

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

**Чікіна Н.О., Антонова І.В.**

**КРИВОЛІНІЙНІ ТА ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ**

Навчально-методичний посібник  
для студентів технічних спеціальностей  
усіх форм навчання вищих навчальних закладів

Рекомендовано  
редакційно-видавничою  
радою університету,  
протокол № 3 від 06.11.2019 р.

Харків  
НТУ «ХП»  
2019

УДК 517.3(075)

Ч 60

*Рецензенти:*

*Ю.І. Першина*, д-р ф.-мат. наук, професор кафедри вищої та прикладної математики Української інженерно-педагогічної академії

*Т.С. Полянська*, канд. ф.-мат. наук, доцент кафедри вищої математики НТУ «ХП»

**Чікіна Н.О.**

**Ч 60** Криволінійні та поверхневі інтеграли : навч.-метод. посіб. / Чікіна Н.О., Антонова І.В. – Харків : НТУ «ХП», 2019. – 76 с.

ISBN

Навчально-методичний посібник містить основні теоретичні положення, приклади розв'язання задач та завдання для самостійної роботи різних рівнів складності з розділів курсу вищої математики «Криволінійні інтеграли» та «Поверхневі інтеграли».

Призначений для студентів та викладачів вищих технічних навчальних закладів.

Іл. 37 Бібліогр. 5

ISBN

УДК 517.3(075)

© Н.О. Чікіна, І.В. Антонова, 2019 р.

## ПЕРЕДМОВА

Навчально-методичний посібник охоплює дві теми з курсу вищої математики: «Криволінійні інтеграли» та «Поверхневі інтеграли». Основною метою посібника є засвоєння студентами системи фундаментальних уявлень обраних розділів курсу «Вища математика» на рівні, достатньому для засвоєння технічних дисциплін у діапазоні інженерних спеціальностей НТУ «ХП».

Структурно теми складаються з певних теоретичних та практичних частин. Теоретична частина кожної теми подана в чіткій логічній послідовності переважно у довідковому форматі. У посібнику досить детально розібрані питання, що пов'язані з обчисленням криволінійних та поверхневих інтегралів та їх відповідних фізичних застосувань.

Практична частина кожної теми навчально-методичного посібника є комплексом задач і прикладів, які є по суті навчальними і тестуючими одночасно. Така форма представлення практичної частини посібника дозволяє студентам максимально індивідуалізувати процес навчання, обираючи рівень складності завдань, здійснювати самоконтроль знань за допомогою завдань для самостійної роботи.

# Тема 1. КРИВОЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛИ

## 1.1. Криволінійні інтеграли першого роду

### 1.1.1. Основні означення

Нехай  $AB$  – дуга гладкої або кусочно-гладкої лінії  $L$ , що задана параметричними рівняннями  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$ ,  $t \in [\alpha, \beta]$ ;  $f(x, y, z)$  – визначена й неперервна на цій лінії функція.

Криволінійним інтегралом першого роду від функції  $f(x, y, z)$  по лінії  $L$  називається число, яке дорівнює

$$\int_L f(x, y, z) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t)) \cdot \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt. \quad (1.1)$$

У лівій частині рівності (1.1) – *позначення криволінійного інтеграла першого роду або по довжині дуги*, а в правій частині цієї рівності – його *означення*.

З означення криволінійного інтеграла першого роду виходить, що

$$\int_{AB} f(x, y, z) dl = \int_{BA} f(x, y, z) dl.$$

Аналогічно (1.1) вводиться поняття криволінійного інтегралу першого роду від функції  $f(x, y)$  уздовж дуги  $AB$  пласкої лінії  $L$ :

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t)) \cdot \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt. \quad (1.2)$$

Якщо пласка лінія  $L$  задана рівнянням  $y = y(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , то

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \int_a^b f(x, y(x)) \cdot \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx. \quad (1.3)$$

З означення криволінійних інтегралів першого роду випливає, що його обчислення зводиться до обчислення визначених інтегралів. Отже, його властивості аналогічні властивостям визначених інтегралів.

### 1.1.2. Властивості криволінійних інтегралів першого роду

**1. Лінійність.** Якщо функції  $f_1(x, y, z)$  й  $f_2(x, y, z)$  неперервні в деякій області  $\Omega$ , яка містить гладку або кусочно-гладку лінію  $L$ ,  $\alpha, \beta$  – довільні константи, то для дуги  $AB$  лінії  $L$

$$\int_{AB} (\alpha f_1(x, y, z) + \beta f_2(x, y, z)) dl = \alpha \int_{AB} f_1(x, y, z) dl + \beta \int_{AB} f_2(x, y, z) dl.$$

**2. Адитивність.** Якщо дуга  $AB$  лінії  $L$  розбита на частини  $L_1$  й  $L_2$ , що не мають спільних внутрішніх точок, таким чином, що  $AB = L_1 \cup L_2$ , то

$$\int_{AB} f(x, y, z) dl = \int_{L_1} f(x, y, z) dl + \int_{L_2} f(x, y, z) dl.$$

**3. Інтегрування нерівностей.** Якщо функції  $f_1(x, y, z)$  й  $f_2(x, y, z)$  неперервні на кривій  $L$  і  $f_1(x, y, z) \geq f_2(x, y, z)$  на цій лінії, то для дуги  $AB$  лінії  $L$

$$\int_{AB} f_1(x, y, z) dl \geq \int_{AB} f_2(x, y, z) dl.$$

**4. Оцінка значення криволінійного інтеграла.** Якщо на дузі  $AB$  лінії  $L$  має місце нерівність  $m \leq f(x, y, z) \leq M$ , то

$$m \cdot l_{AB} \leq \int_{AB} f(x, y, z) dl \leq M \cdot l_{AB},$$

де  $l_{AB}$  – довжина дуги  $AB$ .

**5. Теорема про середнє значення функції.** Якщо  $l_{AB}$  – довжина дуги  $AB$  лінії  $L$ , то на дузі  $AB$  знайдеться, принаймні, одна така точка  $P_0(x_0; y_0; z_0)$ , в якій

$$f(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{l_{AB}} \int_{AB} f(x, y, z) dl.$$

### 1.1.3. Деякі застосування криволінійних інтегралів першого роду

**1. Довжина дуги  $AB$  лінії  $L$  обчислюється за формулою:**

$$l_{AB} = \int_{AB} dl.$$

**2.** Нехай  $\gamma(x, y, z)$  – лінійна щільність матеріальної лінії  $L$ ,  $m_{AB}$  – маса її дуги  $AB$ , тоді

$$m_{AB} = \int_{AB} \gamma(x, y, z) dl.$$

3. Нехай точка  $C(x_c; y_c; z_c)$  **центр ваги** дуги  $AB$  матеріальної лінії  $L$ , тоді

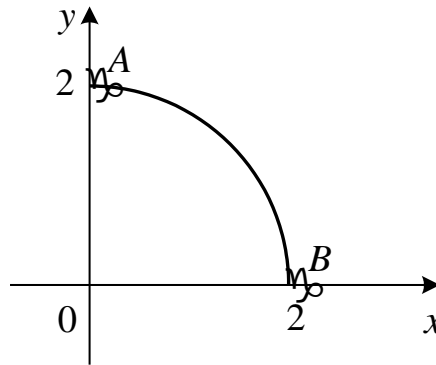
$$x_c = \frac{\int_{AB} x \cdot \gamma(x, y, z) dl}{m_{AB}}, \quad y_c = \frac{\int_{AB} y \cdot \gamma(x, y, z) dl}{m_{AB}}, \quad z_c = \frac{\int_{AB} z \cdot \gamma(x, y, z) dl}{m_{AB}}.$$

*Зауваження.* Якщо маса розподіляється рівномірно уздовж лінії, то  $\gamma$  – стала величина.

Далі розглянемо **приклад** обчислення криволінійних інтегралів першого роду або по довжині дуги, а також **приклад** їх застосування.

**Приклад 1.** Обчислити  $\int_{AB} (2x - y) dl$ , де  $AB$  – дуга кола  $x^2 + y^2 = 4$ , точки  $A(0; 2)$ ,  $B(2; 0)$ .

*Розв'язання.*



Лінія інтегрування може бути задана параметричними рівняннями  $x(t) = 2\cos t$ ,  $y(t) = 2\sin t$ , і на дузі  $AB$ :  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ . Для обчислення інтеграла скористаємося формулою (1.2):

$$\int_{AB} (2x - y) dl = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (4\cos t - 2\sin t) \cdot \sqrt{(-2\sin t)^2 + (2\cos t)^2} dt =$$

$$\begin{aligned}
&= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \cos t - \sin t) dt = 4(2 \sin t + \cos t) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \\
&= 4 \left[ \left( 2 \sin \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2} \right) - (2 \sin 0 + \cos 0) \right] = 4(2 - 1) = 4.
\end{aligned}$$

Відповідь: 4.

**Приклад 2.** Обчислити  $\int_{AB} \frac{3y-2}{4x^2+1} dl$ , де  $AB$  – відрізок прямої між точками  $A\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$  й  $B\left(\frac{1}{2}; 2\right)$ .

*Розв'язання.* Складемо рівняння прямої  $AB$ :  $\frac{y-y_A}{y_B-y_A} = \frac{x-x_A}{x_B-x_A}$ , тобто лінія інтегрування задана рівнянням  $y = 2x + 1$ . Для обчислення інтеграла скористаємося формулою (1.3):

$$\begin{aligned}
\int_{AB} \frac{3y-2}{4x^2+1} dl &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{6x+1}{4x^2+1} \cdot \sqrt{1+2^2} dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{6\sqrt{5}x}{4x^2+1} dx + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{5}}{4x^2+1} dx = \\
&= 2\sqrt{5} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{4x^2+1} = 2\sqrt{5} \cdot \left( \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 2x \Big|_0^{\frac{1}{2}} \right) = 2\sqrt{5} \left( \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 1 - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 0 \right) = \frac{\pi\sqrt{5}}{4},
\end{aligned}$$

оскільки інтеграл  $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{6\sqrt{5}x}{4x^2+1} dx = 0$  як інтеграл від непарної функції по симетричному проміжку.

Відповідь:  $\frac{\pi\sqrt{5}}{4}$ .

**Приклад 3.** Обчислити  $\int_{AB} \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} dl$ , де  $AB$  – дуга лінії  $L$ :

$$x(t) = e^{-t} \cos t, \quad y(t) = e^{-t} \sin t, \quad z(t) = \sqrt{7} e^{-t}, \quad t_A = 0, \quad t_B = 2\pi.$$

*Розв'язання.* Для обчислення інтеграла скористаємося формулою (1.1), попередньо спростивши вираз для  $dl$ :

$$\begin{aligned} dl &= \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt = \\ &= \sqrt{(-e^{-t} \cos t - e^{-t} \sin t)^2 + (-e^{-t} \sin t + e^{-t} \cos t)^2 + (-\sqrt{7}e^{-t})^2} dt = \\ &= e^{-t} \cdot \sqrt{2\sin^2 t + 2\cos^2 t + 7} dt = 3e^{-t} dt. \end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned} \int_{AB} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} dl &= \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{7} \cdot e^{-t}}{\sqrt{e^{-2t} \cos^2 t + e^{-2t} \sin^2 t}} \cdot 3e^{-t} dt = 3\sqrt{7} \int_0^{2\pi} e^{-t} dt = \\ &= -3\sqrt{7} e^{-t} \Big|_0^{2\pi} = 3\sqrt{7}(1 - e^{-2\pi}). \end{aligned}$$

*Відповідь:*  $3\sqrt{7}(1 - e^{-2\pi})$ .

**Приклад 4.** Обчислити  $\int_{AB} \frac{x+y+z}{y^2+1} dl$ , де  $AB$  – відрізок прямої, що проходить через точки  $A(3; -1; 4)$  й  $B(4; 0; 2)$ .

