m,n} f$ можна написати рівність

$$f(x, y) - u_{m,n} f(x, y) = r_{m,x} r_{n,y} f(x, y),$$

де $r_{m,x}f(x,y) = (I - S_{m,\infty})f(x,y)$, $r_{n,y}f(x,y) = (I - S_{\infty,n})f(x,y)$.

Тобто залишковий член наближення функції f операторами $u_{m,n}f$ дорівнює операторному добутку залишкових членів апроксимації відповідно по змінних x та y .

Нагадаємо, що для чисел λ_m , які називають *сталими Лебега*

$$\lambda_m = \max_{x \in [0,1]} \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \left| \frac{\sin(\frac{2m+1}{2}(\xi-x))}{\sin(\frac{\xi-x}{2})} \right| d\xi,$$

виконуються співвідношення

$$\lambda_m < (2 + \ln(m)), m \geq 2,$$

$$\lambda_m = \frac{4}{\pi^2} \ln(m) + b(m),$$

де $b(m)$ – обмежена функція змінної m , $b(m) = O(1)$.

Т в е р д ж е н н я 8.2.4. Позначимо через CP_∞^2 простір неперервних періодичних з періодом 2π функцій $f(x,y)$ з нормою

$$\|f\|_\infty = \max_{(x,y) \in [-\pi,\pi]^2} |f(x,y)|.$$

Тоді

$$\|f - S_{m,\infty}f\|_\infty = O((1 + \lambda_m)E_{x,m}(f(*, y))),$$

де

$$E_{x,m}(f; y) = \inf_{z \in V_m} \|z - f\|_\infty,$$

$$V_m = \sum_{k=-m}^m c_{k0}(y) e^{ikx}.$$

Аналогічно

$$\|f - S_{\infty,n}f\|_\infty = O((1 + \lambda_n)E_{y,n}(f(x, *))),$$

Таким чином, для похибки наближення функції $f(x,y)$ класичними сумами Фур'є від двох змінних отримуємо наступну оцінку

$$\|f - S_{\infty,n}S_{m,\infty}f\|_\infty = O(1 + \lambda_{\tilde{n}})E_{\tilde{n}}(f), \tilde{n} = \min\{m, n\}.$$

Зауважимо, що у зв'язку із вказаною вище асимптотичною поведінкою сталих Лебега суми Фур'є $s_{x,m}s_{y,n}f$ збігаються (при $m, n \rightarrow \infty$) не до кожної періодичної неперервної функції f .

Але для диференційовних функцій суми Фур'є збігаються.

Т в е р д ж е н н я 8.2.5. Якщо $f(x, y) \in C^{p,0}[-\pi, \pi]^2, p \geq 1$, то

$$\max_{x \in [-\pi, \pi]} |f(x, y) - S_{m, \infty} f(x, y)| = \varepsilon(m, y) \frac{\ln(m)}{(m)^p},$$

$$\varepsilon(m, y) \rightarrow 0, m \rightarrow \infty,$$

$$\varepsilon(m, y) \leq m_p \omega_x \left(f^{(p,0)}(*, y); \frac{1}{m} \right), \quad m \geq 2,$$

де m_p – стала;

$$\omega_x \left(f^{(p,0)}(*, y); \frac{1}{m} \right) = \max_{t, t' \in [-\pi, \pi]; |t-t'| \leq \frac{1}{m}} |f^{(p,0)}(t, y) - f^{(p,0)}(t', y)| -$$

модуль неперервності функції $f^{(p,0)}(x, y)$ по змінній x .

Т в е р д ж е н н я 8.2.6. Справедливими є нерівності

$$E_{x,m}(f; y) \leq c_p \omega_x \left(f^{(p,0)}(*, y); \frac{1}{m} \right) \frac{1}{m^p}, c_p = \text{const}.$$

Усе написане вище відносно наближення неперервних та неперервно диференційованих функцій f сумами Фур'є по змінній x повністю поширюється на випадок наближення сумами Фур'є по змінній y із заміною x на y та $f^{(p,0)}$ на $f^{(0,q)}$.

Звідси випливає твердження, наведене нижче.

Т в е р д ж е н н я 8.2.7. Якщо $D = [-\pi, \pi]^2, f \in \tilde{C}^{r,s}(D)$ – періодична диференційовна функція двох змінних, то сума Фур'є $s_{x,m} s_{y,n} f$ збігається до f :

$$S_{m, \infty} S_{\infty, n} f = s_{x,m} s_{y,n} f \rightarrow f, \quad m, n \rightarrow \infty \forall f \in C^{r,s}[-\pi, \pi]^2, r, s \geq 1.$$

Тригонометричні поліноми найкращого наближення, побудовані з використанням перших $2n - 1$ коефіцієнтів Фур'є

Хай $u(t) \in W_p^r(\Gamma), \Gamma = [-\pi, \pi]$, тобто $u(t + 2\pi) = u(t) \forall t \in \mathbf{R}$,

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} u(\tau) d\tau + \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} B_r(t - \tau) u^{(r)}(\tau) d\tau,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} u^{(r)}(\tau) d\tau = 0, \|u\|_p := \left(\int_{-\pi}^{\pi} |u(t)|^p dt \right)^{1/p} \leq 1$$

$$B_r(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^r} \cos \left(kt - \frac{\pi r}{2} \right).$$

Хай $u(t)$ задана своїми першими $2n - 1$ коефіцієнтами Фур'є $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} u(t) dt$, $a_k = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} u(t) \cos kt dt$, $b_k = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} u(t) \sin kt dt$, $k = 1, \dots, n - 1$

Явний вигляд для операторів найкращого наближення тригонометричними поліномами однієї змінної дається в наступній теоремі.

Теорема 8.2.1. *Хай $r \in \mathbb{N}$, $\tau \in \mathbb{T} = [-\pi, \pi]$, $1 < p \leq \infty$,*

$$\tilde{p}(t) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n-1} (\alpha_k \cos kt + \beta_k \sin kt) -$$

поліном найкращого наближення (в метриці $L_{p'}(\mathbb{T})$, $1/p + 1/p' = 1$) функції $B_r(t)$ підпростором T_{n-1} тригонометричних поліномів порядку не вище $n - 1$. Тоді оператор

$$SF_{n-1}(\tau) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} c_{kr} k^r (a_k \cos k\tau + b_k \sin k\tau),$$

де $c_{kr} = (-1)^m \alpha_k$, якщо $r = 2m$; $c_{kr} = (-1)^{m-1} \beta_k$, якщо $r = 2m - 1$ є оператором найкращого наближення функції $u(t) \in W_p^r(\mathbb{T})$ в метриці $L_{p'}(\mathbb{T})$, $1/p + 1/p' = 1$ з допомогою тригонометричного полінома порядку не вище $n - 1$, при побудові якого використані лише перші $2n - 1$ коефіцієнти Фур'є.

При цьому

$$\|u(\cdot) - SF_{n-1}(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{T})} = \frac{K_r}{n^r},$$

де $K_r = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k(r+1)}}{(2k+1)^{r+1}}$ (див. вказівку до списку літератури до п.8.1).

Зокрема, у випадку $p = \infty, p' = 1$ можна довести, що $\alpha_k = 0, k = 0, n - 1$; $\beta_k = \frac{\pi}{2(n)} \operatorname{ctg} \left(\frac{k\pi}{2(n)} \right)$, $k = 1, n - 1$.

Зауваження 1. Введені вище оператори $L_{m,n}f(x, y)$ є класичними сумами Фур'є функції двох змінних, а оператори $u_{m,n}f(x, y)$ потребують як звичайних коефіцієнтів Фур'є функції двох змінних, так і коефіцієнтів Фур'є по одній змінній (x , або y). Їх узагальнення на випадок, коли замість звичайних сум Фур'є для їх побудови використовуються оптимальні суми $SF_x(x, y)$, $SF_y(x, y)$, що діють на одну змінну x або y функції $f(x, y)$ відповідно, приводить до операторів, які більш точно наближують $f(x, y)$ (крім випадку $p = 2$, для якого суми Фур'є $L_{m,n}f$ дають найкраще наближення функції $f(x, y)$). Нижче на основі операторів $u_{m,n}f(x, y)$ побудовано оператори тригонометричної апроксимації, що потребують коефіцієнтів Фур'є функцій двох змінних і мають таку ж точність, як і оператори $u_{m,n}f$.

8.2.2. Блендинг-апроксимація з використанням коефіцієнтів Фур'є

Для спрощення візьмемо $m = n; p = q$. Тоді для похибки $f - u_{n,n}f$ можна отримати наступну оцінку: якщо $f \in \tilde{C}^{p,p}$, $n \rightarrow \infty$, то

$$\|f - u_{n,n}f\|_{\infty} = O\left(\frac{4 \ln^2(n)}{\pi^4 n^{2p}}\right). \quad (8.2.1)$$

Формулу $u_{n,n}f(x, y) = (S_{n,\infty} + S_{\infty,n} - S_{n,\infty}S_{\infty,n})f(x, y)$ замінимо формулою

$$L_{n,N}f(x, y) = (S_{n,N} + S_{N,n} - S_{n,\infty}S_{\infty,n})f(x, y),$$

де

$$S_{N,n}f(x, y) = \sum_{k=-N}^N \sum_{l=-n}^n c_{k,l}(f)e^{i(kx+ly)},$$

$$S_{n,N}f(x, y) = \sum_{k=-n}^n \sum_{l=-N}^N c_{k,l}(f)e^{i(kx+ly)}.$$

Теорема 8.2.2. *Хай число N в операторі $L_{n,N}f(x, y)$ знаходиться з умови*

$$n \rightarrow \infty : n \frac{\ln(N)}{N^p} \approx \frac{1}{\pi^2} \frac{\ln^2(n)}{n^{2p}}.$$

Тоді оператори $L_{n,N}f$ наближують функцію $f(x, y) \in \tilde{C}^{(p,p)}$ з похибкою, що має такий же порядок, що і похибка наближення операторами $u_{n,n}f(x, y)$:

$$\|f(x, y) - L_{n,N}f(x, y)\|_{\infty} = O\left(\frac{\ln^2(n)}{n^{2p}}\right).$$

Д о в е д е н н я. Оператори $S_{N,n}f$ та $S_{n,N}f$ отримують з операторів $S_{\infty,n}f$ та $S_{n,\infty}f$ шляхом заміни коефіцієнтів Фур'є $f_{1,k}(y)$ та $f_{2,l}(x)$ їхніми сумами Фур'є порядку $N > n$:

$$f_{1,k}(y) \approx \sum_{l=-N}^N c_{k,l}(f)e^{ily} := \tilde{f}_{1,k,N}(y),$$

$$f_{2,l}(x) \approx \sum_{k=-N}^N c_{k,l}(f)e^{ikx} := \tilde{f}_{2,l,N}(x).$$

Якщо $f(x, y) \in \tilde{C}^{p,p}$, то $f_{1,k}(y) \in \tilde{C}^p[-\pi, \pi]$, $f_{2,l}(x) \in \tilde{C}^p[-\pi, \pi]$. Тому згідно з твердженням 8.2.4 для похибки наближення цих коефіцієнтів сумами Фур'є виконуються співвідношення

$$\|f_{1,k}(y) - \tilde{f}_{1,k,N}(y)\|_\infty = O\left(\frac{\ln(N)}{N^p}\right),$$

$$\|f_{2,l}(x) - \tilde{f}_{2,l,N}(x)\|_\infty = O\left(\frac{\ln(N)}{N^p}\right).$$

У результаті отримуємо

$$\begin{aligned} \|f(x, y) - L_{n,N}f(x, y)\|_\infty &= \|f(x, y) - u_{n,n}f(x, y) + \\ &\quad + u_{n,n}f(x, y) - L_{n,N}f(x, y)\|_\infty \leq \\ &\leq \|f(x, y) - u_{n,n}f(x, y)\|_\infty + \|u_{n,n}f(x, y) - L_{n,N}f(x, y)\|_\infty. \end{aligned}$$

Для першого доданка нам вже відома оцінка

$$\|f(x, y) - u_{n,n}f(x, y)\|_\infty \leq O\left(\frac{\ln^2(n)}{n^{2p}}\right).$$

Для оцінювання другого доданка запишемо його детальніше:

$$\begin{aligned} \|u_{n,m}f(x, y) - L_{n,N}f(x, y)\|_\infty &= \left\| \sum_{k=-n}^n \left(f_{1,k}(y) - \tilde{f}_{1,k,N}(y) \right) e^{ikx} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{l=-n}^n \left(f_{2,l}(x) - \tilde{f}_{2,l,N}(x) \right) e^{ily} \right\|_\infty \leq \\ &\leq \sum_{k=-n}^n \|f_{1,k}(y) - \tilde{f}_{1,k,N}(y)\|_\infty + \\ &\quad + \sum_{l=-n}^n \|f_{2,l}(x) - \tilde{f}_{2,l,N}(x)\|_\infty \leq (4n + 2) \times \\ &\quad \times \max_{-n \leq k, l \leq n} \left\{ \|f_{1,k}(\cdot) - \tilde{f}_{1,k,N}(\cdot)\|_\infty, \|f_{2,l}(\cdot) - \tilde{f}_{2,l,N}(\cdot)\|_\infty \right\} = \\ &= (4n + 2) O\left(\frac{\ln(N)}{N^p}\right) = O\left(\frac{n \ln(N)}{N^p}\right). \end{aligned}$$

Виберемо N з умови

$$\frac{n \ln(N)}{N^p} \approx \frac{\ln^2(n)}{n^{2p}}.$$

Тоді оператори $L_{n,N}f(x,y)$ при $n \rightarrow \infty$ мають похибку, що прямує до нуля зі швидкістю, порядок якої (відносно $n, n \rightarrow \infty$) дорівнює порядковій збіжності до нуля похибки операторів $u_{n,n}f(x,y)$.

Теорему 8.2.2 доведено.

Н а с л і д о к 1. В операторах $L_{n,N}f(x,y)$ використовується

$$Q_1 = O((2n+1)(2N(n)+1)2 - (2n+1)^2) = O(nN(n)),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{N(n)} = 0$$

коефіцієнтів Фур'є $c_{k,l}(f)$ і при цьому виникає похибка

$$\varepsilon_1 = O\left(\frac{\ln^2(n)}{n^{2p}}\right).$$

Для порівняння зауважимо, що звичайні оператори Фур'є для функцій двох змінних, які в наших позначеннях мають вигляд

$$SF_{N,N}f(x,y) = S_{N,\infty}S_{\infty,N}f(x,y) =$$

$$= \sum_{k=-N}^N \sum_{l=-N}^N c_{k,l}(f) e^{i(kx+ly)},$$

дають наближення функції $f(x,y)$, що задовольняє співвідношення

$$\|f - SF_{N,N}f\|_{\infty} = O\left(\frac{\ln(N)}{N^p}\right), N = N(n) \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty.$$

Тобто суми Фур'є $SF_{n^2,n^2}f$ теж дають похибку $\varepsilon = O\left(\frac{\ln(n)}{n^{2p}}\right)$, що відрізняється від ε_1 лише множником $\ln(n)$, як і оператори $L_{n,N(n)}f(x,y)$. Однак при цьому в них використовується $Q_2 = O((2n^2+1)^2) = O(n^4)$ ($n \rightarrow \infty$) коефіцієнтів $c_{k,l}(f)$.

Н а с л і д о к 2. Якщо взяти $N(n) = n^{2+\alpha}$, то

$$n \frac{\ln(N)}{N^p} \leq \frac{\ln^2(n)}{n^{2p}} \Rightarrow \frac{2+\alpha}{n^{\alpha p-1}} \leq \ln(n) \Rightarrow \alpha p - 1 \geq 0 \Rightarrow \alpha \geq \frac{1}{p}.$$

Тобто при $N(n) = [n^{2+1/p}] + 1$, $[a]$ — ціла частина a , в класичних сумах Фур'є $S_{N,N}f$ використовується $Q_1 = O(N^2) = O(n^{4+2/p})$ коефіцієнтів Фур'є, а оператори $L_{n,N(n)}f$ потребують $Q_2 = O(nN) = O(n^{3+1/p})$ коефіцієнтів Фур'є $c_{k,l}$ при тій самій оцінці похибки $\varepsilon = O\left(\frac{\ln^2(n)}{n^{2p}}\right)$. Це дуже значна перевага з обчислювального погляду.

Зауважимо, що при врахуванні твердження теореми 8.2.1, ми отримуємо наступні суми, які краще наближують періодичні функції двох змінних $f(x, y) \in W_p^{r,r}(T^2)$, $r \geq 1$, ніж класичні суми Фур'є

$$Sf_{n,n}(x, y) = S1f(x, y) + S2f(x, y) - S1S2f(x, y), \quad (8.2.2)$$

де

$$\begin{aligned} S1f(x, y) &= \frac{a_{10}f(y)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} c_{ir}i^r \left(a_{1,i}f(y)\cos(ix) + b_{1,i}f(y)\sin(ix) \right), \\ S2f(x, y) &= \frac{a_{20}f(x)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} c_{kr}k^r \left(a_{2,k}f(x)\cos(ky) + b_{2,k}f(x)\sin(ky) \right), \\ S1S2f(x, y) &= S1(S2f)(x, y), \end{aligned} \quad (8.2.3)$$

$$a_{1,i}f(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x, y)\cos(ix)dx; \quad b_{1,i}f(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x, y)\sin(ix)dx;$$

$$a_{2,k}f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x, y)\cos(ky)dy; \quad b_{2,k}f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x, y)\sin(ky)dy.$$

Якщо $p = 2$, то $p' = 2$ і тригонометричний поліном порядку $n - 1$ найкращого наближення функції $B_r(\cdot)$ повністю визначається її коефіцієнтами Фур'є

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} B_r(t)dt; \quad \alpha_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} B_r(t)\cos kt dt; \quad \beta_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} B_r(t)\sin kt dt.$$

При практичному використанні таких операторів для інших значень $p \neq 2$ потрібно розв'язати задачу про знаходження відповідних чисел $\alpha_0, \alpha_k, \beta_k, k = 1, 2, \dots$, що фігурують у теоремі 8.2.1.

8.3. Мішана апроксимація операторами Фейєра

Хай $f(x, y) \in CP_{\infty}^2$ – неперервна періодична функція двох змінних (з періодом 2π по кожній змінній), $\|f\|_{\infty} = \max_{-\pi \leq x, y \leq \pi} |f(x, y)|$;

$s_{x,m}f(x, y), s_{y,n}f(x, y)$ – оператори Фур'є, що ставлять у відповідність функції f суми Фур'є порядків m, n відповідно по змінних x, y . Запишемо (для $k = \overline{-m, m}$)

$$s_{x,m}f(x, y) = \sum_{k=-m}^m f_{1,k}(y)e^{ikx}, \quad f_{1,k}(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u, y)e^{-iku} du,$$

$$s_{y,n}f(x,y) = \sum_{l=-n}^n f_{2,l}(x)e^{ily}, f_{2,l}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x,v)e^{-ilv} dv, l = \overline{-n,n}.$$

Означення 8.3.1. Оператором Фейєра порядку (m,n) назвемо оператор

$$fe_{m,n}f(x,y) = fe_{x,m}fe_{y,n}f(x,y),$$

де $fe_{x,m}, fe_{y,n}$ — оператори Фейєра, що діють на одну змінну (x та y відповідно),

$$\begin{aligned} fe_{x,m}f(x,y) &:= \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} s_{x,i}f(x,y) = \\ &= \frac{1}{m} \{f_{1,0}(y) + [f_{1,-1}(y)e^{-ix} + f_{1,0}(y) + f_{1,1}(y)e^{ix}] + \dots \\ &\dots + [f_{1,-m+1}e^{-i(m-1)x} + \dots + f_{1,0}(y) \dots + f_{1,m-1}(y)e^{i(m-1)x}]\} = \\ &= f_{1,0}(y) + \frac{m-1}{m} [f_{1,-1}(y)e^{-ix} + f_{1,1}(y)e^{ix}] + \dots \\ &\dots + \frac{1}{m} [f_{1,-m+1}(y)e^{i(-m+1)x} + f_{1,m-1}(y)e^{i(m-1)x}], \\ fe_{y,n}f(x,y) &:= \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} s_{y,j}f(x,y) = \frac{1}{n} \{f_{2,0}(x) + [f_{2,-1}(x)e^{-iy} + f_{2,0}(x) + \\ &+ f_{2,1}(x)e^{iy}] + \dots + [f_{2,-n+1}(x)e^{-i(n-1)y} + \dots + f_{2,0}(x) \dots + f_{2,n-1}(x) \times \\ &\times e^{i(n-1)y}]\} = f_{2,0}(x) + \frac{n-1}{n} [f_{2,-1}(x)e^{-iy} + f_{2,1}(x)e^{iy}] + \dots \\ &\dots + \frac{1}{n} [f_{1,-n+1}(x)e^{-i(n-1)y} + f_{2,n-1}(x)e^{i(n-1)y}]. \end{aligned}$$

Зауваження 1. Оператори Фур'є $s_{x,m}s_{y,n}f(x,y)$ точно відновлюють усі тригонометричні поліноми двох змінних порядку (m,n)

$$s_{x,m}s_{y,n}f = f \quad \forall f \in V_{m,n} = \{g = \sum_{k=-m}^m \sum_{l=-n}^n d_{k,l}e^{i(kx+ly)}, d_{k,l} \in C\}.$$

Оператори Фейєра $fe_{x,m}fe_{y,n}f(x,y)$ не мають цієї властивості:

$$fe_{x,m}fe_{y,n}f \neq f, \text{ якщо } f \in V_{m,n}.$$

Однак

$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} f e_{m,n} f(x, y) = f(x, y) \forall f \in V_{m,n}.$$

Для подальшого потрібно отримати явний вираз для норми операторів Фейєра.

Твердження 8.3.1. Справедливим є запис $\forall g \in CP_{\infty}^2$:

$$f e_{m,n} f(x, y) = \frac{1}{2\pi m} \frac{1}{2\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2\left(\frac{m(u-x)}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{u-x}{2}\right)} \frac{\sin^2\left(\frac{n(v-y)}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{v-y}{2}\right)} g(u, v) du dv.$$

Доведення. Для доведення достатньо застосувати інтегральне зображення операторів Фей'єра, що діють на одну змінну:

$$f e_{x,m} f(x, y) = \frac{1}{2\pi m} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2\left(\frac{m(u-x)}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{u-x}{2}\right)} g(u, y) du,$$

$$f e_{y,n} f(x, y) = \frac{1}{2\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2\left(\frac{n(v-y)}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{v-y}{2}\right)} g(x, v) dv,$$

в операторному добутку $f e_{m,n} f = f e_{x,m} f e_{y,n} f(x, y)$. Таким чином, твердження 8.3.1 доведено.

Зауваження 2. Оператори Фейєра по одній змінній $f e_{x,m} f(x, y)$, $f e_{y,n} f(x, y)$ при $m, n \rightarrow \infty$ збігаються до кожної неперервної функції. Тому оператори Фейєра від двох змінних $f e_{m,n} f(x, y)$ теж збігаються до кожної періодичної неперервної функції двох змінних:

$$\forall f(x, y) \in \tilde{C}[-\pi, \pi]^2 : \lim_{m,n \rightarrow \infty} \|f e_{m,n} f(x, y) - f(x, y)\|_{\infty} = 0.$$

При цьому, врахувавши співвідношення

$$\|f e_{x,m}\|_{CP_{\infty} \rightarrow CP_{\infty}} = 1, \quad \|f e_{y,n}\|_{CP_{\infty} \rightarrow CP_{\infty}} = 1,$$

а також тотожність

$$(I - f e_{m,n}) f(x, y) = [(I - f e_{x,m}) + (I - f e_{y,n}) - (I - f e_{x,m})(I - f e_{y,n})] f(x, y),$$

отримаємо для $E = [-\pi, \pi]$

$$\|f - f e_{m,n} f\|_{\infty} \leq 2 \max_{y \in E} \rho_m(f(*, y)) + 2 \max_{x \in E} \rho_n(f(x, *)) + 4 \rho_m(\rho_n(f)),$$

де

$$\rho_m(f(*, y)) = \inf_{c_0(y), \dots, c_{\pm m}(y)} \|f(x, y) - \sum_{k=-m}^m c_k(y) e^{ikx}\|_{\infty},$$

$$\rho_n(f(x, *)) = \inf_{c_0(x), \dots, c_{\pm n}(x)} \|f(x, y) - \sum_{l=-n}^n c_l(x) e^{ily}\|_{\infty}.$$

Н а с л і д о к 1. З огляду на асимптотичні співвідношення $f(x, y) \in C^{p,q}(D), p, q \geq 1 (m, n \rightarrow \infty) : \rho_m(f(*, y)) = O(\frac{K_p}{2m^p} \omega(f^{(p,0)}(*, y); \frac{\pi}{m})_C, \rho_n(f(x, *)) = O(\frac{K_q}{2n^q} \omega(f^{(0,q)}(x, *); \frac{\pi}{n})_C$ отримуємо

$$\|f - fe_{m,n}f\|_{\infty} = O\left(\max_{(x,y) \in D} \{\rho_m(f(*, y)), \rho_n(f(x, *))\}\right).$$

Т в е р д ж е н н я 8.3.2. Якщо $f(x, y) \in \tilde{C}^{p,q}(D), p, q \geq 1$, то оператори блендинг-апроксимації Фейєра

$$Of_{e_{m,n}f}(x, y) = [fe_{x,m} + fe_{y,n} - fe_{x,m}fe_{y,n}]f(x, y)$$

мають похибку

$$\|f - Of_{e_{m,n}f}\|_{\infty} = O(\rho_m(\rho_n(f))) (m, n \rightarrow \infty).$$

Н а с л і д о к 2. Якщо $m = n \rightarrow \infty, p = q \in \{0, 1\}$, то $\forall f \in \tilde{C}^{p,p}(D) :$

$$\varepsilon_2 = \|f - Of_{e_{n,n}f}\|_{\infty} = O\left(\frac{K_p^2}{n^{2p}} \omega(f^{(p,p)}(*, *); \frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{n})\right) = O(\varepsilon^2),$$

$$\varepsilon := \|f - fe_{n,n}f\|_{\infty} = O\left(\frac{K_p}{n^p} \max_{y \in E} \omega(f^{(p,0)}(*, y); \frac{\pi}{n})\right) +$$

$$+ O\left(\frac{K_p}{n^p} \max_{x \in E} \omega(f^{(0,p)}(x, *); \frac{\pi}{n})\right).$$

Повернемося до позначень для сум Фур'є по одній змінній (x або y) відповідно, що використовувалися в підрозд. 8.2. Тоді мішані оператори Фейєра для двох змінних можна зобразити у вигляді

$$Of_{e_{m,n}f}(x, y) = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} S_{k,\infty} + \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} S_{\infty,l} -$$

$$- \frac{1}{m} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{n-1} S_{k,\infty} S_{\infty,l}.$$

Тому оператор

$$Ofe_{m,n,N}f(x,y) = \left[\frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} S_{k,N} + \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} S_{N,l} - \frac{1}{m} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{n-1} S_{k,\infty} S_{\infty,l} \right] f(x,y),$$

в якому натуральне число N знаходиться з умов (при $m = n$)

$$\|(S_{k,\infty} - S_{k,N})f\|_{\infty} = O\left(n \frac{\ln^2(N)}{N^{2p}}\right) = O(\varepsilon^2), k = \overline{-n, n},$$

$$\|(S_{\infty,l} - S_{N,l})f\|_{\infty} = O\left(n \frac{\ln^2(N)}{N^{2p}}\right) = O(\varepsilon^2), l = \overline{-n, n},$$

$$S_{k,N}f(x,y) = \sum_{l=-N}^N c_{k,l}(f)e^{ily}; S_{N,l}f(x,y) = \sum_{k=-N}^N c_{k,l}(f)e^{ikx},$$

$$c_{k,l}(f) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x,y)e^{-i(kx+ly)} dy,$$

наближує функцію $f(x,y) \in \tilde{C}^{p,p}(D)$ з похибкою

$$\|f - Of_{e_{m,n,N}}f\|_{\infty} = O(\varepsilon^2).$$

Звертаємо увагу: у випадку наближення функцій двох змінних теж діє, як і у випадку функцій однієї змінної, теорема насичення - збільшення p не приведе до зменшення ε .

