

УДК 621.8

DOI: 10.15276/pidtt.2.66.2021.08

Коваленко В. О., Стрижак В. В., Іглін С. П., Коваленко О. О.,  
Стрижак М. Г.

*Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»*

## **ДИНАМІЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ РОБОТИ МЕХАНІЗМУ ПОВОРОТУ КРАНУ НА КОЛОНІ**

**Анотація.** *Стаття присвячена дослідженню коливань і динамічних процесів у механізмах повороту з урахуванням усіх складових динамічного навантаження – високочастотних складових, розгойдування вантажу, дисипації.*

*Наведена кінематична схема механізму повороту крана на колоні. Розглянуто двомасову динамічну модель привід - поворотна частина крану і отримано її аналітичний розв'язок.*

**Ключові слова.** *кран, механізм повороту, динаміка*

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Питанням динаміки кранів присвячено велику кількість робіт, що своєю чергою свідчить про актуальність вивчення цього питання. Класичною моделлю для дослідження механізмів повороту і пересування є система «візок (стріла) – вантаж» на гнучкому підвісі. В роботі [1] проведено моделювання динаміки системи «візок-вантаж на гнучкому підвісі» з різними підходами до постановки задачі. Проведено порівняння результатів моделювання руху механічної системи, що описується рівняннями Лагранжа 2-го роду також і з припущенням малих коливань вантажу, традиційних рівнянь системи візок-вантаж із заміною змінних при інтегруванні; традиційних рівнянь, де з переміщення вантажу береться відхилення каната від вертикалі; модифікації систем рівнянь шляхом заміни рівняння руху візка рівняннями руху приводу. Недоліком даного дослідження є те, що розглядається тільки взаємодія візка та вантажу, без урахування динамічних явищ в елементах приводних механізмів та металоконструкції несучих елементів крана.

У роботі [2] представлено нелінійну модель візка крана. Рівняння складені в незалежних узагальнених координатах: рух візка та кута відхилення вантажу. Керуючим параметром є рушійне зусилля, яке прикладається через канат тягової лебідки. Аналогічна модель використовується в роботі [3], в якій також як друга узагальнена координата використовується кут відхилення каната від вертикалі. У роботі [4] на основі рівнянь Лагранжа отримано математичну модель

© Коваленко В. О., Стрижак В. В., Іглін С. П., Коваленко О. О., Стрижак М. Г.,  
2021

---

маятника зі змінною довжиною підвісу вантажу з метою моделювання одночасного підйому та горизонтального переміщення вантажу.

Якщо маса підвішеного вантажу сильно розподілена за висотою, розглядається модель візка з подвійним маятником [5]. Аналогічна система розглядається в роботі [6], де запропонована система керування візком крана з вантажем, що представляє собою подвійний маятник. Представлена адаптивна стратегія керування усунення коливання подвійного маятника з невідомими входними параметрами. Математична модель заснована на нелінійній динаміці. Недоліком даної роботи є те, що динаміка системи візок-вантаж описана в плоскій постановці задачі.

Відомі моделі, в яких враховуються геометричні особливості точки підвісу вантажу та траєкторії її руху. Заслуговує на увагу модель транспортування довгомірного вантажу двома мостовими кранами, що знаходяться на різних рівнях по висоті та працюють спільно [7]. У роботі [8] на основі лінеаризованих рівнянь Лагранжа отримано модель, що описує коливання сферичного маятника.

У роботі [9] отримано математичну модель системи візок-вантаж для кабельного крану, що дозволяє врахувати кривизну несучого каната, а також сили опору руху за наявності тертя та вітру.

В роботі [10] розглянуто механізм вильоту вантажу баштового крану. Оптимізовано рух вантажного візка, що пересувається горизонтальною балковою стрілою. Оптимізацію виконано за допомогою рівняння Ейлера-Пуассона за інтегральним критерієм. Таким чином досягнуто зменшення динамічних навантажень і втрат енергії.

В роботі [11] розглянуто динамічну модель поворотного баштового крану з балковою стрілою, і переміщуваним візком з вантажем на гнучкому підвісі. Побудовано рівняння руху даної механічної системи, які є рівняннями Лагранжу. Досліджено тангенціальні та радіальні коливання вантажу. Основна увага при цьому зосереджена на динамічних процесах, пов'язаних з низькочастотними коливаннями, спричиненими вантажем на гнучкому підвісі і приводі механізму обертання крану. Динамічні процеси в ланках металоконструкції крану не досліджуються

Таким чином, в існуючих математичних моделях основна увага приділяється динамічним процесам, пов'язаними з низькочастотними коливаннями вантажу. Питання високочастотних коливань і динамічних процесів в механізмах повороту потребують додаткового висвітлення з урахуванням всіх складових динамічних навантажень, що дозволить більш точно визначати величину зусиль, що виникають в несучих елементах, тим самим підвищуючи надійність і безпечність експлуатації вантажопідйомних машин.

**Мета і задачі досліджень.** Метою дослідження є визначення характеру зміни динамічних навантажень в механізмі повороту крану на колоні з урахуванням пружного зв'язку приведених мас, дисипації та розгойдування вантажу.

Для досягнення поставленої мети необхідно вирішити наступні завдання:

1) представити механізм повороту крану на колоні у вигляді двомасової моделі;

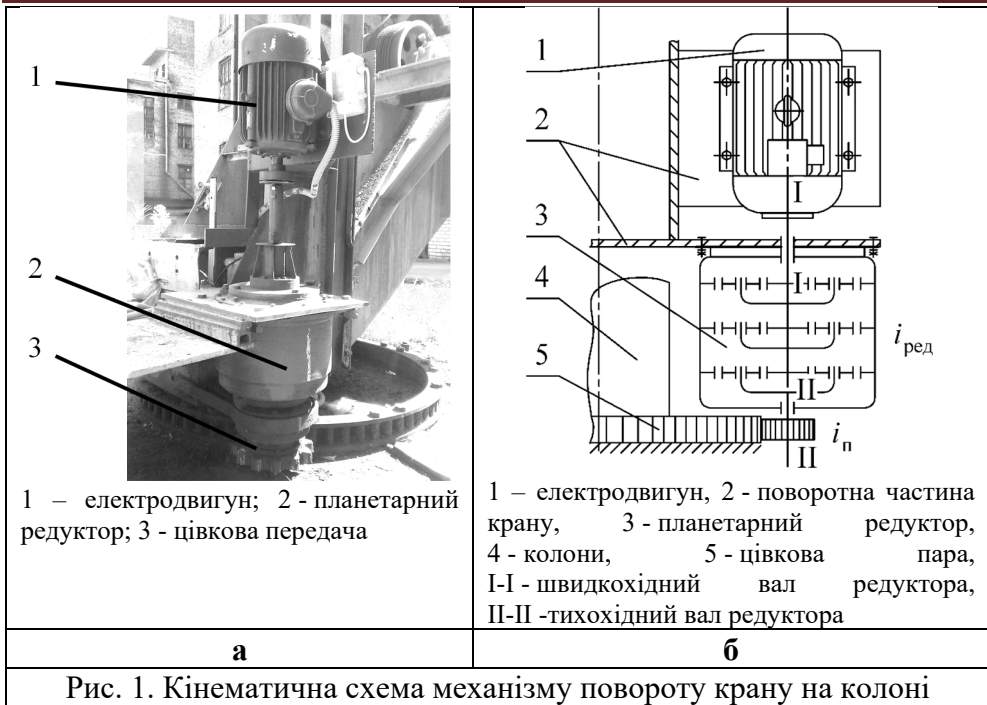
2) отримати аналітичний розв'язок системи диференціальних рівнянь, що описують рух динамічної моделі;

3) визначити залежності, що характеризують дисипативні явища і вплив розгойдування вантажу на коливальний процес механізму повороту крану на колоні.