*Розв'язання.* Скористаємося канонічними рівняннями прямої, що проходить через дві точки:  $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$ . Тоді

$\frac{x-3}{4-3} = \frac{y+1}{0+1} = \frac{z-4}{2-4}$  або  $\frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-4}{-2}$ . Для обчислення інтеграла за формулою (1.1) перейдемо до параметричних рівнянь прямої:

$$x(t) = t + 3, \quad y(t) = t - 1, \quad z(t) = -2t + 4.$$

Очевидно, точці  $A$  відповідає значення параметра  $t_A = 0$ , точці  $B$ :  $t_B = 1$ , тобто  $t \in [0, 1]$ . Тоді

$$\int_{AB} \frac{x+y+z}{y^2+1} dl = \int_0^1 \frac{(t+3) + (t-1) + (-2t+4)}{(t-1)^2+1} \cdot \sqrt{1^2+1^2+(-2)^2} dt = 6\sqrt{6} \int_0^1 \frac{dt}{(t-1)^2+1} =$$

$$= 6\sqrt{6} \left( \operatorname{arctg}(t-1) \Big|_0^1 \right) = 6\sqrt{6} (\operatorname{arctg} 0 - \operatorname{arctg}(-1)) = \frac{3\sqrt{6}}{2} \pi.$$

Відповідь:  $\frac{3\sqrt{6}}{2} \pi$ .

**Приклад 5.** Знайти довжину одного витка гвинтової лінії, що задана параметричними рівняннями:  $x(t) = 3\cos t$ ,  $y(t) = 3\sin t$ ,  $z = 3t$ .

*Розв'язання.* Для значень параметра  $t$  можна вибрати будь-який інтервал довжиною  $2\pi$ , наприклад,  $t \in [0, 2\pi]$ .

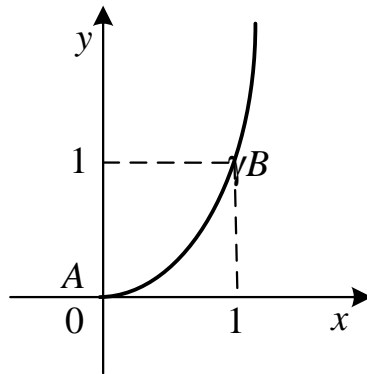
Відповідний інтеграл обчислимо за формулою (1.1):

$$l_{AB} = \int_{AB} dl = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-3\sin t)^2 + (3\cos t)^2 + 3^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{9+9} dt = 3\sqrt{2} \cdot 2\pi = 6\sqrt{2}\pi.$$

Відповідь:  $6\sqrt{2}\pi$ .

**Приклад 6.** Знайти масу дуги  $AB$  параболи  $y = x^3$  між точками  $A$  й  $B$  з абсцисами  $x_A = 0$ ,  $x_B = 1$ , якщо лінійна щільність лінії  $\gamma(x, y) = y$ .

*Розв'язання.*



Для розв'язання скористаємося формулою:

$$m_{AB} = \int_{AB} \gamma(x, y) dl.$$

За формулою (1.3) маємо:

$$\int_{AB} y dl = \int_0^1 x^3 \cdot \sqrt{1+(3x^2)^2} dx = \int_0^1 x^3 \cdot \sqrt{1+9x^4} dx = \frac{1}{36} \int_0^1 (1+9x^4)^{\frac{1}{2}} d(1+9x^4) =$$

$$= \frac{1}{36} \cdot \frac{(1+9x^4)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{1}{54} \left[ 10^{\frac{3}{2}} - 1 \right] = \frac{1}{54} (10\sqrt{10} - 1).$$

Відповідь:  $\frac{1}{54} (10\sqrt{10} - 1)$ .

**Приклад 7.** Знайти масу дуги  $AB$  еліпса  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$  між точками

$A(3;0)$  й  $B(0;4)$ , якщо лінійна щільність лінії  $\gamma(x, y) = \sqrt{\left(\frac{3y}{4}\right)^2 + \left(\frac{4x}{3}\right)^2}$ .

*Розв'язання.* Для розв'язання застосуємо формулу:

$$m_{AB} = \int_{AB} \gamma(x, y) dl.$$

Відома параметрична форма завдання еліпса:  $x(t) = 3 \cos t$ ,  $y(t) = 4 \sin t$ . Очевидно,  $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ . Знайдемо диференціал дуги  $dl$ :

$$dl = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt = \sqrt{(-3 \sin t)^2 + (4 \cos t)^2} dt = \sqrt{9 \sin^2 t + 16 \cos^2 t} dt.$$

Щільність лінії в параметричному вигляді:

$$\gamma(x, y) = \sqrt{\left(\frac{3y}{4}\right)^2 + \left(\frac{4x}{3}\right)^2} = \sqrt{9 \sin^2 t + 16 \cos^2 t}.$$

Тоді маса дуги  $AB$  еліпса

$$m_{AB} = \int_{AB} \gamma(x, y) dl = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9 \sin^2 t + 16 \cos^2 t} \cdot \sqrt{9 \sin^2 t + 16 \cos^2 t} dt =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (9 \sin^2 t + 16 \cos^2 t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (9 + 7 \cos^2 t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( 9 + \frac{7}{2} (1 + \cos 2t) \right) dt = \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( 12,5 + \frac{7}{2} \cos 2t \right) dt = \left( 12,5t + \frac{7}{4} \sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{25\pi}{4},
\end{aligned}$$

тому що  $\sin 0 = \sin \pi = 0$ .

$$\text{Відповідь: } m_{AB} = \frac{25\pi}{4}.$$

**Приклад 8.** Знайти абсцису центру ваги дуги астроїди, яка задана параметричними рівняннями  $x(t) = 3 \cos^3 t$ ,  $y(t) = 3 \sin^3 t$ ,  $t \in \left[ 0, \frac{\pi}{2} \right]$ , якщо її лінійна щільність  $\gamma(x, y) = 1$ .

*Розв'язання.* Для обчислення координати  $x_c$  центру ваги дуги лінії скористаємося формулою:  $x_c = \frac{\int_{AB} x \cdot \gamma(x, y) dl}{m_{AB}}$ , де  $m_{AB} = \int_{AB} \gamma(x, y) dl$  – маса дуги  $AB$ .

Для маси дуги астроїди маємо:

$$\begin{aligned}
m_{AB} &= \int_{AB} \gamma(x, y) dl = 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(-3 \cos^2 t \cdot \sin t)^2 + (3 \sin^2 t \cdot \cos t)^2} dt = \\
&= 9 \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos t \cdot \sin t| dt = 9 \left( \frac{\sin^2 t}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{9}{2}, \text{ тому що } \cos t \cdot \sin t \geq 0 \text{ при } t \in \left[ 0, \frac{\pi}{2} \right].
\end{aligned}$$

Аналогічно,

$$\int_{AB} x \cdot \gamma(x, y) dl = \int_{AB} x dl = 9 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t \cdot \sqrt{(-3 \cos^2 t \cdot \sin t)^2 + (3 \sin^2 t \cdot \cos t)^2} dt =$$

$$= 27 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t |\cos t \cdot \sin t| dt = 27 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t \cdot \sin t dt = -27 \left( \frac{\cos^5 t}{5} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{27}{5}.$$

Остаточно одержуємо

$$x_c = \frac{\int_{AB} x \cdot \gamma(x, y) dl}{m_{AB}} = \frac{27 \cdot 2}{9 \cdot 5} = \frac{6}{5}.$$

Відповідь:  $x_c = \frac{6}{5}$ .

**Приклад 9.** Оцінити значення криволінійного інтеграла

$$\int_{AB} \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} dl \text{ по дузі } AB \text{ кола } x^2+y^2=4, \text{ якщо } A(2;0), B(0;2).$$

*Розв'язання.* Для оцінки інтеграла скористаємося відповідною його властивістю: якщо на дузі  $AB$  лінії  $L$   $m \leq f(x, y) \leq M$ , то

$$m \cdot l_{AB} \leq \int_{AB} f(x, y) dl \leq M \cdot l_{AB},$$

де  $l_{AB}$  – довжина дуги  $AB$ .

Очевидно, дуга  $AB$  – чверть кола радіуса  $R=2$ , тому

$$l_{AB} = \frac{2\pi R}{4} \Big|_{R=2} = \pi.$$

Той же результат отримаємо, якщо скористаємося застосуванням криволінійного інтеграла першого роду для обчислення довжини дуги лінії:

$$l_{AB} = \int_{AB} dl.$$

Для цього скористаємося параметричним завданням кола радіуса  $R=2$ :  $x=2\cos t, y=2\sin t$ . Очевидно, для дуги  $AB$ :  $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ . У цьому

$$\text{випадку } l_{AB} = \int_{AB} dl = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 dt = \pi \text{ (див. Приклад 1).}$$

Для знаходження найменшого ( $m$ ) й найбільшого ( $M$ ) значень функції  $f(x, y)$  на дузі кола також скористаємося формулами параметричного завдання лінії інтегрування. У цьому випадку  $f(x, y) = \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$  набуде вигляду:  $\bar{f}(t) = \frac{R \cos t + R \sin t}{R} = \cos t + \sin t$ .

Дослідимо отриману функцію  $\bar{f}(t) = \cos t + \sin t$  на найменше й найбільше значення за умови, що  $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .

Її стаціонарні точки знайдемо з рівняння:  $(\bar{f}(t))' = 0$ , тобто  $(\cos t + \sin t)' = -\sin t + \cos t = 0$ . На відрізку  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  є лише одна точка, в якій

$(\bar{f}(t))' = 0$ :  $t = \frac{\pi}{4}$ . Знайдемо значення функції  $\bar{f}(t)$  в цій точці й на кінцях

відрізка:  $\bar{f}(0) = \bar{f}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ ,  $\bar{f}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$ . Отже,  $m = \bar{f}(0) = \bar{f}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ ,

$M = \bar{f}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$ .

Остаточо маємо:

$$\pi \leq \int_{AB} \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} dl \leq \pi\sqrt{2}.$$

Відповідь:  $\pi \leq \int_{AB} \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} dl \leq \pi\sqrt{2}.$

**Приклад 10.** Знайти середнє значення функції  $f(x, y) = xy$  на дузі астрои́ди  $x(t) = a \cos^3 t$ ,  $y(t) = a \sin^3 t$ ,  $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .

*Розв'язання.* Для знаходження середнього значення функції  $f(x, y)$  на дузі лінії скористаємося відповідною властивістю криволінійного інтеграла: якщо  $l_{AB}$  – довжина дуги  $AB$  лінії  $L$ , то на дузі  $AB$  знайдеться, принаймні, одна така точка  $P_0(x_0; y_0)$ , в якій

$$f(x_0, y_0) = \frac{1}{l_{AB}} \int_{AB} f(x, y) dl.$$

Диференціал дуги астроїди  $dl = 3a \sin t \cos t dt$  за умови, що  $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

(див. **Приклад 8**).

$$\text{Тоді } l_{AB} = \int_{AB} dl = 3a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos t dt = 3a \frac{\sin^2 t}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3a}{2}.$$

Для середнього значення функції  $f(x, y) = xy$  на дузі астроїди маємо:

$$\begin{aligned} f_{cp.} &= \frac{1}{l_{AB}} \int_{AB} f(x, y) dl = \frac{2}{3a} \int_{AB} xy dl = \frac{2}{3a} \cdot 3a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cdot \cos^4 t dt = \\ &= 2a^2 \cdot \frac{1}{16} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 2t dt = \frac{a^2}{8} \cdot \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4t)^2 dt = \frac{a^2}{32} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - 2\cos 4t + \cos^2 4t) dt = \\ &= \frac{a^2}{32} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{3}{2} - 2\cos 4t + \frac{1}{2} \cos 8t \right) dt = \frac{a^2}{32} \left( \frac{3}{2}t - \frac{2}{4} \sin 4t + \frac{1}{16} \sin 8t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi a^2}{128}. \end{aligned}$$

$$\text{Відповідь: } f_{cp.} = \frac{3\pi a^2}{128}.$$

## Завдання для самостійної роботи

### Рівень 1:

1. Знайти масу однорідного ( $\gamma = 1$ ) стрижня  $AB$ , якщо  $A(2;1), B(5;4)$ .
2. Обчислити  $\int_L \frac{y}{x} dl$ ,  $L: y = 3x, 1 \leq x \leq 2$ .
3. Обчислити  $\int_L x dl$ ,  $L: x = 2 \cos t, y = 2 \sin t, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ .
4. Обчислити  $\int_L \frac{dl}{x+y}$ ,  $L: x = 3y, \frac{1}{3} \leq y \leq 1$ .
5. Обчислити  $\int_L xy dl$ ,  $L$ : контур  $VABC$  з вершинами  $A(1;0), B(0;0), C(0;1)$ .