8.4. Мішана апроксимація поліномами Бернштейна

Означення 8.4.1. Поліномами Бернштейна степеня n називають поліноми

$$p_n f(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right). \quad (8.4.1)$$

Т в е р д ж е н н я 8.4.1. Для кожної неперервної на $[0,1]$ функції $f(x) \in C[0,1]$ і довільного числа $\epsilon > 0$ знайдеться таке натуральне n , що

$$|f(x) - p_n f(x)| \leq \epsilon \quad \forall x \in [0,1].$$

Зауважимо, що формулювання цього твердження для довільного відрізка $t \in [a, b]$ проводиться з використанням заміни $t = a + x(b - a)$, тобто замість функції $f(t)$, $t \in [a, b]$ достатньо розглянути функцію $g(x) = f(a + x(b - a))$, $x \in [0, 1]$.

Отже, поліноми Бернштейна рівномірно збігаються до кожної неперервної функції на $[a, b]$. Якщо функція $f(x)$ обмежена в точці c , $a < c < b$ і має розрив першого роду в цій точці, то

$$\lim_{x \rightarrow c} p_n f(x) = \frac{f(c-0) + f(c+0)}{2}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Якщо функція $f(x)$ двічі диференційовна в точці $c \in [a, b]$, то

$$p_n f(c) - f(c) = \frac{f''(c)(c-a)(b-c)}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Класичне узагальнення поліномів Бернштейна для випадку функцій $f(x, y)$, $(x, y) \in [0, 1]^2$ двох змінних має такий вигляд:

$$\begin{aligned} p_{m,n} f(x, y) &= p_{m,x} p_{n,y} f(x, y) = \\ &= \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^n C_m^k C_n^l x^k (1-x)^{m-k} y^l (1-y)^{n-l} f\left(\frac{k}{m}, \frac{l}{n}\right), \end{aligned} \quad (8.4.2)$$

де введено позначення

$$p_{m,x} f(x, y) = \sum_{k=0}^m C_m^k x^k (1-x)^{m-k} f\left(\frac{k}{m}, y\right),$$

$$p_{n,y} f(x, y) = \sum_{l=0}^n C_n^l y^l (1-y)^{n-l} f\left(x, \frac{l}{n}\right),$$

тобто оператор $p_{m,x}$ діє на змінну x , а оператор $p_{n,y}$ – на змінну y .

Зауважимо, що ці оператори $p_{m,n} f$ використовують $(m+1)(n+1)$ значень функції $f\left(\frac{k}{m}, \frac{l}{n}\right)$, але $p_{m,n} f\left(\frac{k}{m}, \frac{l}{n}\right) \neq f\left(\frac{k}{m}, \frac{l}{n}\right)$, $k = \overline{0, m}$, $l = \overline{0, n}$.

Т в е р д ж е н н я 8.4.2. Для залишку наближення функції $f(x, y)$ операторами $p_{m,n} f(x, y)$ виконується рівність

$$f(x, y) - p_{m,n} f(x, y) = [(I - p_{m,x}) + (I - p_{n,y}) - (I - p_{m,x})(I - p_{n,y})] f(x, y).$$

Це означає, що для функції $f(x, y) \in C^{(2,2)}[0, 1]^2$, яка має в точці $(c, d) \in (0, 1)^2$ неперервні похідні $f^{(2,0)}$, $f^{(0,2)}$, $f^{(2,2)}$, виконуватиметься співвідношення

$$p_{m,n}f(c, d) - f(c, d) = \frac{f^{(2,0)}(c, d)c(1-c)}{2m} + \frac{f^{(0,2)}(c, d)d(1-d)}{2n} - \\ - \frac{f^{(2,2)}(c, d)c(1-c)d(1-d)}{4mn} + o\left(\frac{1}{m}\right) + o\left(\frac{1}{n}\right) + o\left(\frac{1}{mn}\right), m, n \rightarrow \infty.$$

Тобто

$$|p_{m,n}f(c, d) - f(c, d)| = O((\min\{m, n\})^{-1}), m, n \rightarrow \infty.$$

Припустимо для спрощення, що $m = n$. Тоді отримаємо

$$|p_{n,n}f(c, d) - f(c, d)| = O(n^{-1}), n \rightarrow \infty. \quad (8.4.3)$$

Оператори мішаної апроксимації Бернштейна мають вигляд

$$\tilde{P}_{m,n}f(x, y) = [p_{m,x} + p_{n,y} - p_{m,x}p_{n,y}]f(x, y).$$

Теорема 8.4.1. *Хай $f \in C^{2,2}[0, 1]^2$. Тоді для операторів $\tilde{P}_{m,n}$ виконується асимптотичне співвідношення*

$$f(x, y) - \tilde{P}_{m,n}f(x, y) = \frac{f^{(2,2)}(x, y)x(1-x)y(1-y)}{4mn} + o\left(\frac{1}{mn}\right). \quad (8.4.4)$$

Д о в е д е н н я. Скористаємося рівністю

$$f(x, y) - \tilde{P}_{m,n}f(x, y) = (I - p_{m,x})(I - p_{n,y})f(x, y)$$

і виразами для залишку наближення поліномами Бернштейна двічі диференційовної по x та по y функції (при $a < x < b, c < y < d$):

$$p_{m,x}f(\xi, y) - f(\xi, y) = \frac{f^{(2,0)}(\xi, y)(\xi - a)(b - \xi)}{2m} + o\left(\frac{1}{m}\right), a < \xi < b,$$

$$p_{n,y}f(x, \eta) - f(x, \eta) = \frac{f^{(0,2)}(x, \eta)(\eta - c)(d - \eta)}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right), c < \eta < d.$$

Це дає змогу записати

$$f(x, y) - \tilde{P}_{m,n}f(x, y) = \frac{f^{(2,2)}(x, y)x(1-x)y(1-y)}{4mn} + o\left(\frac{1}{mn}\right). \quad (8.4.5)$$

Отже, якщо $m = n$, то

$$f(x, y) - \tilde{P}_{n,n}f(x, y) = O\left(\frac{1}{n^2}\right), n \rightarrow \infty. \quad (8.4.6)$$

Теорему 8.4.1 доведено.

Тобто оператори $\tilde{P}_{n,n}$ мають порядок точності відносно змінної n у два рази більший, ніж при наближенні операторами $p_{n,n}$. Звертаємо увагу на те, що оператори $\tilde{P}_{m,n}$ потребують для своєї побудови сліди $f\left(\frac{i}{m}, y\right), f\left(x, \frac{j}{n}\right)$ наближуваної функції на системі взаємно перпендикулярних прямих. Побудуємо на їх основі оператори наближення функцій двох змінних із такою ж за порядком точністю, але з використанням значень наближуваної функції лише в деяких точках області $[0, 1]^2$. При цьому побудова ґрунтуватиметься на використанні знову ж таки поліномів Бернштейна.

Теорема 8.4.2. *Хай $f \in C^{2,2}[0, 1]^2$. Тоді оператори*

$$B_{m,n}f(x, y) := \sum_{k=0}^m C_m^k x^k (1-x)^{m-k} \sum_{l=0}^{N_2} C_{N_2}^l y^l (1-x)^{N_2-l} f\left(\frac{k}{m}, \frac{l}{N_2}\right) + \sum_{l=0}^n C_n^l y^l (1-y)^{n-l} \sum_{k=0}^{N_1} C_{N_1}^k x^k (1-x)^{N_1-k} f\left(\frac{k}{N_1}, \frac{l}{n}\right) - p_{m,x} p_{n,y} f(x, y),$$

$$N_1 \geq mn, \quad N_2 \geq mn$$

збігаються до кожної функції f при $m, n \rightarrow \infty$. При цьому

$$f(x, y) - B_{m,n}f(x, y) = O\left(\frac{1}{mn}\right), \quad m, n \rightarrow \infty. \quad (8.4.7)$$

Д о в е д е н н я. У формулі для оператора $\tilde{P}_{m,n}$ замінимо сліди $f\left(\frac{k}{m}, y\right), k = \overline{0, m}, f\left(x, \frac{l}{n}\right), l = \overline{0, n}$ поліномами Бернштейна з такими степенями останніх, щоб результуюча похибка була не більшою ніж $O(1/mn)$:

$$f\left(x, \frac{l}{n}\right) \approx \sum_{k=0}^{N_1} C_{N_1}^k x^k (1-x)^{N_1-k} f\left(\frac{k}{N_1}, \frac{l}{n}\right) + r_{1,l,N_1}f(x, y),$$

$$r_{1,l,N_1}f(x, y) = O\left(\frac{1}{N_1}\right), N_1 \rightarrow \infty,$$

$$f\left(\frac{k}{m}, y\right) \approx \sum_{l=0}^{N_2} C_{N_2}^l x^l (1-x)^{N_2-l} f\left(\frac{k}{m}, \frac{l}{N_2}\right) + r_{2,k,N_2}f(x, y),$$

$$r_{2,k,N_2} f(x, y) = O\left(\frac{1}{N_2}\right), N_2 \rightarrow \infty.$$

У результаті отримаємо

$$\tilde{P}_{m,n} f(x, y) = B_{m,n} f(x, y) + \Psi_{m,n} f(x, y),$$

де $\Psi_{m,n} f(x, y) =$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=0}^m C_m^k x^k (1-x)^{m-k} r_{2,k,N_2} f(x, y) + \sum_{l=0}^n C_n^l y^l (1-y)^{n-l} r_{1,l,N_1} f(x, y), \\ &|\Psi_{m,n} f(x, y)| \leq \sum_{k=0}^m C_m^k x^k (1-x)^{m-k} \max_{k \in \overline{0,m}} |r_{2,k,N_2} f(x, y)| + \\ &+ \sum_{l=0}^n C_n^l y^l (1-y)^{n-l} \max_{l \in \overline{0,n}} |r_{2,l,N_2} f(x, y)| \leq O\left(\frac{1}{N_2}\right) + O\left(\frac{1}{N_1}\right) = O\left(\frac{1}{mn}\right). \end{aligned}$$

Теорему 8.4.2 доведено.

Зауваження. Оператори $B_{m,n} f(x, y)$ мають таку ж асимптотичну похибку наближення, як і оператори $\tilde{P}_{m,n}$, і при $m = n, N_1 = N_2 = n^2$ для своєї побудови потребують $Q_2 = (m+1)(N_2+1) + (N_1+1)(n+1) = O(2(n+1)^3)$ значень функції f . Для порівняння додамо: класичні оператори $p_{N,N} f$ при $N = n^2$ для досягнення такої ж за порядком точності потребують $Q_1 = O((n+1)^4)$ значень функції f . Цінним є те, що $\forall f \in C[0, 1]^2(m, n \rightarrow \infty)$:

$$\|B_{m,n} f - f\|_{C[0,1]^2} \rightarrow 0, \|\tilde{P}_{m,n} f - f\|_{C[0,1]^2} \rightarrow 0.$$

8.5. Наближення $g(x, y) \in C[0, 1]^2$ кусково-сталими

8.5.1. Кусково-сталі сплайни інтерполяційного типу двох змінних

Існує чотири типи операторів наближення неперервних функцій однієї змінної кусково-сталими функціями (сплайнами степеня 0):

– оператори інтерполяційного типу, що замінюють на інтервалі розбиття (t_{k-1}, t_k) наближуючу функцію $g(t)$ її значенням $g((t_{k-1} + t_k)/2)$;

– оператори, що замінюють на інтервалі розбиття (t_{k-1}, t_k) наближуючу функцію $g(t)$ її середнім значенням $\frac{1}{t_k - t_{k-1}} \int_{t_{k-1}}^{t_k} g(t) dt$;

– оператори нелінійного типу, що замінюють на інтервалі розбиття $[t_{k-1}, t_k]$ наближуючу функцію $g(t)$ її "медіаною"

$$\left[\max_{t_{k-1} \leq t \leq t_k} g(t) + \min_{t_{k-1} \leq t \leq t_k} g(t) \right] \frac{1}{2};$$

– найкраще наближення: для цього шукають таке розбиття (тобто вузли t_k розбиття), за якого "медіани" дають найкраще наближення.

У цьому підрозділі такі результати поширено на випадок наближення функцій двох змінних $g(x, y)$, $(x, y) \in [0, 1]^2$ кусково-сталими функціями (сплайнами степеня 0).

Хай $m, n \in \mathbf{N}$, $\pi := \{0 = x_0 < x_1 < \dots < x_m = 1; 0 = y_0 < y_1 < \dots < y_n = 1\}$, $\Pi := \{I_{k,l}\}_{k=\overline{1,m}, l=\overline{1,n}}$, $I_{k,l} := (x_{k-1}, x_k) \times (y_{l-1}, y_l)$, $k = \overline{1,m}, l = \overline{1,n}$. Маємо $S_{m,n,0} = S_{m,n,0}(\pi) = \{s_{m,n,0}(x, y) | s_{m,n,0}(x, y) = g_{k,l}, (x, y) \in I_{k,l}, k = \overline{1,m}, l = \overline{1,n}; g_{k,l} \in \mathbf{R}\}$ – простір кусково-сталих функцій, відповідних розбиттю π . Система характеристичних функцій

$$\Psi_{k,l}(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in I_{k,l}, \\ 0, & (x, y) \notin I_{k,l} \end{cases}$$

є базисом в $S_{m,n,0}$: кожна функція $s_{m,n,0} \in S_{m,n,0}$ може бути зображена у вигляді

$$s_{m,n,0}(x, y) = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n C_{k,l} \Psi_{k,l}(x, y), \quad (x, y) \in [0, 1]^2, C_{k,l} \in \mathbf{R}.$$

Тобто $S_{m,n,0}$ є лінійний простір функцій розмірності mn .

Уведемо позначення. Хай $E = [0, 1]$, $D = E^2$, $g(x, y) \in L_p(D)$, $1 \leq p \leq \infty$, $M = (M_1, M_2, M_{1,2})$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, $M_j, M_{1,2} > 0$, $0 < \alpha_1, \alpha_2 \leq 1$,

$$e_{m,n,0,p}(g) = \inf_{v \in S_{m,n,0}} \|g - v\|_{L_p(D)},$$

$$g(x, y) \in \text{Lip}_M \alpha = \text{Lip}_M \alpha(D) := \{g(x, y) \in C(D) :$$

$$\max_{0 \leq y \leq 1} |g(x, y) - g(x', y)| \leq M_1 |x - x'|^{\alpha_1}, \max_{0 \leq x \leq 1} |g(x, y) - g(x, y')| \leq M_2 |y - y'|^{\alpha_2}, |g(x, y) - g(x', y) - g(x, y') + g(x', y')| \leq M_{1,2} |x - x'|^{\alpha_1} |y - y'|^{\alpha_2}; x, y, x', y' \in E\},$$

$$M_p = (M_{1,p}, M_{2,p}, M_{1,2,p}), M_{j,p}, M_{1,2,p} > 0, 0 < \alpha_1, \alpha_2 \leq 1, \alpha = (\alpha_1, \alpha_2),$$

$$g(x, y) \in \text{Lip}(\alpha, M_p, L_p(D)) := \{g(x, y) \in L_p(D) :$$

$$\max_{c \leq y \leq d} \|g(* + h_1, y) - g(*, y)\|_{L_p[a, b-h_1]} \leq M_{1,p} h_1^{\alpha_1},$$

$$\max_{a \leq x \leq b} \|g(x, * + h_2) - g(x, *)\|_{L_p[c, d-h_2]} \leq M_{2,p} h_2^{\alpha_2},$$

$$\|g(* + h_1, * + h_2) - g(*, * + h_2) - g(* + h_1, *) + g(*, *)\|_{L_p(D')} \leq M_{1,2,p} h_1^{\alpha_1} h_2^{\alpha_2},$$

$D' = [a, b - h_1] \times [c, d - h_2]$. Очевидно, $\text{Lip}_M \alpha \subset \text{Lip}(\alpha, M_\infty, L_\infty(D))$.

Теорема 8.5.1. *Хай $g(x, y) \in \text{Lip}_M \alpha(D)$, $1 \leq p \leq \infty$. Визначимо кусково-сталу функцію $s_{m,n,0}^{(1)}(x, y) \in S_{m,n,0}(\pi)$ так:*

$$s_{m,n,0}^{(1)}(x, y) = s_{m,n,0}^{(1)} g(x, y) := g(\xi_k, \eta_l), \quad (x, y) \in I_{k,l} \subset \Pi,$$

$$\xi_k = \frac{x_{k-1} + x_k}{2}, \quad \eta_l = \frac{y_{l-1} + y_l}{2}; \quad (\xi_k, \eta_l) \in I_{k,l}.$$

$$\begin{aligned} \text{Тоді } \forall g \in \text{Lip}_M \alpha(D) : e_{m,n,0,\infty}^{(1)}(g) &= \|g - s_{m,n,0}^{(1)} g\|_{L_\infty(D)} \leq \\ &\leq M_1 \left(\frac{\Delta_1}{2}\right)^{\alpha_1} + M_2 \left(\frac{\Delta_2}{2}\right)^{\alpha_2} + M_{1,2} \left(\frac{\Delta_1}{2}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{\Delta_2}{2}\right)^{\alpha_2}, \end{aligned}$$

$$\Delta_1 = \max_{1 \leq k \leq m} (x_k - x_{k-1}), \quad \Delta_2 = \max_{1 \leq l \leq n} (y_l - y_{l-1}).$$

Д о в е д е н н я. Введемо до розгляду оператори

$$L_{1,m}^{(1)} g(x, y) = \sum_{k=1}^m \chi_{(x_{k-1}, x_k)}(x) g(\xi_k, y), \quad L_{1,m}^{(1)} g(\xi_p, y) = g(\xi_p, y),$$

$$L_{2,n}^{(1)} g(x, y) = \sum_{l=1}^n \chi_{(y_{l-1}, y_l)}(y) g(x, \eta_l), \quad L_{2,n}^{(1)} g(x, \eta_q) = g(x, \eta_q),$$

$p = \overline{1, m}, q = \overline{1, n}$. Очевидно, що $s_{m,n,0}^{(1)} g(x, y) =$

$$= L_{1,m}^{(1)} L_{2,n}^{(1)} g(x, y) = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n \chi_{(x_{k-1}, x_k)}(x) \chi_{(y_{l-1}, y_l)}(y) g(\xi_k, \eta_l).$$

Врахувавши вирази для чисел ξ_k, η_l , можна записати нерівності

$$|x - \xi_k| \leq \Delta_{1,k}/2, \quad x \in [x_{k-1}, x_k], \quad \Delta_{1,k} = x_k - x_{k-1},$$

$$|y - \eta_l| \leq \Delta_{2,l}/2, \quad y \in [y_{l-1}, y_l], \quad \Delta_{2,l} = y_l - y_{l-1}.$$

Тому

$$\|g - s_{m,n,0}^{(1)} g\|_{L_\infty((D))} = \max_{0 \leq x, y \leq 1} |g(x, y) - s_{m,n,0}^{(1)} g(x, y)| \leq$$

$$\leq \max_{1 \leq k \leq m; 1 \leq l \leq n} \max_{(x,y) \in I_{k,l}} |g(x, y) - g(\xi_k, \eta_l)| =$$

$$\begin{aligned}
&= \max_{\substack{1 \leq k \leq m; \\ 1 \leq l \leq n}} \max_{(x,y) \in I_{k,l}} \left| [(I - L_{1,m}^{(1)}) + (I - L_{2,n}^1) - (I - L_{1,m}^{(1)})(I - L_{2,n}^{(1)})]g(x,y) \right| \leq \\
&\leq (L_{1,m}^{(1)}g := g(\xi_k, y), L_{2,n}^{(1)}g := g(x, \eta_l), (x,y) \in I_{k,l}) \leq \\
&\leq \max_{1 \leq k \leq m; 1 \leq l \leq n} \max_{(x,y) \in I_{k,l}} \left| (g(x,y) - g(\xi_k, y)) + (g(x,y) - g(x, \eta_l)) - \right. \\
&\quad \left. - (g(x,y) - g(\xi_k, y) - g(x, \eta_l) + g(\xi_k, \eta_l)) \right| \leq \\
&\max_{\substack{1 \leq k \leq m; \\ 1 \leq l \leq n}} \left[M_1 \left(\frac{\Delta_{1,k}}{2} \right)^{\alpha_1} + M_2 \left(\frac{\Delta_{2,l}}{2} \right)^{\alpha_2} + M_{1,2} \left(\frac{\Delta_{1,k}}{2} \right)^{\alpha_1} \left(\frac{\Delta_{2,l}}{2} \right)^{\alpha_2} \right] \leq \\
&\leq M_1 \left(\frac{\Delta_1}{2} \right)^{\alpha_1} + M_2 \left(\frac{\Delta_2}{2} \right)^{\alpha_2} + M_{1,2} \left(\frac{\Delta_1}{2} \right)^{\alpha_1} \left(\frac{\Delta_2}{2} \right)^{\alpha_2}.
\end{aligned}$$

Теорему 8.5.1 доведено.

Зауваження. Якщо при доведенні цієї теореми вважати, що функція $g(x, y)$ належить до класу

$$\begin{aligned}
H^\omega(D) = \left\{ g : \max_{x, x+h_1 \in [0,1]} |g(x, y) - g(x+h_1, y)| \leq \omega_x(g(*, y), h_1), \right. \\
\left. \max_{y, y+h_2 \in [0,1]} |g(x, y) - g(x, y+h_2)| \leq \omega_y(g(x, *), h_2), \right.
\end{aligned}$$

$$\left. |g(*+h_1, *+h_2) - g(*+h_1, *) - g(*, *+h_2) + g(*, *)| \leq \omega^{(2)}(g, h_1, h_2) \right\},$$

де $\omega = (\omega_x, \omega_y, \omega^{(2)})$ – відповідні модулі неперервності, то оцінку похибки можна записати у вигляді

$$\begin{aligned}
&\|e_{m,n,0}^{(1)}g(x, y)\|_{L_\infty(D)} \leq \max_{0 \leq y \leq 1} \omega_x(g(*, y), \Delta_1/2) + \\
&+ \max_{0 \leq x \leq 1} \omega_y(g(x, *), \Delta_2/2) + \omega^{(2)}(g(*, *), \Delta_1/2, \Delta_2/2).
\end{aligned}$$

Зокрема у випадку $\omega_x(g(*, y), \Delta_1/2) = M_1(y) (\Delta_1/2)^{\alpha_1}$, $\omega_y(g(x, *), \Delta_2/2) = M_2(x) (\Delta_2/2)^{\alpha_2}$, $\omega^{(2)}(g(*, *), \Delta_1/2, \Delta_2/2) = M_{1,2} (\Delta_1/2)^{\alpha_1} \times (\Delta_2/2)^{\alpha_2}$ отримаємо твердження теореми 8.5.1.

Н а с л і д о к. Для рівномірного розбиття $x_k = \frac{k}{m}$, $k = \overline{0, m}$, $y_l = \frac{l}{n}$, $l = \overline{0, n}$ є рівності $\Delta_{1,k} = \frac{1}{m}$, $\Delta_{2,l} = \frac{1}{n}$. Тому $\|g - s_{m,n,0}^{(1)}g\|_{L_\infty(D)} \leq$

$$\leq M_1 \left(\frac{1}{2m} \right)^{\alpha_1} + M_2 \left(\frac{1}{2n} \right)^{\alpha_2} + M_{1,2} \left(\frac{1}{2m} \right)^{\alpha_1} \left(\frac{1}{2n} \right)^{\alpha_2} \quad \forall g \in \text{Lip}_M \alpha.$$

Якщо ж $m = n, \beta = \min\{\alpha_1, \alpha_2\}$, то $\|g - s_{m,n,0}^{(1)}g\|_{L_\infty((D))} \leq$
 $\leq M_1 \left(\frac{1}{2n}\right)^{\alpha_1} + M_2 \left(\frac{1}{2n}\right)^{\alpha_2} + M_{1,2} \left(\frac{1}{2n}\right)^{\alpha_1 + \alpha_2} = O\left(\frac{1}{2n}\right)^\beta \forall g \in \text{Lip}_M \alpha.$

Теорема 8.5.2. *Оператори*

$$N_{m,n}^{(1)}g(x, y) = (L_{1,m}^{(1)} + L_{2,n}^{(1)} - L_{1,m}^{(1)}L_{2,n}^{(1)})g(x, y)$$

мають такі властивості:

$$N_{m,n}^{(1)}g(x, y) = g(\xi_k, y), \quad x_{k-1} < x < x_k, \quad k = \overline{1, m}, \quad y \in [0, 1],$$

$$N_{m,n}^{(1)}g(x, y) = g(x, \eta_l), \quad y_{l-1} < y < y_l, \quad l = \overline{1, n}, \quad x \in [0, 1],$$

$$\|g - N_{m,n}^{(1)}g\|_{L_\infty(D)} \leq M_{1,2}(\Delta_1/2)^{\alpha_1}(\Delta_2/2)^{\alpha_2} \quad \forall g \in \text{Lip}_M \alpha.$$

Д о в е д е н н я. Для перших двох груп властивостей воно проводиться безпосередньою перевіркою з огляду на те, що $L_{1,m}^{(1)}L_{2,n}^{(1)} = L_{2,n}^{(1)}L_{1,m}^{(1)}$. Для оцінювання залишку наближення скористаємося тождеством

$$g - N_{m,n}^{(1)}g = g - (L_{1,m}^{(1)} + L_{2,n}^{(1)} - L_{1,m}^{(1)}L_{2,n}^{(1)})g = (I - L_{1,m}^{(1)})(I - L_{2,n}^{(1)})g.$$

У результаті отримуємо $\forall g \in \text{Lip}_M \alpha (0 < \alpha \leq 1)$:

$$\|g - N_{m,n}^{(1)}g\|_{L_\infty(D)} = \|(I - L_{1,m}^{(1)})(I - L_{2,n}^{(1)})g\|_{L_\infty(D)} \leq \omega^{(2)}\left(g, \frac{\Delta_1}{2}, \frac{\Delta_2}{2}\right).$$

Зокрема для $\omega^{(2)}(g(*, *), \Delta_1/2, \Delta_2/2) = M_{1,2}(\Delta_1/2)^{\alpha_1}(\Delta_2/2)^{\alpha_2}$ та рівномірного розбиття $x_k = \frac{k}{n}, \quad k = \overline{0, n}, \quad y_l = \frac{l}{n}, \quad l = \overline{0, n}$ отримуємо

$$\|g - N_{n,n}^{(1)}g\|_{L_\infty(D)} \leq \frac{M_{1,2}}{(2n)^{\alpha_1 + \alpha_2}} = O\left(\frac{1}{(2n)^{\alpha_1 + \alpha_2}}\right) \quad \forall g \in \text{Lip}_M \alpha.$$

Теорему 8.5.2 доведено.

Таким чином, оператори $N_{n,n}^{(1)}g(x, y)$ мають не менше ніж удвічі вищий порядок відносно величини $1/n$, $n \rightarrow \infty$ порівняно із операторами $L_{1,n}^{(1)}L_{2,n}^{(1)}g$, що досліджувалися в теоремі 8.5.1, бо $M_1 \left(\frac{1}{2n}\right)^{\alpha_1} + M_2 \left(\frac{1}{2n}\right)^{\alpha_2} + M_{1,2} \left(\frac{1}{2n}\right)^{\alpha_1 + \alpha_2} = O\left(\left(\frac{1}{2n}\right)^{\min\{\alpha_1, \alpha_2\}}\right)$ і $\left(\frac{1}{2n}\right)^{\alpha_1 + \alpha_2} \leq$

$\leq \left(\frac{1}{2n}\right)^{2 \min\{\alpha_1, \alpha_2\}}$, $n \rightarrow \infty$. Тобто для досягнення аналогічної точності необхідні (при $\alpha_1 = \alpha_2$) оператори $L_{1,n^2}^{(1)} L_{2,n^2}^{(1)} g$, що потребують n^4 значень функції g .