**Виклад основного матеріалу.** Використаємо традиційні припущення: розгойдування вантажу не враховується, між двигуном і веденим валом механізму повороту пружний зв'язок, з приведеними до нього усіма іншими масами крану. У зв'язку з цим стає можливим розглядати окремо двомасову систему привід – поворотна частина крана. Використовуючи рівняння Лагранжа для кожної маси запишемо рівняння руху:

$$\begin{cases} J_1 \ddot{\varphi}_1 + c_1 \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) = M_1 & (1 \text{ а}) \\ J_2 \ddot{\varphi}_2 - c_1 \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) = -M_c & (1 \text{ б}) \end{cases}$$

Для визначення динамічних навантажень на останньому тихохідному валу механізму здійсимо приведення всіх мас, моментів і кутів повороту до пружної ланки II – II (рис. 1).



Така приведена схема представлена на рис. 2, де:

$J_1 = J_p \cdot i_{ред}^2 \cdot \eta_{ред}$  – момент інерції ротора  $J_p$ , приведений до вала II – II;

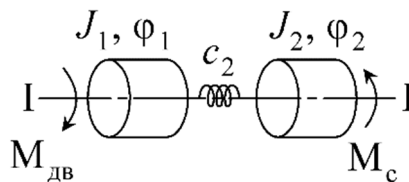
$J_2 = \frac{J_{кр}}{i_n^2 \cdot \eta_n}$  – момент інерції крану  $J_{кр}$ , приведений до вала II – II;

$M_1 = M_{дв} \cdot i_{ред} \cdot \eta_{ред}$  – рушійний момент двигуна приведений до вала II – II;

$M_c = \frac{M_{с.кр.}}{i_n \cdot \eta_n}$  – статичний момент опору обертання крану приведений до вала II – II;

$c_2$  – кутова жорсткість елементів передач, приведена до вала II – II;

$\varphi_1, \varphi_2$  – відповідно кути повороту мас  $J_1, J_2$ .



**Рис. 2. Приведена до вала I – I схема механізму повороту крану на колоні**

$$M_1^{\text{дин}} = M_1 - M_c \quad (2)$$

Перепишемо рівняння (1) з урахуванням (2)

$$\begin{cases} J_1 \ddot{\varphi}_1 + c_2 (\varphi_1 - \varphi_2) = M_1^{\text{дин}} + M_c \\ J_2 \ddot{\varphi}_2 - c_2 (\varphi_1 - \varphi_2) = -M_c \end{cases} \quad (3. \text{ а})$$

$$\quad (3. \text{ б})$$

Розділивши перше рівняння на  $J_1$ , друге на  $J_2$ , і віднімаючи з першого друге, одержимо

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = \frac{M_1^{\text{дин}}}{J_1} + \varphi_1(t_1) \omega^2 \quad (4)$$

$$\text{де } \varphi = \varphi_1 - \varphi_2, \quad \varphi_1(t_1) = \frac{M_c}{c_2}, \quad \omega = \sqrt{\frac{c_2 (J_1 + J_2)}{J_1 \cdot J_2}}.$$

$\omega$  – власна частота приведеної двомасової системи.

Розв'язок (4) представимо у вигляді

$$\varphi = \varphi_1(t_1) + A_1 \sin \omega t + A_2 \cos \omega t + \frac{M_1^{\text{дин}}}{\omega \cdot J_1} \int \sin \omega(t - \tau) d\tau$$

або після інтегрування

$$\varphi = \varphi_1(t_1) + A_1 \sin \omega t + A_2 \cos \omega t + \frac{M_1^{\text{дин}}}{\omega^2 J_1} (1 - \cos \omega t)$$

постійні  $A_1$  й  $A_2$  визначаються із початкових умов: при  $t = 0$ ,  $\varphi(0) = \varphi_1(t_1)$ ;  $\dot{\varphi}(0) = \dot{\varphi}_1(t_1)$ . З першої умови знаходимо  $A_2 = 0$ , із другої –  $A_1 = \frac{\dot{\varphi}_1(t_1)}{\omega}$ .

остаточно

$$\varphi = \varphi_1(t_1) + \frac{\dot{\varphi}_1(t_1)}{\omega} \sin \omega t + \frac{M_1^{\text{дин}}}{\omega^2 J_1} \cos \omega t (1 - \cos \omega t) \quad (5)$$

Помножуючи ліву й праву частини (5) на крутильну жорсткість  $c_2$ , одержимо загальний вираз динамічного моменту, що сприймає пружна ланка II – II у процесі розгону механізму:

$$M_{\text{пр}} = M_c + c_2 \frac{\dot{\varphi}_1(t_1)}{\omega} \sin \omega t + c_2 \frac{M_1^{\text{дин}}}{\omega^2 J_1} (1 - \cos \omega t) \quad (6)$$

Зауважуючи, що

$$c_2 \frac{M_1^{\text{дин}}}{\omega^2 J_1} = \frac{M_1^{\text{дин}}}{J_1 + J_2} J_2,$$

а

$$\frac{c_2 \dot{\varphi}_1(t_1)}{\omega} \sin \omega t - \frac{M_1^{\text{дин}}}{J_1 + J_2} J_2 \cos \omega t = - \frac{M_1^{\text{дин}} J_2 \cos(\omega t + \beta)}{(J_1 + J_2) \cos \beta}$$

де

$$tg\beta = \frac{\omega \cdot \dot{\phi}_1(t_1) \cdot J_1}{M_1^{дин}}, \tag{7}$$

остаточно одержимо

$$M_{пр} = M_c + \frac{M_1^{дин}}{J_1 + J_2} J_2 - \frac{M_1^{дин} J_2}{(J_1 + J_2) \cos\beta} \cos(\omega t + \beta) \tag{8}$$

Вираз (8) показує, що крутний момент у пружних елементах механізму складається з:

- моменту опору обертанню крана:  $M_{пр}^1 = M_c$ ,
- інерційного моменту маси  $J_2$ :  $M_{пр}^2 = \frac{M_1^{дин}}{J_1 + J_2} J_2 = J_2 \cdot \ddot{\phi}_2 = L$
- пружного моменту  $M_{пр}^3$ , викликаного вільними коливаннями приведеної двомасової системи із частотою коливань  $\omega$ , зсунутих за фазою на кут  $\beta$ .