### Рівень 2:

6. Обчислити  $\int_L \frac{dl}{x+y+1}$ ,  $L: y = x-1, 1 \leq x \leq 3$ .
7. Обчислити  $\int_L x^2 y dl$ ,  $L: x^2 + y^2 = a^2, y \geq 0$ .
8. Обчислити  $\int_L \frac{dl}{x^2 + y^2 + z^2}$ ,  $L: x = e^t \cos t, y = e^t \sin t, z = e^t, 0 \leq t \leq 1$ .
9. Знайти масу дуги лінії  $L: y = \ln x, 1 \leq x \leq e, \gamma(x, y) = \frac{y}{\sqrt{1+x^2}}$ .
10. Знайти координату  $y_c$  центру ваги дуги лінії  $y = x^2, 0 \leq x \leq \sqrt{2}$ , якщо її лінійна щільність  $\gamma(x, y) = x$ .

**Відповіді:** 1.  $3\sqrt{2}$ . 2.  $3\sqrt{10}$ . 3. 4. 4.  $\frac{\sqrt{10}}{4} \ln 3$ . 5.  $\frac{\sqrt{2}}{6}$ . 6.  $\frac{\sqrt{2}}{2} \ln 3$ . 7.  $\frac{2}{3} a^4$ .  
8.  $\frac{\sqrt{3}}{2} (1 - e^{-1})$ . 9.  $\frac{1}{2}$ . 10.  $\frac{149}{130}$ .

## 1.2. Криволінійні інтеграли другого роду

### 1.2.1. Основні означення

Нехай на дузі  $AB$  орієнтовної лінії  $L$  визначена вектор-функція

$$\vec{F}(x, y, z) = \{P(x, y, z); Q(x, y, z); R(x, y, z)\},$$

проекції якої – функції  $P(x, y, z)$ ,  $Q(x, y, z)$  і  $R(x, y, z)$  – неперервні на  $AB$ .

Інтеграл виду

$$\int_{AB} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$$

називається *криволінійним інтегралом другого роду* або *криволінійним інтегралом по координатах від вектор-функції  $\vec{F}(x, y, z)$  по дузі  $AB$  орієнтовної лінії  $L$* .

З означення випливає, що при зміні напрямку інтегрування криволінійний інтеграл другого роду змінює свій знак, тобто

$$\begin{aligned} \int_{AB} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz &= \\ &= - \int_{BA} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz. \end{aligned}$$

Крім того,

$$\begin{aligned} \int_{AB} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz &= \\ &= \int_{AB} P(x, y, z)dx + \int_{AB} Q(x, y, z)dy + \int_{AB} R(x, y, z)dz. \end{aligned}$$

Якщо  $AB$  – дуга пласкої орієнтовної лінії  $L$ , то криволінійний інтеграл другого роду від вектор-функції  $\vec{F}(x, y) = \{P(x, y); Q(x, y)\}$  має вигляд:

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

Визначений інтеграл є окремим випадком криволінійних інтегралів, в яких лінією інтегрування є відрізок осі координат.

Найпростіші властивості визначеного інтеграла легко переносяться на розглянуті криволінійні інтеграли.

### 1.2.2. Фізичний зміст криволінійного інтеграла по координатах

Розглянемо пласке стаціонарне, тобто незалежне від часу, силове поле в області  $D$ , що належить площині  $xOy$ . Силу  $\vec{F}(x, y)$  задамо її проекціями на осі координат:  $\vec{F}(x, y) = \{P(x, y); Q(x, y)\}$ . Під дією сили поля деяка матеріальна точка, що знаходиться в області  $D$ , рухається із положення  $A$  в положення  $B$  уздовж дуги  $AB$  (рис. 1.1).

Робота  $W$ , яка здійснюється силою поля  $\vec{F}(x, y)$  при цьому переміщенні, виражається криволінійним інтегралом:

$$W = \int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy. \quad (1.4)$$

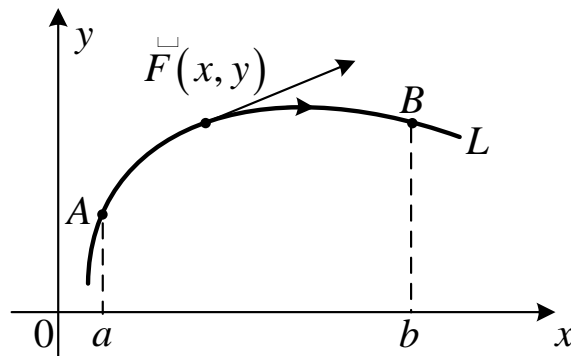


Рисунок 1.1

### 1.2.3. Обчислення криволінійних інтегралів по координатах

Обчислення криволінійних інтегралів другого роду зводиться до обчислення визначених інтегралів.

1. Якщо функції  $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$  неперервні на лінії  $L$ , що задана параметричними рівняннями  $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ , і  $x(t), y(t), z(t)$  неперервні разом зі своїми похідними  $x'_t, y'_t$  і  $z'_t$ , то

$$\begin{aligned} \int_{AB} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = \\ = \int_{t_A}^{t_B} \left( P[x(t), y(t), z(t)] \cdot x'_t + Q[x(t), y(t), z(t)] \cdot y'_t + \right. \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$+R[x(t), y(t), z(t)] \cdot z'_t dt.$$

**2.** Якщо функції  $P(x, y)$  й  $Q(x, y)$  неперервні на лінії  $L$ , яка задана рівнянням  $y = y(x)$ , і  $y(x)$ ,  $y'(x)$  також неперервні, тоді

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{x_A}^{x_B} (P(x, y(x)) + Q(x, y(x)) \cdot y') dx. \quad (1.6)$$

**Приклад 11.** Знайти роботу сили  $\vec{F}(x, y) = \{-x^2 - y^2; 4x\}$  при переміщенні матеріальної точки уздовж лінії  $L: y = 2x^2$  із точки  $A(0; 0)$  в точку  $B(2; 8)$ .

*Розв'язання.* Робота  $W$ , яка здійснюється силою  $\vec{F}(x, y)$ , виражається криволінійним інтегралом (1.4):

$$W = \int_{AB} (-x^2 - y^2) dx + 4x dy.$$

Інтеграл обчислимо за формулою (1.6). На лінії  $L: y = 2x^2$ ,  $y' = 4x$ ,  $x_A = 0$ ,  $x_B = 2$ . Отже,

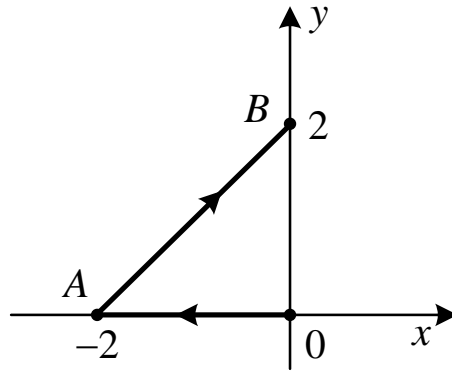
$$\begin{aligned} W &= \int_0^2 ((-x^2 - 4x^4) + 4x \cdot 4x) dx = \int_0^2 (15x^2 - 4x^4) dx = \\ &= \left( 15 \cdot \frac{x^3}{3} - 4 \cdot \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^2 = 5 \cdot 8 - 4 \cdot \frac{32}{5} = \frac{72}{5}. \end{aligned}$$

*Відповідь:*  $W = \frac{72}{5}$ .

**Приклад 12.** Обчислити  $\int_L (2x - y) dx + (3x + 4y) dy$ , де  $L$  – ламана  $OAB$ , точки  $O(0; 0)$ ,  $A(-2; 0)$ ,  $B(0; 2)$ .

*Розв'язання.* Оскільки  $\int_{OAB} = \int_{OA} + \int_{AB}$ , то обчислення проведемо окремо по кожній частині контуру  $OAB$ :

$$1) \int_{OA} (2x - y) dx + (3x + 4y) dy = \left\| \begin{array}{l} OA: y = 0, dy = 0 \\ x_O = 0, x_A = -2 \end{array} \right\| = \int_0^{-2} 2x dx = x^2 \Big|_0^{-2} = 4;$$



$$\begin{aligned}
 2) \int_{AB} (2x - y)dx + (3x + 4y)dy &= \left\| \begin{array}{l} AB: y = x + 2, \quad dy = dx \\ x_A = -2, \quad x_B = 0 \end{array} \right\| = \\
 &= \int_{-2}^0 [(2x - (x + 2)) + (3x + 4(x + 2))]dx = \\
 &= \int_{-2}^0 (8x + 6)dx = (4x^2 + 6x) \Big|_{-2}^0 = -16 + 12 = -4.
 \end{aligned}$$

$$\text{Отже, } \int_L (2x - y)dx + (3x + 4y)dy = 4 - 4 = 0.$$

Відповідь: 0.

**Приклад 13.** Обчислити  $\int_{AB} xydx + 3x^2dy + yzdz$ , де  $AB$  – дуга кола, що задане рівняннями  $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ ,  $3y + 4x = 0$  від точки  $A(3; -4; 0)$  до точки  $B(0; 0; 5)$ .

*Розв'язання.* Задамо дугу кола  $AB$  параметричними рівняннями. Нехай  $x = t$ , тоді  $y = -\frac{4}{3}t$ , і, оскільки  $z \geq 0$  на дузі  $AB$ , то

$$z = \sqrt{25 - t^2 - \left(-\frac{4}{3}t\right)^2} = \frac{5}{3}\sqrt{9 - t^2}.$$

Обчислимо відповідні похідні:  $x'_t = 1$ ,  $y'_t = -\frac{4}{3}$ ,  $z'_t = \frac{5}{3} \cdot \frac{-t}{\sqrt{9 - t^2}}$ , тоді за формулою (1.5) отримаємо:

$$\int_{AB} xydx + 3x^2dy + yzdz =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_3^0 \left[ t \cdot \left(-\frac{4}{3}t\right) + 3t^2 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) + \left(-\frac{4}{3}t\right) \cdot \frac{5}{3} \sqrt{9-t^2} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{-t}{\sqrt{9-t^2}} \right] dt = \\
&= \int_3^0 \left( -\frac{4}{3}t^2 - 4t^2 + \frac{100}{27}t^2 \right) dt = -\frac{44}{27} \int_3^0 t^2 dt = -\frac{44}{27} \cdot \frac{t^3}{3} \Big|_3^0 = \frac{44}{27} \cdot \frac{27}{3} = \frac{44}{3}.
\end{aligned}$$

Відповідь:  $\frac{44}{3}$ .

#### 1.2.4. Криволінійні інтеграли по замкненому контуру

Особливістю замкненого контуру є те, що початкова й кінцева точки лінії інтегрування збігаються, що не задає напрямку обходу контуру інтегрування  $L$  (рис. 1.2).

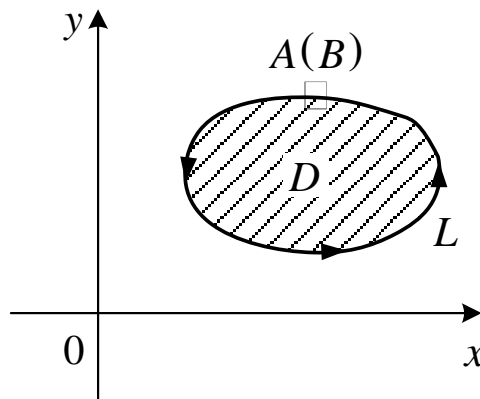


Рисунок 1.2

Якщо замкнений контур  $L$  лежить у площині, то додатним напрямом обходу простого (без самоперетинань) замкненого контуру  $L$  будемо називати той напрям, при якому частина площини  $D$ , що обмежена контуром, виявляється ліворуч.

Позначення:

$$\oint_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy. \quad (1.7)$$

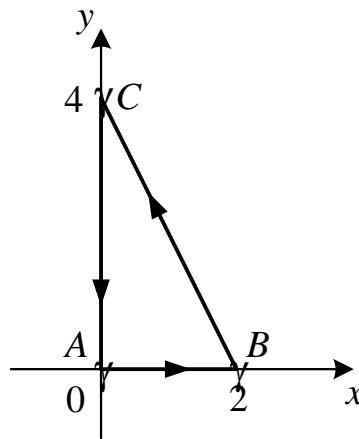
У випадку просторової замкненої лінії напрям обходу контуру вказується окремо.

Для обчислення інтегралів (1.7) можуть бути застосовані формули (1.5) і (1.6).

**Приклад 14.** Обчислити  $\int_L (x^3 - 3y)dx + (4x + y)dy$ , де  $L$  – контур  $\triangle ABC$  з вершинами  $A(0;0)$ ,  $B(2;0)$ ,  $C(0;4)$ , що пробігається у додатному напрямку.