Однак оператори $N_{n,n}^{(1)} g(x, y)$ для своєї побудови потребують слідів $g(\xi_k, y), g(x, \eta_l)$ функції g . Отже, їх не можна вважати кусково-сталими сплайнами у вузькому значенні цього терміна. Нижче на основі операторів $N_{m,n}^{(1)}$ побудовано оператори $NP_{m,n}^{(1)}$ наближення кусково-сталими функціями, котрі мають таку ж за порядком точність, як і оператори $N_{m,n}^{(1)}$, і потребують $mn(m+n)$ значень функції $g(x_i, y_j)$, тобто $2n^3$ значень $g(x_i, y_j)$ при $m = n$.

Теорема 8.5.3. *Оператор*

$$NP_{m,n,N_1,N_2}^{(1)} g(x, y) = (LP_{1,m,N_2}^{(1)} + LP_{2,n,N_1}^{(1)} - L_{1,m}^{(1)} L_{2,n}^{(1)}) g(x, y),$$

де

$$LP_{1,m,N_2}^{(1)} g(x, y) = \sum_{k=1}^m \chi_{\left(\frac{k-1}{m}, \frac{k}{m}\right)}(x) \sum_{j=1}^{N_2} \chi_{\left(\frac{j-1}{N_2}, \frac{j}{N_2}\right)}(y) g(\xi_k, \tilde{\eta}_j),$$

$$\tilde{\eta}_j = \frac{j-0,5}{N_2}, \xi_k = \frac{x_{k-1} + x_k}{2} = \frac{k-0,5}{m},$$

$$LP_{2,n,N_1}^{(1)} g(x, y) = \sum_{l=1}^n \chi_{\left(\frac{l-1}{n}, \frac{l}{n}\right)}(y) \sum_{i=1}^{N_1} \chi_{\left(\frac{i-1}{N_1}, \frac{i}{N_1}\right)}(x) g(\tilde{\xi}_i, \eta_l),$$

$$\tilde{\xi}_i = \frac{i-0,5}{N_1}, \eta_l = \frac{y_{l-1} + y_l}{2} = \frac{l-0,5}{n},$$

має такі властивості:

$$NP_{m,n,N_1,N_2}^{(1)} g\left(\frac{k-0,5}{m}, \frac{l-0,5}{N_2}\right) = g\left(\frac{k-0,5}{m}, \frac{l-0,5}{N_2}\right) + g\left(\frac{k'-0,5}{N_1}, \frac{l'-0,5}{n}\right) - g\left(\frac{k-0,5}{m}, \frac{l'-0,5}{n}\right),$$

$$\left| \frac{k'-0,5}{N_1} - \frac{k-0,5}{m} \right| = \min_{1 \leq p \leq N_1} \left| \frac{p-0,5}{N_1} - \frac{k-0,5}{m} \right|,$$

$$\left| \frac{l'-0,5}{n} - \frac{l-0,5}{N_2} \right| = \min_{1 \leq q \leq n} \left| \frac{q-0,5}{n} - \frac{l-0,5}{N_2} \right|.$$

Зокрема, якщо $\frac{k'-0,5}{N_1} - \frac{k-0,5}{m} = 0$, $\frac{l'-0,5}{n} - \frac{l-0,5}{N_2} = 0$, то

$$NP_{m,n,N_1,N_2}^{(1)} g\left(\frac{k-0,5}{m}, \frac{l-0,5}{N_2}\right) = g\left(\frac{k-0,5}{m}, \frac{l-0,5}{N_2}\right);$$

$k = \overline{1, m}, l = \overline{1, N_2}$. Аналогічно

$$NP_{m,n,N_1,N_2}^{(1)} g\left(\frac{k-0,5}{N_1}, \frac{l-0,5}{n}\right) = g\left(\frac{k'-0,5}{m}, \frac{l'-0,5}{N_2}\right) +$$

$$+ g\left(\frac{k-0,5}{N_1}, \frac{l-0,5}{n}\right) - g\left(\frac{k'-0,5}{m}, \frac{l-0,5}{n}\right), k = \overline{1, N_1}, l = \overline{1, n},$$

$$\left| \frac{k'-0,5}{m} - \frac{k-0,5}{N_1} \right| = \min_{1 \leq p \leq m} \left| \frac{p-0,5}{m} - \frac{k-0,5}{N_1} \right|,$$

$$\left| \frac{l'-0,5}{N_2} - \frac{l-0,5}{n} \right| = \min_{1 \leq q \leq N_2} \left| \frac{q-0,5}{N_2} - \frac{l-0,5}{n} \right|.$$

Зокрема, якщо $\frac{k'-0,5}{m} - \frac{k-0,5}{N_1} = 0$, $\frac{l'-0,5}{N_2} - \frac{l-0,5}{n} = 0$, то

$$NP_{m,n,N_1,N_2}^{(1)} g\left(\frac{k-0,5}{N_1}, \frac{l-0,5}{n}\right) = g\left(\frac{k-0,5}{N_1}, \frac{l-0,5}{n}\right),$$

$k = \overline{1, N_1}, l = \overline{1, n}$. Якщо $\frac{N_1}{m} = 2p - 1$, $\frac{N_2}{n} = 2q - 1$, $p, q \in \mathbf{N}$, то

$$NP_{m,n,N_1,N_2}^{(1)}(\xi_k, \eta_l) = g(\xi_k, \eta_l), k = \overline{1, m}, l = \overline{1, n}.$$

При цьому для похибки наближення дійсне співвідношення

$$\forall g \in \text{Lip}_M \alpha : \|g(x, y) - NP_{m,n,N_1,N_2}^{(1)} g(x, y)\|_{L_\infty(D)} \leq$$

$$\leq M_1 \left(\frac{1}{2N_1}\right)^{\alpha_1} + M_2 \left(\frac{1}{2N_2}\right)^{\alpha_2} + M_{1,2} \left(\frac{\Delta_1}{2}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{\Delta_2}{2}\right)^{\alpha_2}.$$

Існують такі числа N_1, N_2 , що для оцінювання похибки виконується нерівність $\forall g \in \text{Lip}_M \alpha$:

$$\exists N_1, N_2 \in \mathbf{N} : \|g - NP_{m,n,N_1,N_2}^{(1)} g\|_{L_\infty(D)} \leq 3M_{1,2} \left(\frac{\Delta_1}{2}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{\Delta_2}{2}\right)^{\alpha_2}.$$

Д о в е д е н н я. Інтерполяційні властивості оператора $NP_{m,n,N_1,N_2}^{(1)}g(x,y)$ встановлюються безпосередньою перевіркою з урахуванням властивостей характеристичних функцій:

$$\chi_{(\frac{k-1}{m}, \frac{k}{m})} \left(\frac{k' - 0,5}{N_1} \right) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \frac{k' - 0,5}{N_1} \in \left(\frac{k-1}{m}, \frac{k}{m} \right), \\ 0, & \text{якщо } \frac{k' - 0,5}{N_1} \notin \left(\frac{k-1}{m}, \frac{k}{m} \right), \end{cases}$$

$$\chi_{(\frac{k-1}{N_1}, \frac{k}{N_1})} \left(\frac{k' - 0,5}{m} \right) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \frac{k' - 0,5}{m} \in \left(\frac{k-1}{N_1}, \frac{k}{N_1} \right), \\ 0, & \text{якщо } \frac{k' - 0,5}{m} \notin \left(\frac{k-1}{N_1}, \frac{k}{N_1} \right). \end{cases}$$

Зауважимо, що оператори $LP_{1,m,N_2}^{(1)}g, LP_{2,n,N_1}^{(1)}g$ отримуються з операторів $L_{1,m}^{(1)}g(x,y), L_{2,n}^{(1)}g(x,y)$ (див. теореми 8.5.1, 8.5.2) заміною функцій $g(\xi_k, y), g(x, \eta_l)$ відповідно сумами.

$$g(\xi_k, y) \approx \tilde{g}(\xi_k, y) := P_{N_2}^{(1)}g(\xi_k, y) = \sum_{j=1}^{N_2} \chi_{(\frac{j-1}{N_2}, \frac{j}{N_2})}(y)g(\xi_k, \tilde{\eta}_j),$$

$$g(x, \eta_l) \approx \tilde{g}(x, \eta_l) := P_{N_1}^{(1)}g(x, \eta_l) = \sum_{i=1}^{N_1} \chi_{(\frac{i-1}{N_1}, \frac{i}{N_1})}(x)g(\tilde{\xi}_i, \eta_l)$$

Тобто вони замінені (як функції однієї змінної) кусково-сталими інтерполяційними сплайнами. Тому похибка такого наближення, згідно із викладеним вище, має оцінку (при $k = \overline{1, m}, l = \overline{1, n}$)

$$\begin{aligned} \|(L_{1,m}^{(1)} - LP_{1,m,N_2}^{(1)})g\|_{L_\infty[0,1]} &= \left\| \sum_{k=1}^m \chi_{(x_{k-1}, x_k)}(x)(g(\xi_k, y) - \right. \\ &\left. - \tilde{g}(\xi_k, y))\right\|_{L_\infty[0,1]} \leq \max_{1 \leq k \leq m} \|(g(\xi_k, y) - \tilde{g}(\xi_k, y))\|_{L_\infty[0,1]} \leq M_2 \left(\frac{1}{2N_2} \right)^{\alpha_2}, \\ \|(L_{2,n}^{(1)} - LP_{2,n,N_1}^{(1)})g\|_{L_\infty[0,1]} &\leq \max_{1 \leq l \leq n} \|(I - P_{N_1}^{(1)})g(x, \eta_l)\|_{L_\infty[0,1]} = \\ &= \max_{1 \leq l \leq n} \|g(x, \eta_l) - \tilde{g}(x, \eta_l)\|_{L_\infty[0,1]} \leq M_1 \left(\frac{1}{2N_1} \right)^{\alpha_1}. \end{aligned}$$

Отже, для похибки наближення отримаємо оцінку

$$\|g - NP_{m,n,N_1,N_2}^{(1)}g\|_{L_\infty(D)} = \|g - (LP_{1,m,N_2}^{(1)} + LP_{2,n,N_1}^{(1)} - L_{1,m}^{(1)}L_{2,n}^{(1)})g\|_{L_\infty(D)} =$$

$$\begin{aligned}
&= \|[(I - L_{1,m}^{(1)}) + (L_{1,m}^{(1)} - LP_{1,m,N_2}^{(1)}) + (I - L_{2,n}^{(1)}) + (L_{2,n}^{(1)} - LP_{2,n,N_1}^{(1)}) - \\
&\quad - (I - L_{1,m}^{(1)} L_{2,n}^{(1)})]g\|_{L_\infty(D)} = \\
&= \|[(I - L_{1,m}^{(1)})(I - L_{2,n}^{(1)}) + (L_{1,m}^{(1)} - LP_{1,m,N_2}^{(1)}) + (L_{2,n}^{(1)} - LP_{2,n,N_1}^{(1)})]g\|_{L_\infty(D)} \leq \\
&\leq \| (I - L_{1,m}^{(1)})(I - L_{2,n}^{(1)})g\|_{L_\infty(D)} + \| (L_{1,m}^{(1)} - LP_{1,m,N_2}^{(1)})g\|_{L_\infty(D)} + \\
&\quad + \| (L_{2,n}^{(1)} - LP_{2,n,N_1}^{(1)})g\|_{L_\infty(D)} \leq \\
&\leq M_1 \left(\frac{1}{2N_1} \right)^{\alpha_1} + M_2 \left(\frac{1}{2N_2} \right)^{\alpha_2} + M_{1,2} \left(\frac{\Delta_1}{2} \right)^{\alpha_1} \left(\frac{\Delta_2}{2} \right)^{\alpha_2}.
\end{aligned}$$

Таким чином, доведено першу нерівність теореми 8.5.3.

Для доведення другої нерівності достатньо вибрати числа $N_1 = N_1^*$, $N_2 = N_2^*$ з умов

$$\begin{aligned}
M_2 \left(\frac{1}{2N_2^*} \right)^{\alpha_2} &\leq M_{1,2} \left(\frac{\Delta_1}{2} \right)^{\alpha_1} \left(\frac{\Delta_2}{2} \right)^{\alpha_2}, \\
M_1 \left(\frac{1}{2N_1^*} \right)^{\alpha_1} &\leq M_{1,2} \left(\frac{\Delta_1}{2} \right)^{\alpha_1} \left(\frac{\Delta_2}{2} \right)^{\alpha_2}.
\end{aligned}$$

Зокрема, якщо $\Delta_1 = \frac{1}{m}$, $\Delta_2 = \frac{1}{n}$, для визначення чисел N_1^* , N_2^* отримуюмо нерівності

$$\begin{aligned}
M_2 \left(\frac{1}{2N_2^*} \right)^{\alpha_2} &\leq M_{1,2} \left(\frac{1}{2m} \right)^{\alpha_1} \left(\frac{1}{2n} \right)^{\alpha_2}, \\
M_1 \left(\frac{1}{2N_1^*} \right)^{\alpha_1} &\leq M_{1,2} \left(\frac{1}{2m} \right)^{\alpha_1} \left(\frac{1}{2n} \right)^{\alpha_2}.
\end{aligned}$$

У результаті

$$\|g - NP_{m,n,N_1^*,N_2^*}^{(1)}g\|_{L_\infty(D)} \leq 3M_{1,2} \left(\frac{1}{2m} \right)^{\alpha_1} \left(\frac{1}{2n} \right)^{\alpha_2}.$$

Враховавши, що $\Delta_1 \Delta_2 = \frac{1}{mn}$, можемо зробити висновок, що оператори $N_{m,n}^{(1)}g$ та $NP_{m,n,N_1^*,N_2^*}^{(1)}g$ мають однаковий порядок швидкості збіжності похибки до нуля при $m, n \rightarrow \infty$.

Якщо також $m = n$, $\alpha_1 = \alpha_2$, то

$$N_1^* = 2n^2 = O(n^2), \quad N_2^* = O(n^2).$$

Теорему 8.5.3 доведено.

Зауваження. Таку ж похибку мають і оператори $L_{1,mn}^{(1)}L_{2,mn}^{(1)}g(x,y)$ при рівномірному розбитті: $\|g - L_{1,mn}^{(1)}L_{2,mn}^{(1)}g\|_{L_\infty(D)} \leq$

$$\leq M_1(2mn)^{-\alpha_1} + M_2(2mn)^{-\alpha_2} + M_{1,2}(2mn)^{-\alpha_1-\alpha_2},$$

$$\|g - L_{1,mn}^{(1)}L_{2,mn}^{(1)}g\|_{L_\infty(D)} \leq \max_{0 \leq y \leq 1} \omega_x \left(g(*, y), \frac{1}{2mn} \right) + \\ + \max_{0 \leq x \leq 1} \omega_y \left(g(x, *), \frac{1}{2mn} \right) + \omega^{(2)} \left(g, \frac{1}{2mn}, \frac{1}{2mn} \right).$$

Однак вони потребують $Q_1 = (mn)^2$ значень $g\left(\frac{i-0,5}{mn}, \frac{j-0,5}{mn}\right)$, $i, j = \overline{1, mn}$. Оператори $NP_{m,n,N_1^*,N_2^*}^{(1)}g$ при рівномірному розбитті потребують $Q_2 = mn(m+n)$ значень $g\left(\frac{k-0,5}{m}, \frac{l-0,5}{n}\right)$, $g\left(\frac{i-0,5}{mn}, \frac{l-0,5}{n}\right)$, $g\left(\frac{k-0,5}{m}, \frac{l-0,5}{n}\right)$, $k = \overline{1, m}$, $l = \overline{1, n}$, $i, j = \overline{1, mn}$, тобто на порядок менше (при $m = n$).

8.5.2. Апроксимація $g(x,y)$ кусково-сталими з використанням середніх

Побудуємо ще один тип операторів апроксимації функцій двох змінних кусково-сталими з використанням середніх значень функції на кожному з прямокутників $I_{k,l} = [x_{k-1}, x_k] \times [y_{l-1}, y_l] \subset \Pi$. Уведемо позначення:

$$a_{1,k}g(y) = \frac{1}{\Delta_{1,k}} \int_{x_{k-1}}^{x_k} g(\xi, y) d\xi, \Delta_{1,k} = x_k - x_{k-1}, k = \overline{1, m},$$

$$a_{2,l}g(x) = \frac{1}{\Delta_{2,l}} \int_{y_{l-1}}^{y_l} g(x, \eta) d\eta, \Delta_{2,l} = y_l - y_{l-1}, l = \overline{1, n},$$

$$\chi_{(x_{k-1}, x_k)}(x) = \chi_{1,k}(x) = \begin{cases} 1, & x_{k-1} < x < x_k, \\ 0, & x \notin (x_{k-1}, x_k), \end{cases}$$

$$\chi_{(y_{l-1}, y_l)}(y) = \chi_{2,l}(y) = \begin{cases} 1, & y_{l-1} < y < y_l, \\ 0, & y \notin (y_{l-1}, y_l), \end{cases}$$

$$L_{1,m}^{(2)}g(x,y) = \sum_{k=1}^m \chi_{1,k}(x) a_{1,k}(y),$$

$$L_{1,m}^{(2)}g(x_k, y) = \left(L_{1,m}^{(2)}g(x_k - 0, y) + L_{1,m}^{(2)}g(x_k + 0, y) \right) / 2, k = \overline{1, m-1},$$

$$L_{2,n}^{(2)}g(x, y) = \sum_{l=1}^n \chi_{2,l}(y) a_{2,l}(x),$$

$$L_{2,n}^{(2)}g(x, y_l) = \left(L_{2,n}^{(2)}g(x, y_l - 0) + L_{2,n}^{(2)}g(x, y_l + 0) \right) / 2, \quad l = \overline{1, n-1},$$

$$\begin{aligned} s_{m,n,0}^{(2)}(x, y) &= s_{m,n,0}^{(2)}g(x, y) := L_{1,m}^{(2)}L_{2,n}^{(2)}g(x, y) = \\ &= \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n \chi_{1,k}(x) \chi_{2,l}(y) \frac{1}{\Delta_{1,k}} \frac{1}{\Delta_{2,l}} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \int_{y_{l-1}}^{y_l} g(\xi, \eta) d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Теорема 8.5.4. *Хай $g(x, y) \in C(D)$. Оператори $s_{m,n,0}^{(2)}g$ мають такі властивості ($I_{k,l} \subset D$):*

$$s_{m,n,0}^{(2)}g(x, y) = c_{kl} := \frac{1}{\Delta_{1,k}} \frac{1}{\Delta_{2,l}} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \int_{y_{l-1}}^{y_l} g(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad \text{якщо } (x, y) \in I_{k,l}.$$

Крім того, якщо $g \in Lip_M \alpha(D)$, то для залишку $e_{m,n,0}^{(2)}g(x, y) = g(x, y) - s_{m,n,0}^{(2)}g(x, y)$ виконується така нерівність:

$$\|e_{m,n,0}^{(2)}g\|_{L_\infty(D)} \leq M_1 \Delta_1^{\alpha_1} + M_2 \Delta_2^{\alpha_2} + M_{1,2} \Delta_1^{\alpha_1} \Delta_2^{\alpha_2},$$

де

$$\Delta_1 = \max_{1 \leq k \leq m} (x_k - x_{k-1}), \quad \Delta_2 = \max_{1 \leq l \leq n} (y_l - y_{l-1}).$$

Д о в е д е н н я. Хай $(x, y) \in (x_{k-1}, x_k) \times (y_{l-1}, y_l)$. Тоді

$$s_{m,n,0}^{(2)}g(x, y) = \chi_{1,k}(x) \chi_{2,l}(y) \frac{1}{\Delta_{1,k}} \frac{1}{\Delta_{2,l}} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \int_{y_{l-1}}^{y_l} g(\xi, \eta) d\xi d\eta = c_{kl}.$$

$$\begin{aligned} \text{Скористаємося тотожністю } e_{m,n,0}^{(2)}g(x, y) &= (I - L_{1,m}^{(2)}L_{1,n}^{(2)})g(x, y) = \\ &= [(I - L_{1,m}^{(2)}) + (I - L_{2,n}^{(2)}) - (I - L_{1,m}^{(2)})(I - L_{2,n}^{(2)})]g(x, y), \end{aligned}$$

а також нерівностями

$$\begin{aligned} &|g(x, y) - L_{1,m}^{(2)}g(x, y)| = |g(x, y) - a_{1,k}g(y)| = \\ &= \left| g(x, y) - \frac{1}{\Delta_{1,k}} \int_{x_{k-1}}^{x_k} g(\xi, y) d\xi \right| = \left| \frac{1}{\Delta_{1,k}} \int_{x_{k-1}}^{x_k} [g(x, y) - g(\xi, y)] d\xi \right| \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{\Delta_{1,k}} \int_{x_{k-1}}^{x_k} |g(x, y) - g(\xi, y)| d\xi \leq \\
&\leq \frac{1}{\Delta_{1,k}} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left(\max_{x, \xi \in [x_{k-1}, x_k]} |g(x, y) - g(\xi, y)| \right) d\xi \leq \\
&\leq \frac{1}{\Delta_{1,k}} \int_{x_{k-1}}^{x_k} M_1(y) \Delta_{1,k}^{\alpha_1} d\xi = M_1(y) (\Delta_{1,k})^{\alpha_1},
\end{aligned}$$

$$x_{k-1} < x < x_k, \quad y \in [0, 1], \quad k = \overline{1, m}.$$

Тобто з отриманого результату впливає таке співвідношення:

$$\|(I - L_{1,m}^{(2)})g(*, y)\|_{L_\infty[0,1]} \leq M_1^* (\Delta_1)^{\alpha_1}; \quad M_1^* = \max_{0 \leq y \leq 1} M_1(y).$$

Аналогічно

$$\|(I - L_{2,n}^{(2)})g(x, *)\|_{L_\infty[0,1]} \leq M_2^* (\Delta_2)^{\alpha_2}; \quad M_2^* = \max_{0 \leq x \leq 1} M_2(x),$$

$$\begin{aligned}
&\max_{k,l} \max_{(x,y) \in I_{k,l}} |g(x, y) - a_{1,k}g(y) - a_{2,l}g(x) + a_{1,k}a_{2,l}g| = \\
&= \|(I - L_{1,m}^{(2)})(I - L_{2,n}^{(2)})g\|_{L_\infty(D)} \leq \omega^{(2)}(g, \Delta_{1,k}, \Delta_{2,l}) \leq M_{1,2} (\Delta_1)^{\alpha_1} (\Delta_2)^{\alpha_2}.
\end{aligned}$$

Підставивши ці нерівності в нерівність $|e_{m,n,0}^{(2)}g| \leq$

$$\leq |(I - L_{1,m}^{(2)})g(x, y)| + |(I - L_{2,n}^{(2)})g(x, y)| + |(I - L_{1,m}^{(2)})(I - L_{2,n}^{(2)})g(x, y)|,$$

отримаємо доведення теореми 8.5.4.

Зауваження. Якщо під час доведення цієї теореми вважати, що функція $g(x, y)$ належить до класу

$$\begin{aligned}
H^\omega(D) = \left\{ g : \max_{x, x+h_1 \in [0,1]} |g(x, y) - g(x+h_1, y)| \leq \omega_x(g(*, y), h_1), \right. \\
\left. \max_{y, y+h_2 \in [0,1]} |g(x, y) - g(x, y+h_2)| \leq \omega_y(g(x, *), h_2), \right.
\end{aligned}$$

$$|g(*+h_1, *+h_2) - g(*+h_1, *) - g(*, *+h_2) + g(*, *)| \leq \omega^{(2)}(g, h_1, h_2) \left. \right\},$$

де $\omega = (\omega_x, \omega_y, \omega^{(2)})$ – відповідні модулі неперервності, то оцінку похибки можна записати у вигляді $\|e_{m,n,0}^{(2)}g\|_{L_\infty(D)} \leq$

$$\leq \max_{0 \leq y \leq 1} \omega_x(g(*, y), \Delta_1) + \max_{0 \leq x \leq 1} \omega_y(g(x, *), \Delta_2) + \omega^{(2)}(g, \Delta_1, \Delta_2).$$

Зокрема у випадку $\omega_x(g(*, y), \Delta_1) = M_1(y) (\Delta_1)^{\alpha_1}$, $\omega_y(g(x, *), \Delta_2) = M_2(x) (\Delta_2)^{\alpha_2}$, $\omega^{(2)}(g, \Delta_1, \Delta_2) = M_{1,2}(\Delta_1)^{\alpha_1} (\Delta_2)^{\alpha_2}$ отримаємо $\|e_{m,n,0}^{(2)}g(x, y)\|_{L_\infty(D)} \leq$

$$\leq \max_{0 \leq y \leq 1} M_1(y) (\Delta_1)^{\alpha_1} + \max_{0 \leq x \leq 1} M_2(x) (\Delta_2)^{\alpha_2} + M_{1,2}(\Delta_1)^{\alpha_1} (\Delta_2)^{\alpha_2}.$$

Наступну теорему присвячено операторам сплайн-інтерлінації з кусково-сталими допоміжними функціями і з використанням операторів усереднення по кожній змінній окремо (на відповідних відрізках) і по прямокутниках $I_{k,l}$.

Теорема 8.5.5. *Оператори*

$$\begin{aligned} N_{m,n}^{(2)}g(x, y) &= (L_{1,m}^{(2)} + L_{2,n}^{(2)} - L_{1,m}^{(2)}L_{2,n}^{(2)})g(x, y) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \forall (x, y) \in (x_{k-1}, x_k) \times (y_{l-1}, y_l), k = \overline{1, m}, l = \overline{1, n} : \\ N_{m,n}^{(2)}g(x, y) &= a_{1,k}g(y) + a_{2,l}g(x) - c_{k,l}^{(2)} = \\ &= \frac{1}{\Delta_{1,k}} \int_{x_{k-1}}^{x_k} g(\xi, y) d\xi + \frac{1}{\Delta_{2,l}} \int_{y_{l-1}}^{y_l} g(x, \eta) d\eta - \frac{1}{\Delta_{1,k}} \frac{1}{\Delta_{2,l}} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \int_{y_{l-1}}^{y_l} g(\xi, \eta) d\xi d\eta \end{aligned}$$

мають такі властивості:

$$\begin{aligned} \int_{x_{k-1}}^{x_k} N_{m,n}^{(2)}g(\xi, y) d\xi &= \int_{x_{k-1}}^{x_k} g(\xi, y) d\xi, k = \overline{1, m}, \\ \int_{y_{l-1}}^{y_l} N_{m,n}^{(2)}g(x, \eta) d\eta &= \int_{y_{l-1}}^{y_l} g(x, \eta) d\eta, l = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

При цьому дійсна така оцінка похибки наближення

$$\|g - N_{m,n}^{(2)}g\|_{L_\infty(D)} \leq \omega^{(2)}(g, \Delta_1, \Delta_2), \quad \forall g \in H^\omega(D).$$

Д о в е д е н н я. Перші дві групи співвідношень, що стосуються рівності середніх значень, доводяться безпосередньою перевіркою.