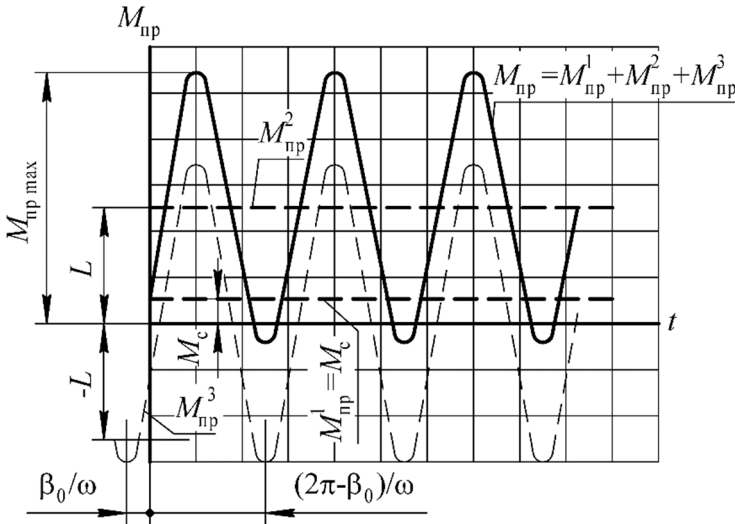


Рис. 3. Зміна динамічних навантажень при розгоні механізму.  
 $M_1 = \text{const}$ .

Множник  $1/\cos\beta$  збільшує амплітуду вільних коливань, внаслідок ударного додатка рушійного моменту, що викликається наявністю зазорів у кінематичних парах механізму.

Максимальний динамічний момент буде при  $t = (\pi - \beta) / \omega$

$$M_{пр \max} = M_c + \frac{M_1^{дин}}{J_1 + J_2} J_2 - \frac{M_1^{дин} J_2}{(J_1 + J_2) \cos\beta} \tag{9}$$

Аналізуючи вирази (8) і (9), згідно яким на рис. 3 побудований графік, можна зробити наступні висновки:

- при визначенні динамічних навантажень не можна не враховувати пружних властивостей елементів механізму, тому що пружний момент, викликаний вільними коливаннями системи, перевищує за величиною динамічний момент  $M_{np}^2$ , що виникає при розгоні маси  $J_2$ ;

- величина динамічних навантажень обернено пропорційна  $J_1$ , тому з метою їхнього зменшення необхідно мінімізувати момент інерції на першому валу механізму;

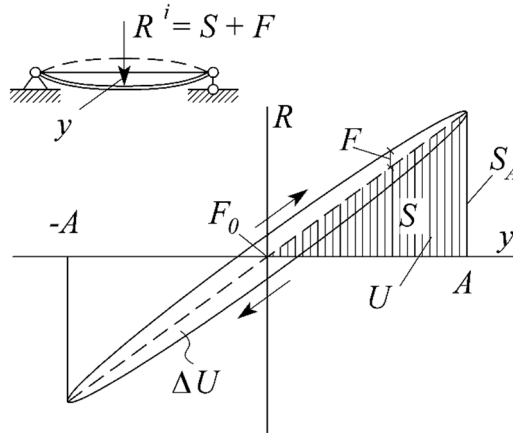
- наявність зазорів у кінематичних парах механізму збільшує амплітуду пружного моменту вільних коливань на величину  $1/\cos\beta$ . Наблизити цей множник до одиниці можна тільки за рахунок зменшення початкової швидкості  $\dot{\phi}_1(t_1)$  (7), що можна здійснити шляхом плавного пуску, зменшення зазорів, поліпшивши точність виготовлення передач механізму і їхній монтаж або посиленням попереднього керуючого імпульсу на приводний двигун.

Вирази (8) і (9) хоча й дозволяють зробити практичні виводи, однак вони не зовсім точно відбивають дійсний характер динамічних навантажень. Після закінчення розгону  $M_{np}$  повинен наближатися до  $M_1$ , однак цього не видно з (7) і (8). Тому розглянемо зміну динамічних навантажень із урахуванням демпфіруючих опорів, які є визначальним чинником для загасань вільних коливань. Причиною їх виникнення служать різні процеси, що супроводжують пружні коливання: тертя в опорних закріпленнях, взаємодія коливної системи із зовнішнім середовищем (зовнішній опір); тертя в з'єднаннях, що мають пружний натяг (конструкційне тертя), відступ від ідеальних умов деформування конструкції і її основи, викликані пружними недосконалостями реальних матеріалів, опір у самому матеріалі конструкції і пов'язані з цим втрати на внутрішнє тертя при їхній деформації (внутрішній опір). Через ці опори, частина енергії деформації за кожний цикл напруг, поглинається і розсіюється у вигляді тепла. Всі опори будемо враховувати одним коефіцієнтом (до речі, такий коефіцієнт може бути легко знайдений експериментальним шляхом) – коефіцієнтом поглинання  $\psi$ , який дорівнює відношенню

$$\psi = \frac{\Delta U}{U} \quad (10)$$

де:  $\Delta U$  – необоротно поглинена елементом енергія за один цикл деформації;

$U$  – потенційна енергія, накопичена в елементі й відповідна амплітуді деформації  $A$  за той же цикл (рис. 4).



$y$  – переміщення з амплітудою  $A$ ,  $R$  – сумарна сила,  $S$  – пружна сила,  $F$  – сила непружного опору,  $\Delta U$  – енергія, що поглинається за один цикл деформації,  $U$  – амплітудне значення потенційної енергії деформації

Рис. 4. Діаграма робіт

Для виявлення характеру й величини динамічних навантажень, що виникають у пружних елементах механізму з урахуванням розсіювання енергії, скористаємося основними положеннями теорії непружного поглинання енергії коливань.

Відповідно до цієї теорії, рівняння вимушених коливань (4) в комплексній формі прийме вид:

$$\ddot{\varphi}^* + \omega^{*2} \varphi^* = D + \varphi_1(t_1) \cdot \omega^{*2} \tag{11}$$

де  $\varphi^*$  – комплексне переміщення,

$$D = \frac{M_1^{днн}}{J_1},$$

$$\omega^{*2} = \omega^2 (U_0 + i\nu_0) \tag{12}$$

тут  $U_0$  і  $\nu_0$  – параметри, що залежать від коефіцієнта  $\gamma = \frac{\Psi}{2\pi}$  й дорівнюють

$$U_0 = \left(1 - \frac{\gamma_0}{4}\right) / \left(1 + \frac{\gamma_0}{4}\right), \nu_0 = \gamma_0 / \left(1 - \frac{\gamma_0}{4}\right) \tag{13}$$

Підставляючи (12) в (13) і витягуючи корінь, одержимо

$$\omega^* = \omega_0 \left(1 + i \frac{\gamma_0}{2}\right) \tag{14}$$

де

$$\omega_0 = \frac{\omega}{\sqrt{1 + \frac{\gamma_0^2}{4}}} \tag{15}$$

розв'язок рівняння (11) одержується у вигляді

$$\varphi^* = c^* e^{i\omega^* t} + y_1^* + y_2^* \quad (16)$$

де:  $c^* = a_0 + ib_0$  – довільна комплексна постійна, що визначається з початкових умов;