*Розв'язання.* Відповідно до означення вкажемо на рисунку напрям обходу контуру.

Скористаємося тим, що  $\int_{ABC} = \int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CA}$ . Кожний з інтегралів обчислимо за формулою (1.6).



1)  $AB$ :  $y = 0$ , отже,

$$dy = 0, \quad x_A = 0, \quad x_B = 2:$$

$$\int_{AB} (x^3 - 3y)dx + (4x + y)dy = \int_0^2 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_0^2 = 4;$$

2)  $BC$ :  $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 1$  – рівняння прямої у відрізках, тобто  $2x + y = 4$  або

$y = 4 - 2x$ . Оскільки  $y' = -2$ ,  $x_B = 2$ ,  $x_C = 0$ , то

$$\int_{BC} (x^3 - 3y)dx + (4x + y)dy = \int_2^0 [(x^3 - 3 \cdot (4 - 2x)) + (4x + (4 - 2x)) \cdot (-2)] dx =$$

$$= \int_2^0 (x^3 + 2x - 20) dx = \left( \frac{x^4}{4} + x^2 - 20x \right) \Big|_2^0 = -(4 + 4 - 40) = 32;$$

3)  $CA$ :  $x=0$ , отже,  $dx=0$ ,  $y_C=4$ ,  $y_A=0$ :

$$\int_{CA} (x^3 - 3y)dx + (4x + y)dy = \int_4^0 ydy = \frac{y^2}{2} \Big|_4^0 = -8.$$

Таким чином,  $\int_L (x^3 - 3y)dx + (4x + y)dy = 4 + 32 - 8 = 28$ .

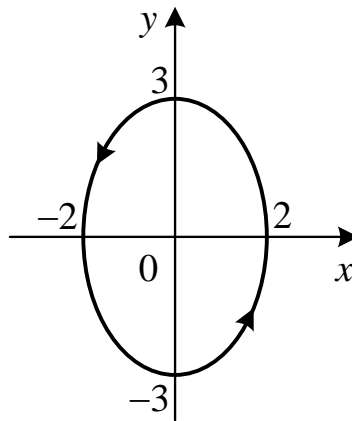
*Відповідь:* 28.

**Приклад 15.** Обчислити  $\int_L (x - y)dx + 3ydy$ , де  $L$  – еліпс  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ ,

який пробігається у додатному напрямі.

*Розв'язання.*

Параметричні рівняння еліпса  $L$ :  $x = 2\cos t$ ,  $y = 3\sin t$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .



Оскільки  $x'_t = -2\sin t$ ,  $y'_t = 3\cos t$ , то

$$\begin{aligned} & \int_L (x - y)dx + 3ydy = \\ & = \int_0^{2\pi} [(2\cos t - 3\sin t) \cdot (-2\sin t) + 3 \cdot 3\sin t \cdot 3\cos t] dt = \\ & = \int_0^{2\pi} (6\sin^2 t + 23\sin t \cdot \cos t) dt = 3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos 2t) dt + 23 \int_0^{2\pi} \sin t d(\sin t) = \\ & = \left( 3t - \frac{3}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{2\pi} + 23 \cdot \frac{\sin^2 t}{2} \Big|_0^{2\pi} = 6\pi. \end{aligned}$$

*Відповідь:*  $6\pi$ .

### 1.2.5. Формула Гріна

Розглянемо однозв'язну замкнену область  $D$ , що обмежена контуром  $L$  з обраним на ньому додатним напрямом обходу (рис. 1.3).

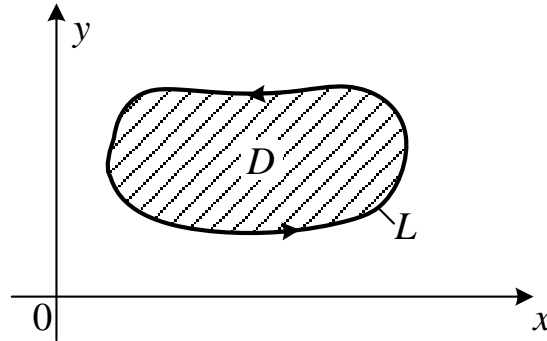


Рисунок 1.3

Нехай функції  $P(x, y), Q(x, y), \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$  неперервні в однозв'язній замкненій області  $D$ , що обмежена контуром  $L$ . Тоді

$$\oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy. \quad (1.8)$$

Рівність (1.8) називається *формулою Гріна* й виражає зв'язок між криволінійними інтегралами другого роду по замкненому контуру  $L$  й подвійним інтегралом по області  $D$ , що обмежена цим контуром.

**Приклад 16.** Обчислити  $\oint_L (3x + 2yx)dx + (4x^2 + 3y)dy$ , де  $L$  – коло  $x^2 + y^2 = R^2$ , що пробігається у додатному напрямі, двома способами: 1) за означенням; 2) за формулою Гріна.

*Розв'язання.* 1) Для обчислення криволінійного інтеграла за формулою (1.6) задамо параметричні рівняння контуру інтегрування  $L$ :  $x = R \cos t, y = R \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$ . Оскільки  $x'_t = -R \sin t, y'_t = R \cos t$ , то

$$\oint_L (3x + 2yx)dx + (4x^2 + 3y)dy =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} \left[ (3 \cdot R \cos t + 2R \sin t \cdot R \cos t) \cdot (-R \sin t) + (4R^2 \cos^2 t + 3R \sin t) \cdot R \cos t \right] dt = \\
&= \int_0^{2\pi} \left( -3R^2 \cos t \cdot \sin t - 2R^3 \sin^2 t \cdot \cos t + 4R^3 \cos^3 t + 3R^2 \cos t \cdot \sin t \right) dt = \\
&= -2R^3 \int_0^{2\pi} \sin^2 t d(\sin t) + 4R^3 \int_0^{2\pi} (1 - \sin^2 t) d(\sin t) = \\
&= \left( -2R^3 \cdot \frac{\sin^3 t}{3} + 4R^3 \left( \sin t - \frac{\sin^3 t}{3} \right) \right) \Big|_0^{2\pi} = 0;
\end{aligned}$$

2) оскільки  $P(x, y) = 3x + 2yx$ ,  $Q(x, y) = 4x^2 + 3y$ , то  $\frac{\partial P}{\partial y} = 2x$ ,

$\frac{\partial Q}{\partial x} = 8x$ . Тоді за формулою Гріна (1.8) отримаємо:

$$\begin{aligned}
&\oint_L (3x + 2yx) dx + (4x^2 + 3y) dy = \iint_D (8x - 2x) dx dy = 6 \iint_D x dx dy = \\
&= \left\| \begin{array}{l} \text{область інтегрування } D - \text{ коло, тому обчислення подвійного} \\ \text{інтеграла виконаємо в полярній системі координат} \end{array} \right\| = \\
&= 6 \iint_D \rho^2 \cos \varphi d\varphi d\rho = 6 \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi \int_0^R \rho^2 d\rho = 0, \text{ оскільки } \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi = 0.
\end{aligned}$$

Відповідь: 0.

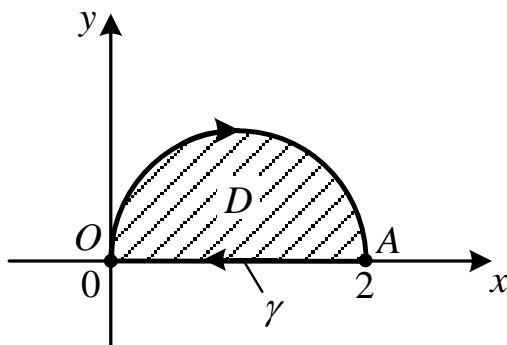
*Зауваження.* При розставлянні меж інтегрування в прикладі було прийнято до уваги те, що додатний обхід контуру  $L$  відповідав зростанню параметра  $t$ .

**Приклад 17.** Обчислити  $\int_L (y^2 + x - y) dx + (2xy + x + y) dy$  уздовж кривої  $L: x^2 + y^2 = 2x, y \geq 0$  від точки  $O(0;0)$  до точки  $A(2;0)$ .

*Розв'язання.*

Контур інтегрування  $L$  за умовою не замкнений, але пропонується обчислити інтеграл за допомогою формули Гріна, замкнувши контур  $L$  відрізком осі  $Ox$  ( $0 \leq x \leq 2$ ).

Позначимо цей замкнений контур через  $\gamma$ .



Оскільки  $P(x, y) = y^2 + x - y$ ,  $Q(x, y) = 2xy + x + y$ , то  $\frac{\partial P}{\partial y} = 2y - 1$ ,

$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2y + 1$ . За формулою Гріна маємо:

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} (y^2 + x - y)dx + (2xy + x + y)dy &= \iint_D ((2y + 1) - (2y - 1))dxdy = \\ &= \iint_D 2dxdy = 2 \iint_D dxdy = 2S_D, \end{aligned}$$

де  $S_D$  – площа області  $D$ , що обмежена замкненим контуром  $\gamma$ . Область

$D$  – півколо радіуса  $R=1$ . Отже,  $S_D = \frac{1}{2}\pi R^2 = \frac{\pi}{2}$ , тобто

$$\oint_{\gamma} (y^2 + x - y)dx + (2xy + x + y)dy = \pi.$$

Обчислимо значення заданого криволінійного інтеграла уздовж відрізка  $AO$  осі  $Ox$ , де  $O(0;0)$  й  $A(2;0)$ .

$$\begin{aligned} \int_{AO} (y^2 + x - y)dx + (2xy + x + y)dy &= \left\| \begin{array}{l} AO: y=0, dy=0, \\ x_A=2, x_O=0 \end{array} \right\| = \\ &= \int_2^0 xdx = \frac{x^2}{2} \Big|_2^0 = -\frac{4}{2} = -2. \end{aligned}$$

Отже,

$$\int_L (y^2 + x - y)dx + (2xy + x + y)dy = \oint_{\gamma} - \int_{AO} = \pi + 2.$$

Відповідь:  $\pi + 2$ .

### 1.2.6. Обчислення площі пласкої фігури за допомогою криволінійного інтеграла другого роду

За формулою Гріна

$$\oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy .$$

Якщо функції  $P(x, y)$  й  $Q(x, y)$  такі, що  $\left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = 1$ , то інтеграл праворуч в (1.8) дорівнює площі області  $D$ .

Має місце наступна формула обчислення площі  $S_D$  області  $D$ :

$$S_D = \frac{1}{2} \oint_L xdy - ydx . \quad (1.9)$$

**Приклад 18.** Знайти площу еліпса  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

*Розв'язання.* За формулою (1.9):  $S_D = \frac{1}{2} \oint_L xdy - ydx$ .

Криволінійний інтеграл обчислимо, задавши лінію інтегрування параметричними рівняннями:  $x = acost$ ,  $y = bsint$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

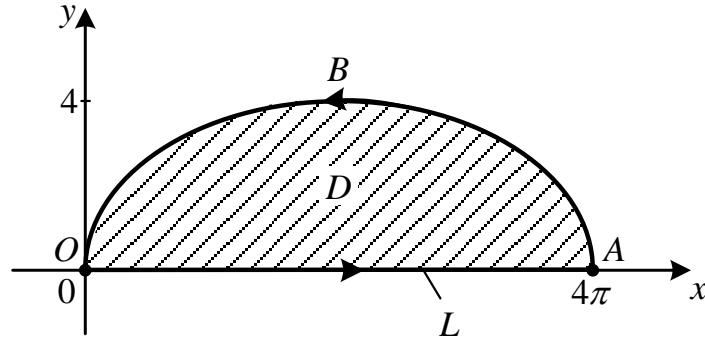
Оскільки  $x'_t = -asint$ ,  $y'_t = bcost$ , то:

$$\begin{aligned} S_D &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (acost \cdot bcost - bsint \cdot (-asint)) dt = \frac{ab}{2} \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t) dt = \\ &= \frac{ab}{2} \int_0^{2\pi} dt = \frac{ab}{2} \cdot 2\pi = \pi ab . \end{aligned}$$

*Відповідь:*  $S_{ел.} = \pi ab$ .

**Приклад 19.** Знайти площу фігури, що обмежена однією аркою циклоїди й віссю  $Ox$ :  $x = 2(t - \sin t)$ ,  $y = 2(1 - \cos t)$ ,  $y = 0$ .