Доведення зазначеної в теоремі оцінки похибки наближення випливає з тотожності

$$(I - N_{m,n}^{(2)})g = [I - L_{1,m}^{(2)} - L_{2,n}^{(2)} + L_{1,m}^{(2)}L_{2,n}^{(2)}]g = (I - L_{1,m}^{(2)})(I - L_{2,n}^{(2)})g,$$

а також з нерівностей

$$\begin{aligned} & \max_{1 \leq k \leq m, 1 \leq l \leq n} \max_{(x,y) \in I_{k,l} \subset D} |g(x,y) - a_{1,k}g(y) - a_{2,l}g(x) + a_{1,k}a_{2,l}g| \leq \\ & \leq \max_{1 \leq k \leq m, 1 \leq l \leq n} \omega^{(2)}(g, \Delta_{1,k}, \Delta_{2,l}) \leq \omega^{(2)}(g, \Delta_1, \Delta_2). \end{aligned}$$

Тобто

$$\|(I - N_{m,n}^{(2)})g\|_{L_\infty(D)} = \|(I - L_{1,m}^{(2)})(I - L_{2,n}^{(2)})g\|_{L_\infty(D)} \leq \omega^{(2)}(g, \Delta_1, \Delta_2).$$

Детальніший запис доведення цього твердження може мати такий вигляд:

$$\begin{aligned} \|g - N_{m,n}^{(2)}g\|_{L_\infty(D)} &= \left| g(x,y) - \frac{1}{\Delta_{1,k}} \int_{x_{k-1}}^{x_k} g(\xi,y) d\xi - \frac{1}{\Delta_{2,l}} \int_{y_{l-1}}^{y_l} g(x,\eta) d\eta + \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{\Delta_{1,k}\Delta_{2,l}} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \int_{y_{l-1}}^{y_l} g(\xi,\eta) d\xi d\eta \right| \leq \\ & \leq \frac{1}{\Delta_{1,k}\Delta_{2,l}} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \int_{y_{l-1}}^{y_l} |g(x,y) - g(\xi,y) - g(x,\eta) + g(\xi,\eta)| d\xi d\eta \leq \\ & \leq \omega^{(2)}(g, \Delta_1, \Delta_2), \quad \forall g \in H^\omega(D). \end{aligned}$$

Отже, третє твердження теореми 8.5.5 теж доведено.

Зокрема у випадку рівномірної сітки $x_k = k/m, k = \overline{0, m}, y_l = l/n, l = \overline{0, n}$ отримуємо

$$\|(I - N_{m,n}^{(2)})g\|_{L_\infty(D)} \leq \omega^{(2)}\left(g(*, *), \frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right).$$

Якщо $\omega^{(2)}((g(*, *), t, v) = M_{1,2}t^{\alpha_1}v^{\alpha_2}, 0 < \alpha_k \leq 1, k = 1, 2,$ то

$$\|(I - N_{m,n}^{(2)})g\|_{L_\infty(D)} \leq M_{1,2}\Delta_1^{\alpha_1}\Delta_2^{\alpha_2}.$$

Теорему 8.5.5 доведено.

Отже, оператори $N_{m,n}^{(2)}g$ мають похибку з удвічі більшим порядком швидкості збіжності (відносно параметра $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2$), якщо $\alpha_1 = \alpha_2$, ніж оператори $L_{1,m}^{(2)}L_{2,n}^{(2)}g$. Проте перші потребують середніх $a_{1,k}g(y), a_{2,l}g(x)$ від функції $g(x, y)$ за змінними x та y у смугах $(x_{k-1}, x_k) \times [0, 1], [0, 1] \times (y_{l-1}, y_l)$, тобто не генерують кусково-сталих функцій, взагалі кажучи. Нижче побудовано оператори $NP_{m,n,N_1,N_2}^{(2)}g$ кусково-сталої апроксимації з використанням середніх на деякій множині прямокутників (що включає в себе розбиття π), які зберігають той же порядок швидкості збіжності, що й оператори $N_{m,n}^{(2)}g$.

Теорема 8.5.6. *Оператори $(i = \overline{0, N_1}, j = \overline{1, N_2})$*

$$NP_{m,n,N_1,N_2}^{(2)}g(x, y) = (LP_{1,m,N_2}^{(2)} + LP_{2,n,N_1}^{(2)} - L_{1,m}^{(2)}L_{2,n}^{(2)})g(x, y),$$

де $LP_{1,m,N_2}^{(2)}g \approx L_{1,m}^{(2)}g$, $LP_{2,n,N_1}^{(2)}g \approx L_{2,n}^{(2)}g$,

$$LP_{1,m,N_2}^{(2)}g(x, y) = \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^{N_2} a_{1,k,N_2,j}^{(2)} \chi_{(x_{k-1}, x_k)}(x) \chi_{(\eta_{j-1}^*, \eta_j^*)}(y), \eta_j^* = \frac{j}{N_2},$$

$$a_{1,k,N_2,j}^{(2)} = \frac{1}{N_2 \Delta_{1,k}} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \int_{\eta_{j-1}^*}^{\eta_j^*} g(\xi, \eta) d\xi d\eta \approx a_{1,k}g(y), y \in (\eta_{j-1}^*, \eta_j^*),$$

$$LP_{2,n,N_1}^{(2)}g(x, y) = \sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^{N_1} a_{2,l,N_1,i}^{(2)} \chi_{(\xi_{i-1}, \xi_i)}(x) \chi_{(y_{l-1}, y_l)}(y), \xi_i^* = \frac{i}{N_1},$$

$$a_{2,l,N_1,i}^{(2)} = \frac{1}{N_1} \frac{1}{\Delta_{2,l}} \int_{\xi_{i-1}^*}^{\xi_i^*} \int_{y_{l-1}}^{y_l} g(\xi, \eta) d\xi d\eta \approx a_{2,l}g(x), x \in (\xi_{i-1}^*, \xi_i^*),$$

мають такі властивості: $\forall (x, y) \in \left(\frac{k'-1}{N_1}, \frac{k'}{N_1}\right) \times \left(\frac{j'-1}{N_2}, \frac{j'}{N_2}\right)$, $k' = \overline{1, N_1}, j' = \overline{1, N_2}$; $\left(\frac{k'-1}{N_1}, \frac{k'}{N_1}\right) \subset \left(\frac{k-1}{m}, \frac{k}{m}\right)$; $\left(\frac{j'-1}{N_2}, \frac{j'}{N_2}\right) \subset \left(\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}\right)$,

$$NP_{m,n,N_1,N_2}^{(2)}g(x, y) = a_{1,k,N_2,j'}^{(2)} + a_{2,l,N_1,k'}^{(2)} - c_{k,l}^{(2)}, k' = \overline{1, N_1}, j' = \overline{1, N_2}.$$

Для похибки наближення $enp_{m,n,N_1,N_2}^{(2)}g = (I - NP_{m,n,N_1,N_2}^{(2)})g$ виконується співвідношення $\forall g \in H^\omega(D)$:

$$\|enp_{m,n,N_1,N_2}^{(2)}g\|_{L^\infty(D)} \leq$$

$$\leq \omega^{(2)}(g, \Delta_1, \Delta_2) + \max_{0 \leq x \leq 1} \omega_y \left(g(x, *), \frac{1}{2N_2} \right) + \max_{0 \leq y \leq 1} \omega_x \left(g(*, y), \frac{1}{2N_1} \right).$$

$$\text{Якщо } \omega_x(g; t) \leq M_1(y)t^{\alpha_1}, \quad \omega_y(g; v) \leq M_2(x)v^{\alpha_2}, \quad \omega^{(2)}(g; t, v) \leq \\ \leq M_{1,2}t^{\alpha_1}v^{\alpha_2}, \text{ то } \|enp_{m,n,N_1,N_2}^{(2)}g\|_{L_\infty(D)} \leq$$

$$\leq M_{1,2}\Delta_1^{\alpha_1}\Delta_2^{\alpha_2} + \max_{0 \leq x \leq 1} M_2(x) \left(\frac{1}{2N_2} \right)^{\alpha_2} + \max_{0 \leq y \leq 1} M_1(y) \left(\frac{1}{2N_1} \right)^{\alpha_1}.$$

При цьому $\forall g \in H^\omega(D)$:

$$\exists K > 0 \exists N_1, N_2 \in \mathbf{N} : \|enp_{m,n,N_1,N_2}^{(2)}g\|_{L_\infty(D)} \leq K\omega^{(2)}(g, \Delta_1, \Delta_2).$$

Д о в е д е н н я. Хай

$$x \in \left(\frac{k'-1}{N_1}, \frac{k'}{N_1} \right) \subset \left(\frac{k-1}{m}, \frac{k}{m} \right), \quad k \in \{1, \dots, m\}; \quad k' \in \{1, \dots, N_1\},$$

$$y \in \left(\frac{j'-1}{N_2}, \frac{j'}{N_2} \right) \subset \left(\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n} \right), \quad j \in \{1, \dots, n\}; \quad j' \in \{1, \dots, N_2\}.$$

Тоді

$$LP_{1,m,N_2}^{(2)}g(x, y) = \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^{N_2} a_{1,k,N_2,j}^{(2)} \chi_{(x_{k-1}, x_k)}(x) \chi_{(\eta_{j-1}^*, \eta_j^*)}(y) = a_{1,k,N_2,j'},$$

$$LP_{2,n,N_1}^{(2)}g(x, y) = \sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^{N_1} a_{2,l,N_1,i}^{(2)} \chi_{(\xi_{i-1}^*, \xi_i^*)}(x) \chi_{(y_{l-1}, y_l)}(y) = a_{2,l,N_1,k'},$$

$$LP_{1,m}^{(2)}LP_{2,n}^{(2)}g(x, y) = c_{k,j}^{(2)}.$$

Звідси отримаємо

$$NP_{m,n,N_1,N_2}^{(2)}g(x, y) = a_{1,k,N_2,j'}^{(2)} + a_{2,l,N_1,k'}^{(2)} - c_{k,j}^{(2)}, \quad k' = \overline{1, N_1}, \quad j' = \overline{1, N_2}.$$

Таким чином, перше твердження теореми доведено.

Для доведення першої нерівності, що входить у твердження теореми 8.5.6, врахуємо співвідношення

$$\|(L_{1,m}^{(2)} - LP_{1,m,N_2}^{(2)})g\|_{L_\infty(D)} = \max_{1 \leq k \leq m} \max_{0 \leq y \leq 1} |a_{1,k}g(y) - a_{1,k,N_2}g(y)| = \\ = \max_{1 \leq k \leq m} \max_{0 \leq y \leq 1} \left| a_{1,k}g(y) - \sum_{j'=1}^{N_2} \chi_{(\frac{j'-1}{N_2}, \frac{j'}{N_2})}(y) a_{1,k}g\left(\frac{j'-0,5}{N_2}\right) \right| =$$

$$\begin{aligned}
&= \max_{1 \leq k \leq m} \max_{1 \leq j \leq N_2} \max_{\eta_{j-1}^* < y < \eta_j^*} \left| \frac{1}{\Delta_{1,k}} \int_{x_{k-1}}^{x_k} g(\xi, y) d\xi - \right. \\
&\quad \left. - \sum_{j'=1}^{N_2} \chi_{(\frac{j'-1}{N_2}, \frac{j'}{N_2})}(y) \frac{1}{\Delta_{1,k}} \int_{x_{k-1}}^{x_k} g\left(\xi, \frac{j'-0,5}{N_2}\right) d\xi \right| = \\
&= \max_{j=1, N_2} \max_{y \in (\eta_{j-1}^*, \eta_j^*)} \left| \frac{1}{\Delta_{1,k}} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left[g(\xi, y) - \sum_{j'=1}^{N_2} \chi_{(\frac{j'-1}{N_2}, \frac{j'}{N_2})}(y) \times \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \times g\left(\xi, \frac{j'-0,5}{N_2}\right) \right] d\xi \right| \leq \\
&\leq \max_{1 \leq j \leq N_2} \max_{\eta_{j-1}^* < y < \eta_j^*} \frac{1}{\Delta_{1,k}} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left| g(\xi, y) - \sum_{j'=1}^{N_2} \chi_{(\frac{j'-1}{N_2}, \frac{j'}{N_2})}(y) \times \right. \\
&\quad \left. \times g\left(\xi, \frac{j'-0,5}{N_2}\right) \right| d\xi = \\
&= \max_{1 \leq j \leq N_2} \max_{\eta_{j-1}^* < y < \eta_j^*} \frac{1}{\Delta_{1,k}} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left| g(\xi, y) - g\left(\xi, \frac{j-0,5}{N_2}\right) \right| d\xi \leq \\
&\leq \frac{1}{\Delta_{1,k}} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \omega_y\left(g(\xi, *), \frac{1}{2N_2}\right) d\xi \leq \omega_y\left(g(\tilde{\xi}_k, *), \frac{1}{2N_2}\right), \\
&\omega_y\left(g(\tilde{\xi}_k, *), \frac{1}{2N_2}\right) = \max_{x_{k-1} < \xi < x_k} \omega_y\left(g(\xi, *), \frac{1}{2N_2}\right) \leq \\
&\leq \max_{0 < \xi < 1} \omega_y\left(g(\xi, *), \frac{1}{2N_2}\right).
\end{aligned}$$

Отже,

$$\|(L_{1,m}^{(2)} - LP_{1,m,N_2}^{(2)})g\|_{L_\infty(D)} \leq \max_{0 \leq \xi \leq 1} \omega_y\left(g(\xi, *), \frac{1}{2N_2}\right),$$

$$\omega_y(g(\xi, *), t) = \max_{0 \leq y, y+t \leq 1} |g(\xi, y+t) - g(\xi, y)|.$$

Аналогічно

$$\begin{aligned} & \max_{1 \leq l \leq n} \max_{1 \leq i \leq N_1} \max_{\xi_{i-1}^* < x < \xi_i^*} \left| a_{2,l} g(x) - \sum_{i'=1}^{N_1} \chi_{(i' - \frac{1}{N_1} < x < \frac{i'}{N_1})} (x) a_{2,l} g \left(\frac{i' - 0,5}{N_1} \right) \right| \leq \\ & \leq \max_{0 \leq y \leq 1} \leq \omega_x \left(g(*, y), \frac{1}{2N_1} \right), \\ & \| (L_{2,n}^{(2)} - L_{2,n,N_1}^{(2)}) g \|_{L_\infty(D)} \leq \max_{0 < x < 1} \omega_y \left(g(x, *), \frac{1}{2N_2} \right), \\ & \omega_x(g(*, \eta), v) := \max_{0 < x, x+v < 1} |g(x+v, \eta) - g(x, \eta)|. \end{aligned}$$

Таким чином, для похибки наближення операторів $N_{m,n}^{(2)}$ операторами $NP_{m,n,N_1,N_2}^{(2)}$ можна написати послідовність співвідношень

$$\begin{aligned} & \| g - NP_{m,n,N_1,N_2}^{(2)} g \|_{L_\infty(D)} = \\ & = \| g - (LP_{1,m,N_2}^{(2)} + LP_{2,n,N_1}^{(2)} - L_{1,m}^{(2)} L_{2,n}^{(2)}) g \|_{L_\infty(D)} = \\ & = \| [(I - L_{1,m}^{(2)}) + (L_{1,m}^{(2)} - LP_{1,m,N_2}^{(2)}) + (I - L_{2,n}^{(2)}) + (L_{2,n}^{(2)} - LP_{2,n,N_1}^{(2)}) - \\ & - (I - L_{1,m}^{(2)} L_{2,n}^{(2)})] g \|_{L_\infty(D)} = \| [(I - L_{1,m}^{(2)})(I - L_{2,n}^{(2)}) + (L_{1,m}^{(2)} - LP_{1,m,N_2}^{(2)}) + \\ & + (L_{2,n}^{(2)} - LP_{2,n,N_1}^{(2)})] g \|_{L_\infty(D)} \leq \| (I - L_{1,m}^{(2)})(I - L_{2,n}^{(2)}) g \|_{L_\infty(D)} + \\ & + \| (L_{1,m}^{(2)} - LP_{1,m,N_2}^{(2)}) g \|_{L_\infty(D)} + \| (L_{2,n}^{(2)} - LP_{2,n,N_1}^{(2)}) g \|_{L_\infty(D)} \leq \\ & \leq \omega^{(2)}(g, \Delta_1, \Delta_2) + \max_{0 \leq x \leq 1} \omega_y \left(g(x, *), \frac{1}{2N_2} \right) + \max_{0 \leq y \leq 1} \omega_x \left(g(*, y), \frac{1}{2N_1} \right). \end{aligned}$$

Тобто першу нерівність теореми 8.5.6 доведено.

Якщо $\omega_x(g; t) \leq M_1(y)t^{\alpha_1}$, $\omega_y(g; v) \leq M_2(x)v^{\alpha_2}$, $\omega^{(2)}(g; t, v) \leq M_{1,2}t^{\alpha_1}v^{\alpha_2}$, то отримаємо другу нерівність теореми 8.5.6:

$$\begin{aligned} & \| \text{enp}_{m,n,N_1,N_2}^{(2)} g \|_{L_\infty(D)} \leq M_{1,2} \Delta_1^{\alpha_1} \Delta_2^{\alpha_2} + \\ & + \max_{0 \leq x \leq 1} M_2(x) \left(\frac{1}{2N_2} \right)^{\alpha_2} + \max_{0 \leq y \leq 1} M_1(y) \left(\frac{1}{2N_1} \right)^{\alpha_1}. \end{aligned}$$

Припустимо, що $M_1^* = \max_{0 \leq y \leq 1} M_1(y)$, $M_2^* = \max_{0 \leq x \leq 1} M_2(x)$. Знайдемо числа N_1, N_2 з умов

$$M_2^*(2N_2)^{-\alpha_2} \leq M_{1,2}, \Delta_1^{\alpha_1} \Delta_2^{\alpha_2}, M_1^*(2N_1)^{-\alpha_1} \leq M_{1,2} \Delta_1^{\alpha_1} \Delta_2^{\alpha_2}.$$

Тоді

$$\|enp_{m,n,N_1,N_2}^{(2)}g\|_{L_\infty(D)} \leq K \Delta_1^{\alpha_1} \Delta_2^{\alpha_2}, \quad K = 3M_{1,2}.$$

Зокрема, якщо $m = n, \Delta_1 = \Delta_2 = \frac{1}{n}$, то

$$\|enp_{m,n,N_1,N_2}^{(2)}g\|_{L_\infty(D)} \leq Kn^{-\alpha_1-\alpha_2}.$$

Теорему 8.5.6 доведено.

8.5.3. Нелінійна апроксимація $g(x, y)$ кусково-сталими

У попередніх двох підрозділах показано, що лінійні оператори $\tilde{L}_{m,n}^{(1)} = L_{1,m}^{(1)}L_{2,n}^{(1)}$ та $\tilde{L}_{m,n}^{(2)} = L_{1,m}^{(2)}L_{2,n}^{(2)}$ потребують для своєї побудови значення наближуваної функції g у центрах прямокутників $I_{k,l}$ та середні значення функції g на прямокутниках $I_{k,l}$ відповідно і забезпечують таку точність наближення до $g(x, y) \in C(D)$:

$$\begin{aligned} \|g - \tilde{L}_{m,n}^{(1)}g\|_{L_\infty(D)} &\leq \max_{0 \leq y \leq 1} \omega_x(g(*, y), \Delta_1/2) + \\ &+ \max_{0 \leq x \leq 1} \omega_y(g(x, *), \Delta_2/2) + \omega^{(2)}(g, \Delta_1/2, \Delta_2/2) \end{aligned}$$

та

$$\begin{aligned} \|g - \tilde{L}_{m,n}^{(2)}g\|_{L_\infty(D)} &\leq \max_{0 \leq y \leq 1} \omega_x(g(*, y), \Delta_1) + \\ &+ \max_{0 \leq x \leq 1} \omega_y(g(x, *), \Delta_2) + \omega^{(2)}(g, \Delta_1, \Delta_2). \end{aligned}$$

Вони не дають найвищої точності при розбитті D на mn прямокутників, в яких $s_{m,n,0}g(x, y)$ є сталою. Найкраще наближення неперервних функцій кусково-сталими при фіксованому розбитті π області D на прямокутники $I_{k,l}$ дає нелінійний метод, що наближує функцію g на кожному з прямокутників розбиття $I_{k,l}$ її "медіаною", тобто оператор

$$N_{m,n}^{(3)}g(x, y) = g(\xi_k, \eta_l) := \left[\max_{(x,y) \in I_{k,l}} g(x, y) + \min_{(x,y) \in I_{k,l}} g(x, y) \right] / 2,$$

$$\forall (x, y) \in I_{k,l}, k = \overline{1, m}, l = \overline{1, n}.$$

Теорема 8.5.7. Якщо $g(x, y) \in C(D)$, то

$$\|g - N_{m,n}^{(3)}g\|_{L_\infty(D)} \leq 0,5 \max_{I_{k,l}} \text{Var}_{I_{k,l}}(g).$$

де

$$\text{Var}_{I_{k,l}}(g) = \max_{(x,y) \in I_{k,l}} g(x, y) - \min_{(x,y) \in I_{k,l}} g(x, y).$$

$$\begin{aligned}
& \text{Д о в е д е н н я.} \text{ Запишемо } \|g - N_{m,n}^{(3)}g\|_{L_\infty(D)} = \\
& = \max_{I_{k,l} \subset D} \max_{(x,y) \in I_{k,l}} \left| g(x,y) - \left[\max_{(x,y) \in I_{k,l}} g(x,y) + \min_{(x,y) \in I_{k,l}} g(x,y) \right] / 2 \right| \leq \\
& \leq \max_{I_{k,l} \subset D} \left[\max_{(x,y) \in I_{k,l}} g(x,y) - \min_{(x,y) \in I_{k,l}} g(x,y) \right] / 2 = 0,5 \max_{I_{k,l}} \text{Var}_{I_{k,l}}(g).
\end{aligned}$$

Теорему 8.5.7 доведено.

Хай $\pi_m : \omega_i \subset D, i = \overline{1, m}, \omega_i \cap \omega_p = \emptyset, (i \neq p)$ – деяке розбиття довільної області D на неперерізувані підобласті ω_i довільної форми. Введемо множину $S_{m,0}$ кусково-сталих функцій $s_m(x,y)$, сталих у кожній з підобластей ω_i :

$$s_m(x,y) = c_i, \quad (x,y) \in \omega_i, \quad c_i \in \mathbf{R}, \quad i = \overline{1, m}.$$

У випадку, коли точка $P(x,y)$ належить водночас межах r ($r \geq 2$) підобластей $\omega_{i_s}, s = \overline{1, r}$, тобто $P = \bigcap_{s=1}^r \partial\omega_{i_s}$, у цій точці вважатимемо, що

$$s_m(P) = \frac{1}{r} \sum_{s=1}^r c_{i_s}, \quad P = \bigcap_{s=1}^r \partial\omega_{i_s}.$$

Можна довести, що найкраще наближення неперервних функцій кусково-сталими можна отримати за умови, що геометричну форму підобластей ω_i можна змінювати, тобто коли ω_i не є, взагалі кажучи, прямокутниками. Цей метод наближення є нелінійним, бо вибір областей ω_k і точок $(x_k, y_k) \in \omega_k$ залежить від $g(x,y)$ і від D .

Ще раз звертаємо увагу на особливості нелінійної апроксимації.

По-перше, розбиття π^* має вузли (по обох змінних), залежні від наближуваної функції.

По-друге, ці вузли $(x_k, y_k) \in \omega_k$ отримуються з умови однаковості варіацій функції g на різних підобластях розбиття.

По-третє, підобласті $\omega_k \subset D$ не задаються наперед, а знаходяться теж з умови однаковості варіацій функції g на різних підобластях розбиття ω_k .

8.6. Класична та мішана апроксимації вейвлетами Хаара

У 1984 р. з'явився новий термін – вейвлет (англ. wavelet – "хвилька"). Нині теорія вейвлетів інтенсивно розвивається. Нижче дамо означення вейвлетів і розглянемо блендинг апроксимацію (мішану апроксимацію) функцій двох змінних вейвлетами Хаара.

Відомо, що кожену функцію $f(t) \in L_2[-\pi, \pi]$ можна розкласти у ряд Фур'є $f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}, i^2 = -1$. Тобто система функцій $\{e^{ikt}\}$

створює базис в $L_2[-\pi, \pi]$. Проте функцію $f(t) \in L_2(\mathbf{R})$, взагалі кажучи, не можна розкласти в ряд Фур'є, бо $e^{ikt} \notin L_2(\mathbf{R}) \forall k \in \mathbf{Z}$. Базис в $L_2(\mathbf{R})$ має складатися з функцій $\{f_k(t)\}$, що прямують до нуля, якщо $t \rightarrow \infty$: $\lim_{t \rightarrow \infty} f_k(t) = 0 \forall k$. Такий базис в $L_2(\mathbf{R})$ дають вейвлети – добре локалізовані хвилячки, що можуть бути побудовані за допомогою однієї функції-вейвлета $\psi(t)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0; \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = 0.$$

Вейвлет-базис $\{\psi_{jk}(t)\}$ може бути побудований у вигляді зсувів та стисків цього одного вейвлета

$$\psi_{jk}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k), \quad j, k \in \mathbf{Z}, \quad \|\psi\|_{L_2(\mathbf{R})} = 1.$$

Зауваження 1. У $L_2[-\pi, \pi]$ базис $\{e^{ikt}\}$ теж будується за допомогою однієї функції $\psi(t) = e^{it}$.

Вейвлети $\psi_{b,a}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$ використовуються також як ядро інтегрального вейвлет-перетворення $\forall f(t) \in L_2(\mathbf{R})$:

$$(W_\psi f)(a, b) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt = (f, \psi_{b,a}), \quad a, b \in \mathbf{R}, a \neq 0,$$

де риска над функцією означає операцію комплексного спряження. При побудові цього перетворення вважається, що функція $\psi \in L_2(\mathbf{R})$ є базовим вейвлетом, тобто задовольняє умову

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty, \quad \hat{\psi}(\omega) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Тоді обернене інтегральне перетворення має вигляд

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [W_\psi f](a, b) \psi_{b,a}(t) \frac{da}{a^2} db.$$

У випадку дискретного вейвлет-перетворення задача полягає в побудові базису "двійника" $\{\psi^{l,m}\}$ за властивостями $(\psi_{j,k}, \psi^{l,m}) = \delta_{j,l} \delta_{k,m}$, з допомогою якого будується розклад

$$f(t) = \sum_{j,k \in \mathbf{Z}} (f, \psi_{j,k}) \psi^{j,k}(t).$$

Якщо $\{\psi_{j,k}\}$ — ортонормований базис, то $\psi_{j,k}(t) = \psi^{j,k}(t)$ і написаний вище розклад є формулою дискретного оберненого вейвлет-перетворення.

Означення 8.6.1. Функції $\psi, \tilde{\psi}$ називають двоїстими, якщо системи $\psi_{j,k}, \tilde{\psi}_{l,m}$ є біортогональними:

$$(\psi_{j,k}, \tilde{\psi}_{l,m}) = \delta_{j,l} \delta_{k,m}, \quad j, k, l, m \in \mathbf{Z}, \tilde{\psi}_{l,m}(t) = 2^{l/2} \tilde{\psi}(2^l t - m).$$

Якщо $f \in L_2(\mathbf{R})$, то

$$f(t) = \sum_{j,k \in \mathbf{Z}} c_{j,k} \psi_{j,k}(t) = \sum_{j,k \in \mathbf{Z}} d_{j,k} \tilde{\psi}_{j,k}(t),$$

$$c_{j,k} = (f, \tilde{\psi}_{j,k}), \quad d_{j,k} = (f, \psi_{j,k}).$$

При цьому можна для обчислення значень $c_{j,k}, d_{j,k}$ використати також інтегральне вейвлет-перетворення, взявши $(a, b) = (k/2^j, l/2^j)$:

$$d_{j,k} = (f, \psi_{j,k}) = (W_\psi f)(k/2^j, l/2^j), \quad c_{j,k} = (f, \tilde{\psi}_{j,k}) = (W_{\tilde{\psi}} f)(k/2^j, l/2^j).$$

Одним із найпростіших прикладів ортогональних вейвлетів є система Хаара на прямій. Хай

$$\varphi^H(t) = \chi_{[0,1]}(t) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1], \\ 0, & x \notin [0, 1] \end{cases}$$

є масштабуючою функцією Хаара (загальноприйнята назва для неї — характеристична функція відрізка $[0, 1]$), $\varphi_{0,k}^H(t) = \varphi^H(t - k), k \in \mathbf{Z}$,

$$V_0 = \left\{ \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_{0k} \varphi_{0,k}^H(t) : \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_{0k}^2 < \infty \right\}.$$

Це простір масштабу 1. Визначимо також підпростори функцій масштабу 2^{-j} : $V_j = \left\{ \sum_{k \in \mathbf{Z}} \sum_{j \in \mathbf{Z}} c_{jk} \varphi_{j,k}^H(t) : \sum_{j,k} c_{jk}^2 < \infty; \varphi_{j,k}^H(t) = 2^{j/2} \varphi^H(2^j t - k) \right\}_{k \in \mathbf{Z}}$. Послідовність $\{\varphi_{j,k}^H(t)\}_{k \in \mathbf{Z}}$ є ортонормованим базисом у V_j і $\bigcap_{j \in \mathbf{Z}} V_j = \{0\}, \overline{\bigcup_{j \in \mathbf{Z}} V_j} = L_2(\mathbf{R})$. Тут \overline{X} є замиканням простору X по нормі $L_2(\mathbf{R})$.