$y_1^*, y_2^*$  – частинні інтеграли, що відповідають правій частині (11)

Обчислимо інтеграл

$$y_1^* = \frac{De^{i\omega^* t}}{2i\omega^*} - \frac{De^{-i\omega^* t}}{2i\omega^*} = \frac{D}{\omega^*{}^2} \quad (17)$$

Підставивши вирази (12) для  $\delta^*$  й (14) для  $\omega^*$  в (17), одержимо

$$y_1^* = D \frac{1}{\omega_0^2 \left(1 - \frac{\gamma^2}{4}\right) + i\omega_0^2 \gamma}$$

або, якщо позначити  $D_0 = \omega_0^2 \left(1 - \frac{\gamma_0^2}{4}\right)$ ,  $B_0 = \omega_0^2 \gamma_0$ , то

$$y_1^* = D \frac{D_0 - iB_0}{D_0^2 + B_0^2} \quad (18)$$

Другий частинний інтеграл рівняння (11) очевидний і дорівнює  $y_2^* = \varphi_1(t_1)$

Тепер вираз (16) можна переписати у вигляді

$$\varphi^* = (a_0 + ib_0) e^{i\omega^* t} + D \frac{D_0 - iB_0}{D_0^2 + B_0^2} + \varphi_1(t_1) \quad (19)$$

Комплексну довільну постійну  $c^* = a_0 + ib_0$  визначимо з початкових умов:  $Re\varphi^*(0) = \varphi_1(t_1)$ ,  $Re\dot{\varphi}^*(0) = \dot{\varphi}_1(t_1)$ .

Використовуючи першу умову, знаходимо

$$Re\varphi^*(0) = \varphi_1(t_1) = a_0 + D \frac{D_0}{D_0^2 + B_0^2} + \varphi_1(t_1)$$

або

$$a_0 = -D \frac{D_0}{D_0^2 + B_0^2} \quad (20)$$

знайдемо  $\dot{\varphi}^*$  й використаємо другу умову

$$\dot{\varphi}^* = i\omega^* (a_0 + ib_0) e^{i\omega^* t}$$

$$Re\dot{\varphi}^*(0) = \dot{\varphi}_1(t_1) = -\omega_0 b_0 - a_0 \frac{\gamma_0}{2} \omega_0$$

Або

$$b_0 = - \left[ \frac{\varphi_1(t_1)}{\omega_0} + a_0 \frac{\gamma_0}{2} \right] \quad (21)$$

Представимо комплексну постійну в іншому вигляді, а саме:

$$c^* = a_0 + ib_0 = c_0 e^{i\beta_0} = c_0 (\cos \beta_0 + i \sin \beta_0),$$

звідки

$$a_0 = c_0 \cos \beta_0, \quad b_0 = c_0 \sin \beta_0.$$

де

$$\operatorname{tg} \beta_0 = \frac{b_0}{a_0}, \quad c_0 = \sqrt{a_0^2 + b_0^2} = a_0 \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta_0} = \frac{1}{\cos \beta_0}$$

Тепер комплексний розв'язок (3.24) повністю визначений

$$\varphi^* = \frac{a_0}{\cos \beta_0} e^{i(\omega_0 t + \beta_0)} e^{-\frac{\gamma_0}{2} \omega_0 t} + D \frac{D_0 - iB_0}{D_0^2 + B_0^2} + \varphi_1(t_1)$$

Дійсний розв'язок представиться його дійсною частиною:

$$\varphi = \varphi_1(t_1) + \frac{a_0}{\cos \beta_0} e^{-\frac{\gamma_0}{2} \omega_0 t} \cos(\omega_0 t + \beta_0) + D \frac{D_0}{D_0^2 + B_0^2}$$

Відповідно пружний момент

$$M_{\text{пр}} = M_c + c_2 D \frac{D_0}{D_0^2 + B_0^2} - c_2 D \frac{D_0 e^{-\frac{\gamma_0}{2} \omega_0 t}}{(D_0^2 + B_0^2) \cos \beta_0} \cos(\omega_0 t + \beta_0) \quad (22)$$

Аналізуючи (22), можна побачити, що якщо не враховувати загасання, ( $\gamma_0 = 0$ ), то вираз (22) прийме вигляд (8). За цих умов:  $\omega_0 = \omega$ , коефіцієнт

$$c_2 D \frac{D_0}{D_0^2 + B_0^2} = \frac{M_1^{\text{дин}}}{J_1 + J_2} J_2,$$

а

$$\operatorname{tg} \beta_0 = \frac{b_0}{a_0} = \frac{\dot{\varphi}_1(t_1) D_0}{\omega D} = \frac{\dot{\varphi}_1(t_1) \omega J_1}{M_1^{\text{дин}}} = \operatorname{tg} \beta$$

Максимальний пружний момент буде при  $t = t^{\max} = (\pi - \beta_0) / \omega_0$

$$M_{\text{прmax}} = M_c + c_2 D \frac{D_0}{D_0^2 + B_0^2} \cdot \frac{e^{-\frac{\gamma_0}{2} \omega_0 t^{\max}}}{\cos \beta_0} \quad (23)$$

Вираз (22) представляє величину динамічних навантажень у пружному елементі механізму (вал II – II, рис. 2) у самому загальному виді з урахуванням таких факторів як: наявність зазорів у кінематичних парах механізму (коэф.  $\beta_0$ ) і демпфіруючих опорів (коэф.  $\gamma_0$ ). Тут, як і раніше, другий член виражає інерційний момент маси  $J_2$ , третій член – пружний момент, викликаний вільними коливаннями системи, амплітуда якого зменшується залежно від значення коефіцієнта поглинання  $\psi$ , тому що  $\gamma_0 = \frac{\psi}{2\pi}$ .

Для механізмів повороту  $\psi$  високий і лежить у межах  $\psi = 0,6 \div 1,4$  і ми можемо прийняти, що амплітуда пружного моменту, викликана вільними коливаннями системи, до кінця розгону механізму загасає. Перевіримо таке припущення:

Логарифмічний декремент загасання:

$$\delta_0 = \frac{\Delta U}{2U} = \frac{\psi}{2} \quad (24)$$

З іншої сторони логарифмічний декремент загасання можна розглядати як натуральний логарифм відношення двох послідовних амплітуд пружного моменту.

$$\delta_0 = \ln \frac{A_i}{A_{i+1}}$$

підставляючи значення  $\delta$  з (24), одержимо:

$$A_{i+1} = A_i / e^{\psi/2} \quad (25)$$

Через те, що механізми повороту баштових кранів мають менші швидкості обертання ніж порталні, то перші мають більшу кількість передатних ланок і тому для них можна прийняти  $\psi = 1,4$ .

Підставляючи значення  $\psi = 1,4$  в (25), знайдемо ряд послідовних амплітуд пружного моменту, викликаного вільними коливаннями  $A_2 = 0,5A_1$ ,  $A_3 = 0,25A_1$ ,  $A_4 = 0,125A_1$  і т.д.