*Розв'язання.* За формулою (1.9):  $S_D = \frac{1}{2} \oint_L xdy - ydx$ , при цьому обхід контуру  $L$  проводиться в додатному напрямі. Скористаємося тим, що:  $\oint_L = \int_{OA} + \int_{ABO}$ . Кожний з інтегралів обчислимо за формулою (1.6).



Виберемо першу арку циклоїди, тобто  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Тоді:

1)  $OA$ :  $y=0$ ,  $y'(t)=0$ ,  $t_O=0$ ,  $t_A=2\pi$ :

$$\int_{OA} = \int_0^{2\pi} (2(t - \sin t) \cdot 0 - 0 \cdot 2(1 - \cos t)) dt = 0;$$

2)  $ABO$ :  $x=2(t - \sin t)$ ,  $dx=2(1 - \cos t)dt$ ,  $y=2(1 - \cos t)$ ,  $dy=2\sin t dt$ ,  
 $t_A=2\pi$ ,  $t_O=0$ .

$$\begin{aligned} \int_{ABO} &= \int_{2\pi}^0 (2(t - \sin t) \cdot 2\sin t - 2(1 - \cos t) \cdot 2(1 - \cos t)) dt = \\ &= 4 \int_{2\pi}^0 (t \sin t - \sin^2 t - 1 + 2\cos t - \cos^2 t) dt = 4 \int_{2\pi}^0 t \sin t dt + 4 \int_{2\pi}^0 (2\cos t - 2) dt = \\ &= 4t(-\cos t) \Big|_{2\pi}^0 - 4 \int_{2\pi}^0 (-\cos t) dt + 4(2\sin t - 2t) \Big|_{2\pi}^0 = 4 \cdot 2\pi + 4 \cdot 4\pi = 24\pi. \end{aligned}$$

Отже,  $S_D = \frac{1}{2}(0 + 24\pi) = 12\pi$ .

Відповідь:  $S_D = 12\pi$ .

*Зауваження.* При обчисленні інтеграла 2) був застосований метод інтегрування частинами.

### 1.2.7. Умова незалежності інтеграла від форми лінії інтегрування

Нехай функції  $P(x, y)$ ,  $Q(x, y)$ ,  $\frac{\partial P}{\partial y}$  й  $\frac{\partial Q}{\partial x}$  визначені й неперервні в однозв'язній замкненій області  $D$ , що обмежена контуром  $L$  (рис. 1.4).

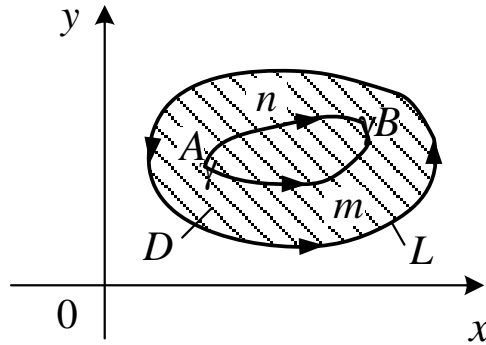


Рисунок 1.4

Тоді рівносильні наступні твердження:

1)  $\oint_{\gamma} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ , де  $\gamma$  - довільний замкнений

контур, що належить області  $D$ ;

2) криволінійний інтеграл  $\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$  не залежить від

форми лінії інтегрування, що з'єднує точки  $A$  і  $B$  (рис. 1.4), тобто

$$\int_{AmB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{AnB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy;$$

3) підінтегральний вираз  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$  є повним диференціалом, тобто існує така функція  $U(x, y)$ , що

$$dU(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy. \text{ Очевидно, що } P = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial U}{\partial y}, \text{ але}$$

тоді

$$4) \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}. \tag{1.10}$$

Виберемо в однозв'язній замкненій області  $D$ , що обмежена контуром  $L$ , довільні точки  $A$  й  $B$  (рис. 1.4).

Тоді

$$\int_{AB} dU(x, y) = \int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = U(B) - U(A), \tag{1.11}$$

тобто інтеграл не залежить від вибору лінії інтегрування, що з'єднує точки  $A$  й  $B$ , якщо  $AB$  належить області  $D$ .

Ця умова є необхідною й достатньою умовою незалежності криволінійного інтеграла від форми лінії інтегрування  $AB$ , яка належить області  $D$ .

Аналогічно, якщо для функцій  $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ , які є неперервними разом зі своїми частинними похідними в деякій замкненій однозв'язній області  $V$ , виконуються умови:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad (1.12)$$

то вираз  $P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$  є повним диференціалом в області  $V$ .

У цьому випадку криволінійний інтеграл

$$\int_{AB} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$$

не залежить від форми лінії інтегрування, якщо крива  $AB$  належить області  $V$ .

### 1.2.8. Знаходження функції за її повним диференціалом

Нехай відомо, що повний диференціал функції  $U(x, y)$

$$dU = P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

Функцію  $U(x, y)$  можна знайти інтегруванням  $dU$  по довільній лінії, що належить області  $D$  і з'єднує деяку фіксовану точку  $M_0(x_0; y_0)$  й точку  $M(x; y)$ :

$$U(x, y) = \int_{M_0M} P(x, y)dx + Q(x, y)dy + C.$$

У якості лінії, що з'єднує точки  $M_0$  й  $M$ , зручніше обрати ламану лінію  $M_0NM$  з ланками, що паралельні осям координат (рис. 1.5).

Розіб'ємо лінію  $M_0NM$  на частини  $M_0N$  й  $NM$ . Тоді

$$\begin{aligned} & \int_{M_0NM} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \\ & = \int_{M_0N} P(x, y)dx + Q(x, y)dy + \int_{NM} P(x, y)dx + Q(x, y)dy. \end{aligned}$$

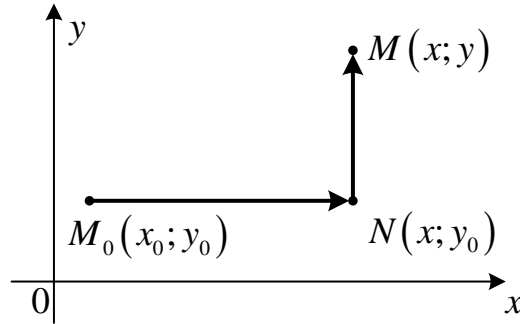


Рисунок 1.5

Відрізок  $M_0N$  належить прямій  $y = y_0$ , значить  $dy = 0$ . У цьому випадку

$$\int_{M_0N} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{x_0}^x P(x, y_0)dx.$$

Аналогічно, інтегруючи уздовж відрізка  $NM$ , одержимо:

$$\int_{NM} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{y_0}^y Q(x, y)dy.$$

Таким чином, остаточно маємо:

$$U(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^y Q(x, y)dy + C. \quad (1.13)$$

*Зауваження.* Якщо точка  $O(0; 0)$  належить області  $D$ , то в якості фіксованої точки  $M_0(x_0; y_0)$  зручніше обрати початок координат. У цьому випадку формула (1.13) набуде вигляду:

$$U(x, y) = \int_0^x P(x, 0)dx + \int_0^y Q(x, y)dy + C. \quad (1.14)$$

У випадку, коли повним диференціалом деякої функції  $U(x, y, z)$  є вираз

$$dU = P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz, \text{ то}$$

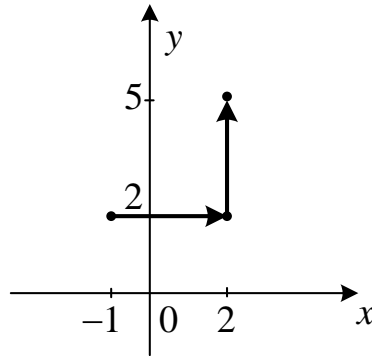
$$U(x, y, z) = \int_{x_0}^x P(x, y_0, z_0)dx + \int_{y_0}^y Q(x, y, z_0)dy + \int_{z_0}^z R(x, y, z_0)dz + C. \quad (1.15)$$

**Приклад 20.** Обчислити інтеграл

$$\int_{(-1;2)}^{(2;5)} (y^3 + 2xy^2)dx + (3xy^2 + 2x^2y)dy,$$

попередньо переконавшись, що його значення не залежить від форми лінії інтегрування.

*Розв'язання.* Необхідною й достатньою умовою незалежності інтеграла від форми лінії інтегрування є умова (1.10).



Оскільки  $P(x, y) = y^3 + 2xy^2$ ,  $Q(x, y) = 3xy^2 + 2x^2y$ , то  $\frac{\partial P}{\partial y} = 3y^2 + 4xy$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial x} = 3y^2 + 4xy$ , тобто  $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ . Отже, підінтегральний вираз є повним диференціалом деякої функції  $U(x, y)$ .

Оскільки вид функції  $U(x, y)$  не відомий, то скористатися для обчислення інтеграла формулою (1.11) немає можливості.

Виберемо в якості лінії інтегрування ламану з ланками, що паралельні осям координат, яка з'єднує точки  $(-1; 2)$  й  $(2; 5)$ .

У цьому випадку:

$$\begin{aligned} \int_{(-1;2)}^{(2;5)} (y^3 + 2xy^2)dx + (3xy^2 + 2x^2y)dy &= \int_{-1}^2 (8 + 8x)dx + \int_2^5 (6y^2 + 8y)dy = \\ &= (8x + 4x^2)\Big|_{-1}^2 + (2y^3 + 4y^2)\Big|_2^5 = \\ &= (16 + 16) - (-8 + 4) + (250 + 100) - (16 + 16) = 354. \end{aligned}$$

*Відповідь:* 354.

*Зауваження.* Безумовно, щоб скористатися формулою (1.11) варто було б знайти функцію  $U(x, y)$  за формулами (1.13) або (1.14), (1.15). Якщо виникне таке бажання, то автори пропонують скористатися формулою (1.13), узявши в якості точки  $M_0(x_0; y_0)$  точку  $A(-1; 2)$  – початок шляху інтегрування. Потім в отриману функцію підставити координати точки  $B(2; 5)$  – кінцевої точки шляху інтегрування.

$$\begin{aligned}
 U(x, y) &= \int_{(-1;2)}^{(x;y)} (y^3 + 2xy^2)dx + (3xy^2 + 2x^2y)dy = \int_{-1}^x (8 + 8x)dx + \int_2^y (6y^2 + 8y)dy = \\
 &= (8x + 4x^2)\Big|_{-1}^x + (2y^3 + 4y^2)\Big|_2^y = (8x + 4x^2) - (-8 + 4) + (2y^3 + 4y^2) - (16 + 16) = \\
 &= 8x + 4x^2 + 2y^3 + 4y^2 - 28.
 \end{aligned}$$

Остаточно маємо:

$$\int_{(-1;2)}^{(2;5)} (y^3 + 2xy^2)dx + (3xy^2 + 2x^2y)dy = U(2; 5) = 16 + 16 + 250 + 100 - 28 = 354.$$

**Приклад 21.** Перевірити, чи є вираз

$$(2xy + z^2)dx + (x^2 + 2yz)dy + (y^2 + 2xz)dz$$

повним диференціалом деякої функції. Якщо так, то знайти цю функцію.

*Розв'язання.* Перевіримо умови (1.12). Оскільки  $P(x, y, z) = 2xy + z^2$ ,

$$Q(x, y, z) = x^2 + 2yz, R(x, y, z) = y^2 + 2xz, \text{ то } \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 2x, \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z} = 2y,$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} = 2z, \text{ тобто даний вираз є повним диференціалом деякої функції}$$

$$U(x, y, z), \text{ тобто } dU = (2xy + z^2)dx + (x^2 + 2yz)dy + (y^2 + 2xz)dz.$$

$$\begin{aligned}
 \text{Отже, } U(x, y, z) &= \int_0^x 0dx + \int_0^y x^2dy + \int_0^z (y^2 + 2xz)dz = \\
 &= x^2y + y^2z + xz^2 + C.
 \end{aligned}$$

$$\text{Відповідь: } U(x, y, z) = x^2y + y^2z + xz^2 + C.$$

*Зауваження.* Правильність обчислень при необхідності можна перевірити. Оскільки вираз  $(2xy + z^2)dx + (x^2 + 2yz)dy + (y^2 + 2xz)dz$  є повним диференціалом функції  $U(x, y, z)$ , то  $P = \frac{\partial U}{\partial x}$ ,  $Q = \frac{\partial U}{\partial y}$ ,  $R = \frac{\partial U}{\partial z}$ .