Означення 8.6.2. Вейвлетом Хаара називають функцію

$$\psi^H(t) = \begin{cases} 1, & t \in (0, 1/2), \\ -1, & t \in (1/2, 1), \\ 0, & t \notin (0, 1). \end{cases}$$

Очевидно, що $\psi^H(t) = \varphi^H(2t) - \varphi^H(2t-1)$. Тобто, $\forall f \in L_2(\mathbf{R})$:

$$f(t) = \sum_{j \in \mathbf{Z}} \sum_{k \in \mathbf{Z}} d_{j,k} \psi_{j,k}(t) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_{0,k} \varphi_{0,k}^H(t) + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k \in \mathbf{Z}} d_{j,k} \psi_{j,k}(t).$$

Цей ряд можна використати і для $f \in L_2[0, 1]$:

$$f(t) = c_0 + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^j-1} d_{j,k} \psi_{j,k}^H(t),$$

$$c_0 = \int_0^1 f(u) du, \quad d_{j,k} = \int_0^1 f(u) \psi_{j,k}^H(u) du.$$

Зауваження 2. Сукупність вейвлетів, побудованих з використанням вейвлета Хаара, є ортогональною системою функцій.

Зауваження 3. Для ортогонального базису Хаара на відрізку $[0, 1]$ істотним є визначення базисних функцій на кінцях відрізка $[0, 1]$, а також у внутрішніх точках, де вейвлети мають розриви першого роду. Функції Хаара

$$\chi_0(t) = \varphi^H(t), \quad \chi_{j,k}(t) = \varphi_{j,k}^H(t), \quad j = \overline{0, N}, \quad k = \overline{0, 2^j - 1},$$

що створюють ортонормовану на $[0, 1]$ систему, визначаються так, як і ортонормована система на всій осі $t \in \mathbf{R}$:

$$\chi_0(t) = \chi_{[0,1]}(t), \quad \chi_{j,k}(t) = \begin{cases} \sqrt{2^j}, & t \in \left(\frac{k}{2^j}, \frac{k+0.5}{2^j}\right), \\ -\sqrt{2^j}, & t \in \left(\frac{k+0.5}{2^j}, \frac{k+1}{2^j}\right). \end{cases}$$

Крім того, у внутрішніх точках розриву функції Хаара дорівнюють півсумі своїх граничних значень зліва і справа, а в точках $t = 0$ та $t = 1$ – своїм граничним значенням із середини відрізка $[0, 1]$:

$$\chi_{0,0}(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0; 0, 5), \\ 0, & t = 0, 5, \\ -1, & t \in (0, 5; 1], \end{cases}$$

$$\chi_{j,0}(t) = \begin{cases} 0, & t \notin [0; 2^{-j}], \\ \sqrt{2^j}, & t \in [0; 2^{-j-1}) \\ 0, & t = 2^{-j-1}, \\ -\sqrt{2^j}, & t \in (2^{-j-1}; 2^{-j}), \\ -\sqrt{2^j}/2, & t = 2^{-j}, \quad j = \overline{1, N}, \end{cases}$$

$$\chi_{j,2^j-1}(t) = \begin{cases} 0, & t \notin [1 - 2^{-j}; 1], \\ \sqrt{2^j}/2, & t = (2^j - 1)/2^j, \\ \sqrt{2^j}, & t \in (1 - 2^{-j}; (2^j - 0, 5)/2^j), \\ 0, & t = (2^j - 0, 5)/2^j, \\ -\sqrt{2^j}, & t \in ((2^j - 0, 5)/2^j; 1], j = \overline{1, N}, \end{cases}$$

$$\chi_{j,k}(t) = \begin{cases} 0, & t \notin [k2^{-j}; (k+1)2^{-j}], \\ \sqrt{2^j}/2, & t = k/2^j, \\ \sqrt{2^j}, & t \in (k/2^j; (k+0, 5)/2^j), \\ 0, & t = (k+0, 5)/2^j, \\ -\sqrt{2^j}, & t \in ((k+0, 5)/2^j, (k+1)/2^j), \\ -\sqrt{2^j}/2, & t = k+1/2^j, j = \overline{1, N}, k = \overline{1, 2^j - 2}. \end{cases}$$

Відмітимо переваги цього ряду Хаара порівняно із класичним рядом Фур'є по тригонометричній системі функцій $e^{i2\pi kt}$, $k \in \mathbb{Z}$.

1. Ряд Хаара добре локалізований: якщо нас цікавить поведінка $f(t)$ на $[a, b] \subset [0, 1]$, то в ряді Хаара треба враховувати тільки ті індекси j, k , які задовольняють умову $[k2^{-j}, (k+1)2^{-j}] \cap [a, b] \neq \emptyset$, $\text{supp } \chi_{j,k} = [k2^{-j}, (k+1)2^{-j}]$.

2. Для похибки наближення $f \in C[0, 1]$ сумою Хаара маємо:

$$\|f(t) - S_N f(t)\|_\infty = O(2^{-N-1}),$$

$$S_N f(t) := c_0 + \sum_{j=0}^N \sum_{k=0}^{2^j-1} d_{j,k} \chi_{j,k}(t).$$

3. Ряд Фур'є по системі функцій Хаара від довільної неперервної функції збігається до неї рівномірно. Якщо $\omega(f; \delta) = \max_{t, t+\delta \in [0, 1]} |f(t+\delta) - f(t)|$ – модуль неперервності функції f , то

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} |f(t) - S_N f(t)| \leq 12\omega(f; 1/n), n = 1, 2, \dots,$$

де $n = 2^{N+1}$ – загальне число базисних функцій Хаара в сумі Фур'є – Хаара $S_N f$.

Локалізованість і масштабування характерні для всіх вейвлет-розкладів.

Другим важливим прикладом ортогональних вейвлетів є система Уїттакера–Шеннона–Котельникова, в якій

$$\varphi^S(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t}, \quad \hat{\varphi}^S(\omega) = \chi_{(-\pi, \pi)}(\omega).$$

При цьому вейвлет $\psi^S(t)$ Уїттакера–Шеннона–Котельникова має образ Фур'є

$$\hat{\psi}^S(\omega) = e^{-i\omega/2}(\hat{\varphi}^S(\omega/2) - \hat{\varphi}^S(\omega)),$$

тобто

$$\psi^S(t) = 2\varphi^S(2t - 1) - \varphi^S(t - 1/2).$$

Вейвлети ψ^H та ψ^S стоять на різних кінцях шкали вейвлетів, ψ^H добре локалізовані в часі (мають компактний носій), але погано локалізовані по частоті: $\hat{\psi}^H(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi^H(t)e^{i\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{1/2} e^{i\omega t} dt - \int_{1/2}^1 e^{i\omega t} dt \right] = \frac{i}{2\pi\omega} [(e^{i\omega/2} - 1) - (e^{i\omega} - e^{i\omega/2})] = O(\frac{1}{|\omega|})$, $|\omega| \rightarrow \infty$.

Існують також типи вейвлетів, що займають проміжне місце між ними.

Викладену вище (підрозд. 8.1, кроки 1, 2) схему побудови операторів блендинг-апроксимації на базі операторів одновимірної вейвлет-апроксимації можна поширити на випадок блендинг-вейвлет-апроксимації функцій двох і більше змінних. Нижче цю ідею деталізуємо для ортогональних вейвлетів Хаара на $[0, 1]^2$. Хай $f(x, y) \in L_1[0, 1]^2 \cap L_2[0, 1]^2$, $\varphi^H(t) = \chi_{[0,1]}(t)$ – масштабуюча функція Хаара,

$$c10(y) = \int_0^1 f(x, y) dx; c20(x) = \int_0^1 f(x, y) dy,$$

$\psi^H(t)$ - вейвлет Хаара,

$$\psi_{i,k}(t) := \psi^H(2^i t - k); 1 \leq k \leq 2^i - 2, i = 1, 2, \dots,$$

$$\psi_{i,0}(0) = \lim_{t \rightarrow 0+0} \psi_{i,0}(t), \quad \psi_{i,2^i-1}(1) = \lim_{t \rightarrow 1-0} \psi_{i,2^i-1}(t), i = 1, 2, \dots,$$

$$c1_{j,l} f(y) := \int_0^1 f(x, y) \psi_{j,l}(x) dx / \int_0^1 \psi_{j,l}^2(x) dx,$$

$$c2_{i,k} f(x) := \int_0^1 f(x, y) \psi_{i,k}(y) dy / \int_0^1 \psi_{i,k}^2(y) dy.$$

Уведемо до розгляду оператори

$$W1_N f(x, y) = c10 f(y) \chi_{[0,1]}(x) + \sum_{j=0}^N \sum_{l=0}^{2^j-1} c1_{j,l} f(y) \psi_{j,l}(x),$$

$$W2_N f(x, y) = c20f(x)\chi_{[0,1]}(y) + \sum_{i=0}^N \sum_{k=0}^{2^i-1} c2_{i,k} f(x)\psi_{i,k}(y),$$

$$W12_N f(x, y) := W1_N W2_N f(x, y).$$

Оператори $W12_N f \in$ класичними операторами двовимірної вейвлет-апроксимації, а

$$OW_N f(x, y) := (W1_N + W2_N - W12_N)f(x, y)$$

операторами блендинг-вейвлет-апроксимації Хаара, або (інакше) мішаної апроксимації вейвлетами від двох змінних. Ці оператори мають точність

$$\varepsilon = \max_{0 \leq x, y \leq 1} |f(x, y) - OW_N f(x, y)| = O(2^{-2(N+1)}),$$

у той час як оператори $W1_N f, W2_N f -$

$$\varepsilon_1 = \max_{0 \leq x, y \leq 1} |f(x, y) - W1_N f(x, y)| =$$

$$= \max_{0 \leq x, y \leq 1} |f(x, y) - W2_N f(x, y)| = O(2^{-N-1}).$$

Зауваження 5. Звертаємо увагу на те, що оператори $W12_N$ потребують сталих коефіцієнтів – подвійних інтегралів від добутку наближуваної функції на відповідні базисні вейвлети. Оператори OW_N потребують коефіцієнтів-функцій, що є інтегралами по одній змінній (x або y) від добутку наближуваної функції на відповідні базисні вейвлети, а також коефіцієнтів, що використовуються під час обчислення $W12_N$. Тому, замінюючи зазначені коефіцієнти $C10(y), C20(x), c1_{j,l} f(y), c2_{i,k} f(x)$, що є функціями однієї змінної (y або x), відповідними вейвлетами із кількістю доданків $N_1 = N_1(N)$ такою, щоб зберігалася точність $\varepsilon = \varepsilon_1^2$, отримаємо вейвлети, котрі зберігають точність мішаної вейвлет-апроксимації і потребують меншої кількості коефіцієнтів-чисел порівняно з вейвлетами $W12_{N_1}$.

8.7. Оператори двосторонньої апроксимації

Означення 8.7.1. *Апроксиманти $\check{\varphi}(x), \hat{\varphi}(x), x = (x_1, \dots, x_n)$ називають двосторонніми для функції $f(x), x \in D \subseteq \mathbf{R}^n$, якщо*

$$\delta_{\check{\varphi}} \delta_{\hat{\varphi}} \leq 0, x \in D, \quad (8.7.1)$$

$$\delta_{\check{\varphi}} := f(x) - \check{\varphi}(x), \quad \delta_{\hat{\varphi}}(x) := f(x) - \hat{\varphi}(x).$$

Найпростіші приклади двосторонніх апроксимантів отримують за допомогою інтерполяційних поліномів Лагранжа та Ерміта. Хай

$n = 2, D = [a, b] \times [c, d]; f(x, y) \in C^{(m+1, n+1)}(D), a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_{m+1} \leq b; c \leq y_0 < y_1 < \dots < y_{n+1} \leq d,$

$$\check{P}_{1,m} f(x, y) = \sum_{i=0}^m f(x_i, y) \prod_{\substack{\mu=0 \\ \mu \neq i}}^m \frac{x - x_\mu}{x_i - x_\mu},$$

$$\hat{P}_{1,m} f(x, y) = \sum_{i=1}^{m+1} f(x_i, y) \prod_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq i}}^{m+1} \frac{x - x_\mu}{x_i - x_\mu},$$

$$\check{\delta}_1 f(x, y) = f(x, y) - \check{P}_{1,m} f(x, y) = \frac{f^{(m+1,0)}(\xi_1, y)}{(m+1)!} \prod_{i=0}^m (x - x_i),$$

$\xi_1 \in (x_0, x_m) \in (a, b), y \in [c, d],$

$$\hat{\delta}_1 f(x, y) = f(x, y) - \hat{P}_{1,m} f(x, y) = \frac{f^{(m+1,0)}(\xi_2, y)}{(m+1)!} \prod_{i=1}^{m+1} (x - x_i),$$

$\xi_2 \in (x_1, x_{m+1}) \in (a, b), y \in [c, d].$

Теорема 8.7.1 . Якцо

$$\check{\delta}_1^{(m+1,0)} f(x, y) \hat{\delta}_1^{(m+1,0)} f(x, y) > 0 \quad (8.7.2)$$

$$\forall x \in [x_0, x_{m+1}], y \in [c, d],$$

то

$$\check{\delta}_1 f(x, y) \hat{\delta}_1 f(x, y) \leq 0 \forall (x, y) \in D = [x_0, x_{m+1}] \times [c, d].$$

Тобто пара функцій $\check{P}_{1,m} f(x, y), \hat{P}_{1,m} f(x, y)$ дає приклад двосторонніх наближень функції $f(x, y)$ в області $[x_0, x_{m+1}] \times [c, d].$

Аналогічно, якщо виконується умова

$$\check{\delta}_2^{(0, n+1)} f(x, y) \hat{\delta}_2^{(0, n+1)} f(x, y) > 0 \forall x \in [a, b], y \in [y_0, y_{n+1}], \quad (8.7.3)$$

то

$$\check{\delta}_2 f(x, y) \hat{\delta}_2 f(x, y) \leq 0 \forall (x, y) \in D = [a, b] \times [y_0, y_{n+1}],$$

$$\check{\delta}_2 f(x, y) = f(x, y) - \check{P}_{2,n} f(x, y), \quad \hat{\delta}_2 f(x, y) = f(x, y) - \hat{P}_{2,n} f(x, y),$$

$$\check{P}_{2,n} f(x, y) := \sum_{j=0}^n f(x, y_j) \prod_{\substack{\nu=0 \\ \nu \neq j}}^n \frac{y - y_\nu}{y_j - y_\nu},$$

$$\hat{P}_{2,n}f(x,y) = \sum_{j=1}^{n+1} f(x,y_j) \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq j}}^{n+1} \frac{y-y_\nu}{y_j-y_\nu}.$$

Пара функцій $\check{P}_{2,n}f(x,y)$, $\hat{P}_{2,n}f(x,y)$ дає двостороннє наближення до функції $f(x,y)$ в області $[a,b] \times [y_0,y_{n+1}]$.

Д о в е д е н н я. Згідно з умовами теореми

$$\begin{aligned} \check{\delta}f(x,y)\hat{\delta}f(x,y) &= \check{\delta}^{(m+1,0)}f(\xi_1,y)\hat{\delta}^{(m+1,0)}f(\xi_2,y) \times \\ &\times \frac{(x-x_0)(x-x_{m+1})}{((m+1)!)^2} \prod_{j=1}^m (x-x_j)^2, \end{aligned}$$

$\xi_1, \xi_2 \in [x_0, x_{m+1}]$. Оскільки $(x-x_0)(x-x_{m+1}) \leq 0$, $x \in (x_0, x_{m+1})$, то очевидно, що $\check{\delta}f(x,y)\hat{\delta}f(x,y) \leq 0$, якщо виконується умова теореми.

Аналогічно доводиться друга частина теореми 8.7.1.

Теорему 8.7.1 доведено.

Звертаємо увагу на те, що умови (8.7.2) та (8.7.3) не є жорсткими. Справді, якщо умова (8.7.2) не виконується для $f(x,y)$, то вона виконується для функції

$$f^*(x,y) = f(x,y) + \frac{M}{(m+1)!}(x-c)^{m+1} \forall c \in [a,b]$$

при відповідному значенні сталої M . Тобто пара функцій

$$\check{P}_{1,m}^*f(x,y) = \check{P}_{1,m}f^*(x,y), \quad \hat{P}_{1,m}^*f(x,y) = \hat{P}_{1,m}f^*(x,y)$$

дає двостороннє наближення до $f^*(x,y)$, і функції

$$\check{P}_{1,m}f(x,y) = \check{P}_{1,m}^*f(x,y) - \frac{M}{(m+1)!}(x-c)^{m+1},$$

$$\hat{P}_{1,m}f(x,y) = \hat{P}_{1,m}^*f(x,y) - \frac{M}{(m+1)!}(x-c)^{m+1}$$

є двосторонніми наближеннями для функції $f(x,y)$. Аналогічні висновки можна зробити і для випадку, коли наближення виконується за допомогою інтерполантів по змінній y .

Існують також інші шляхи задовільнення умов (8.7.2) та (8.7.3). Наприклад, замість поліномів можна використати іншу систему базисних функцій для наближення. Можна також зменшити довжину відрізків $[x_0, x_{m+1}]$, $[y_0, y_{n+1}]$ або змінити розміщення вузлів $x_i \in [a,b]$, $i = \overline{0, m+1}$, $y_j \in [c,d]$, $j = \overline{0, n+1}$.

Теорема 8.7.2. *Хай $f^{(m+1,n+1)}(x, y) > 0$, $(x, y) \in [a, b] \times [c, d]$. Тоді пари функцій*

$$Q_{m,n}^{vv} f(x, y) = \check{P}_{1,m} f(x, y) + \check{P}_{2,n} f(x, y) - \check{P}_{1,m} \check{P}_{2,n} f(x, y), \quad (8.7.4)$$

$$Q_{m,n}^v f(x, y) = \hat{P}_{1,m} f(x, y) + \check{P}_{2,n} f(x, y) - \hat{P}_{1,m} \check{P}_{2,n} f(x, y) \quad (8.7.5)$$

дають двостороннє наближення до функції $f(x, y)$ в області $D_1 = [x_0, x_{m+1}] \times [y_0, y_{n+1}]$, тобто мають властивість

$$\delta f \hat{\delta} f := (f(x, y) - \check{Q}_{m,n} f(x, y))(f(x, y) - \hat{Q}_{m,n} f(x, y)) \leq 0, \quad (x, y) \in D_1. \quad (8.7.6)$$

Д о в е д е н н я. Врахуємо наведене в розд. 3 зображення похибки інтерплінації на системі взаємно перпендикулярних прямих:

$$(I - \hat{Q}_{m,n})f(x, y) = \frac{f^{(m+1,n+1)}(\xi_1, \eta_1)}{(m+1)!(n+1)!} \prod_{i=0}^m (x - x_i) \prod_{j=0}^n (y - y_j),$$

$$(\xi_1, \eta_1) \in [x_0, x_m] \times [y_0, y_n],$$

$$(I - Q_{m,n}^v)f(x, y) = \frac{f^{(m+1,n+1)}(\xi_2, \eta_2)}{(m+1)!(n+1)!} \prod_{i=1}^{m+1} (x - x_i) \prod_{j=0}^m (y - y_j),$$

$(\xi_2, \eta_2) \in [x_0, x_{m+1}] \times [y_0, y_n]$. У результаті отримаємо

$$\begin{aligned} \delta f \hat{\delta} f &= \frac{f^{(m+1,n+1)}(\xi_1, \eta_1) f^{(m+1,n+1)}(\xi_2, \eta_2)}{((m+1)!(n+1)!)^2} \times \\ &\times (x - x_0)(x - x_{m+1}) \prod_{i=1}^m (x - x_i)^2 \prod_{j=0}^n (y - y_j)^2 \leq 0, \end{aligned}$$

$$x_0 \leq x \leq x_{m+1}, c \leq y \leq d.$$

Теорему 8.7.2 доведено.

Зауважимо, що твердження цієї теореми можна узагальнити, помінявши місцями змінні x та y .

8.8. Узагальнений метод найменших квадратів

8.8.1. Похибка наближення диференційовних функцій лінійними сплайнами в нормі $W_2^1[0, 1]$

Наближення інтерполяційними сплайнами першого порядку функцій різних класів вивчене з достатньою повнотою. Нижче дослідимо

апроксимацію сплайнами першого порядку методом найменших квадратів у інтегральній формі. Справедливе таке твердження.

Твердження 1. Норма оператора $S_m : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$, який ставить у відповідність кожній неперервній функції $f(t) \in C(I)$, $I = [0, 1]$ сплайн $S_m(x) = S_m(x, C) :=$

$$:= C_k \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} + C_{k+1} \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}, x_k \leq x \leq x_{k+1}, k = \overline{0, m-1}$$

з $m+1$ різними вузлами $x_k, k = \overline{0, m}$, задовольняє співвідношення

$$\|S_m f\|_\infty \leq 3 \|f\|_\infty,$$

якщо коефіцієнти сплайна знаходять методом найменших квадратів з умови

$$\int_0^1 (f(t) - S_m^*(t))^2 dt = \min_C \int_0^1 (f(t) - S_m(t, C))^2 dt.$$

Нижче встановимо точну оцінку похибки наближення функції сплайнами першого порядку на рівномірній сітці вузлів, якщо коефіцієнти $C_k, k = \overline{0, m}$ сплайна знаходять з умови

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (f(t) - S_m^*(t))^2 dt + \int_0^1 \left(\frac{df(t)}{dt} - \frac{dS_m^*(t)}{dt} \right)^2 dt = \\ & = \min_C \int_0^1 \left[(f(t) - S_m(t, C))^2 + \left(\frac{df(t)}{dt} - \frac{dS_m(t, C)}{dt} \right)^2 \right] dt \end{aligned}$$

Хай $f(x) \in W_2^1(I) \cap W_\infty^1(I)$, $W_\infty^1(I) := \{f(x) : \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty < \infty\}$, $h(t) = (|t-1| + 2|t| + |t+1|)/2$,

$$\|f\|_p = \|f\|_{L_p(I)} := \left(\int_0^1 |f(t)|^p dt \right)^{1/p}, 1 \leq p < \infty, \|f\|_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p.$$

Лема 8.8.1. Хай $x_i = i/m, i = \overline{0, m}$, стали $C_i, i = \overline{0, m}$ в операторі

$$S_m f(x) = \sum_{i=0}^m C_i h_i(x) = \varphi_m^T(x) C, C = [C_0, \dots, C_m]^T,$$

$$\varphi_m^T(x) = [h_0(x), \dots, h_m(x)], h_i(x) = h(mx - i), i = \overline{0, m}$$

знаходяться з умови

$$J_m(C) = \sum_{p=0}^1 \int_0^1 \left[\frac{d^p}{dx^p} (f(x) - \varphi_m^T(x) C) \right]^2 dx \rightarrow \min_C \quad (8.8.1)$$

Тоді

$$C = H_m^{-1} F, \quad (8.8.2)$$

де

$$H_m = \sum_{q=0}^1 \int_0^1 \varphi_m^{(q)}(x) \left(\varphi_m^{(q)}(x) \right)^T dx,$$

$$F = \sum_{q=0}^1 \int_0^1 \varphi_m^{(q)}(x) \frac{d^q}{dx^q} f(x) dx.$$

Доведення леми 8.8.1 отримується шляхом запису явного вигляду коефіцієнтів та правих частин системи лінійних алгебричних рівнянь

$$\frac{\partial J_m(f)}{\partial C_j} = 0, j = \overline{0, m} \quad (8.8.3)$$

відносно невідомих $C_i, i = \overline{0, m}$ та запису її розв'язку у матричній формі.

Теорема 8.8.1. Якщо $\psi(x) = \varphi_m^T(x) C$ — сплайн 1-го степеня з властивостями $\|f(\cdot) - \psi(\cdot)\|_{W_2^1(I)} = \inf_C \|f(\cdot) - \varphi_m^T(\cdot) C\|_{W_2^1(I)}$, то

$$\|\psi\|_\infty \leq [f] + \frac{1}{2m} \|f'\|_\infty, \quad [f] := \max_{0 \leq k \leq m} \left| f\left(\frac{k}{m}\right) \right| \quad (8.8.4)$$

Доведення. Безпосередніми обчисленнями для елементів матриці H_m отримаємо вирази, які дають змогу написати СЛАР відносно $C_i, i = \overline{0, m}$ у вигляді

$$\left(\frac{1}{3m} + m\right) C_0 + \left(\frac{1}{6m} - m\right) C_1 = \int_0^{1/m} (1 - mx) f(x) dx -$$

$$-m \left(f\left(\frac{1}{m}\right) - f(0) \right),$$

$$\left(\frac{1}{6m} - m\right) C_{i-1} + \left(\frac{2}{3m} + 2m\right) C_i + \left(\frac{1}{6m} - m\right) C_{i+1} =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{(i-1)/m}^{(i+1)/m} h_i(x) f(x) dx + \\
&+ m \left(2f\left(\frac{i}{m}\right) - f\left(\frac{i-1}{m}\right) - f\left(\frac{i+1}{m}\right) \right), i = \overline{1, m-1}; \quad (8.8.5) \\
&\left(\frac{1}{6m} - m\right) C_{m-1} + \left(\frac{1}{3m} + m\right) C_m = \int_{\frac{m-1}{m}}^1 h_m(x) f(x) dx + \\
&+ m \left(f(1) - f\left(\frac{m-1}{m}\right) \right).
\end{aligned}$$

У системі (8.8.5) зробимо заміну $C_k = f\left(\frac{k}{m}\right) + \varepsilon_k$, $k = \overline{0, m}$ і замінимо $f(x)$ на кожному з інтервалів $[i/m, (i+1)/m]$, $i = \overline{0, m-1}$ інтерполяційним поліномом Лагранжа із залишковим членом $R_{i, i+1}(x)$. В результаті дістанемо такі вирази для інтегральних членів отриманої СЛАР

$$\begin{aligned}
&\int_0^{1/m} (1 - mx) f(x) dx = \\
&\int_0^{1/m} (1 - mx) \left[(1 - mx) f(0) + mx f\left(\frac{1}{m}\right) + R_{0,1}(x) \right] dx = \quad (8.8.6) \\
&= \frac{1}{3m} f(0) + \frac{1}{6m} f\left(\frac{1}{m}\right) + \int_0^{1/m} (1 - mx) R_{0,1}(x) dx \\
&\int_{(i-1)/m}^{(i+1)/m} h_i(x) f(x) dx = \\
&= \int_{\frac{i-1}{m}}^{i/m} (mx - i + 1) \left[(i - mx) f\left(\frac{i-1}{m}\right) + (mx - i + 1) f\left(\frac{i}{m}\right) + R_{i-1, i}(x) \right] dx \\
&+ \int_{\frac{i+1}{m}}^{i/m} (i + 1 - mx) \left[(i + 1 - mx) f\left(\frac{i}{m}\right) + (mx - i) f\left(\frac{i+1}{m}\right) + R_{i, i+1}(x) \right] dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{6m} f\left(\frac{i-1}{m}\right) + \frac{2}{3m} f\left(\frac{i}{m}\right) + \frac{1}{6m} f\left(\frac{i}{m}\right) + \quad (8.8.7) \\
&+ \int_{(i-1)/m}^{i/m} (mx - i + 1) R_{i-1,i}(x) dx + \int_{i/m}^{(i+1)/m} (i + 1 - mx) R_{i,i+1}(x) dx, i = \overline{1, m-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int_{(m-1)/m}^1 h_m(x) f(x) dx = \int_{(m-1)/m}^1 (mx - m + 1) \times \\
&\times \left[(m - mx) f\left(\frac{m-1}{m}\right) + (mx - m + 1) f(1) + R_{m-1,m}(x) \right] dx = \\
&= \frac{1}{6m} f\left(\frac{m-1}{m}\right) + \frac{1}{3m} f(1) + \int_{(m-1)/m}^1 (mx - m + 1) R_{m-1,m}(x) dx \quad (8.8.8)
\end{aligned}$$

Підставивши формули (8.8.6)-(8.8.8) у рівняння (8.8.5), отримаємо таку СЛАР відносно величин $\varepsilon_k, k = \overline{0, m}$:

$$\left(\frac{1}{3m} + m\right) \varepsilon_0 + \left(\frac{1}{6m} - m\right) \varepsilon_1 = \int_0^{1/m} (1 - mx) R_{0,1}(x) dx; \quad (8.8.9)$$

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{6m} - m\right) \varepsilon_{i-1} + \left(\frac{2}{3m} + 2m\right) \varepsilon_i + \left(\frac{1}{6m} - m\right) \varepsilon_{i+1} = \\
&= \int_{(i-1)/m}^{i/m} (mx - i + 1) R_{i-1,i}(x) dx + \int_{i/m}^{(i+1)/m} (i + 1 - mx) R_{i,i+1}(x) dx, i = \overline{1, m-1}; \quad (8.8.10)
\end{aligned}$$

$$\left(\frac{1}{6m} - m\right) \varepsilon_{m-1} + \left(\frac{1}{3m} + m\right) \varepsilon_m = \int_{(m-1)/m}^1 (mx - m + 1) R_{m-1,m}(x) dx \quad (8.8.11)$$

Для аналізу правих частин системи (8.8.9)-(8.8.11) скористаємося наступним відомим твердженням теорії сплайнів.