Таким чином, після закінчення часу, рівним чотирьом періодам коливань амплітуда пружного моменту складе  $12 \div 13\%$  амплітуди пружного моменту першої гармоніки коливання.

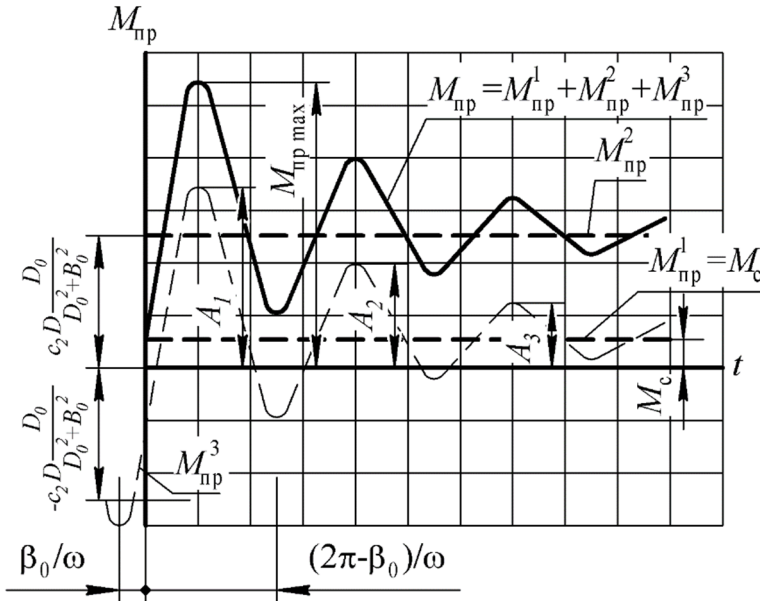


Рис. 5. Зміна динамічних навантажень в процесі розгону механізму  $\psi = 1,4$

На рис. 5 представлено графік, побудований згідно (22) при  $\psi = 1,4$ , який якісно характеризує зміну динамічних навантажень у пружних ланках механізму повороту в процесі його розгону.

Вираз (22) для визначення динамічних навантажень у пружних елементах механізму дозволяє простежити характер зміни цих навантажень у часі. Останнє є важливим, оскільки воно дає можливість підійти до вирішення питання про вплив додаткових динамічних навантажень, викликаних відхиленням вантажних канатів.

В процесі розгону механізму повороту, вантаж, вільно підвішений на вантажних канатах, під дією сил інерції виходить зі стану рівноваги й починає здійснювати коливальний рух, що викликає додаткове динамічне навантаження в елементах передач механізму.

На рис. 5 представлена, приведена до вісі обертання крана, схема елементів крана й вантажу при пуску механізму повороту. У цій схемі, крім раніше введених величин, позначені:

$l$  – довжина підвісу вантажу;

$\alpha$  – кут відхилення вантажних канатів від вертикалі в площині, перпендикулярній площині стріли.

$$J_{\frac{1}{3}} = J_1 \cdot i_{\text{ред}}^2 \cdot i_{\text{п}}^2 \cdot \eta_{\text{ред}} \cdot \eta_{\text{п}} \quad \text{– приведений до вісі крана момент інерції } J_1$$

;

$$\varphi_{\frac{1}{3}} = \frac{\varphi_1}{i_{\text{ред}} \cdot i_{\text{п}}} \quad \text{– приведений до осі крана кут повороту маси } J_1;$$

$$M_{\frac{1}{3}} = M_{\frac{1}{2}} \cdot i_{\text{ред}} \cdot \eta_{\text{ред}} \cdot i_{\text{п}} \cdot \eta_{\text{п}} \quad \text{– приведений до вісі крана крутний}$$

момент двигуна.

Для спрощення розрахункової схеми механізму приймемо ряд припущень:

- знехтуємо вагою й жорсткістю вантажних канатів;
- масу вантажу й вантажозахватного органу зосередимо в одній точці;

- розглянемо відхилення вантажних канатів тільки в площині перпендикулярній площині стріли. Відхилення вантажу внаслідок дії відцентрової й коріолісової сил інерції, що мають напрямок уздовж стріли не враховуємо.

- поперечні коливання вантажу будемо досліджувати в зоні малих кутів відхилення, при яких допустимо припускати  $\sin \alpha = \operatorname{tg} \alpha = \alpha$ ,  $\cos \alpha = 1$ ;

- амплітуди коливань пружної ланки й деформації стріли крана в горизонтальній площині малі в порівнянні з амплітудами вантажу, що розгойдується, і на величину останніх суттєво впливати не будуть, тобто

приймемо, що  $\varphi_{\frac{1}{3}} = \varphi_2$ ,  $v_1 = r \cdot \dot{\varphi}_2$ , де  $v_1$  – окружна швидкість кінця стріли;

Перераховані припущення звичайні для аналогічних досліджень і дають достатню для практики точність [1].

Для визначення кута  $\alpha$  знайдемо кінематичну й потенційну енергії системи.

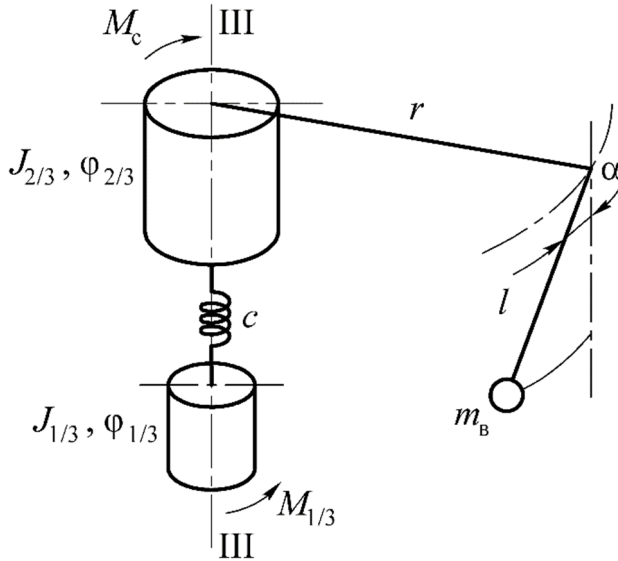


Рис. 6. Приведена до вісі крана схема механізму повороту.

$$T = \frac{(J_{1/3} + J_{2/3}) \cdot \dot{\Phi}_{1/3}^2}{2} + m_B \frac{v^2}{2}$$

де:  $v = v_1 - v_2$ , а  $v_2 = l \cdot \dot{\alpha}$ .

$$П = Q \cdot l \cdot (1 - \cos \alpha),$$

де  $Q$  – вага підвішеного вантажу.