### Завдання для самостійної роботи

#### Рівень 1

11. Обчислити  $\int_L ydx + xdy$ ,  $L$ :  $y = 2x$  від точки  $A(0;0)$  до точки  $B(1;2)$ .
12. Обчислити  $\int_L zdx + xdy - ydz$ ,  $L$ :  $x = 2t + 1$ ,  $y = 3t - 1$ ,  $z = 0$ ,  $0 \leq t \leq 1$ .
13. Знайти роботу сили  $\vec{F} = \{-y; x\}$  при переміщенні матеріальної точки уздовж лінії  $L$ :  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$ ,  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{3}$ .
14. Обчислити за формулою Гріна  $\oint_L (3x + 2y)dx + (4x - y)dy$ ,  $L$ : контур трикутника, що обмежений лініями  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x + y = 3$ .
15. Обчислити за формулою Гріна  $\oint_L (2x + y)dy - dx$ ,  $L$ :  $x^2 + y^2 = 9$ .

## Рівень 2

16. Обчислити криволінійний інтеграл  $\int_{AB} dx + dy + \sqrt{x^2 + y^2} dz$ , вздовж дуги  $AB$  лінії  $L: x = t \cos t, y = t \sin t, z = t$ , де точки  $A(0;0;0)$ ,  $B\left(0; \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ .

17. Знайти роботу сили  $\vec{F} = 2y^2 \vec{i} + xy \vec{j}$  при переміщенні матеріальної точки уздовж дуги  $AB$  лінії  $L: y = \sin x$ , точки  $A(0;0)$ ,  $B(\pi;0)$ .

18. Обчислити  $\int_L (6x^2 - y)dx + (3x + 4y^2)dy$ ,  $L: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$ , двома способами: 1) за означенням; 2) за формулою Гріна.

19. Перевірити, чи є вказаний вираз  $dU$  повним диференціалом деякої функції  $U$ , якщо – так, то знайти цю функцію

$$dU = (3x^2 y + y^3 - 6xy^2) dx + (x^3 + 3xy^2 - 6x^2 y) dy.$$

20. Обчислити криволінійний інтеграл, попередньо переконавшись, що він не залежить від форми лінії інтегрування:

$$\int_{(3;2;1)}^{(2;4;0)} y^2 z^3 dx + 2xyz^3 dy + 3xy^2 z^2 dz.$$

**Відповіді:** 11. 2. 12. 6. 13.  $\frac{\pi}{3}$ . 14. 9. 15.  $18\pi$ . 16.  $\frac{\pi}{8}(\pi + 4)$ . 17.  $\frac{3\pi}{4}$ .

18.  $32\pi$ . 19.  $U = x^3 y + y^3 x - 3x^2 y^2 + C$ . 20.  $-12$ .

## Тема 2. ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ

### 2.1. Поверхневі інтеграли першого роду

#### 2.1.1. Основні означення

Нехай в області  $V \subset R^3$  задана гладка поверхня  $\sigma$ , що обмежена гладким контуром  $L$ . На поверхні  $\sigma$  визначена й неперервна функція  $f(M) = f(x, y, z)$ . Розіб'ємо поверхню  $\sigma$  довільним чином на  $n$  елементарних площинок  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ , площі яких  $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n$ . Позначимо через  $d_i = d(\sigma_i)$  – діаметр елементарної площинки  $\sigma_i$ . На кожній елементарній площинці виберемо довільно точку  $M_i(x_i; y_i; z_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  (рис. 2.1).

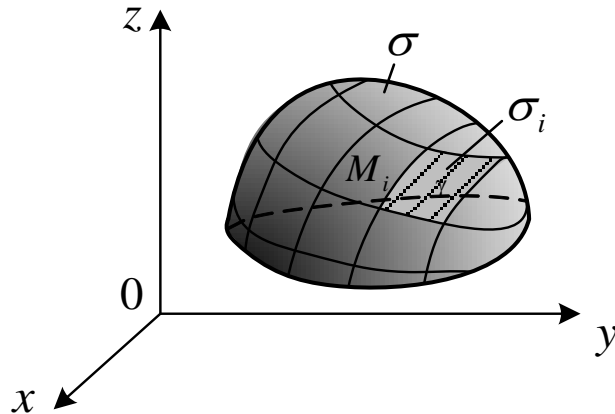


Рисунок 2.1

Обчислимо в цих точках значення функції  $f(M_i) = f(x_i, y_i, z_i)$  й складемо суму:

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(M_i) \cdot \Delta\sigma_i.$$

Якщо існує кінцева границя  $S_n$  за умови  $\max_i d(\sigma_i) \rightarrow 0$ , то вона називається поверхневим інтегралом першого роду від функції  $f(M) = f(x, y, z)$  по поверхні  $\sigma$  й позначається:

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma,$$

таким чином,

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma = \lim_{\max_i d(\sigma_i) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \cdot \Delta\sigma_i. \quad (2.1)$$

Для будь-якої неперервної функції  $f(x, y, z)$ , що визначена на гладкій поверхні  $\sigma$ , існує поверхневий інтеграл першого роду.

### 2.1.2. Властивості поверхневих інтегралів першого роду

**1. Лінійність.** Якщо функції  $f_1(x, y, z)$  й  $f_2(x, y, z)$  неперервні в якійсь в області  $V \subset R^3$ , що містить гладку поверхню  $\sigma$ ,  $\alpha, \beta$  – довільні константи, то

$$\iint_{\sigma} (\alpha f_1(x, y, z) + \beta f_2(x, y, z)) d\sigma = \alpha \iint_{\sigma} f_1(x, y, z) d\sigma + \beta \iint_{\sigma} f_2(x, y, z) d\sigma.$$

**2. Адитивність.** Якщо гладка поверхня  $\sigma$  розбита на частини  $\sigma_1$  й  $\sigma_2$ , що не мають спільних внутрішніх точок, таким чином, що  $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$ , то

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma = \iint_{\sigma_1} f(x, y, z) d\sigma + \iint_{\sigma_2} f(x, y, z) d\sigma.$$

**3. Інтегрування нерівностей.** Якщо функції  $f_1(x, y, z)$  й  $f_2(x, y, z)$  неперервні на поверхні  $\sigma$  й  $f_1(x, y, z) \geq f_2(x, y, z)$  на цій поверхні, то

$$\iint_{\sigma} f_1(x, y, z) d\sigma \geq \iint_{\sigma} f_2(x, y, z) d\sigma.$$

**4. Оцінка поверхневого інтеграла.** Якщо на поверхні  $\sigma$   $m \leq f(x, y, z) \leq M$ , то

$$m \cdot S_{\sigma} \leq \iint_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma \leq M \cdot S_{\sigma},$$

де  $S_{\sigma}$  – площа поверхні  $\sigma$ .

**5. Теорема про середнє значення функції.** Якщо функція  $f(x, y, z)$  неперервна в якійсь в області  $V \subset R^3$ , що містить гладку однозв'язну поверхню  $\sigma$ , то на поверхні  $\sigma$  знайдеться, принаймні, одна така точка  $P_0(x_0; y_0; z_0)$ , у якій

$$f(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{S_\sigma} \iint_\sigma f(x, y, z) d\sigma.$$

Права частина цієї рівності називається середнім значенням функції  $f(x, y, z)$  на поверхні  $\sigma$ .

### 2.1.3. Обчислення поверхневих інтегралів першого роду

Нехай  $f(x, y, z)$  – неперервна функція, що визначена на гладкій поверхні  $\sigma$ , задана рівнянням  $z = z(x, y), (x, y) \in \sigma_{xy}$ , де  $\sigma_{xy}$  – замкнена обмежена область – проекція поверхні  $\sigma$  на площину  $xOy$  (рис. 2.2).

Тоді

$$\iint_\sigma f(x, y, z) d\sigma = \iint_{\sigma_{xy}} f[(x, y, z(x, y))] \cdot \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy. \quad (2.2)$$

За формулою (2.2) обчислення поверхневого інтеграла по поверхні  $\sigma$  зводиться до обчислення подвійного інтеграла по проекції  $\sigma_{xy}$  поверхні  $\sigma$  на площину  $xOy$ .

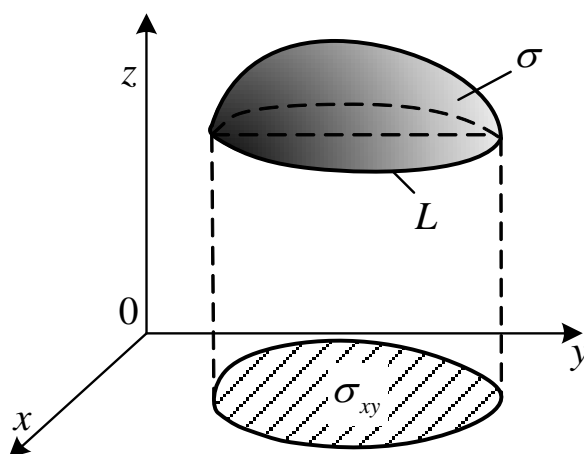


Рисунок 2.2

Якщо поверхня  $\sigma$  задана рівнянням  $x = x(y, z)$  або  $y = y(z, x)$ , то обчислення поверхневого інтеграла (2.1) проводиться відповідно за формулами:

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma = \iint_{\sigma_{yz}} f[(x(y, z), y, z)] \cdot \sqrt{1 + (x_y')^2 + (x_z')^2} dy dz, \quad (2.3)$$

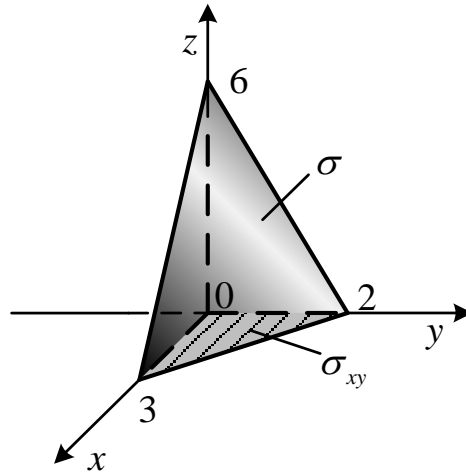
$$\iint_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma = \iint_{\sigma_{zx}} f[(x, y(z, x), z)] \cdot \sqrt{1 + (y_z')^2 + (y_x')^2} dz dx. \quad (2.4)$$

*Зауваження.* Поверхневі інтеграли першого роду можуть бути визначені й для замкнених поверхонь. У цьому випадку, при зведенні поверхневого інтеграла до подвійного інтеграла слід скористатися властивістю адитивності поверхневих інтегралів і представити поверхневий інтеграл по поверхні  $\sigma$  у вигляді суми інтегралів по кожній із частин цієї поверхні.

**Приклад 22.** Обчислити  $\iint_{\sigma} (x + y - z) d\sigma$ , де  $\sigma$  – частина площини

$2x + 3y + z - 6 = 0$ , що розташована у першому октанті.

*Розв'язання.*



Напишемо рівняння поверхні  $\sigma$  у вигляді:  $z = 6 - 2x - 3y$ . Оскільки

$z_x' = -2, z_y' = -3$ , то  $\sqrt{1 + (z_x')^2 + (z_y')^2} = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14}$ . Тоді за формулою (2.2) отримаємо:

$$\iint_{\sigma} (x + y - z) d\sigma = \iint_{\sigma_{xy}} (x + y - (6 - 2x - 3y)) \cdot \sqrt{14} dx dy =$$

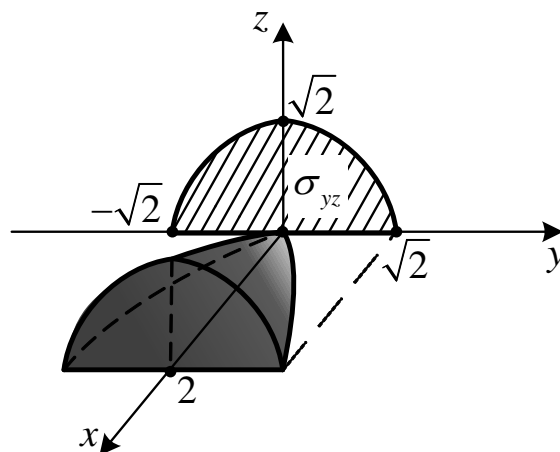
$$\begin{aligned}
&= \sqrt{14} \iint_{D_{xy}} (3x + 4y - 6) dx dy = \sqrt{14} \int_0^3 dx \int_0^{2-\frac{2}{3}x} (3x + 4y - 6) dy = \\
&= \sqrt{14} \int_0^3 (3xy + 2y^2 - 6y) \Big|_0^{2-\frac{2}{3}x} dx = \sqrt{14} \int_0^3 \left( 3x \left( 2 - \frac{2}{3}x \right) + 2 \left( 2 - \frac{2}{3}x \right)^2 - 6 \left( 2 - \frac{2}{3}x \right) \right) dx = \\
&= \sqrt{14} \int_0^3 \left( -\frac{10}{9}x^2 + \frac{14}{3}x - 4 \right) dx = \sqrt{14} \left( -\frac{10}{27}x^3 + \frac{7}{3}x^2 - 4x \right) \Big|_0^3 = \\
&= \sqrt{14} (21 - 10 - 12) = -\sqrt{14}.
\end{aligned}$$

Відповідь:  $-\sqrt{14}$ .

