УДК 621.81

А.С.ГРИНЧЕНКО, канд.техн.наук, ХГТУСХ

НЕКОТОРЫЕ ПРИКЛАДНЫЕ МОДЕЛИ ПРОЧНОСТНОЙ НАДЕЖНОСТИ ПРИ ВНЕЗАПНЫХ ОТКАЗАХ

Запропоновано спосіб схематизації реального випадкового процесу навантаження, який при цьому перетворюється у дискретну послідовність статистично незалежних перевантажень. Розглянуто визначення імовірності неруйнування від багаторазової дії перевантажень. Отримані деякі аналітичні моделі, зручні при виконанні практичних розрахунків елементів машин і конструкцій на міцнісну надійність.

The mode of a schematization are real casual process loading is offered which thus will be transformed to a discrete sequence statistically of independent overloads. The definition of probability durability is considered at a multiplis operation of overloads. Some analytical models convenient at execution of practical accounts of elements machines and constructions on durability reliability are obtained.

Прогнозирование прочностной надежности элементов машин и конструкций связано как с построением моделей деградационных (усталостных) отказов, так и с использованием моделей внезапных отказов, обусловленных перегрузками, при которых вероятность разрушения определяется величиной максимума некоторой характеристики напряженного состояния. Известные модели надежности при внезапных отказах [1,2,3,4], в большинстве случаев основанные на результатах теории выбросов случайных процессов [5,6], с точки зрения возможностей практического применения имеют ряд ограничений. К ним следует отнести преимущественное рассмотрение случаев относительно больших перегрузок [1,2], при первом воздействии которых квазистатическое разрушение происходит с вероятностью, близкой к единице. При этом большинство аналитических результатов [2,3,4,7] получено для моделей с гауссовским процессом нагружения.

В статье предлагается подход к построению моделей внезапных отказов, позволяющий рассматривать наиболее распространенный в расчетной практике вариант относительно малых перегрузок, многократно воздействующих на элементы, случайная прочность которых имеет значительное рассеивание. Для описания распределений максимумов процесса нагружения и перегрузок использовано распределение Вейбулла, что расширяет возможности получения аналитических результатов и эффективного применения численных методов.

Осуществляя построение прикладных моделей внезапных отказов, при анализе случайного процесса нагружения ограничимся рассмотрением распределения его максимумов. Будем оценивать характеристики распределения таких максимумов $P_{\max}^{(i)}$, которые являются наибольшими на некоторых, заданных при схематизации реального процесса периодах его квантования Δt (см. рис.).

Рассмотрим практически наиболее реальный вариант, когда можно полагать, что распределение случайной статической прочности элементов имеет детерминированную нижнюю границу. Соответствующий такой границе уровень P_o для обобщенного параметра нагруженности, однократное превышение которого максимумом процесса $P_{\max}$ может с отличной от нуля вероятностью привести к статическому разрушению или недопустимой деформации, будем считать статически неповреждающим уровнем нагрузки. Любое превышение максимумом процесса нагружения уровня P_o назовем перегрузкой, а случайной величиной перегрузки будем считать положительную разность $P_н = P_{\max} - P_o$ (рис.). Под случайной величиной прочности элемента $P_п$ будем понимать величину перегрузки, разрушающей этот элемент.

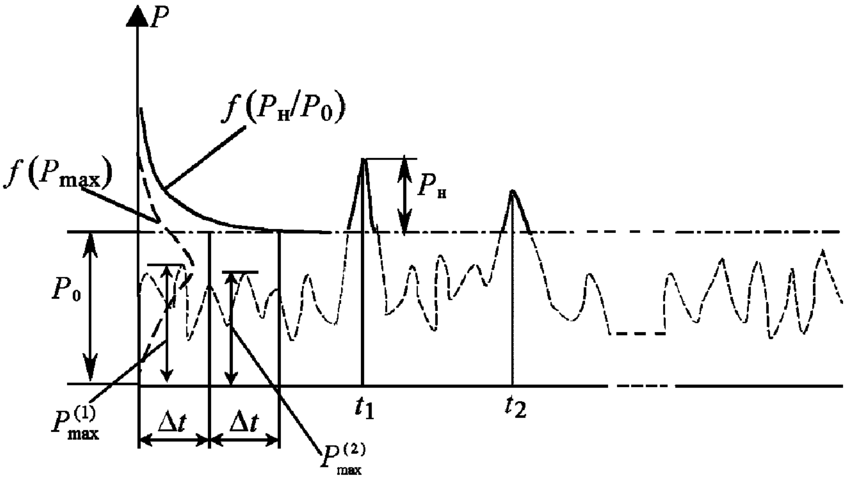

Схема формирования потока перегрузок.