Твердження. Якщо $f \in W_{\infty}^1[0, 1]$ і $x_k = k/m, k = \overline{0, m}, h = 1/m$, то

$$\|f(\cdot) - Sp(\cdot)\|_{\infty} = \frac{1}{2m} \|f'(\cdot)\|_{\infty} \quad (8.8.12)$$

Це дає змогу з рівностей (8.8.10)–(8.8.12) отримати такі нерівності (використаємо позначення $\|\varepsilon\| = \max_{0 \leq i \leq m} |\varepsilon_i|$):

$$\left(\frac{1}{3m} + m\right) \|\varepsilon\| \leq \left(m - \frac{1}{6m}\right) \|\varepsilon\| + \|f'\|_{\infty} \left(\frac{1}{2m}\right)^2 \Rightarrow \|\varepsilon\| \leq \frac{1}{2m} \|f'\|_{\infty},$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{3m} + 2m\right) \|\varepsilon\| &\leq 2 \left(m - \frac{1}{6m}\right) \|\varepsilon\| + \|f'\|_{\infty} \frac{1}{2m^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \|\varepsilon\| &\leq \frac{1}{2m} \|f'\|_{\infty}, i = \overline{1, m-1}; \end{aligned}$$

$$\left(\frac{1}{3m} + m\right) \|\psi\| \leq \left(m - \frac{1}{6m}\right) \|\psi\| + \|f'\|_{\infty} \left(\frac{1}{2m}\right)^2 \Rightarrow \|\psi\| \leq \frac{1}{2m} \|f'\|_{\infty}$$

Тут використано такі нерівності, отримані за допомогою (8.8.12):

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{1/m} (1 - mx) R_{0,1}(x) dx \right| &\leq \frac{1}{4m^2} \|f'\|_{\infty}, \\ \left| \int_{(i-1)/m}^{i/m} (mx - i + 1) R_{i-1,i}(x) + \int_{i/m}^{(i+1)/m} (i + 1 - mx) R_{i,i+1}(x) \right| &\leq \\ &\leq \left| \int_{(i-1)/m}^{i/m} (mx - i + 1) R_{i-1,i}(x) dx \right| + \\ &+ \left| \int_{i/m}^{(i+1)/m} (i + 1 - mx) R_{i,i+1}(x) dx \right| \leq \frac{\|f'\|_{\infty}}{2m^2}, \\ \left| \int_{(m-1)/m}^1 (mx - m + 1) R_{m-1,m}(x) dx \right| &\leq \frac{1}{4m^2} \|f'\|_{\infty}. \end{aligned}$$

З цих нерівностей випливає доведення теореми 8.8.1.

В наступній теоремі наводиться явний вигляд функції, яка у нерівності (8.8.3) забезпечує знак рівності.

Теорема 8.8.2. Для функції $S_0(x)$, яка є сплайном 1-го степеня з вузлами $\xi_k = \frac{k+0.5}{m}$, $k = \overline{0, m-1}$ і з властивостями $S_0\left(\frac{k}{m}\right) = 0$, $k = \overline{0, m}$; $|S'_0(x)| = 1$ у нерівності (8.8.3) теореми 1 виконується знак рівності.

Доведення теореми 8.8.2 проводиться безпосередньою перевіркою.

В и с н о в к и

1. Сплайн $S_m(x) = S_m(x, C)$, в якому вектор невідомих сталих C знаходиться з умови мінімуму функціонала $J_m(S_m)$, наближує кожную функцію $f(x) \in W_2^1(I) \cap W_\infty^1(I)$ так, що $\|S_m f\|_\infty \leq [f]_\infty + \frac{1}{2m} \|f'\|_\infty$, де $[f] := \max_{0 \leq k \leq m} \left| f\left(\frac{k}{m}\right) \right|$.

2. Знак "дорівнює" у написаній нерівності досягається на сплайн $S_0(x)$.

3. Наближення сплайном першого степеня в нормі $W_2^1(I)$ є асимптотично (при $m \rightarrow \infty$) оптимальним на класі функцій $f(x) \in W_2^1(I) \cap W_\infty^1(I)$.

8.8.2. Узагальнений метод найменших квадратів для наближення функцій двох змінних

Отримані оцінки можуть бути використані при наближенні у відповідній нормі функцій двох змінних.

Хай $E = [0, 1]$, $x = i/m$, $i = \overline{0, m}$, $y = j/n$, $j = \overline{0, n}$; $s_{m,i}(x)$, $s_{n,j}(y)$ – базисні сплайни 1-го порядку з властивостями $s_{m,i}(i'/m) = \delta_{i,i'}$, $i, i' = \overline{0, m}$; $s_{n,j}(j'/n) = \delta_{j,j'}$, $j, j' = \overline{0, n}$.

Теорема 8.8.3. Для $f(x, y) \in W_2^{1,1}(E^2)$ оператори

$$L_{m,n}f(x, y) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n c_{i,j} s_{m,i}(x) s_{n,j}(y),$$

коефіцієнти $c_{i,j}$, $i = \overline{0, m}$, $j = \overline{0, n}$ яких знаходяться з умови $J_{m,n}(f; \{c_{i,j}\}) =$

$$=: \int_0^1 \int_0^1 \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^1 \left(\frac{\partial^{p+q}}{\partial x^p \partial y^q} [f(x, y) - L_{m,n}f(x, y)] \right)^2 dx dy \rightarrow \min_{c_{i,j}}$$

можна зобразити у вигляді $L_{m,n}f(x, y) = A_{1,m}A_{2,n}f(x, y)$, де

$$A_{1,m}f(x, y) = \sum_{i=0}^m a_{1,i}(f; y) s_{m,i}(x), \quad A_{2,n}f(x, y) = \sum_{j=0}^n a_{2,j}(f; x) s_{n,j}(y).$$

Невідомі функції $a_{1,i}(f; y)$, $a_{2,j}(f; x)$ знаходяться з умов

$$\int_0^1 \sum_{p=0}^1 \left(\frac{\partial^p}{\partial x^p} [f(x, y) - A_{1,m} f(x, y)] \right)^2 dx \rightarrow \min_{a_{1,i}(y)},$$

$$\int_0^1 \sum_{q=0}^1 \left(\frac{\partial^q}{\partial y^q} [f(x, y) - A_{2,n} f(x, y)] \right)^2 dy \rightarrow \min_{a_{2,j}(x)}.$$

Отже, оператори $L_{m,n}f$ є добутком операторів, що діють на одну змінну (x або y) і для них виконуються твердження, наведені в підрозд. 8.1.

Це означає, що оператори $BL_{m,n}f = (A_{1,m} + A_{2,n} - A_{1,m}A_{2,n})f$ мають похибку $O(\epsilon^2)$, коли двовимірна апроксимація операторами $L_{m,n}f$ має похибку $O(\epsilon)$, $\epsilon \rightarrow 0$.

Сказане переноситься на випадок наближення сплайнами вищих порядків.

Запитання і вправи для самостійної роботи

1. Чим відрізняються формули апроксимації функцій двох змінних від формул інтерполяції?
2. Наведіть формули для класичних та мішаних сум Фурє та Фейєра від двох змінних.
3. Наведіть формули для класичних та мішаних поліномів Бернштейна від двох змінних.
4. Наведіть формули для класичних та мішаних сум Хаара від двох змінних.
5. Наведіть формули для наближення операторами двовимірної кусково-сталої апроксимації з використанням середніх.
6. Наведіть формули для наближення операторами двовимірної кусково-сталої інтерполяції.
7. Як визначаються оператори найкращої кусково-сталої апроксимації функцій двох змінних?
8. Як визначаються оператори двосторонньої апроксимації функцій двох змінних, побудовані на основі операторів інтерлінації функцій двох змінних?
9. Напишіть нерівність для оцінки похибки найкращого наближення функцій однієї змінної сплайном першого степеня в нормі $W_2^1[0, 1]$.

Глава 9. Оптимальні координатні функції в методі скінченних елементів

9.1. Задача Діріхле для рівняння Пуассона. Прямокутні елементи

Значне поширення методу скінченних елементів (МСЕ) викликало численні дослідження з побудови повних систем координатних функцій, які забезпечують: 1) потрібний клас диференційовності шуканого наближеного розв'язку в області інтегрування; 2) необхідний порядок збіжності наближеного розв'язку до точного. При цьому залежно від способів розбиття області інтегрування на елементи (прямокутні, трикутні тощо) при побудові повних систем отримали поширення кусково-ермітові інтерполянти, багатоточкові формули Тейлора, атомарні функції та ін.

Це означає, що для кожної задачі існує оптимальна (у деякому розумінні) система координатних функцій, яка відповідає вибраному способу розбиття області інтегрування на елементи та диференціальному операторові граничної задачі.

МСЕ з оптимальними координатними функціями та оптимальними вузловими точками називатимемо оптимальним методом скінченних елементів (ОМСЕ).

Викладемо ідею ОМСЕ на прикладі задачі

$$\Delta u(x, y) = -2, \quad (x, y) \in G, \quad (9.1.1)$$

$$u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \partial G, \quad (9.1.2)$$

де область G є об'єднанням прямокутників

$$R_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}], \quad G = \bigcup_{(i,j) \in \pi} R_{ij}$$

і через $\pi, \partial\pi$ позначено множини індексів:

$$\pi = \{(i, j) | (x_i, y_j) \in G\}, \quad \partial\pi = \{(i, j) | (x_i, y_j) \in \partial G\}.$$

Будемо шукати наближений розв'язок задачі (9.1.1)–(9.1.2) в кожному елементі $(x, y) \in R_{ij} \subset G$ у вигляді

$$\begin{aligned} u_\pi(x, y) = & u_{\pi, i, j} = C_{ij} h_{1, i, j} ((x - x_i) / \Delta_{1i}) h_{2, i, j} ((y - y_j) / \Delta_{2j}) + \\ & + C_{i+1, j} h_{1, i+1, j} (1 - (x - x_i) / \Delta_{1i}) h_{2, i+1, j} ((y - y_j) / \Delta_{2j}) + \\ & + C_{i, j+1} h_{1, i, j+1} ((x - x_i) / \Delta_{1i}) h_{2, i, j+1} (1 - (y - y_j) / \Delta_{2j}) + \\ & + C_{i+1, j+1} h_{1, i+1, j+1} (1 - (x - x_i) / \Delta_{1i}) h_{2, i+1, j+1} (1 - (y - y_j) / \Delta_{2j}), \end{aligned} \quad (9.1.3)$$

де C_{ij} (i, j) $\in \pi$ – невідомі сталі; $h_{1, i, j}(t), h_{2, i, j}(t)$ – невідомі функції з властивостями $h_{1, i, j}(0) = h_{2, i, j}(0) = 1, h_{1, i, j}(1) = h_{2, i, j}(0) = 0$.

Формула (9.1.3) має такі інтерполяційні властивості

$$u_\pi(x_p, y_q) = C_{p,q}, \quad (p, q) \in \pi.$$

Це означає, що поклавши у формулі (9.1.3) $C_{i,j} = 0 \forall (i, j) \in \partial\pi$ отримаємо, що функція $u_\pi(x, y)$ буде задовольняти граничну умову (9.1.2).

Крім того, відповідним вибором функцій $h1_{i,j}(\cdot), h2_{i,j}(\cdot)$, з неї можна отримати відомі схеми методу скінченних елементів. Зокрема, з формули (9.1.3) як частинний випадок (при $h(t) = 1 - t$) можна отримати кусково-білінійну інтерполяцію. В цьому разі отримуємо класичний МСЕ з кусково-білінійними функціями.

Підставивши написану вище формулу у функціонал

$$J_G(u) = \int_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - 4u \right] dx dy$$

що відповідає задачі (9.1.1)-(9.1.2), отримаємо

$$J_G(u_\pi) = \sum_{R_{ij} \subset G} J_{R_{ij}}(u_{\pi ij}).$$

Мінімізувавши $J_G(u_\pi)$ за сталими C_{ij} та функціями $h1_{i,j}, h2_{i,j}$, знайдемо, що ці невідомі сталі і невідомі функції $h1_{i,j}(\cdot), h2_{i,j}(\cdot)$ мають задовольняти систему Рітца

$$\partial J_G(u_\pi) / \partial C_{ij} = 0, \quad (i, j) \in \pi, \quad C_{ij} = 0 \forall (x_i, y_j) \in \partial G \quad (9.1.4)$$

та систему інтегродиференціальних рівнянь, яка отримується прирівнюванням до нуля першої варіації функціоналу $F(\{h1_{i,j}\}; \{h2_{i,j}\}) = J_G(u_\pi)$ за функціями $h1_{i,j}(\cdot), h2_{i,j}(\cdot)$

$$\delta_{h1_{i,j}} F(h1_{i,j}, h2_{i,j}) = 0 \quad \delta_{h2_{i,j}} F(h1_{i,j}, h2_{i,j}) = 0.$$

У частинному випадку, коли всі базисні функції дорівнюють одній функції $h1_{i,j}(\cdot) = h2_{i,j}(\cdot) = h(\cdot) \forall (i, j) \in \pi$, в результаті елементарних перетворень із використанням інтегрування частинами та основної теореми варіаційного числення, для знаходження однієї цієї функції отримуємо наступну симетрично-граничну задачу

$$\begin{aligned} R_1 h''(t) + R_2 h''(1-t) - R_3 h(t) - R_4 h(1-t) &= g, \quad 0 < t < 1, \\ h(0) &= 1, \quad h(1) = 0. \end{aligned} \quad (9.1.5)$$

Тут R_1, R_2, R_3, R_4 - функціонали, що залежать від $\int_0^1 [h^{(s)}(t)]^2 dt$, $\int_0^1 h^{(s)}(t) h^{(s)}(1-t) dt$, $s = 0, 1$ та невідомих C_{ij} і вузлів $(x_i, y_i), (i, j) \in \pi$

Розв'язок $h(t)$ цієї задачі має вигляд

$$h(t) = \frac{1 - 2\gamma}{2} \frac{ch\mu(x - 0, 5)}{ch0, 5\mu} - \frac{sh\lambda(x - 0, 5)}{2sh0, 5\lambda} + \gamma, \quad (9.1.6)$$

де числа λ, μ знаходяться із систем (при $\gamma = -g/(R_3 + R_4)$)

$$(R_1 + R_2)\mu^2 - (R_3 + R_4) = 0, (R_1 - R_2)\lambda^2 - (R_3 - R_4) = 0.$$

Таким чином, функція (9.1.6) дає точний розв'язок поставленої оптимізаційної задачі при фіксованому розбитті області G на прямокутні елементи і вибраній наперед формі наближеного розв'язку (9.1.3). Тобто формула (9.1.6) є еталоном при виборі базисних функцій для поставленої задачі (залежно від форми області інтегрування можуть змінюватися лише числа λ, μ, γ).

Якщо невідомими будемо вважати також координати вузлів x_i, y_i , то до рівнянь (9.1.4), (9.1.5) треба додати систему рівнянь

$$\frac{\partial J_G(u_\pi)}{\partial x_i} = 0; \quad \frac{\partial J_G(u_\pi)}{\partial y_i} = 0; \quad \forall (i, j) \in \pi. \quad (9.1.7)$$

Звичайно, вище викладено найпростішу схему отримання оптимальних координатних функцій в МСЕ, що відповідає випадку, коли з кожним вузлом пов'язується одна й та сама кількість невідомих координатних (базисних) функцій.

У загальному вигляді ОМСЕ при розв'язанні крайових задач з двома просторовими змінними полягає у виборі невідомих вузлових сталих C_{ij} , невідомих базисних функцій $h1_{i,j}(x), h2_{i,j}(y)$ однієї змінної (різних для різних вузлових точок розбиття) та невідомих координат вузлів (x_i, y_i) , що входять у структуру наближеного розв'язку, відповідного даному розбиттю області інтегрування на елементи.

Підкреслимо, що метод ОМСЕ легко узагальнюється на випадок областей складеної форми, що мають довільну криволінійну межу, складену з дуг відомих кривих. У цьому випадку потрібно використовувати також трикутні та чотирикутні елементи, криволінійні сторони яких є частинами границі області інтегрування. Побудова структури наближеного розв'язку може бути виконана з використанням формул інтерлінації, які точно задовольняють граничним умовам на границі областей складеної форми (див. п. 3.4.5).

Зауважимо, що всі три методи – ЛІДР, НІДР та ОМСЕ – дуже тісно пов'язані між собою, бо наближене розв'язання отримуваних під час застосування НІДР та ОМСЕ нелінійних інтегродиференціальних рівнянь можна виконувати методом послідовних наближень (метод фліп-флоп), який на кожному кроці зводить задачу до розв'язання систем лінійних диференціальних рівнянь.

Підкреслимо основні переваги оптимального методу скінченних елементів порівняно з класичним МСЕ:

- знання оптимальних базисних функцій має незаперечну теоретичну цінність;

- оптимальний вибір вузлів та базисних функцій дозволяє зменшити кількість елементів, на які розбивається область інтегрування, тобто зменшити порядок системи Рітца, а значить і числа обумовленості системи, яке при великих порядках систем МСЕ істотно впливає на результат.

9.2. Задача Діріхле для рівняння Пуассона. Трикутні елементи

Розглянемо задачу про побудову оптимальних координатних функцій в ОМСЕ при використанні трикутних елементів. Знову, як і в попередньому підрозділі, будемо розв'язувати задачу Діріхле для рівняння Пуассона

$$\Delta u(x) = f(x), x = (x_1, x_2) \in \Omega \subset \mathbf{R}^2, \quad (9.2.1)$$

$$u(x) = 0, x \in \partial\Omega, \quad (9.2.2)$$

де Ω - деякий багатокутник. Перш за все введемо до розгляду інтерполяційні формули, що включають в себе, як частинний випадок, кусково-лінійну інтерполяцію на триангульованих областях. Хай $A_k = (x_{1k}, x_{2k}), k = \overline{1, N}$ - вузли, за допомогою яких Ω розбивається на трикутники (вузли триангуляції); $T_j, j = (i_1, i_2, i_3)$ - трикутник з вершинами $A_{i_p}, p = 1, 2, 3$; припустимо, що

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} 1 & x_{1,i_1} & x_{2,i_1} \\ 1 & x_{1,i_2} & x_{2,i_2} \\ 1 & x_{1,i_3} & x_{2,i_3} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (9.2.3)$$

Ця умова означає, що всі три точки трикутника не лежать на одній прямій. Введемо позначення

$$w_j(x) = \frac{1}{\Delta_j} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ 1 & x_{1,j_2} & x_{2,j_2} \\ 1 & x_{1,j_3} & x_{2,j_3} \end{vmatrix}.$$

Очевидно, $w_j(A_{i_1}) = 1$ і $w_j(x) = 0$ - рівняння сторони трикутника T_j , що з'єднує вершини (A_{i_2}) та (A_{i_3}) . Хай $h_k(t) \in C^2[0, 1], k = \overline{1, N}$ - система функцій однієї змінної з властивостями

$$h_k(0) = 0, h_k(1) = 1, k = \overline{1, N}. \quad (9.2.4)$$

Для кожної функції $u(x) \in C(\Omega)$ введемо позначення

$$u(A_k) = u_k, k = \overline{1, N}, \quad (9.2.5)$$

$$u_{1,T_j}(x) = u_{i_1} h_{i_1}(w_{i_1 i_2 i_3}(x)) + u_{i_2} h_{i_2}(w_{i_2 i_3 i_1}(x)) + u_{i_3} h_{i_3}(w_{i_3 i_1 i_2}(x)). \quad (9.2.6)$$

Лема 9.2.1. *Функція*

$$u_{1,\Omega}(x) = u_{1,T_j}(x), x \in T_j, \forall j \in \{j = (i_1, i_2, i_3) : T_j \subset \Omega\} \quad (9.2.7)$$

задовольняє умови

$$u_{1,\Omega}(A_k) = u_k, k = \overline{1, N}, \quad (9.2.8)$$

$$u_{1,\Omega}(x) \in C(\overline{\Omega}). \quad (9.2.9)$$

Рекомендуємо читачеві свмостійно довести лему 9.2.1.

Зауваження 1. Якщо $h_k(t) \equiv t \forall k \in \{1, 2, \dots, N\}$, то функція $u_{1,\Omega}(x)$ є кусково-лінійною (лінійною над кожним трикутником $T_j \subset \Omega$) функцією двох змінних. Її графіком є багатогранна поверхня, кожна грань якої є трикутник з висотами u_p, u_q, u_r при деяких значеннях індексів $p, q, r \in \{1, 2, \dots, N\}$.

Підкреслимо: формула для $u_{1,\Omega}(x)$ написана у такому вигляді, що у ній вважаються довільними дійсними числами не тільки значення $u_k, k = \overline{1, N}$, а й значення координат точок $A_k, k = \overline{1, N}$ (за умов $\Delta_j \neq 0 \forall j \in \{j = (p, q, r) : T_j \subset \Omega\}$) та базисні функції $h_k(t), k = \overline{1, N}$. Позначимо через S_n множину таких функцій $u_{1,\Omega}(x)$.

Оптимальний метод скінченних елементів (ОМСЕ) при такій структурі наближеного розв'язку полягає у знаходженні невідомих сталих $u_k, k = \overline{1, N}$, функцій $h_k(t), k = \overline{1, N}$ та координат $(x_{1,k}, x_{2,k})$ вершин $A_k, k = \overline{1, N}$ з умови мінімуму функціоналу

$$J_{\Omega}(u_{1,\Omega}) \rightarrow \min_{u_k, h_k, x_{1,k}, x_{2,k}},$$

де

$$J_{\Omega}(u) = \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 2fu \right] dx dy.$$

Нижче викладемо один з найпростіших методів початкового розбиття області Ω на трикутники.

Розіб'ємо Ω на прямокутники $R_k = R_{k_1, k_2} = [x_{1, k_1}, x_{1, k_1+1}] \times [x_{2, k_2}, x_{2, k_2+1}]$ та трикутники $T_m, m = \overline{1, K}$ прямими $x_r = x_{r, k_r}, r = 1, 2$ (очевидно, при такому розбитті гіпотенузи всіх трикутників $T_m, m = \overline{1, K}$ лежатимуть на границі $\partial\Omega$ багатокутника Ω).

Хай $\Delta_{r, k_r} = x_{r, k_r+1} - x_{r, k_r}, r = 1, 2; k = (k_1, k_2); \pi = \{k = (k_1, k_2) : (x_{1, k_1}, x_{2, k_2}) \in \Omega\}$. $u_k = u_{k_1, k_2}; h_k = h_{k_1, k_2}, h_k(0) = 0, h_k(1) = 1, k \in \pi$. Розіб'ємо кожен прямокутник $R_k \subset \Omega$ на два трикутники однією з діагоналей $\frac{x_{1, k_1} - x_{1, k_1+1}}{\Delta_{1, k_1}} = \frac{x_{2, k_2} - x_{2, k_2+1}}{\Delta_{2, k_2}}$ або $\frac{x_{1, k_1} - x_{1, k_1+1}}{\Delta_{1, k_1}} = \frac{x_{2, k_2+1} - x_{2, k_2}}{\Delta_{2, k_2}}$.