**Приклад 23.** Обчислити  $\iint_{\sigma} (5x - y^2 - z^2) d\sigma$ , де  $\sigma$  – частина поверхні параболоїда  $x = y^2 + z^2$ ,  $z \geq 0$ , яка обмежена площиною  $x = 2$ .

*Розв'язання.*

Оскільки поверхня інтегрування задана рівнянням  $x = y^2 + z^2$ , то для обчислення інтеграла скористаємося формулою (2.3).



$$\begin{aligned}
&\text{Маємо } x'_y = 2y, x'_z = 2z, \text{ тоді } d\sigma = \sqrt{1 + 4y^2 + 4z^2} dy dz \text{ й} \\
&\iint_{\sigma} (5x - y^2 - z^2) d\sigma = \iint_{\sigma_{yz}} \left( 5(y^2 + z^2) - y^2 - z^2 \right) \cdot \sqrt{1 + 4(y^2 + z^2)} dy dz =
\end{aligned}$$

$$= \iint_{\sigma_{yz}} 4(y^2 + z^2) \cdot \sqrt{1 + 4(y^2 + z^2)} dy dz.$$

Область  $\sigma_{yz}$  – півкруг  $y^2 + z^2 = 2, z \geq 0$ , тому при обчисленні подвійного інтеграла перейдемо до полярних координат:

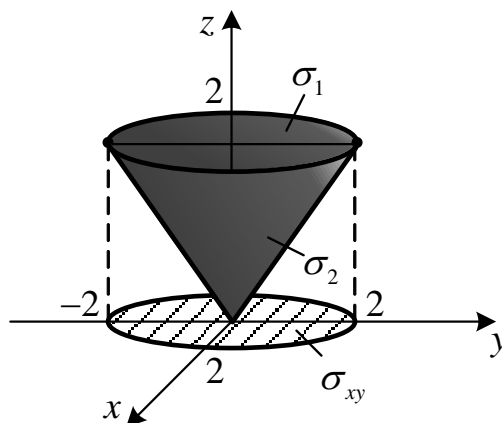
$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} (5x - y^2 - z^2) d\sigma &= \iint_{\sigma_{yz}} 4(y^2 + z^2) \cdot \sqrt{1 + 4(y^2 + z^2)} dy dz = \\ &= \iint_{(\sigma_{yz})'} 4\rho^2 \sqrt{1 + 4\rho^2} \rho d\varphi d\rho = \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} 4\rho^3 \sqrt{1 + 4\rho^2} d\rho = \\ &= \left\| \begin{array}{l} \text{заміна: } t = 1 + 4\rho^2 \\ 4\rho^2 = t - 1, dt = 8\rho d\rho \\ t_n = 1, t_g = 9 \end{array} \right\| = \frac{\pi}{8} \int_1^9 (t-1) \sqrt{t} dt = \frac{\pi}{8} \left( \frac{2}{5} t^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_1^9 = \\ &= \frac{\pi}{8} \left[ \left( \frac{2}{5} \cdot 3^5 - \frac{2}{3} \cdot 3^3 \right) - \left( \frac{2}{5} - \frac{2}{3} \right) \right] = \frac{\pi}{4} \left( \frac{242}{5} - \frac{26}{3} \right) = \frac{149}{15} \pi. \end{aligned}$$

Відповідь:  $\frac{149}{15} \pi$ .

**Приклад 24.** Обчислити  $\iint_{\sigma} x^2 d\sigma$ , де  $\sigma$  – замкнена поверхня:

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}, z = 2.$$

Розв'язання.



$\sigma$  – замкнена поверхня, тому для обчислення інтегралу розіб'ємо  $\sigma$  на частини  $\sigma_1$  й  $\sigma_2$  – основа й бічна поверхня конуса. Тоді

$$\iint_{\sigma} x^2 d\sigma = \iint_{\sigma_1} x^2 d\sigma + \iint_{\sigma_2} x^2 d\sigma.$$

Область  $\sigma_{xy}$  – круг, тому при обчисленні подвійних інтегралів перейдемо до полярних координат:

1)  $\sigma_1: z = 2$ ,  $d\sigma = dx dy$ , отже,

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma_1} x^2 d\sigma &= \iint_{\sigma_{xy}} x^2 dx dy = \iint_{(\sigma_{xy})'} \rho^2 \cos^2 \varphi \cdot \rho d\varphi d\rho = \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi \int_0^2 \rho^3 d\rho = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos 2\varphi) \left( \frac{\rho^4}{4} \right) \Big|_0^2 d\varphi = \frac{2^4}{8} \left( \varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right) \Big|_0^{2\pi} = 4\pi; \end{aligned}$$

2)  $\sigma_2: z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $z'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ ,  $z'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$  і

$$\begin{aligned} d\sigma &= \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} dx dy = \sqrt{2} dx dy, \text{ отже,} \\ \iint_{\sigma_2} x^2 d\sigma &= \iint_{\sigma_{xy}} x^2 \cdot \sqrt{2} dx dy = \sqrt{2} \iint_{\sigma_{xy}} x^2 dx dy = 4\sqrt{2}\pi. \end{aligned}$$

Таким чином,

$$\iint_{\sigma} x^2 d\sigma = 4\pi + \sqrt{2} \cdot 4\pi = 4\pi(\sqrt{2} + 1).$$

Відповідь:  $4\pi(\sqrt{2} + 1)$ .

**Приклад 25.** Обчислити  $\iint_{\sigma} \frac{d\sigma}{(1+x+y)^2}$ , де  $\sigma$  – поверхня тетраедра,

заданого нерівностями  $x + y + z \leq 1$ ,  $x, y, z \geq 0$ .

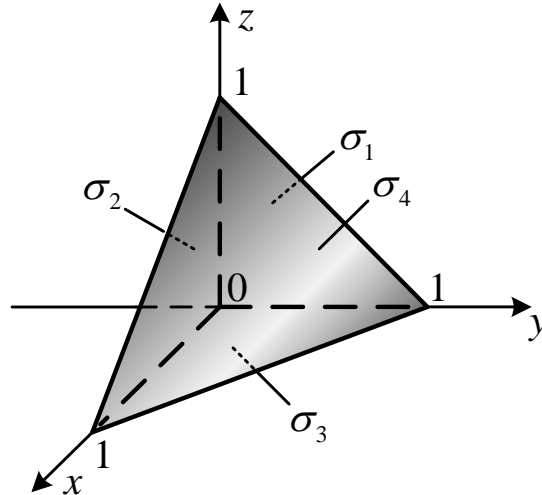
*Розв'язання.*  $\sigma$  – замкнена поверхня, тому для обчислення інтеграла розіб'ємо  $\sigma$  на чотири частини:  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  і  $\sigma_4$  – грані тетраедра. Тоді

$$\iint_{\sigma} = \iint_{\sigma_1} + \iint_{\sigma_2} + \iint_{\sigma_3} + \iint_{\sigma_4}.$$

Обчислимо кожний із цих інтегралів:

1)  $\sigma_1 : x=0, d\sigma = dydz$ , тоді

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma_1} \frac{d\sigma}{(1+x+y)^2} &= \iint_{\sigma_1} \frac{dydz}{(1+y)^2} = \int_0^1 \frac{dy}{(1+y)^2} \int_0^{1-y} dz = \int_0^1 \frac{(1-y)dy}{(1+y)^2} = \\ &= -\int_0^1 \frac{dy}{(1+y)} + 2\int_0^1 \frac{dy}{(1+y)^2} = 1 - \ln 2; \end{aligned}$$



2)  $\sigma_2 : y=0, d\sigma = dzdx$ , тоді

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma_2} \frac{d\sigma}{(1+x+y)^2} &= \iint_{\sigma_2} \frac{dzdx}{(1+x)^2} = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)^2} \int_0^{1-x} dz = \int_0^1 \frac{(1-x)dx}{(1+x)^2} = \\ &= -\int_0^1 \frac{dx}{(1+x)} + 2\int_0^1 \frac{dx}{(1+x)^2} = 1 - \ln 2; \end{aligned}$$

3)  $\sigma_3 : z=0, d\sigma = dxdy$ , тоді

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma_3} \frac{d\sigma}{(1+x+y)^2} &= \iint_{\sigma_3} \frac{dxdy}{(1+x+y)^2} = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{dy}{(1+x+y)^2} = \int_0^1 \left( -\frac{1}{(1+x+y)} \Big|_0^{1-x} \right) dx = \\ &= \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)} - \int_0^1 \frac{dx}{2} = \ln 2 - \frac{1}{2}; \end{aligned}$$

4)  $\sigma_4 : z=1-x-y, d\sigma = \sqrt{3}dxdy$ , тоді

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma_4} \frac{d\sigma}{(1+x+y)^2} &= \sqrt{3} \iint_{(\sigma_4)_{xy}} \frac{dx dy}{(1+x+y)^2} = \sqrt{3} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{dy}{(1+x+y)^2} = \\ &= \sqrt{3} \int_0^1 \left( -\frac{1}{(1+x+y)} \Big|_0^{1-x} \right) dx = \sqrt{3} \left( \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)} - \int_0^1 \frac{dx}{2} \right) = \sqrt{3} \left( \ln 2 - \frac{1}{2} \right). \end{aligned}$$

Остаточно маємо:

$$\iint_{\sigma} \frac{d\sigma}{(1+x+y)^2} = 2(1 - \ln 2) + \left( \ln 2 - \frac{1}{2} \right) + \sqrt{3} \left( \ln 2 - \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{2} - \ln 2 + \sqrt{3} \left( \ln 2 - \frac{1}{2} \right).$$

$$\text{Відповідь: } \frac{3}{2} - \ln 2 + \sqrt{3} \left( \ln 2 - \frac{1}{2} \right).$$

## 2.1.4. Деякі застосування поверхневих інтегралів першого роду

### 1. Площа поверхні $\sigma$ :

$$S_{\sigma} = \iint_{\sigma} d\sigma. \quad (2.5)$$

**2. Маса матеріальної оболонки.** Якщо  $\gamma = \gamma(x, y, z)$  – поверхнева щільність розподілу маси на поверхні  $\sigma$ ,  $m$  – маса матеріальної оболонки  $\sigma$ , то її маса

$$m_{\sigma} = \iint_{\sigma} \gamma(x, y, z) d\sigma. \quad (2.6)$$

**3.** Нехай точка  $C(x_c; y_c; z_c)$  **центр ваги** матеріальної поверхні  $\sigma$ , тоді:

$$\begin{aligned} x_C = \frac{m_{yz}}{m} &= \frac{\iint_{\sigma} x\gamma(x, y, z) d\sigma}{\iint_{\sigma} \gamma(x, y, z) d\sigma}, \quad y_C = \frac{m_{zx}}{m} = \frac{\iint_{\sigma} y\gamma(x, y, z) d\sigma}{\iint_{\sigma} \gamma(x, y, z) d\sigma} \\ z_C &= \frac{m_{xy}}{m} = \frac{\iint_{\sigma} z\gamma(x, y, z) d\sigma}{\iint_{\sigma} \gamma(x, y, z) d\sigma}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

де  $m_{yz}, m_{zx}, m_{xy}$  – статичні моменти матеріальної оболонки  $\sigma$  відносно відповідних координатних площин.