Користуючись рівнянням Лагранжа, одержимо:

$$\left\{ (J_{1/3} + J_{2/3}) \cdot \ddot{\Phi}_2 + \frac{Q}{g} (r^2 \cdot \ddot{\Phi}_3 - r \cdot l \cdot \ddot{\alpha}) = M_{1/3} \right. \quad (26 \text{ а})$$

$$\left. \ddot{\alpha} \cdot l - \ddot{\Phi}_2 \cdot r + g \cdot \alpha = 0 \right. \quad (26 \text{ б})$$

Підставивши  $\ddot{\Phi}_2$  (26 а) в (26 б), знайдемо:

$$\ddot{\alpha} + p^2 \alpha = \frac{M_c \cdot r}{l \cdot (J_{1/3} + J_{2/3})} + \frac{M_{1/3}^0 - M_c}{l \cdot (J_{1/3} + J_{2/3})} \quad (27)$$

$$де: p = \sqrt{\frac{g}{l} \left( 1 + \frac{m_B \cdot r^2}{(J_{1/3} + J_{2/3})} \right)}$$

– частота коливання вантажу.

Розв'язок (27) має вигляд:

$$\alpha = A_1 \cdot \sin pt + A_2 \cdot \cos pt + \frac{r \cdot M_c}{l \cdot p^2 \cdot \left( J_{1/3} + J_{2/3} \right)} + \frac{r \cdot \left( M_{1/3}^0 - M_c \right)}{l \cdot \left( J_{1/3} + J_{2/3} \right) \left( \delta^2 + p^2 \right)} \cdot \left( 1 - \cos pt \right) \quad (28)$$

Довільні постійні  $A_1$  й  $A_2$  знаходимо із початкових умов: при  $t = 0$ ,  $\alpha = 0$ ,  $\dot{\alpha} = 0$ .

$$A_1 = 0, \quad A_2 = \frac{r \cdot M_c}{l \cdot p^2 \cdot \left( J_{1/3} + J_{2/3} \right)}$$

Підставляючи  $A_1$  й  $A_2$  в (27), одержимо вираз для визначення кутів відхилення вантажних канатів

$$\alpha = \frac{M_{1/3}^0 \cdot r}{g \cdot \left( J_{1/3} + J_{2/3} + m_b \cdot r^2 \right)} \cdot \left( 1 - \cos pt \right) \quad (29)$$

Оскільки кут  $\alpha$  невеликий, то натяг у гілках канату

$$S \approx m_b \cdot g,$$

а момент, створюваний відхиленням вантажу щодо вісі обертання крана:

$$M_b = m_b \cdot g \cdot r \cdot \alpha,$$

або, підставляючи замість  $\alpha$  вираз (29), знаходимо

$$M_b = \frac{M_{1/3}^0 \cdot m_b \cdot r^2}{J_{1/3} + J_{2/3} + m_b \cdot r^2} \cdot \left( 1 - \cos pt \right) \quad (30)$$

Знаючи,  $M_b = f(t)$ , визначимо динамічні навантаження, що виникають у пружній ланці II-II з урахуванням відхилення вантажу. З цією метою знову приведемо всі величини до розглядуваної ланки II-II, (рис. 2). Тепер система рівнянь (3) запишеться так:

$$J_1 \cdot \ddot{\varphi}_1 + c_2 (\varphi_1 - \varphi_2) = M_1 \quad (31 \text{ а})$$

$$J_2 \cdot \ddot{\varphi}_2 - c_2 (\varphi_1 - \varphi_2) = -M_c - M_b \quad (31 \text{ б})$$

де  $M_b = \frac{M_1 \cdot m_b \cdot r^2}{J_{1/3} + J_{2/3} + m_b \cdot r^2} (1 - \cos pt)$  – приведений до вала II – II момент від вантажу.

Заміняючи  $\varphi_1 - \varphi_2 = \varphi$ , перепишемо (31):

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = \frac{M_1^0}{J_1} + \frac{M_c^0 + A_0}{J_2} - \frac{A_0}{J_2} \cos pt \quad (32)$$

де

$$A_0 = \frac{M_1^0 \cdot m_B \cdot r^2}{J_{1/3} + J_{2/3} + m_B \cdot r^2} \quad (33)$$

загальний розв'язок (3.38) можна представити так

$$\begin{aligned} \varphi = & A_1 \sin \omega t + A_2 \cos \omega t + \\ & + \frac{M_1}{J_1 \cdot \omega^2} + \frac{M_c + A_0}{J_2 \cdot \omega^2} - \frac{A_0}{J_2 (\omega^2 - p^2)} \cos pt \end{aligned} \quad (34)$$

Постійні  $A_1$  й  $A_2$  знайдемо з початкових умов: при  $t = 0$ ,  $\varphi = \varphi_1(t_1)$ ,  $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_1(t_1)$ , тоді

$$A_1 = \frac{\varphi_1(t_1)}{\omega}, \quad A_2 = \varphi_1(t_1) - \frac{M_1}{J_1 \cdot \omega^2} - \frac{M_c + A_0}{J_2 \cdot \omega^2} - \frac{A_0}{J_2 (\omega^2 - p^2)}$$

Помножуючи (34) на крутильну жорсткість  $c_2$  і, підставляючи значення постійних, одержимо:

$$\begin{aligned} M_{\text{нр}} = & \frac{\dot{\varphi}_1(t_1)}{\omega} c_2 \sin \omega t + M_c \cos \omega t + c_2 \left( \frac{M_1}{J_1 \cdot \omega^2} + \frac{M_c + A_0}{J_2 \cdot \omega^2} \right) + \\ & + c_2 \left[ \frac{A_0}{J_2 (\omega^2 - p^2)} - \frac{M_1^0}{J_1 \cdot \omega^2} - \frac{M_c + A_0}{J_2 \cdot \omega^2} \right] \cdot \cos \omega t - \frac{A_0 \cdot c_2}{J_2 (\omega^2 - p^2)} \cdot \cos pt \end{aligned} \quad (35)$$

Зауважуючи, що

$$c_2 \left( \frac{M_1}{J_1 \cdot \omega^2} - \frac{M_c}{J_2 \cdot \omega^2} \right) = \frac{M_1 - M_c}{J_1 + J_2} \cdot J_2 + M_c,$$

а

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\varphi}_1(t_1)}{\omega} c_2 \sin \omega t - \frac{M_1 - M_c}{J_1 + J_2} \cdot J_2 \cos \omega t = \\ = - \frac{(M_1 - M_c) \cdot J_2 \cdot \cos(\omega t + \beta)}{(J_1 + J_2) \cdot \cos \beta} \end{aligned} \quad ,$$

де, як і раніше,  $\operatorname{tg} \beta = \frac{\omega \cdot \dot{\varphi}_1(t_1) \cdot J_1}{M_1 - M_c}$ ,

перепишемо (35) у вигляді:

$$M_{np} = M_c + \frac{M_1 - M_c}{J_1 + J_2} \cdot J_2 - \frac{(M_1 - M_c)}{(J_1 + J_2) \cdot \cos \beta} \cdot J_2 \cdot \cos(\omega t + \beta) +$$

$$+ \frac{A_0 \cdot c_2}{J_2(\omega^2 - p^2)} (\cos \omega t - \cos pt) + \frac{A_0 \cdot c_2}{J_2 \cdot \omega^2} - \frac{A_0 \cdot c_2}{J_2 \cdot \omega^2} \cos \omega t$$

або, оскільки частота  $p \ll \omega$ , то нехтуючи  $p^2$  в порівнянні з  $\omega^2$ , остаточно одержимо

$$M_{np} = M_c + \frac{M_1 - M_c}{J_1 + J_2} \cdot J_2 - \frac{(M_1 - M_c)}{(J_1 + J_2) \cdot \cos \beta} \times$$

$$\times J_2 \cdot \cos(\omega t + \beta) + \frac{A_0 \cdot J_1}{J_1 + J_2} (1 - \cos pt) \tag{36}$$

Отриманий вираз (36) для визначення динамічних навантажень у пружній ланці механізму з урахуванням коливань вантажу відрізняється від виразу (8), отриманого без врахування коливань вантажу, тільки останнім членом.