С помощью описанной выше схематизации реальный непрерывный процесс нагружения, распределение максимумов которого не зависит от времени, заменяется эквивалентным в смысле опасности внезапного статического разрушения дискретным потоком случайных и (при достаточно больших значениях P_o) статистически независимых перегрузок $P_н$ (рис.).

Если функция распределения $F(P_{\max})$ максимумов, соответствующих определенному периоду квантования Δt процесса нагружения, известна, то условную функцию распределения величины перегрузок $F(P_н/P_o)$ можно получить из выражения:

$$F\left(P_н / P_o\right) = \frac{F(P_o + P_н) - F(P_o)}{1 - F(P_o)}. \quad (1)$$

В случае пуассоновского потока независимых перегрузок, когда среднее число перегрузок, возникающих за время t, определяется ведущей функцией потока $m(t)$, используя [4, 8] можно показать, что при не зависящем от времени распределении (1) функция распределения абсолютного максимума величины перегрузки $P_н^*$ будет иметь вид

$$F_a\left(P_н^*,t\right)=\exp\left\{-m(t)\cdot\left[1-F\left(P_н^*/P_o\right)\right]\right\}. \qquad (2)$$

Если начальная плотность распределения не зависящей от времени случайной прочности элементов $g(P_п)$ задана, то вероятность неразрушения от перегрузок за время t может быть определена [8] из выражения

$$R(t)=\int_o^{\infty}F_a(p,t)\cdot g(p)dp. \qquad (3)$$

Положим, что случайные максимумы P_{max} процесса нагружения распределены по закону Вейбулла с функцией распределения

$$F(P_{max})=1-\exp\left[-\left(\frac{P_{max}}{a_н}\right)^{в_н}\right], \qquad (4)$$

где $а_н$ и $в_н$ – параметры масштаба и формы распределения, соответственно.

Такое предположение оправдано не только соображениями удобства статистического оценивания параметров $а_н$ и $в_н$ по результатам натурной тензометрии нагруженности, но и тем, что, как известно [2], у узкополосного стационарного гауссовского процесса максимумы имеют распределение вида (4) при $в_н = 2$ (закон Релея), а для широкополосных гауссовских процессов распределение максимумов близко к нормальному и также хорошо аппроксимируется функцией (4) при $в_н > 3$.

Если максимумы процесса нагружения имеют функцию распределения (4), то соответствующая функция условного распределения (1) для величины перегрузок $P_н > 0$ имеет вид

$$F\left(P_н/P_o\right)=1-\exp\left[\frac{P_o^{в_н}-(P_o+P_н)^{в_н}}{a_н^{в_н}}\right]. \qquad (5)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи, для которых удается получить выражение вероятности неразрушения (3) в аналитическом виде. Если максимумы процесса нагружения имеют экспоненциальное распределение (при $в_н = 1$), то из (5) следует, что и перегрузки будут распределены экспоненциально:

$$F\left(P_н/P_o\right)=1-\exp\left(-\frac{P_н}{a_н}\right). \qquad (6)$$

Пусть прочность элементов на интервале (P_o, P_1) имеет равномерное распределение с плотностью

$$g(P_п)=1/(P_1-P_o).$$

Тогда из (2), (6) и (3) следует, что

$$R(t)=\frac{a_н}{P_1-P_o}\left[E_1\left(m(t)\cdot \mathrm{e}^{-\frac{P_1}{a_н}}\right)-E_1\left(m(t)\cdot \mathrm{e}^{-\frac{P_o}{a_н}}\right)\right], \qquad (7)$$

где $E_1(x)=\int\limits_x^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\tau}}{\tau}d\tau$ – интегральная показательная функция. Вычисление этой специальной функции может производиться с необходимой точностью с помощью разложения в ряд или аппроксимации многочленами [9].