Припустимо, що прямокутник $R_k \subset \Omega$ розбитий на два трикутники діагоналлю $\frac{x_1 - x_{1,k_1}}{\Delta_{1,k_1}} = \frac{x_2 - x_{2,k_2}}{\Delta_{2,k_2}}$. Тоді функція $u_{\pi,k}(x)$:

$$u_{\pi,k}(x) = u_{\pi,k,1}(x), x \in T_{k,1},$$

$$T_{k,1} = \{x_{1,k_1} \leq x_1 \leq x_{1,k_1+1}, x_{2,k_2} \leq x_2 \leq x_{2,k_2+1}, \\ \frac{x_1 - x_{1,k_1}}{\Delta_{1,k_1}} \geq \frac{x_2 - x_{2,k_2}}{\Delta_{2,k_2}}\}, \quad (9.2.10)$$

$$u_{\pi,k} = u_{\pi,k,2}(x), x \in T_{k,2},$$

$$T_{k,2} = \{x_{1,k_1} \leq x_1 \leq x_{1,k_1+1}; x_{2,k_2} \leq x_2 \leq x_{2,k_2+1}, \\ \frac{x_1 - x_{1,k_1}}{\Delta_{1,k_1}} \leq \frac{x_2 - x_{2,k_2}}{\Delta_{2,k_2}}\} \quad (9.2.11)$$

де

$$u_{\pi,k,1}(x) = u_{k_1+1,k_2} h_{k_1+1,k_2} \left(\frac{x_1 - x_{1,k_1}}{\Delta_{1,k_1}} - \frac{x_2 - x_{2,k_2}}{\Delta_{2,k_2}} \right) + \quad (9.2.12)$$

$$+ u_k h_k \left(\frac{x_{1,k_1+1} - x_1}{\Delta_{1,k_1}} \right) + u_{k_1+1,k_2+1} h_{k_1+1,k_2+1} \left(\frac{x_2 - x_{2,k_2}}{\Delta_{2,k_2}} \right)$$

$$u_{\pi,k,2}(x) = u_{k_1,k_2+1} h_{k_1,k_2+1} \left(\frac{x_2 - x_{2,k_2}}{\Delta_{2,k_2}} - \frac{x_1 - x_{1,k_1}}{\Delta_{1,k_1}} \right) + \quad (9.2.13)$$

$$+ u_k h_k \left(\frac{x_{2,k_2+1} - x_2}{\Delta_{2,k_2}} \right) + u_{k_1+1,k_2+1} h_{k_1+1,k_2+1} \left(\frac{x_1 - x_{1,k_1}}{\Delta_{1,k_1}} \right)$$

має властивості

$$u_{\pi,k}(x) \in C(R_k),$$

$$u_{\pi,k}(x_{1,p}, x_{2,q}) = u_{p,q}, p = k_1, k_1 + 1; q = k_2, k_2 + 1.$$

Аналогічно, якщо прямокутник R_k розбитий на два трикутника діагоналлю $\frac{x_1 - x_{1,k_1}}{\Delta_{1,k_1}} = \frac{x_{2,k_2+1} - x_2}{\Delta_{2,k_2}}$, то функція $u_{\pi,k}(x)$

$$u_{\pi,k}(x) = u_{\pi,k,3}(x), x \in T_{k,3},$$

$$T_{k,3} = \{x_{1,k_1} \leq x_1 \leq x_{1,k_1+1}, x_{2,k_2} \leq x_2 \leq x_{2,k_2+1}, \\ \frac{x_1 - x_{1,k_1}}{\Delta_{1,k_1}} + \frac{x_2 - x_{2,k_2}}{\Delta_{2,k_2}} \leq 1\}, \quad (9.2.14)$$

$$u_{\pi,k}(x) = u_{\pi,k,4}(x), x \in T_{k,4},$$

$$T_{k,4} = \{x_{1,k_1} \leq x_1 \leq x_{1,k_1+1}, x_{2,k_2} \leq x_2 \leq x_{2,k_2+1},$$

$$\frac{x_1 - x_{1,k_1}}{\Delta_{1,k_1}} + \frac{x_2 - x_{2,k_2}}{\Delta_{2,k_2}} \geq 1\}, \quad (9.2.15)$$

де

$$u_{\pi,k,3}(x) = u_{k_1+1,k_2} h_{k_1+1,k_2} \left(\frac{x_1 - x_{1,k_1}}{\Delta_{1,k_1}} \right) + \quad (9.2.16)$$

$$+ u_k h_k \left(1 - \frac{x_1 - x_{1,k_1}}{\Delta_{1,k_1}} - \frac{x_2 - x_{2,k_2}}{\Delta_{2,k_2}} \right) + u_{k_1,k_2+1} h_{k_1,k_2+1} \left(\frac{x_2 - x_{2,k_2}}{\Delta_{2,k_2}} \right)$$

$$u_{\pi,k,4}(x) = u_{k_1+1,k_2+1} h_{k_1+1,k_2+1} \left(\frac{x_1 - x_{1,k_1}}{\Delta_{1,k_1}} + \frac{x_2 - x_{2,k_2}}{\Delta_{2,k_2}} - 1 \right) + \quad (9.2.17)$$

$$+ u_{k_1+1,k_2} h_k \left(\frac{x_2, k_2+1 - x_2}{\Delta_{2,k_2}} \right) + u_{k_1+1,k_2+1} h_{k_1+1,k_2+1} \left(\frac{x_1 - x_{1,k_1}}{\Delta_{1,k_1}} \right)$$

теж задовольнятиме інтерполяційні умови у вершинах прямокутника та умову:

$$u_{\pi,k}(x) \in C(R_k)$$

Лема 9.2.2. *Функція $u_{\pi}(x)$, яка визначається в кожному з $R_k \subset \Omega$ рівняннями*

$$u_{\pi}(x) = u_{\pi,k}(x), \quad x \in R_k \subset \Omega \quad (9.2.18)$$

та в граничних трикутниках – по одній з формул (9.2.11), (9.2.12), (9.2.16), (9.2.17), зберігає неперервність у $\bar{\Omega}$: $u_{\pi}(x) \in C(\bar{\Omega})$ при довільних u_k та $h_k(t)$, $k \in \pi$ із вказаними властивостями. Крім того, будуть виконуватися рівності

$$u_{\pi}(x_{1,k_1}, x_{2,k_2}) = u_k, \quad k \in \pi \quad (9.2.19)$$

Таким чином, якщо покласти $u_k = 0, \forall (x_{1,k_1}, x_{2,k_2}) \in \partial\Omega$, то $u_{\pi}(x)$ також задовольнятиме граничні умови (9.2.2), що дає змогу використовувати її для наближеного розв'язку задачі (9.2.1), (9.2.2).

Хай S_{π} - множина усіх функцій виду $u_{\pi}(x)$. **Означення 1.** Будемо говорити, що при розв'язанні задачі (9.2.1)-(9.2.2) використано оптимальний метод скінченних елементів із структурою наближеного розв'язку (9.2.18), якщо невідомі сталі $u_k, k \in \pi$, координати вузлів x_{1k}, x_{2k} та функції $h_k(t), k \in \pi$, які входять у структуру наближеного розв'язку $u_{\pi}(x)$, шукаються з умови

$$\min_{U_k, k \in \pi} \inf_{h_k, k \in \pi} \min_{(x_{1k}, x_{2k}) \in \Omega} J_{\Omega}(U_{\pi}) = \inf_{V \in S_{\pi}} J_{\Omega}(V), \quad V \in S_{\pi}. \quad (9.2.20)$$

Для розв'язання мінімізаційної задачі (9.2.20) можна користуватися яким-небудь із наближених методів (наприклад, методом найшвидшого спуску), задавшись, попередньо, якими-небудь формулами з невідомими параметрами для шуканих функцій $h_k(t), k \in \pi$. Проте, як

у випадку з прямокутними елементами, великий теоретичний і практичний інтерес ставить отримання точних умов, котрим повинні задовільняти шукані сталі u_k , функції $h_k(t)$, $k \in \pi$, які є розв'язком мінімізаційної задачі (9.2.20), та явні аналітичні вирази для знайдених оптимальних функцій $h_k(t)$, $k \in \pi$. Перш ніж навести відповідний результат (теорема 9.2.1), ми доведемо наступну лему.

Лема 9.2.3. *Нехай T_k - трикутник, обмежений прямими $x_1 = x_{1,k_1}$; $x_2 = x_{2,k_2}$; $\sum_{r=1}^2 \frac{x_r - x_{r,k_r}}{\delta_{r,k_r}} = 1$; $\delta_{r,k_r} = \pm \Delta_{r,k_r}$. Тоді має місце рівність*

$$\begin{aligned}
 J_{T_k}(u_{\pi,k}) &= 2S_{T_k} \int_0^1 \{u_k^2(\Delta_{1,k_1}^{-2} + \Delta_{2,k_2}^{-2})(1-t)h_k'^2(t) + \\
 &+ u_{k_1+1,k_1}^2 \Delta_{1,k_1}^{-2} (1-t)h_{k_1+1,k_1}'^2(t) + u_{k_1,k_2+1}^2 \Delta_{2,k_2}^{-2} (1-t)h_{k_1,k_2+1}'^2(t) - \\
 &\quad - \frac{2u_k u_{k_1+1,k_1}}{\Delta_{1,k_1}^2} h_k(1-t)h_{k_1+1,k_2}'(t) - \\
 &\quad - 2u_k u_{k_1,k_2+1} \Delta_{2,k_2}^{-2} h_k(1-t)h_{k_1,k_2+1}'(t) - \\
 &\quad - 2u_k h_k(t) \int_{-(1-t)}^{1-t} \varrho_k(\xi_1(t,v), \xi_2(t,v)) dv - \\
 &\quad - 2u_{k_1+1,k} h_{k_1+1,k_2}(t) \int_0^{1-t} \varrho_k(t, \xi_2) d\xi_2 - \\
 &\quad - 2u_{k_1,k_2+1} h_{k_1,k+1}(t) \int_0^{1-t} \varrho_k(\xi_1, t) d\xi_1 \} dt; \quad (9.2.21)
 \end{aligned}$$

$$\xi_1(u, v) = \frac{1-u+v}{2}; \quad \xi_2(u, v) = \frac{1-u-v}{2}; \quad 2S_{T_k} = \Delta_{1,k_1} \Delta_{2,k_2}$$

Доведення. Зробимо заміну змінних

$$\frac{x_r - x_{r,k_r}}{\Delta_{r,k_r}} = \xi_r \Rightarrow x_r = x_r(\xi_r) = x_{r,k_r} + \Delta_{r,k_r} \xi_r, \quad \xi_r \in [0, 1], \quad r = 1, 2;$$

Тоді, враховуючи (9.2.12) можна записати:

$$J_{T_k}(u_{\pi,k,1}(x)) = \int_{x_{1,k_1}}^{x_{1,k_1+1}} \Delta_{2,k_2} \left(1 - \frac{x_1 - x_{1,k_1}}{\Delta_{1,k_1}}\right) \left\{ \left[-u_k h_k' \left(1 - \sum_{r=1}^2 \frac{x_r - x_{r,k_r}}{\Delta_{r,k_r}}\right) \right] + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + u_{k_1+1, k_2} \times h'_{k_1+1, k_2} \left(\frac{x_1 - x_{1, k_1}}{\Delta_{1, k_1}} \right) \Big]^2 \Delta_{1, k_1}^{-2} + \\
& - \left[u_k h'_k \left(1 - \sum_{r=1}^2 \frac{x_2 - x_{r, k_r}}{\Delta_{r, k_r}} \right) + u_{k_1, k_2+1} h'_{k_1, k_2+1} \left(\frac{x_2 - x_{2, k_2}}{\Delta_{2, k_2}} \right) \right]^2 \Delta_{2, k_2}^{-2} - \\
& - 2\varrho(x) \left[u_k h_k \left(1 - \sum_{r=1}^2 \frac{x_r - x_{r, k_r}}{\Delta_{r, k_r}} \right) + u_{k_1+1, k_2} h_{k_1+1, k_2} \left(\frac{x_1 - x_{1, k_1}}{\Delta_{1, k_1}} \right) + \right. \\
& \quad \left. + u_{k_1, k_2+1} h_{k_1, k_2+1} \left(\frac{x_2 - x_{2, k_2}}{\Delta_{2, k_2}} \right) \right] \Big\} dx = \\
& = \int_0^1 \int_0^{1-\xi_1} \{ [-u_k h'_k (1 - \xi_1 - \xi_2) + u_{k_1+1, k_2} h'_{k_1+1, k_2} (\xi_1)]^2 \Delta_{1, k_1}^{-2} + \\
& \quad + [-u_k h'_k (1 - \xi_1 - \xi_2) + u_{k_1, k_2+1} h'_{k_1, k_2+1} (\xi_2)]^2 \times \\
& \quad \times \Delta_{2, k_2}^{-2} - 2\varrho_k(\xi_1, \xi_2) [u_k h_k (1 - \xi_1 - \xi_2) + u_{k_1+1, k_2} h_{k_1+1, k_2} (\xi_1) + \\
& \quad + u_{k_1, k_2+1} h_{k_1, k_2+1} (\xi_2)] \} d\xi_1 d\xi_2 \Delta_{1, k_1} \Delta_{2, k_2} = \\
& = S_{T_k} \cdot 2 \int_0^1 \int_0^{1-\xi_1} \{ u_k^2 (\Delta_{1, k_1}^{-2} + \Delta_{2, k_2}^{-2}) h_k'^2 (1 - \xi_1 - \xi_2) + \\
& \quad + u_{k_1+1, k_2}^2 \Delta_{1, k_1}^{-2} h_{k_1+1, k_2}'^2 (\xi_1) + u_{k_1, k_2+1}^2 \Delta_{2, k_2}^{-2} h_{k_1, k_2+1}'^2 (\xi_2) - \\
& \quad - 2u_k h'_k (1 - \xi_1 - \xi_2) [h'_{k_1+1, k_2} (\xi_1) \Delta_{1, k_1}^{-2} + h'_{k_1, k_2+1} (\xi_2) \Delta_{2, k_2}^{-2}] - \\
& \quad - 2\varrho_k(\xi_1, \xi_2) [u_k \times h_k (1 - \xi_1 - \xi_2) + u_{k_1+1, k_2} h_{k_1+1, k_2} (\xi_1) + \\
& \quad + u_{k_1, k_2+1} h_{k_1, k_2+1} (\xi_2)] \} d\xi_1 d\xi_2; \\
& \quad \varrho_k(\xi) = \varrho(x_1(\xi_1), x_2(\xi_2)).
\end{aligned}$$

Останній вираз містить суму декількох інтегралів, котрі з допомогою відповідної заміни під знаком подвійного інтегралу приводяться до інтегралів, підінтегральні функції яких залежать тільки від $h_k(t)$, $h'_k(t)$, $h_k(1-t)$, $h'_k(1-t)$ та невідомих u_k (прямими рисочками нижче виділено заміну змінних, яку використовуємо):

$$\int_0^1 \int_0^{1-\xi_1} h_k'^2 (1 - \xi_1 - \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 = |1 - \xi_1 - \xi_2 = u; \xi_1 - \xi_2 = v| =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \left(\int_{-(1-u)}^{1-u} h_k'^2(u) dv \right) \frac{du}{2} = \int_0^1 (1-u) h_k'^2(u) du; \\
\int_0^1 \int_0^{1-\xi_1} h_{k_1+1, k_2}'^2(\xi_1) d\xi_1 d\xi_2 &= \int_0^1 h_{k_1+1, k_2}'^2(\xi_1) \left(\int_0^{1-\xi_1} d\xi_2 \right) d\xi_1 = \\
&= \int_0^1 (1-\xi_1) h_{k_1+1, k_2}'^2(\xi_1) d\xi_1; \\
\int_0^1 \int_0^{1-\xi_1} h_{k_1, k_2+1}'^2(\xi_2) d\xi_1 d\xi_2 &= \int_0^1 h_{k_1, k_2+1}'^2(\xi_2) \left(\int_0^{1-\xi_2} d\xi_1 \right) d\xi_2 = \\
&= \int_0^1 (1-\xi_2) h_{k_1, k_2+1}'^2(\xi_2) d\xi_2; \\
\int_0^1 \int_0^{1-\xi_1} h_k'(1-\xi_1-\xi_2) h_{k_1+1, k_2}'(\xi_1) d\xi_1 d\xi_2 &= \\
&= \int_0^1 h_{k_1+1, k_2}'(\xi_1) \left(\int_0^{1-\xi_1} h_k'(1-\xi_1-\xi_2) d\xi_2 \right) d\xi_1 = \\
&= \int_0^1 h_{k_1+1, k_2}'(\xi_1) [-h_k(1-\xi_1-\xi_2)]_0^{1-\xi_1} d\xi_1 = \\
&= \int_0^1 h_{k_1+1, k_2}'(\xi_1) h_k(1-\xi_1) d\xi_1; \\
\int_0^1 \int_0^{1-\xi_1} h_k'(1-\xi_1-\xi_2) h_{k_1, k_2+1}'(\xi_2) d\xi_1 d\xi_2 &= \\
&= \int_0^1 h_{k_1, k_2+1}'(\xi_2) \left(\int_0^{1-\xi_2} h_k'(1-\xi_1-\xi_2) d\xi_1 \right) d\xi_2 =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 h'_{k_1, k_2+1}(\xi_2) [-h_k(1 - \xi_1 - \xi_2)|_0^{1-\xi_2}] d\xi_2 = \\
&= \int_0^1 h'_{k_1, k_2+1}(\xi_2) h_k(1 - \xi_2) d\xi_2; \\
\int_0^1 \int_0^{1-\xi_1} \varrho_k(\xi_1, \xi_2) h_k(1 - \xi_1 - \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 &= |1 - \xi_1 - \xi_2 = u; \xi_1 - \xi_2 = v| = \\
&= \int_0^1 h(u) du \int_{-(1-u)}^{1-u} \varrho_k(\xi_1(u, v), \xi_2(u, v)) dv; \\
\int_0^1 \int_0^{1-\xi_1} \varrho_k(\xi_1, \xi_2) h_{k_1+1, k_2}(\xi_1) d\xi_1 d\xi_2 &= \\
&= \int_0^1 h_{k_1+1, k_2}(\xi_1) \left(\int_0^{1-\xi_1} \varrho_k(\xi_1, \xi_2) d\xi_2 \right) d\xi_1; \\
\int_0^1 \int_0^{1-\xi_2} \varrho_k(\xi_1, \xi_2) h_{k_1, k_2+1}(\xi_2) d\xi_1 d\xi_2 &= \\
&= \int_0^1 h_{k_1, k_2+1}(\xi_2) \left(\int_0^{1-\xi_2} \varrho_k(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 \right) d\xi_2.
\end{aligned}$$

Підставляючи отримані вирази у (9.2.17), отримаємо доведення леми 9.2.3.

Для подальшого використання формулу (9.2.21) зручно записати в такій формі:

$$\begin{aligned}
J_{T_i}(u_{\pi, k}(x)) &= 2S_{T_k} \int_0^1 \{[\alpha_{1, T_i} h'_{i_1}{}^2(t) + \alpha_{2, T_i} h'_{i_2}{}^2(t) + \alpha_{3, T_i} h'_{i_3}{}^2(t)](1-t) - \\
&- 2[\alpha_{4, T_i} h'_{i_2}(t) + \alpha_{5, T_i} h'_{i_3}(t)] h_{i_1}(1-t) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2[u_{i_1} h_{i_1}(t) \int_{-(1-t)}^{1-t} \varrho_k(\xi_1(t, v), \xi_2(t, v)) dv + \\
& + u_{i_2} h_{i_2}(t) \int_0^{1-t} \varrho_k(t, \xi_2) d\xi_2 + u_{i_3} h_{i_3}(t) \int_0^{1-t} \varrho_k(\xi_1, t) d\xi_1] dt, \quad (9.2.22)
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
h_k(t) &= h_{i_1}(t), & h_{k_1+1, k_2}(t) &= h_{i_2}(t), & h_{k_1, k_2+1}(t) &= h_{i_3}(t), \\
i &= (i_1, i_2, i_3), & u_i &= u_k, & u_{i_2} &= u_{k_1+1, k_2}, & u_{i_3} &= u_{k_1, k_2+1}, \\
\alpha_{1, T_i} &= u_{i_1}^2 (\Delta_{1, k_1}^{-2} + \Delta_{2, k_2}^{-2}), & \alpha_{2, T_i} &= u_{i_2}^{-2} \Delta_{1, k_1}^{-2}, & \alpha_{3, T_i} &= \frac{u_{i_3}^2}{\Delta_{2, k_2}^2}, \\
\alpha_{4, T_i} &= \frac{u_{i_1} u_{i_2}}{\Delta_{1, k_1}^2}, & \alpha_{5, T_i} &= \frac{u_{i_1} u_{i_3}}{\Delta_{2, k_2}^2}.
\end{aligned}$$

Зауваження. Формула (9.2.22) справедлива також і для будь-якого іншого трикутника T_i , вершина прямого кута якого знаходиться у точці (x_{1, k_1}, x_{2, k_2}) . Справді, якщо будь-який трикутник T_i із вершиною прямого кута в точці (x_{1, k_1}, x_{2, k_2}) обмежений прямими $x_1 = x_{1, k_1}$; $x_2 = x_{2, k_2}$; $(x_1 - x_{1, k_1})/\delta_{1, k_1} + (x_2 - x_{1, k_2})/\delta_{2, k_2} = 1$ (при $\delta_{r, k_r} = \pm \Delta_{r, k_r}$, $r = 1, 2$), то для будь-якого із чотирьох таких трикутників можна записати єдину інтерполяційну формулу вигляду

$$\begin{aligned}
u_{T_i}(x) &= u_{i_1} h_{i_1} \left(1 - \sum_{r=1}^2 \frac{x_r - x_{r, k_r}}{\delta_{r, k_r}} \right) + u_{i_2} h_{i_2} \left(\frac{x_1 - x_{1, k_1}}{\delta_{1, k_1}} \right) + \\
& + u_{i_3} h_{i_3} \left(\frac{x_2 - x_{2, k_2}}{\delta_{2, k_2}} \right), \quad x \in T_j \quad (9.2.23)
\end{aligned}$$

Цєю формулою можна користуватись нарівні з формулами (9.2.12), (9.2.13), (9.2.16), (9.2.17) і яка робить очевидним сказане на початку зауваження.

Позначимо через $\overset{\circ}{S}_\pi = \{v \in S_\pi : u_k = 0 \forall k : A_k \in \partial\Omega\}$ простір функцій $u_\pi(x)$, які задовольняють умови (9.2.7) - (9.2.9) і граничні умови (9.2.2).

Теорема 9.2.1. *Сталі $u_k, k \in \pi$ та функції $h_k(t), k \in \pi$, які є розв'язком сформульованої нижче задачі (9.2.24)*

$$\min_{u_k} \inf_{h_k} J_\Omega(u_\pi) = \inf_{v \in \overset{\circ}{S}_\pi} J_\Omega(v) \quad (9.2.24)$$

при фіксованому виборі координат вузлів A_k , задовольняють систему рівнянь Рітца

$$\partial J_{\Omega}(u_{\pi})/\partial u_k = 0, \quad k \in \pi \quad (9.2.25)$$

та систему диференціальних рівнянь вигляду

$$\sum_{T_i \subset G_k} 2S_{T_i} \alpha_{1, T_i} \frac{d}{dt} \left[(1-t) \frac{dh_{i_1}(t)}{dt} \right] - \alpha_{4, T_i} h'_{i_2}(1-t) - \\ - \alpha_{5, T_i} h'_{i_3}(1-t) + \gamma_i(t) \} = 0, \quad (9.2.26)$$

де

$$\gamma_i(t) = u_{i_1} \int_{-(1-t)}^{1-t} \varrho_k(\xi_1(t, v), \xi_2(t, v)) dv + u_{i_2} \int_0^{1-t} \varrho_k(t, \xi_2) d\xi_2 + \\ + u_{i_3} \int_0^{1-t} \varrho_k(\xi_1, t) d\xi_1; \quad h'_p(1-t) := h'_p(z)|_{z=1-t};$$

$$i_1, i_2, i_3 \in \{1, 2, \dots, N\}; \quad u_{i_1} = u_k; \quad h_{i_1} = h_{k \dots};$$

G_k – зірка елементів із загальною вершиною (x_{1, k_1}, x_{2, k_2}) ; N – загальна кількість вузлів A_r у Ω , які перенумеровані яким-небудь способом.

Д о в е д е н н я. Застосувавши лему 9.1.2 до функціонала

$$J_{\Omega}(u_{\pi}) = \sum_{T_k \subset \Omega} J_{T_k}(u_{\pi, k}), \quad i = (i_1, i_2, i_3), \quad (9.2.27)$$

$$A_{i_1} = (x_{1, k_1}, x_{2, k_2})$$

і врахувавши твердження леми 9.2.2 можна провести доведення безпосередньою перевіркою.

В и с н о в о к. Якщо вважати, що $h_k(t) = h(t), \forall k \in \pi$, то для знаходження однієї функції $h(t)$ треба розв'язати, сумісно із системою Рітца (9.2.25), таке звичайне диференціальне рівняння:

$$\alpha_1 \frac{d}{dt} \left[(1-t) \frac{dh(t)}{dt} \right] - \alpha_2 \frac{dh(1-t)}{d(1-t)} = -\gamma(t), \quad t \in (0, 1), \quad (9.2.28)$$

$$\alpha_p = \sum_{T_i \subset \Omega} 2S_{T_i} \alpha_{p, T_i}, \quad 2S_{T_i} = \Delta_{1, k_1} \Delta_{2, k_2}, \quad p = 1, 2,$$

$$\alpha_{1,T_i} = \frac{u_{i_1}^2 + u_{i_2}^2}{\Delta_{1,k_1}^2} + \frac{u_{i_1}^2 + u_{i_3}^2}{\Delta_{2,k_2}^2}, \quad \alpha_{2,T_i} = u_{i_1}(u_{i_2} + u_{i_3}),$$

$$\begin{aligned} \gamma(t) = \sum_{T_i \subset \Omega} \left[u_{i_1} \int_{t-1}^{1-t} \varrho_k(\xi_1(t,v), \xi_2(t,v)) dv + \right. \\ \left. + u_{i_2} \int_0^{1-t} \varrho_k(t, \xi_2) d\xi_2 + u_{i_3} \int_0^{1-t} \varrho_k(\xi_1, t) d\xi_1 \right]. \end{aligned}$$

Нагадаємо, що рівняння (9.2.28) треба розв'язувати при наступних граничних умовах

$$h(0) = 0, \quad h(1) = 1. \quad (9.2.29)$$

Рекомендуємо читачеві довести, що рівняння (9.2.8) для випадку, коли права частина рівняння (9.2.1) є сталою, має розв'язок $h(t) = at + bt^2$, $a + b = 1$.

Зазначимо, що цей випадок – коли зі всіма N вузлами зв'язується одна й та сама функція – найчастіше використовують на практиці. Точнішим є загальний випадок, коли у кожному вузлі розбиття застосовують не тільки свою сталу u_i , й свою невідому функцію. Але найточнішим є загальний випадок, коли крім того і вузли $(x_{1,k}, x_{2,k})$ знаходяться з умови мінімуму функціоналу, відповідного даній крайовій задачі.

Зауважимо, що викладена в цьому розділі методика конструювання оптимальних схем МСЕ очевидним чином розповсюджується на випадок диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами і правими частинами. В цьому випадку її практична реалізація істотно спирається на ефективний метод послідовних наближень розв'язання звичайних нелінійних симетрично-крайових інтегро-диференціальних рівнянь та їх систем – метод "фліп-флоп".

Запитання і вправи для самостійної роботи

1. Доведіть, що формула (9.1.5) дійсно являє собою оптимальну базисну функцію. (див. О.М.Литвин [1]).
2. Доведіть лему 9.2.1. (див. О.М.Литвин [1]).
3. Доведіть лему 9.2.2. (див. О.М.Литвин [1]).
4. Доведіть лему 9.2.3. (див. О.М.Литвин [1]).
5. Доведіть теорему 9.2.1. (див. О.М.Литвин [1]).

Список рекомендованої літератури

Література до розділу 1.

Л и т в и н О. М.

1. Интерлінація функцій та деякі її застосування. Монографія. Харків: Основа, 2002.-544 с.

К о р н и ш и н М. С., Н а й м у ш и н В. Н., С н и г и р е в В. Ф.

1. Вычислительная геометрия в задачах механики оболочек. М.: Наука, 1989. 207 с.

С т а р о д е т к о Е. А.

1. Элементы вычислительной геометрии. Минск: Наука и техника, 1986. 210 с.

Ф о к с А., П р а т т М.

1. Вычислительная геометрия: Пер. с англ. М.: Мир, 1982. 212 с.

Література до розділу 2.

Л и т в и н О. М.

1. Интерлінація функцій та деякі її застосування. Монографія. Харків: Основа, 2002.-544 с.

Б е с о в О. В., И л ь и н В. П., Н и к о л ь с к и й С. М.

1. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975. 480 с.

Н и к о л ь с к и й С. М.

1. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1969. 480 с.

Література до розділу 3.

А л б е р г Д. Е., Н и л ь с о н Е., У о л ш Д.

1. Теория сплайнов и ее приложения: Пер. с англ. М.: Мир, 1972. 316 с.

А н і к е є н к о О. М., Л и т в и н О. М., Р в а ч о в В. Л., С а ф о н о в М. О.

1. Про формулу розкладу в околі кута / О. М. Анікеєнко, О. М. Литвин, В. Л. Рвачов, М. О. Сафонов // Доп. АН УРСР. Сер. А. 1972. № 2. С. 99-101.

Б о р К. д е

1. Практическое руководство по сплайнам: Пер. с англ. М.: Радио и связь, 1985. 304 с.

З а в ь я л о в Ю. С., К в а с о в Б. И., М и р о ш н и ч е н к о В. Л.

1. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980. 220 с.

К а л а й д а О. Ф.

1. Варіаційне числення. К.: Вид-во при Київ. ун-ті, 1999. 216 с.

2. Чисельні методи. К.: Вид-во при Київ. ун-ті, 2000. 249 с.

К а л и т к и н Н. Н., К у з ь м и н а Л. В.