На рис. 7 зображений графік  $M_{np}$  згідно (36), де на графік  $M_{np}$ , що представляє вираз (8) накладений графік пружного моменту  $M_{np}^2$ , викликаний коливаннями вантажу із частотою  $p$  в п'ять раз менше частоти  $\omega$ .

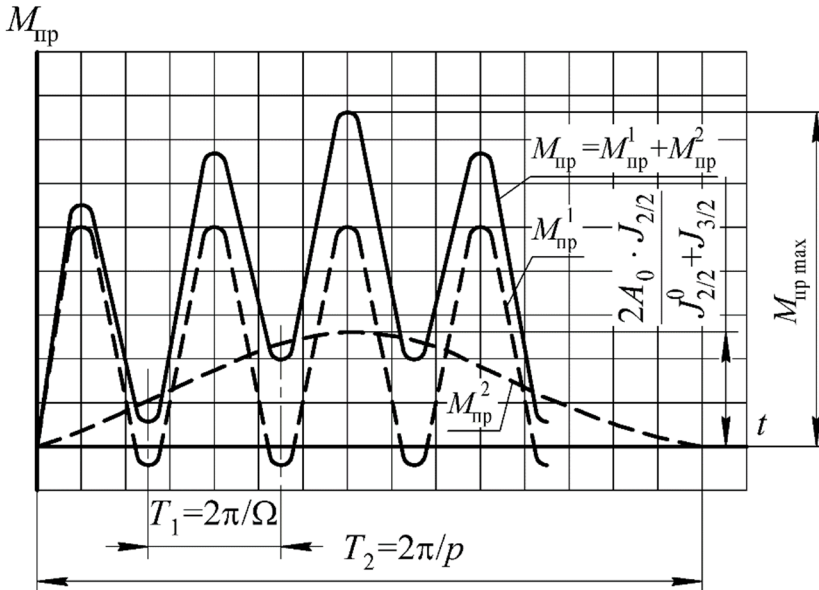


Рис. 7. Зміна динамічних навантажень в елементах механізму з урахуванням відхилення вантажних канатів  $M_1 = \text{const}$ ,  $\psi = 0$ .

Як видно з рис. 7 після закінчення часу  $t = \pi / p$ ,  $M_{\text{пр}}$  досягає свого максимального значення  $M_{\text{пр max}}$ , величина якого більше значення  $M_{\text{пр max}}$  виразу (8) на величину  $\frac{2 \cdot A_0 \cdot J_1}{J_1 + J_2}$ .

У дійсності, динамічні навантаження в елементах механізму швидко загасають. Тому якщо на графік пружного моменту рис. 5 отриманого з урахуванням демпфіруючих опорів накласти графік пружного моменту, викликаного відхиленням вантажного канату, то одержимо картину, зображену рис. 8.

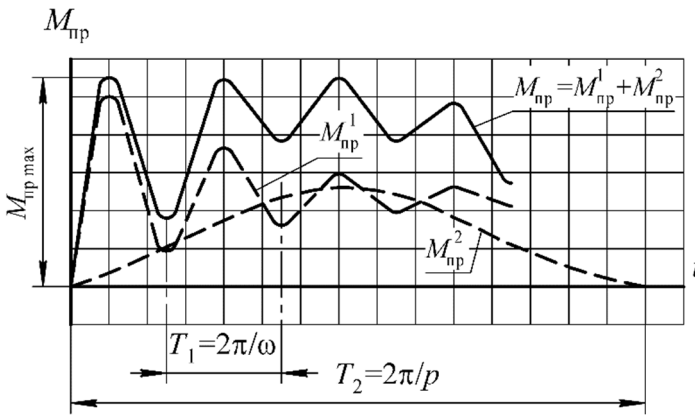


Рис 8. Зміна динамічних навантажень в елементах механізму з урахуванням відхилення вантажних канатів  $\psi = 1,4$ .

Із рис. 8 видно, що додаткове динамічне навантаження  $M_{\text{пр}}^2$ , викликане відхиленням вантажних канатів, змінює характер навантажень, а на величину максимальних навантажень може позначатися незначно.

Спробуємо знайти умови, що визначають ступінь впливу додаткових навантажень, на максимальну величину динамічних навантажень, що виникають внаслідок розгону крана без вантажу. Розглядаючи це питання, приймемо коефіцієнт поглинання  $\psi = 1,4$ .

Знайдемо величину максимальних динамічних навантажень без врахування впливу відхилення вантажних канатів з (8). Нехтуючи  $M_c$  й зазорами в кінематичних парах механізму, одержимо:

$$M_{\text{пр max}}^1 = \frac{2 \cdot M_1 \cdot J_2}{J_1 + J_2} \quad (37)$$

Максимальна амплітуда пружного моменту, викликана відхиленням

вантажних канатів  $M_{\text{пр max}}^2 = \frac{2 \cdot A_0 \cdot J_1}{J_1 + J_2}$ , або підставляючи значення  $A_0$  з (24)

$$M_{\text{прmax}}^2 = \frac{2 \cdot M_1 \cdot m_b \cdot r^2 \cdot J_1}{(J_1 + J_2)(J_{1/3} + J_{2/3} + m_b \cdot r^2)} \quad (38)$$

Порівнюючи вирази (3.42) і (3.43) доходимо висновку. Якщо

$$J_2 < J_{1/3} \frac{m_b \cdot r^2}{(J_{1/3} + J_{2/3} + m_b \cdot r^2)} \quad (39)$$

то величина  $M_{\text{прmax}}^2$  більше ніж  $M_{\text{прmax}}^1$  й при визначенні максимальних динамічних навантажень в елементах передач механізму необхідно враховувати додаткове навантаження, викликане відхиленням вантажних канатів.

Для цього треба побудувати графік  $M_{\text{пр}}$  згідно (22), наклавши на нього графік  $M_{\text{пр}}$  вантажного моменту останній член виразу (36), при цьому частоту коливання вантажу  $P$  потрібно вибрати найвищу, виходячи з експериментальних умов роботи крана. Якщо

$$J_2 > J_1 \frac{m_b \cdot r^2}{(J_{1/3} + J_{2/3} + m_b \cdot r^2)} \quad (40)$$

то визначальним фактором врахування динамічних навантажень, крім умови (40) буде ще відношення частот  $\omega_0 / P$ .