При стационарном процессе нагружения функцию потока перегрузок естественно положить линейной $m(t) = \omega\, t$. Средняя частота статистически независимых перегрузок в единицу времени ω в соответствии с (4) может быть определена по формуле

$$\omega=\frac{1}{\Delta t}\exp\left[-\left(\frac{P_o}{a_н}\right)^{в_н}\right]. \qquad (8)$$

Тогда выражение (7) принимает вид

$$R(t)=\frac{a_н}{P_1-P_o}\left[E_1\left(\frac{t}{\Delta t}\cdot\exp\left(-\frac{P_o+P_1}{a_н}\right)\right)-E_1\left(\frac{t}{\Delta t}\exp\left(-\frac{2\cdot P_o}{a_н}\right)\right)\right]. \qquad (9)$$

При проектировочных расчетах для случайных величин нагрузки и прочности обычно задаются две характеристики: среднее значение и коэффициент вариации. В связи с этим, входящие в выражения (7) и (9) параметры распределений максимумов нагрузки $a_н$ и прочности $P_о$ и P_1 удобно статистически оценивать по методу моментов. Если известны средние величины действующих максимумов $\overline{P}_{max}$ и статически разрушающих элемент нагрузок $\overline{P}_r$, а также коэффициент вариации v_r разрушающих нагрузок, то соответствующие оценки для параметров имеют вид

$$a_н=\overline{P}_{max}; \quad P_o=\overline{P}_r\left(1-v_r\sqrt{3}\right); \quad P_1=\overline{P}_r\left(1+v_r\sqrt{3}\right).$$

Практическая применимость формул (7) и (9) ограничивается теми случаями, когда максимумы процесса нагружения имеют большое рассеивание (с коэффициентом вариации, равным к единице). Более широкий круг реальных процессов нагружения может быть охвачен, если параметр формы распределения максимумов (4) будет принимать значения $в_н > 1$. При этом положим, что прочность элементов так же, как и перегрузки, имеет условное распределение Вейбулла с плотностью

$$g(P_п)=\frac{в_п}{a_п}\left(\frac{P_o+P_п}{a_п}\right)^{в_п-1}\exp\left[\frac{P_o^{в_п}-(P_o+P_п)^{в_п}}{a_п^{в_п}}\right]. \qquad (10)$$

Будем рассматривать реальную ситуацию, когда величина $\left(P_o/a_н\right)^{в_н}>>1$, ввиду того, что обычно запас статической прочности элемента должен значительно превышать единицу. Тогда даже для относительно малых значений перегрузки $P_н$ функция распределения (5) будет близка к единице, что позволяет в выражении (2) принять $\exp\left\{-\left[1-F\left(P_н/P_o\right)\right]\right\}\cong F\left(P_н/P_o\right)$ и использовать функцию распределения абсолютного максимума перегрузки в виде

$$F_a\left(P_н^*,t\right)\cong\left[F\left(P_н^*/P_o\right)\right]^{m(t)}. \tag{11}$$

В частном случае, если параметры формы $в_п = в_н = в$, используя (10) и (11), получим, что интеграл (3) для вероятности неразрушения приводится к бета-функции [9] и выражается с помощью гамма-функций следующим образом

$$R(t)=\frac{\Gamma(1+m(t))\cdot\Gamma(1+\Omega)}{\Gamma(1+m(t)+\Omega)}, \tag{12}$$

где $\Omega=\left(a_н/a_п\right)^в$ – параметр, комплексно учитывающий соотношение средних величин прочности и максимумов нагрузки (запас прочности), а также уровень рассеивания максимумов, определяемый величиной в.

Соответствующая (12) плотность распределения ресурса до разрушения от перегрузок имеет вид

$$f(t)=\frac{\omega(t)\cdot\Gamma(1+\Omega)\cdot\Gamma(1+m(t))[\psi(1+m(t)+\Omega)-\psi(1+m(t))]}{\Gamma(1+m(t)+\Omega)}, \tag{13}$$

где $\psi(x)=\dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$ – пси-функция (дигамма-функция) [9];

$\omega(t)=\dfrac{dm(t)}{dt}$ – функция интенсивности потока перегрузок.

Из (12) и (13) следует, что функция интенсивности перегрузочных отказов $\lambda(t)$ определяется формулой

$$\lambda(t)=\omega(t)\cdot[\psi(1+m(t)+\Omega)-\psi(1+m(t))]. \tag{14}$$

При линейной функции потока перегрузок $m(t)=\omega\cdot t$ получим, что

$$\frac{d\lambda(t)}{dt}=\omega^2[\psi'(1+\omega t+\Omega)-\psi'(1+\omega t)] \tag{15}$$

и, учитывая, что тригамма-функция $\psi'(x)$ при $x > 1$ является монотонно убывающей, из (15) следует, что интенсивность перегрузочных отказов также должна монотонно убывать. Обычно такой характер поведения функции интенсивности отказов в начальный период эксплуатации наблюдается у многих элементов машин.