1. Про сходимість інтерполяційних параболічних сплайнів // Мат. моделювання. 1995. Т. 7, № 1. С. 77–95.
- Канторович Л. В., Крылов В. И.
1. Приближенные методы высшего анализа. М.: Физматгиз, 1961. 708 с.
- Клименко В. Т., Остапенко В. Н.
1. Аппроксимация функций нескольких переменных дифференциальными операторами // Докл. АН УССР. Сер. А. 1978. № 4. С. 295–297.
- Клименко В. Т.
1. Приложение континуальных сплайнов к решению плоских эллиптических задач в некоторых ограниченных областях // Вычисл. и прикладная математика. Киев, 1979. № 39. С. 10–16.
- Корнейчук Н. П.
1. Сплайны в теории приближения. М.: Наука, 1984. 350 с.
2. Точные константы в теории приближения. М.: Наука, 1987. 422 с.
- Корнейчук Н. П., Бабенко В. Ф., Лигун А. А.
1. Экстремальные свойства полиномов и сплайнов. Киев: Наукова думка, 1993. 304 с.
- Корнейчук Н. П., Лигун А. А., Доронин В. Г.
1. Аппроксимация с ограничениями. Киев: Наукова думка, 1982. 250 с.
- Литвин О. М.
1. Интерполяция на линиях триангуляции и решение краевых задач // Мат. методы анализа динам. систем. Харьков, 1980. № 4. С. 59–63.
2. Интерполирование функций.: Учеб. пособие. Киев: Учеб.- метод. каб. высш. образования (УМК ВО), 1988. 31 с.
3. Інтерлінація функцій та деякі її застосування. Монографія. Харків: Основа, 2002.-544 с.
4. Обобщенная нелинейная интерполяция и решение краевых задач // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19, № 3. С. 508–515.
- Литвин О. М., Рвачов В. Л.
1. Класична формула Тейлора, її узагальнення та застосування. К.: Наук. думка, 1973. 122 с.
- Литвин О. М., Сергієнко І. В.
1. Чисельна реалізація методу ЛІДР для рівняння нестационарної теплопровідності // Доп. АН УРСР. Сер. А. 1990. № 10. С. 69–73.
- Мырзанов Ж. Е.
1. Смешанная эрмитова интерполяция и связанные с ней кубатурные формулы // Теория приближений и смежные вопросы анализа и топологии. Киев, 1987. С. 68–76.
- Наттерер Ф.
1. Математические аспекты компьютерной томографии: Пер. с англ. М.: Мир, 1990. 279 с.
- Никольский С. М.
1. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1969. 480 с.

Переверзев С. В.

1. Оптимизация методов приближенного решения операторных уравнений. Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1996. 251 с.

Рвачев В. Л.

1. Геометрические приложения алгебры логики. Киев: Тэхника, 1967. 212 с.

3. Теория R -функций и некоторые ее приложения. Киев: Наукова думка, 1982. 550 с.

Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н.

1. Сплайны в вычислительной математике. М.: Наука, 1976. 248 с.

Тихонов А. Н., Самарский А. А.

1. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. 724 с.

Barnhill R. E. (Бернхилл Р. Е.)

2. Blending function interpolation: A survey and some new results // Proc. of the Conf. on Numerical Methods in Approximation Theory. Oberwolfach, Germany, 1976. P. 43–90.

3. Representation and approximation of surfaces // Mathematical Software III/ J.C. Rice, ed. 1977. P. 69–120.

Barnhill R. E., Birkhoff G., Gordon W. (Бернхилл Р. Е., Биркгофф Г., Гордон У.)

1. Smooth interpolation in triangles // J. Approximation Theory. 1973. № 8. P. 114–128.

Barnhill R. E., Gregory J. A. (Бернхилл Р. Е., Грегори Ж. А.)

1. Polynomial interpolation to boundary data on triangles // Mathematics of Computing. 1975. Vol. 29, № 131. P. 726–735.

2. Compatible Smooth Interpolation in Triangles // J. Approximation Theory. 1979. Vol. 15. P. 214–225.

Barnhill R. E., Mansfield L. (Бернхилл Р. Е., Менсфилд Л.)

1. Error bounds for smooth interpolation in triangles // J. Approximation theory. 1974. № 11. P. 306–318.

Birkhoff G.

1. Interpolation to boundary data in triangles // J. of mathematical analysis and applications, 1974, № 42. P. 474 - 484.

Bohmer K., Coman G. (Богмер К., Коман Г.)

1. Smooth interpolation schemes in triangles with error bounds // Mathematica. 1976. Vol. 18, № 41. P. 15–27.

Cavendish J.C., Gordon W.J., Hall C.A. (Кавендиш Д., Гордон У., Халл С.)

1. Ritz-Galerkin approximation in blending function spaces // Numer. Mathem. 1976. Vol. 26, № 2. P. 155–178.

Cheney E. W.

1. The best approximation of multivariate functions by combinations of univariate ones. in: Approximation Theory IV (C.K. Chui, L.L. Schumaker, J.D. Ward, Eds.). P. 1-26. New York - London: Academic Press, 1983.

C o o n s S.A. (К у н с С.А.)

1. Surface for Computer-Aided design of space forms // Project MAC report MAC - TR - 41. Cambridge, 1967. June. P. 3-30.

G o r d o n W.J.

1. Blending-function methods of bivariate and multivariate interpolation and approximation // SIAM J. numer. Analysis, 1973, № 8. P. 159-177.

D e V o r e R. A. (Д е В о р е Р. А.)

1. Nonlinear approximation // Acta Numerica. 1998. P. 51-150.

G a n s c a I. (Г а н ж а I.)

1. Blending interpolation in curved triangles // Studia Univ. Babeş - Bolyai Math. 1982. № 27. P. 65-67.

G o r d o n W. (Г о р д о н У.)

1. Blending function methods for bivariate and multivariate interpolation and approximation // SIAM J. Numerical Analysis. 1971. № 8. P. 158-177.

G o r d o n W., H a l l C. (Г о р д о н У., Х а л л Ц.)

1. Transfinite element methods: blending function interpolation over arbitrary curved element domains // Numerical Mathematics. 1973. № 2. P. 109-129.

H a u s s m a n n W., G e t t e r K., S t e i n h a u s B. (Г а у с с м а н н В., Ж е т т е р К., Ш т е й н г а у з Б.)

1. Degree of best approximation by trigonometric blending functions // Math. Ztschr. 1985. Bd. 189, № 1. S. 143-150.

H a u s s m a n n W., Z e l l e r K. (Г а у с м а н н В., Ц е л л е р К.)

1. Blending interpolation and best L^1 -approximation // Arch. Math. (Basel), 1983. Vol. 40, № 6. P. 545-552.

H o a n g T r u n g D u (Х у а н г Т р у н г Д у)

1. Blending interpolation on triangles // Mathematica. 1976. Vol. 18(41), № 1. P. 59-77.

H o l g e r M. (Г о л ь г е р М.)

1. Fehlerabschätzungen Zur zweidimensionalen splineinterpolation // Beiträge zur Numerische Mathematik. 1983. № 11. S. 81-91.

M a n g e r o n D. (М а н ж е р о н Д.)

1. Sopra un problema al contorno per un'equazione differenziabile alle derivate parziali di quartordine con le caratteristiche reali doppie // Rend. Accad. Sci. Fis. Mat. Napoli, 1932. № 2. P. 28-40.

N i e l s o n G. M. (Н и л ь с о н Г. М.)

1. Blending methods of minimum norm for triangular domains // Rev. roum. de math. pures et appliques. 1980. Vol. 25, № 6. P. 899-910.

2. Minimum norm interpolation in triangles // SIAM J. Numer. Anal. 1980. Vol. 17, № 1. P. 44-62.

3. A triangle interpolant with linear coefficients based on the fundamental bilinear interpolant of Mangeron // Buletinne Inst. politehnic din iasi. Sect. 1. 1981. Vol. 27(31), fasc. 3-4. P. 15-19.

Nielsen G., Mangeron D. (Нільсон Г., Манжерон Д.)

1. Bilinear interpolation in triangles based upon a Mangeron theorem // Rev. Real acad. cienc. exact fis. y natur. Madrid, 1981. Vol. 75, № 1. P. 89–95.

Nielsen G., Thomas D., Wixom J. A. (Нільсон Г., Томас Д., Уїксом Ж.)

1. Interpolation in Triangles // Bull. Austral. Math. Soc. 1979. Vol. 20. P. 115–130.

Zenisek A. (Женішек А.)

1. Interpolation polynomials on the triangle // Numerical Mathematics. 1970. № 15. P. 283–296.

Zlamal M. (Зламал М.)

1. Curved element in the finite element method 1. // SIAM J. Numer. Anal. 1973. Vol.5 № 3. P. 367–373.

Література до розділу 4.

Вайндинер А. И.

1. Интерполирование функций многих переменных обобщенными полиномами и метод решетчатой коллокации решения уравнений математической физики. Деп. во Всесоюз. ин-те науч. и техн. информ. (ВИНИТИ) 15.09.73, № 5452.

2. Об одном обобщении метода Бубнова–Галеркина–Канторовича приближенного решения краевых задач // Вестн. Моск. гос. ун-та (МГУ). Сер. мат.-мех. 1967. № 2. С. 19–23.

Дейнека В. С., Сергиенко И. В., Скопецкий В. В.

1. Математические модели и методы расчета задач с разрывными решениями. Киев: Наукова думка, 1995. 262 с.

Дробот Є.І., Литвин О.М., Сергієнко І.В.

1. Метод розв'язання нестационарної задачі теплопровідності з двома просторовими змінними з використанням інтерлінації функцій // Доповіді НАНУ. 2002. № 2. С.39-43.

Камишан В. В., Литвин О. М., Максимович О. Р.

1. Про чисельну реалізацію інтерлінаційного методу скінченних елементів для рівняння Пуассона в областях, складених з прямокутників // Доп. АН України. Сер. А. 1995. № 11. С. 34–38.

Прочность, устойчивость, колебания.: Справ.: В 3 т. / Под ред. И. А. Биргера, Я. Г. Пановко. М.: Машиностроение, 1968. Т. 1. 831 с.

2. К вопросу о построении координатных последовательно стей // Дифференц. уравнения. 1970. Т. 6. С. 1034–1047.

Литвин О.М.

1. Інтерлінація функцій та деякі її застосування. Монографія. Харків: Основа, 2002.-544 с.

Сун Цзай - Чжень

1. Применение расширенного варианта метода Канторовича к нелинейным задачам // Тр. Амер. о-ва инженеров-механиков. Прикладная механика. 1972. № 4. С. 69–77.

Література до розділу 5.

Л и т в и н О.М.

1. Інтерлінація функцій та деякі її застосування. Монографія. Харків: Основа, 2002.-544 с.

П о п о в Д. А.

1. Восстановление характеристических функций в двумерной радоновской томографии // Успехи мат. наук. Т. 53, вып. 1(319). С. 115 – 198.

Т и х о н о в А. Н., А р с е н и н В. Я., Т и м о н о в А. А.

1. Математические задачи компьютерной томографии. М.: Наука, 1987. 220 с.

R a d o n J. (P a d o n Й.)

1. Uber die Bestimmung von Functionen durch ihre Integralwerte langs gewisser Mannigfaltigkeiten // Ber. Sächsische Academie der Wiss. Math.-Phys. Kl. Leipzig, 1917. Bd. 69. S. 262–267.

Л и т в и н О.М., П е р ш и н а Ю.І.

1. Математична модель відновлення тривимірного тіла за відомими його слідами на системі взаємно перпендикулярних площин з використанням інтерфлетації функцій // Доп. НАН України. Сер. А. 2005. № 1.

2. Відновлення тривимірних об'єктів за їх слідами на системі перерізаних площин з використанням інтерфлетації функцій.- Оброблення сигналів і зображень та розпізнавання образів. // Сьома всеукраїнська міжнародна конференція, 11-15 жовтня 2004 року, Київ, Україна. - с.221-224.

Література до розділу 6.

З а д и р а к а В. К.

1. Цифровая обработка сигналов. Киев: Наукова думка, 1980. 220 с.

З а д и р а к а В. К., М е л ь н и к о в а С. С.

1. Цифровая обработка сигналов. Киев: Наукова думка, 1993. 294 с.

Л и т в и н О.М.

1. Інтерлінація функцій та деякі її застосування. Монографія. Харків: Основа, 2002. - 544 с.

Л и т в и н О.М., Н е ч у й в і т е р О. П.

1. Кубатурні формули для обчислення коефіцієнтів Фур'є функцій двох змінних з використанням сплайн - інтерлінації. // Доп. АН України. Сер. А. 1998. № 1. С. 23–28.

2. Обчислення коефіцієнтів Фур'є функцій двох змінних за допомогою квадратичної сплайн - інтерполяції, побудованої на основі сплайн - інтерлінації. // Сьома всеукраїнська міжнародна конференція, 11-15 жовтня 2004 року, Київ, Україна. - с.289-292.

Л и т в и н О. М., У д о в и ч е н к о В. М.

1. Наближений метод відновлення функцій за допомогою тригонометричних сум, точний на тригонометричних поліномах заданого порядку // Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения: Сб. науч. тр. Ин-та математики НАНУ. Киев, 1999. С. 144–146.

Н и к о л ь с к и й С. М.

1. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1969. 480 с.

2. Квадратурные формулы. М.: Наука, 1979. 222 с.

С м о л я к С. А.

1. Интерполяционные и квадратурные формулы на классах W_s^α и E_s^α // Докл. АН СССР. 1960. Т. 131, № 5. С. 1028–1031.

2. Квадратурные и интерполяционные формулы на тензорных произведениях некоторых классов функций // Докл. АН СССР. 1963. Т. 148, № 5. С. 1042–1045.

D e l v o s F.-J. (Д е л в о с Ф.-Й.)

1. Boolean methods for double integration // Mathematics of computation. 1990. Vol. 55, № 192. P. 683–692.

Література до розділу 7.

Л и т в и н О. М.

1. Інтерлінація функцій та деякі її застосування. Монографія. Харків: Основа, 2002.-544 с.

Г у л и к Л. І., Л и т в и н О. М.

1. Інтерфлетація функцій трьох змінних на паралелепіпеді з однією криволінійною гранню // Матеріали десятої міжнародної конференції ім. Академіка М.Кравчука (13-15 травня 2004 року, Київ), С. 357. НАН України. Сер. А. 2005. № 1.

2. Точне задовільнення граничних умов для трьохвимірної області складної форми за допомогою інтерфлетації (подано до друку в тезах Міжн. конф. Питання оптимізації обчислень (ПОО-XXXII)), 19-23 вересня 2005 р., с. Кацивелі (Крим). - с.221-224.

Г л у ш к о О. Г., Л и т в и н О. М., П і д г о р н и й А. М., Ф е д ь к о В. В.

1. Про формулу розкладу в околі паралелепіпеда в \mathbf{R}^n / О. Г. Глушко, О. М. Литвин, А. М. Підгорний, В. В. Федько // Доп. АН УРСР. Сер. А. 1974. № 1. С. 15–18.

D e l v o s F.-J. (Д е л в о с Ф.-Й.)

1. d-variate Boolean interpolation // J. Approximation Theory. 1982. Vol. 34. P. 99–114.

D e l v o s F.-J., P o s d o r f H. (Д е л в о с Ф.-Й., П о с д о р ф Г.)

1. N-order blending // Constructive theory of functions of several variables, Oberwolfach, 1976/A. Doald, B. Checkmann ed. 1977. P. 63-64. (Lecture Notes in Mathematics, Bd. 571)

M a n s f i e l d L. (М е н с ф і л д Л.)

1. Interpolation to boundary data in tetrahedra with applications to compatible finite elements // J. of mathematical analysis and applications, 1976, Vol. 56, P. 137 - 164.

Zhu Anmin, He Jiaxing (Шу Анмін, Хі Джієксін)

1. A blending function interpolation on the N -dimensional simplex // Тунцзи дасюе сюебао = J. of Tongji Univ. 1988. Vol. 16, № 4. P. 537-542.

Література до розділу 8.

Вказівка до п.8.1. Оператори найкращого наближення тригонометричними поліномами з використанням $2n - 1$ перших коефіцієнтів Фур'є досліджені в книгах Корнейчука Н.П. [2, с. §§4.1- 4.2], Магарил-Ильєва Г.Г., Тихомирова В.М. [1, с.130].

К а ш и н Б.С., С а а к я н А.А.

1. Ортогональные ряды. М.: Наука, 1984. 496 с.

К о р н е й ч у к Н. П.

1. Сплайны в теории приближения. М.: Наука, 1984. 350 с.

1. Точные константы в теории приближения. М.: Наука, 1987. 422 с.

К о р н е й ч у к Н. П., Б а б е н к о В. Ф., Л и г у н А. А.

1. Экстремальные свойства полиномов и сплайнов. Киев: Наукова думка, 1993. 304 с.

К о р н е й ч у к Н. П., Л и г у н А. А., Д о р о н и н В. Г.

1. Аппроксимация с ограничениями. Киев: Наукова думка, 1982. 250 с.

К а ю м о в А.Р.

1. О задаче наилучшего среднеквадратического приближения L -сплайнами 2-го порядка // Труды междунар. Научн. Конф. "Теория приближения". - Екатеринбург, 2000.

Л и т в и н О.М.

1. Інтерлінація функцій та деякі її застосування. Монографія. Харків: Основа, 2002.-544 с.

М а г а р и л - И л ь я е в Г. Г., Т и х о м и р о в В. М.

1. Выпуклый анализ и его приложения. М.: Эдиториал УРСС, 2000. 174 с.

Н о в и к о в И. Я., С т е ч к и н С. Б.

1. Основы теории всплесков // Успехи мат. наук. 1998. Т. 53, вып. 6(324). С. 53-128.

П о т а п о в М. К.

1. Изучение некоторых классов функций при помощи приближения "углом" // Тр. МИАН. 1972. Т. 117. С. 256-291.

Р в а ч е в В. Л., Р в а ч е в В. А.

1. Неклассические методы теории приближений в краевых задачах. Киев: Наукова думка, 1979. 193 с.

С м о л я к С. А.

1. Интерполяционные и квадратурные формулы на классах W_s^α и E_s^α // Докл. АН СССР. 1960. Т. 131, № 5. С. 1028-1031.

2. Квадратурные и интерполяционные формулы на тензорных произведениях некоторых классов функций // Докл. АН СССР. 1963. Т. 148, № 5. С. 1042-1045.

- Р е м е з Е. Я.
 1. Об остаточных членах некоторых формул приближенного анализа // Докл. АН СССР. 1940. Т. 26, № 2. С. 130–134.
 2. Основы численных методов чебышевского приближения. Киев: Наукова думка, 1969. 623 с.
- Т и х о м и р о в В. М.
 1. Некоторые вопросы теории приближений. М.: МГУ, 1976. 304 с.
- Ч у и К.
 1. Введение в вейвлеты: Пер. с англ. М.: Мир, 2001. 412 с.
- C i e s i e l s k y Z.
 1. Properties of the orthonormal Franklin systems // Studia mathematica. - 1963.- **23**.№ 2.- С.141-157с.
- G o r d o n W. (Г о р д о н У.)
 1. Blending function methods for bivariate and multivariate interpolation and approximation // SIAM J. Numerical Analysis. 1971. № 8. P. 158–177.
- S a r d A. (С а р д А.)
 1. Optimal approximation // J. Func. Anal. 1967. Vol. 1, № 2. P. 222–244.

Література до розділу 9

- К о р н е е в В. Г.
 1. Схемы метода конечных элементов высоких порядков точности. Л.: Изд-во Ленингр. гос. ун-та (ЛГУ), 1977. 332 с.
- Л и т в и н О.М.
 1. Інтерлінація функцій та деякі її застосування. Монографія. Харків: Основа, 2002.-544 с.
 2. К вопросу о построении оптимальных схем МКЭ // Вычислительная математика в современном научно-техническом прогрессе: 2-я респ. конф.: Тез докл. Киев, 1978. С. 21–22.
 3. Оптимальные схемы МКЭ // Теоретические и прикладные вопросы дифференциальных уравнений и алгебра. Киев, 1978. С. 160–165.
 4. Оптимальные координатные функции в методе конечных элементов // Дифференц. уравнения. 1984, Т.20, № 4. С. 677–688.
- С т р е н г Г., Ф и к с Дж.
 2. Теория метода конечных элементов. Перев. с англ. М.: Мир, 1977. 349 с.
- D i a s A. R., K i k u c h i N., T a y l o r J. E. (Д і а с А. Р., К і к у х і Н., Т е й л о р Ж. Е.)
 1. A method of grid optimization for finite element methods // Computer method in appl. mechanics and engineering. 1983. Vol. 41. P. 29–45.
- M a n s f i e l d L. (М е н с ф і л д Л.)
 1. Higher order compatible triangular finite elements // Numerische Mathematik, 1974, № 22. P. 89 - 97.
- M c L e o d R., M i t c h e l l A. (М а к л е о д Р., М і т ч е л л А.)
 1. The construction of basis function for curved elements in the finite element method // J. Inst. Math. Appl. 1972. № 10. P. 382–393.
- M i t c h e l l A., M a r s h a l l J. (М і т ч е л л А., М а р ш а л л Ж.)
 1. Matching of essential boundary conditions in the finite element method // Topics in Numer. Anal. 1975. № 11. P. 109–120.

Умовні позначення

Загальні

\forall

- квантор загальності: "для всіх"

\exists

- квантор існування: "існує"

$\exists!$

- існує і єдиний

\implies

- впливає

\iff

- еквівалентний

\mathbf{R}

- множина дійсних чисел,
 $x \in \mathbf{R} \iff -\infty < x < \infty$

\mathbf{R}^n

- евклідів n -вимірний простір,
 $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n \iff x_i \in \mathbf{R}, i = \overline{1, n}$

\mathbf{N}

- множина натуральних чисел, $\mathbf{N} = \{1, 2, \dots\}$

$\overset{\circ}{\mathbf{N}}$

- $\mathbf{N} \cup \{0\}$

\emptyset

- пуста множина

$x \in A$

- елемент x належить множині A

$x \notin A, x \notin A$

- елемент x не належить множині A

$A \cup B$

- об'єднання множин A і B

$A \cap B$

- переріз множин A і B (їхня спільна частина)

$A \setminus B$

- $\{x \in A | x \notin B\}$ - різниця множин A і B

$\sup_{x \in A} f(x)$

- точна верхня грань значень функціоналу f на множині A

$\inf_{x \in A} f(x)$

- точна нижня грань значень функціоналу f на множині A

$A \oplus B$

- $\{(x, y) | x \in A, y \in B\}$ - пряма сума множин A і B

$P \oplus Q$

- $P \oplus Q = P + Q - PQ$ -булева сума операторів P і Q

$A \subset B$

- множина A є частиною множини B

\bar{A}

- замикання множини A

$\{x | P_x\}, \{x : P_x\}$

- сукупність елементів x з властивістю P_x

$:=, =:$

- дорівнює за означенням

$\text{mes } E$

- лебегова міра множини E

$\dim X$

- розмірність лінійного простору X

$\text{sgn } x$

- $\text{sgn } x = 1$, якщо $x > 0$; $\text{sgn } 0 = 0$;
 $\text{sgn } x = -1$, якщо $x < 0$

$\delta_{ij}, \delta_{i,j}$

- символ Кронекера; $\delta_{ii} = 1$; $\delta_{ij} = 0$, якщо $i \neq j$

$\Delta = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$

- оператор Лапласа

I

- тотожний оператор

(τ, ∇)

- $\sum_{k=1}^n \tau_k \frac{\partial}{\partial x_k}$, $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n)$, $n = 2, 3$

Додаткові

○ $C^r(\bar{G}), (C^0(\bar{G}) := C(\bar{G}))$ - простір неперервних у $\bar{G} \subset \mathbf{R}^n$ функцій n змінних із неперервними похідними порядків $\leq r$; аналогічно для $r = (r_1, \dots, r_n)$

○ $L_p(G)$ - простір функцій $f(x)$, $x \in G \subset \mathbf{R}^n$, які мають скінченну норму $\|f\|_p = \|f\|_{L_p(G)} := (\int_G |f(x)|^p dx)^{1/p} < \infty$ ($1 \leq p < \infty$)

○ $L_\infty(G) = \lim_{p \rightarrow \infty} L_p(G) = \sup_{x \in \bar{G}} |f(x)|$ - істотна верхня грань функції $|f(x)|$ на \bar{G} , тобто найменше з чисел $K \geq 0$, для яких нерівність

$|f(x)| > K$ виконується на множині міри нуль

$$\odot D_k = \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad D_k^{\alpha_k} = \partial^{\alpha_k} / \partial x_k^{\alpha_k}, \quad D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n},$$

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \overset{\circ}{\mathbb{N}}^n$$

$$\odot W_p^r(G) = \{f(x) \mid \sum_{|\alpha| \leq r} \|D^\alpha f\|_{L_p(G)} < \infty\}$$

$$\odot L_p^{r_1, r_2}(G) = \{f(x) \mid f^{(s_1, r_2)}(x_1, x_2) \in C(G), \quad 0 \leq s_1 < r_1; f^{(r_1, s_2)}(x_1, x_2) \in C(G); 0 \leq s_2 < r_2; \|f^{(r_1, r_2)}\|_{L_p(G)} \leq 1\}$$

$\odot \nabla \omega(x) = (\partial \omega / \partial x_1, \dots, \partial \omega / \partial x_n)$ – градієнт скалярної функції $\omega(x)$

$$\odot x - \omega(x) \nabla \omega(x) = (x_1 - \omega(x) \partial \omega / \partial x_1, \dots, x_n - \omega(x) \partial \omega / \partial x_n),$$

$$x = (x_1, \dots, x_n)$$

$$\odot D_s^{(k)} = \sum_{|\alpha|=s} \frac{s!}{\alpha!} \prod_{i=1}^n \left(\frac{\partial \omega_k}{\partial x_i} \right)^{\alpha_i} D^\alpha - \text{оператор диференціювання } s\text{-го порядку по нормалі до поверхні } \omega_k = \omega_k(x_1, \dots, x_n) = 0, |\nabla \omega_k| = 1; \quad \alpha =$$

$$= (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \quad D_0^{(k)} = I$$

$\odot \tau_k = (\partial \omega_k / \partial x_2, -\partial \omega_k / \partial x_1)$ – вектор, дотичний до лінії $\Gamma_k : \omega_k(x_1, x_2) = 0, |\nabla \omega_k|_{\Gamma_k} = 1$

$$\odot T_s^{(k)} \omega_k = \left(\frac{\partial \omega_k}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial \omega_k}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} \right)^s - \text{оператор диференціювання } s\text{-го порядку по дотичній до лінії } \Gamma_k : \omega_k(x_1, x_2) = 0, |\nabla \omega_k|_{\Gamma_k} = 1$$

$\odot C = 2G \iint_D u(x, y) dx dy$ – жорсткість на кручення стержня з попе-

речним перерізом, який має вигляд області D , де G – стала; u – функція напружень

$$\odot \tau_m = \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial l} G \vartheta - \text{максимальне напруження в стержні при кру-$$

ченні; точка (x_0, y_0) і напрямок $l = \vec{i} \cos \alpha + \vec{j} \cos \beta$ залежать від області D ; G, ϑ – сталі, u – функція напружень

$\odot u(x, y)$ – функція напружень, яка є розв'язком задачі $\Delta u(x, y) = -2, (x, y) \in D \subset \mathbf{R}^2; u(x, y) = 0, (x, y) \in \partial G$

$$\odot \vec{a} = a_1 \vec{i}_1 + \dots + a_n \vec{i}_n \iff a = (a_1, \dots, a_n)$$

Навчальне видання

ЛИТВИН Олег Миколайович
ПЕРШИНА Юлія Ігорівна
ЛИТВИН Олег Олегович
НЕЧУЙВІТЕР Олеся Петрівна

**Інноваційні технології: нові інформаційні
оператори**

Навчально-методичний посібник

Формат 60x84/16. Гарнітура Times New Roman
Папір для цифрового друку. Друк ризографічний.
Ум. друк. арк. 13,9.
Тираж 100 пр.
Українська інженерно-педагогічна академія
61003, м. Харків, вул. Університетська, 16.