Так на рис. 8 видно, якщо  $\omega_0 / P \geq 5$  й виконується умова (3.45), то при визначенні максимальних динамічних навантажень вплив відхилення вантажних канатів можна не враховувати. Якщо  $\omega_0 / P < 5$ , то необхідно побудувати сумарний графік, подібний рис. 8. У цьому випадку може виявитися, що сумарна амплітуда другої або третьої гармоніки  $M_{\text{пр}}^1$  з амплітудою вантажного моменту  $M_{\text{пр}}^2$  буде по величині більше амплітуди першої гармоніки.

Інакше кажучи, при виконанні умови (40) ступінь впливу додаткових навантажень  $Q$ , викликаних відхиленням вантажних канатів на величину максимальних динамічних навантажень залежить від відношень:

$$\mu = \frac{J_2 \cdot (J_{1/3} + J_{2/3} + m_b \cdot r^2) m_b \cdot r^2}{(J_1 \cdot m_b \cdot r^2)} \quad \text{і} \quad \frac{\omega_0}{P} \approx \frac{\omega}{P} \quad (41)$$

Якщо для механізмів обертання баштових кранів прийняти  $\psi = 1,4$ , то неважко побудувати криві, представлені на рис. 9, які показують у відсотковому відношенні збільшення основних навантажень за рахунок додаткових.

$$M_{\text{пр max}} = \frac{2 \cdot M_{M/3}^0 \cdot (m_{\text{зп}} \cdot \rho_0^2 + I_3)}{m_{\text{зп}} \cdot \rho_0^2 + I_{2/3}^0 + I_3}, \quad (42)$$

Так, при  $\mu = 2$  й  $\omega_0 / p = 1$  додаткові навантаження, викликані відхиленням вантажних канатів, збільшують динамічні навантаження на 50%; при тій же величині  $\mu = 2$ , але при  $\omega / p = 5$  – на 5%.

Тому якщо просто підсумувати максимальні амплітуди  $M_{\text{пр max}}^1$  (37) і  $M_{\text{пр max}}^2$  (38) може привести до завищених результатів.

**Висновки.** Визначено характер зміни динамічних навантажень в механізмі повороту крану на колоні з урахуванням пружного зв'язку приведених мас, дисипації та розгойдування вантажу. Складена двомасова модель механізму повороту крану на колоні. Система рівнянь, що описує дану модель, розв'язана в аналітичному вигляді. Отримані аналітичні залежності характеризують коливальний процес і дають змогу більш точно оцінити величину зусиль, що виникають в несучих елементах механізму повороту крану на колоні.

### Список використаних джерел

1. Grigorov, O., Druzhynin, E., Anishchenko, G., Strizhak, M., & Strizhak, V. (2018). Analysis of various approaches to modeling of dynamics of lifting-transport vehicles. *International Journal of Engineering and Technology(UAE)*, 7(4). <https://doi.org/10.14419/ijet.v7i4.3.19553>
2. Hazriq, I. J. Optimal performance of a nonlinear gantry crane system via priority-based fitness scheme in binary PSO algorithm / I. J. Hazriq, M. A. Nursabillilah, Z. Mohamed and all // *Processing of IOP Conference. Series: Materials Science and Engineering.* – 2011. – Vol. 53. – P. 1-6.
3. Cakan, A. Position regulation and sway control of a nonlinear gantry crane system / A. Cakan, O. Umit // *International journal of scientific & technology research.* – 2016. – Vol. 5 (11). – P. 121-124.
4. Arabasi, S. Simultaneous travel and hoist maneuver input shaping control using frequency modulation / S. Arabasi, Z. Masoud // *Hindawi Shock and Vibration.* – 2016. – Vol. 10 (3). – P. 179-188.
5. O'Connor, W. Gantry crane control of a double-pendulum, distributed-mass load, using mechanical wave concepts / W. O'Connor, H. Habibi // *Mechanical Sciences.* – 2013. – Vol. 4. – P. 251-261.
6. N. Sun Nonlinear Antiswing Control for Crane Systems With Double-Pendulum Swing Effects and Uncertain Parameters: Design and Experiments / N. Sun, Y. Wu, Y. Fang and H. Chen // *Transactions on*

- 
- Automation Science and Engineering*, vol. 15, no. 3, pp. 1413-1422, July 2018, doi: 10.1109/TASE.2017.2723539.
7. Perig, A. V. Research into 2D dynamics and control of small oscillations of a cross-beam during transportation by two overhead cranes / A. V. Perig, A. N. Stadnik, A. A. Kostikov and all // *Hindawi Shock and Vibration*. – 2017. – Vol. 12 (1). – P. 1-21.
  8. Perig, A. V. Spherical pendulum small oscillations for slewing crane motion / A. V. Perig, A. N. Stadnik, A. I. Deriglazov // *Hindawi Shock and Vibration*. – 2014. – Vol. 2. – P. 24-31.
  9. Hryhorov, O. Improvement of the «carriage-cargo» system motion mathematical model for solving the problem of lifting and transport machines control / O. Hryhorov, A. Okun // *Автомобильный транспорт*. – 2017. – Вып. 40. – С. 120-124.
  10. Ловейкін В. С. Оптимізація режиму руху механізму зміни вильоту вантажу баштового крана з горизонтальною стрілою / В.С.Ловейкін, Ю.О.Ромасевич, О.В.Стехно // *Машинобудування*, 2017, №20
  11. Loveikin V. Analysis of the start-up process of the tower crane slewing mechanism with a steady state motion mode of its load trolley / Viacheslav Loveikin, Yuriy Romasevych, Vitalii Kurka, Denis Mushtyn, Kostiantyn Pochka // *Опір матеріалів і теорія споруд/Strength of Materials and Theory of Structures* – 2020. № 105

## **DYNAMIC CHARACTERISTICS OF THE CRANE ROTATION MECHANISM ON THE COLUMN**

Valentyn Kovalenko, Vsevolod Stryzhak, Sergii Iglin, Oleg Kovalenko,  
Mariana Stryzhak

*National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute"*

**Abstract.** The literature review showed that in the existing mathematical models, the main attention is paid to dynamic processes associated with low-frequency oscillations of the load. The issues of high-frequency vibrations and dynamic processes in metal structures require additional lighting, taking into account all the components of the dynamic load. This approach will make it possible to more accurately determine the magnitude of the forces arising in the bearing elements, thereby increasing the reliability and safety of the operation of hoisting machines. The kinematic diagram of the crane swing mechanism on the column is presented. A two-mass dynamic model of the drive system - the slewing part of the crane is considered. A mathematical model has been compiled, in which standard assumptions are accepted: the swinging of the load is not taken into account, there is an elastic connection between the engine and the driven shaft of the swing mechanism, with all other crane masses reduced to it. Separately presented are graphs calculated from the obtained

dependencies: change in dynamic loads during acceleration of the mechanism with constant torque, change in dynamic loads during acceleration of the mechanism, taking into account dissipation, change in dynamic loads in the elements of the mechanism, taking into account the deviation of the cargo ropes, changes in dynamic loads in the elements of the mechanism, taking into account deflections of cargo ropes and dissipation.

**Keywords:** crane, rotation mechanism, dynamics