При целых значениях числа перегрузок m из (12) следует выражение для вероятности неразрушения

$$R_m = {m!}\Big/{\prod_{i=1}^{m}(i+\Omega)}. \qquad (16)$$

Для последовательного вычисления вероятности (16) удобно использовать рекуррентную формулу:

$$R_{m+1} = R_m \frac{m+1}{(m+1+\Omega)}, \qquad m = 1, 2, \ldots$$

где $R_1 = 1/(1+\Omega)$ – вероятность неразрушения от первой перегрузки.

Плотность дискретного распределения вероятностей разрушения при воздействии m-ой перегрузки определяется выражением

$$Q_m = {(m-1)!\,\Omega}\Big/{\prod_{i=1}^{m}(i+\Omega)}. \qquad (17)$$

Для последовательного вычисления вероятностей разрушения при каждой перегрузке справедлива рекуррентная формула:

$$Q_{m+1} = Q_m \frac{m}{(m+1+\Omega)}, \quad m = 1, 2, \ldots$$

где $Q_1 = \Omega/{1+\Omega}$ – вероятность разрушения при первой перегрузке.

Очевидно, что при малых значениях параметра $\Omega \ll 1$ он может служить оценкой сверху для вероятности разрушения от первой перегрузки.

Распределение (17) по своим свойствам существенно отличается от часто используемого при оценке надежности по внезапным отказам [1] геометрического распределения. Причина этого состоит в косвенном учете формулой (17) эффекта изменения начального распределения прочности элементов при каждом воздействии перегрузок. Описания распределения (17) в литературе автору найти не удалось, в связи с чем будем называть его гипогеометрическим. Конечное среднее для числа перегрузок до разрушения $\overline{m} = \Omega/(\Omega-1)$ у гипогеометрического распределения существует только при $\Omega > 1$, т.е. в случае, который при расчетах на прочность обычно не имеет практического значенш

Выражение (12) при $\Omega < 0{,}1$ достаточно хорошо аппроксимируется степенным распределением. Один из простейших вариантов такой аппроксимации имеет вид:

$$R^*(i) = \left[{m(t)}/{C} + 1\right]^{-\Omega}, \qquad (18)$$

где $C = 0{,}577215\ldots$ – постоянная Эйлера.

При стационарном процессе нагружения и линейной функции потока перегрузок из (18) с учетом (8) получается формула для расчета гаммапроцентного ресурса до разрушения от перегрузки:

$$t_\gamma = C\cdot\Delta t\frac{\left[1-(0{,}01\gamma)^{1/\Omega}\right]}{(0{,}01\gamma)^{1/\Omega}}\exp\left[\left(\frac{P_o}{a_н}\right)^{в}\right], \tag{19}$$

где γ – вероятность неразрушения, задаваемая в процентах.

Входящие в выражения (12), (16), (18) и (19) параметры распределений максимумов нагрузки $a_н$ и $в$ и прочности $a_п$ и P_o при проектировочных расчетах могут быть оценены по средним величинам максимумов $\overline{P}_{\max}$ и разрушающих нагрузок $\overline{P}_r$, а также по соответствующим коэффициентам вариации $v_{\max}$ и v_r с помощью метода моментов. При этом параметры распределения максимумов определяются по формулам

$$в \cong \frac{1{,}126}{v_{\max}} + \frac{0{,}011}{v^2_{\max}} - 0{,}137; \quad \text{при } 0{,}08 \le v_{\max} \le 1,$$

$$a_н = \overline{P}_{\max} \Big/ \Gamma(1+1/в).$$

Затем из уравнения

$$\left[\Gamma\left(1+2/в,\theta\right)\exp(-\theta) - \Gamma^2\left(1+1/в,\theta\right)\right]^{0,5} \Big/ \Gamma\left(1+1/в,\theta\right) = v_r \tag{20}$$

определяется параметр $\theta = \left(P_o / a_п\right)^{в}$.

В уравнении (20) функции вида $\Gamma(x,\theta) = \int\limits_{\theta}^{\infty} e^{-\tau}\tau^{x-1}d\tau$ являются неполными гамма-функциями [9]. Уравнение имеет единственный положительный корень при условии, что $v_r \le v_{\max}$. После оценки величины θ параметры распределения прочности определяются по формулам

$$a_п = \overline{P}_r \Big/ \Gamma(1+1/в,\theta)\cdot\exp\theta; \quad P_o = a_п\theta^{1/в}$$

Использование распределений перегрузок (5) и прочности (10) в общем виде, когда $в_н \ne в_п$, приводит к необходимости численного интегрирования (3) для определения вероятности неразрушения. Применяя преобразование, предложенное в [10], и переходя в (3) к переменной $F(P/P_o)$, получим более удобное для численного интегрирования выражение

$$R(t) = \Omega\beta\int\limits_0^1 \frac{[\theta_н - \ln(1-F)]^{\beta-1}}{1-F}\exp\left\{m(t)\ln F + \theta_п - \Omega[\theta_н - \ln(1-F)]^{\beta}\right\}dF, \tag{21}$$

где $\Omega = \left(\frac{a_н}{a_п}\right)^{в_п}$; $\beta = \frac{в_п}{в_н}$; $\theta_н = \left(\frac{P_о}{a_н}\right)^{в_н}$; $\theta_п = \left(\frac{P_o}{a_п}\right)^{в_п}$.

Если процесс нагружения стационарный, то входящая в (21) функция потока перегрузок имеет вид: $m(t)=\dfrac{t}{\Delta t}\exp(-\theta_{н})$. Некоторые результаты, полученные с помощью численного интегрирования при $P_o = 0$, приведены в [10].

Рассмотренные модели и методы могут служить теоретической основой при проведении инженерных расчетов элементов машин и конструкций на прочностную надежность от воздействия перегрузок, позволяя учитывать влияние фактора продолжительности случайного нагружения.

Список литературы: **1.** *Герцбах И.Б., Кордонский Х.Б.* Модели отказов: – М.: Сов.радио, 1966. –168 с. **2.** *Болотин В.В.* Применение методов теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений. – М.: Стройиздат, 1971. – 256 с. **3.** *Чирков В.П.* Вопросы надежности механических систем. – М.: Знание, 1981. – 122 с. **4.** *Гусев А.С., Светлицкий В.А.* Расчет конструкций при случайных воздействиях. – М.: Машиностроение, 1984. – 240 с. **5.** *Свешников А.А.* Прикладные методы теории случайных функций. – М.: Наука, 1968. – 464 с. **6.** *Тихонов В.И.* Выбросы случайных процессов. – М.: Наука, 1970. – 392 с. **7.** *Переверзев Е.С., Чумаков Л.Д.* Параметрические модели отказов и методы оценки надежности технических систем. – К.: Наукова думка, 1989. – 184 с. **8.** *К.Капур, Л.Ламберсон* Надежность и проектирование систем. – М.: Мир, 1980. – 604 с. **9.** Справочник по специальным функциям / Под ред. М.Амбрамовица и И.Стиган. – М.: Наука, 1979. – 832 с. **10.** *Гринченко А.С.* Численное решение задач прогнозирования и обеспечения прочностной надежности при многократных перегрузках. // Вісник ХДТУСГ, Харків, 2001. – Вип. 8, т.1. – С. 257-264.

Поступила в редколлегию 28.01.03.

УДК 621.891

Р.М.ДЖУС; В.М.СТАДНІЧЕНКО, канд .техн. наук;
М.Г.СТАДНІЧЕНКО, канд .техн. наук; ХІ ВПС

ПРИСТРІЙ ДЛЯ БЕЗУПИННОЇ РЕЄСТРАЦІЇ ДИНАМІКИ ЗМІНИ ГЕОМЕТРІЇ ЗРАЗКІВ ПРИ ВИПРОБУВАННЯХ НА ТЕРТЯ І ЗНОС

У статті докладно викладений спосіб безупинної реєстрації динаміки зміни геометрії зразків при випробуваннях на тертя і знос за допомогою сконструйованого авторами пристрою, що встановлюється на стандартну машину тертя 2070 СМТ-1. Пристрій може реєструвати як знос зразків, так і збільшення їхніх розмірів з точністю до 0,49 мкм.

In the article is particularized the way of continuous registration of dynamics of change of models geometry at tests for friction and wearing with the help of the device, constructed by the writers, which one is established on the standard machine of friction 2070 СМТ-1. The device can log both wearing of models, and increase of their sizes to within 0,49 microns.

Важливою задачею в трибологічних дослідженнях є можливість простежити динаміку зміни геометрії зразків при випробуваннях на тертя і знос.