**4. Моменти інерції** матеріальної оболонки  $\sigma$  відносно координатних осей обчислюються за формулами:

$$I_x = \iint_{\sigma} (y^2 + z^2) \gamma(x, y, z) d\sigma, I_y = \iint_{\sigma} (x^2 + z^2) \gamma(x, y, z) d\sigma,$$

$$I_z = \iint_{\sigma} (x^2 + y^2) \gamma(x, y, z) d\sigma, \quad (2.8)$$

де  $I_x, I_y, I_z$  – моменти інерції відносно координатних осей  $Ox, Oy, Oz$  відповідно.

*Зауваження.* Якщо поверхня  $\sigma$  однорідна, то  $\gamma = const$ .

**5. Сила тяжіння**  $\vec{F} = (F_x; F_y; F_z)$  матеріальної точки  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  маси  $m_0$  матеріальною поверхнею  $\sigma$ :

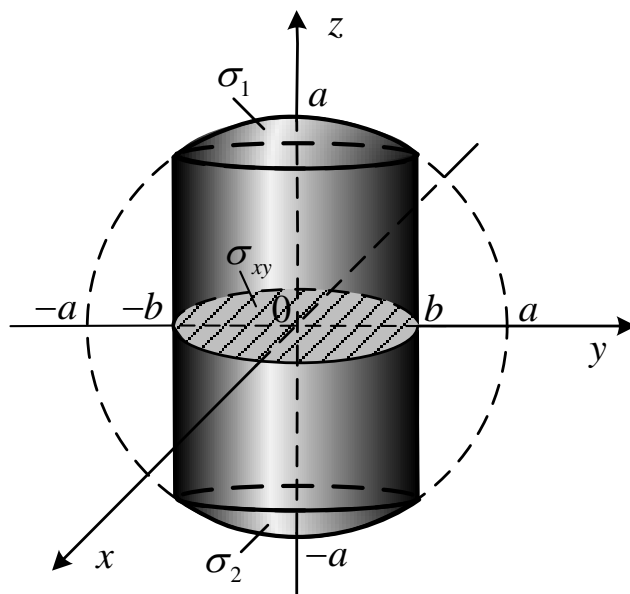
$$F_x = Gm_0 \iint_{\sigma} \frac{x - x_0}{r^3} \gamma(x, y, z) d\sigma, \quad F_y = Gm_0 \iint_{\sigma} \frac{y - y_0}{r^3} \gamma(x, y, z) d\sigma,$$

$$F_z = Gm_0 \iint_{\sigma} \frac{z - z_0}{r^3} \gamma(x, y, z) d\sigma, \quad (2.9)$$

де  $G$  – гравітаційна постійна,  $\vec{r} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$ ,  $r = |\vec{r}|$ .

**Приклад 26.** Обчислити площу частини сфери  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ , яка розташована усередині циліндра  $x^2 + y^2 = b^2$  ( $0 < b < a$ ).

*Розв'язання.*



Циліндр вирізує на поверхні сфери дві частини  $\sigma_1$  і  $\sigma_2$ , симетричні відносно координатної площини  $xOy$ .

Площу поверхні  $\sigma$  обчислимо за формулою (2.5):

$$S = \iint_{\sigma} d\sigma = \iint_{\sigma_1} d\sigma + \iint_{\sigma_2} d\sigma = 2 \iint_{\sigma_1} d\sigma.$$

Оскільки  $\sigma_1$ :  $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ , то

$$z'_x = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, \quad z'_y = \frac{-y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}},$$

тому  $d\sigma = \frac{a \, dx \, dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$ . Отже,

$$S = 2a \iint_{\sigma_{xy}} \frac{dx \, dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}.$$

Оскільки  $\sigma_{xy}$  – круг  $x^2 + y^2 \leq b^2$ , то обчислення проведемо в полярних координатах:

$$\begin{aligned} S &= 2a \iint_{\sigma_{xy}} \frac{dx \, dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} = 2a \iint_{(\sigma_{xy})} \frac{\rho \, d\varphi \, d\rho}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} = -a \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^b \frac{d(a^2 - \rho^2)}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} = \\ &= -4\pi a (a^2 - \rho^2)^{\frac{1}{2}} \Big|_0^b = 4\pi a (a - \sqrt{a^2 - b^2}). \end{aligned}$$

*Відповідь:*  $4\pi a (a - \sqrt{a^2 - b^2})$ .

**Приклад 27.** Обчислити площу частини поверхні параболоїда  $2z = x^2 + y^2$ , що розташована усередині циліндра  $x^2 + y^2 = R^2$ .

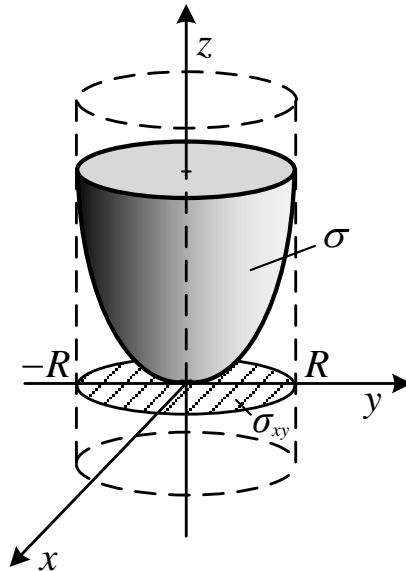
*Розв'язання.*

Площа поверхні  $\sigma$  обчислюється за формулою (2.5):  $S = \iint_{\sigma} d\sigma$ .

Оскільки  $\sigma$ :  $2z = x^2 + y^2$ , а  $z'_x = x$ ,  $z'_y = y$ , тому  $d\sigma = \sqrt{1 + x^2 + y^2} \, dx \, dy$ .

Отже,

$$S = \iint_{\sigma_{xy}} \sqrt{1+x^2+y^2} \, dx \, dy.$$



Переходячи до полярних координат, отримаємо:

$$\begin{aligned} S &= \iint_{(\sigma_{xy})'} \sqrt{1+\rho^2} \rho \, d\varphi \, d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho \sqrt{1+\rho^2} \, d\rho = \\ &= 2\pi \cdot \frac{1}{2} \int_0^R (1+\rho^2)^{\frac{1}{2}} d(1+\rho^2) = \frac{2\pi}{3} (1+\rho^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^R = \frac{2\pi}{3} \left( (1+R^2)^{\frac{3}{2}} - 1 \right). \end{aligned}$$

Відповідь:  $\frac{2\pi}{3} \left( (1+R^2)^{\frac{3}{2}} - 1 \right).$

**Приклад 28.** Обчислити площу поверхні тіла, яка обмежена конусом  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  і площиною  $2z = c - x$ .

*Розв'язання.* Поверхня  $\sigma$  – замкнена, тому для обчислення площі розіб'ємо  $\sigma$  на частини:  $\sigma_1$  і  $\sigma_2$ . Тоді  $S = \iint_{\sigma} d\sigma = \iint_{\sigma_1} d\sigma + \iint_{\sigma_2} d\sigma$ . Обчислимо

кожний із цих інтегралів:

1)  $\sigma_1 : z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $d\sigma = \sqrt{2} dx dy$  (див. **Приклад 24**), тоді

$$\iint_{\sigma_1} d\sigma = \sqrt{2} \iint_{(\sigma_1)_{xy}} dx dy,$$

де  $(\sigma_1)_{xy}$  – проекція  $\sigma_1$  в площину  $xOy$ . Таким чином, задача звелась до обчислення площі  $(\sigma_1)_{xy}$ . Визначимо, який вид має ця проекція.

Для цього складемо рівняння лінії перетинання заданих поверхонь:

$$\sigma_1 \cap \sigma_2 : \begin{cases} z = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ 2z = c - x. \end{cases}$$

Звідси  $2z = 2\sqrt{x^2 + y^2} = c - x$  або  $4(x^2 + y^2) = (c - x)^2$ . Після

перетворень отримаємо:  $3x^2 + 4y^2 + 2cx - c^2 = 0$  або  $3\left(x + \frac{c}{3}\right)^2 + 4y^2 = \frac{4c^2}{3}$ .

Отримане рівняння задає еліпс із центром у точці  $C\left(-\frac{c}{3}; 0\right)$ . Його

канонічне рівняння  $\frac{\left(x + \frac{c}{3}\right)^2}{\frac{4c^2}{9}} + \frac{y^2}{\frac{c^2}{3}} = 1$ , з якого легко визначаються його

піввісі:  $a = \frac{2c}{3}$ ,  $b = \frac{c}{\sqrt{3}}$ .

Відомо, що площа еліпса обчислюється за формулою  $S = \pi ab$ . Таким чином,

$$S_1 = \iint_{\sigma_1} d\sigma = \sqrt{2} \iint_{(\sigma_1)_{xy}} dx dy = \sqrt{2} \pi \cdot \frac{2c^2}{3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \pi c^2;$$

2)  $\sigma_2 : 2z = c - x$ , тоді  $z'_x = -\frac{1}{2}$ ,  $z'_y = 0$ , а

$$d\sigma = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} dx dy = \frac{\sqrt{5}}{2} dx dy.$$

Отже,

$$S_2 = \iint_{\sigma_2} d\sigma = \iint_{(\sigma_2)_{xy}} \frac{\sqrt{5}}{2} dx dy = \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \pi \cdot \frac{2c^2}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{3}} \pi c^2.$$

Остаточно,

$$S = \iint_{\sigma} d\sigma = \iint_{\sigma_1} d\sigma + \iint_{\sigma_2} d\sigma = \frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{3}} \pi c^2 + \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \pi c^2 = \frac{\pi c^2}{3\sqrt{3}} (2\sqrt{2} + \sqrt{5}).$$

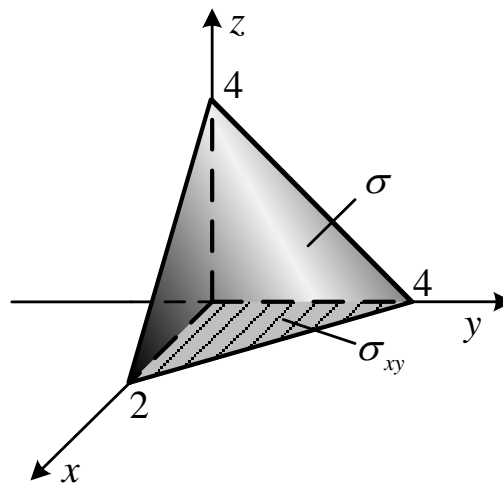
Відповідь:  $\frac{\pi c^2}{3\sqrt{3}} (2\sqrt{2} + \sqrt{5})$ .

**Приклад 29.** Знайти центр ваги однорідної ( $\gamma = 1$ ) матеріальної пластинки  $\sigma$ :  $2x + y + z - 4 = 0$ ,  $x, y, z \geq 0$ .

*Розв'язання.*

Скористаємося формулами (2.7). Масу пластинки знайдемо за формулою (2.6):

$$m_{\sigma} = \iint_{\sigma} \gamma(x, y, z) d\sigma = \iint_{\sigma} d\sigma.$$



Оскільки  $\sigma: z = 4 - 2x - y$ , то  $z'_x = -2$ ,  $z'_y = -1$  й  $d\sigma = \sqrt{6} dx dy$ . Отже,

$$m_{\sigma} = \sqrt{6} \iint_{\sigma_{xy}} dx dy = \sqrt{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 = 4\sqrt{6}.$$

Знайдемо статичні моменти пластинки:

$$m_{yz} = \iint_{\sigma} xy \gamma d\sigma = \sqrt{6} \iint_{\sigma_{xy}} x dx dy = \sqrt{6} \int_0^2 x dx \int_0^{4-2x} dy = \sqrt{6} \int_0^2 (4x - 2x^2) dx =$$

$$= \sqrt{6} \left( 2x^2 - \frac{2}{3}x^3 \right) \Big|_0^2 = \frac{8\sqrt{6}}{3},$$

Отже,  $x_C = \frac{m_{yz}}{m} = \frac{2}{3};$

$$\begin{aligned} m_{zx} &= \iint_{\sigma} y\gamma d\sigma = \sqrt{6} \iint_{\sigma_{xy}} y dx dy = \sqrt{6} \int_0^2 dx \int_0^{4-2x} y dy = \frac{\sqrt{6}}{2} \int_0^2 (4-2x)^2 dx = \\ &= -\frac{\sqrt{6}}{12} \cdot (4-2x)^3 \Big|_0^2 = \frac{16\sqrt{6}}{3}, \end{aligned}$$

Отже,  $y_C = \frac{m_{zx}}{m} = \frac{4}{3};$

$$\begin{aligned} m_{xy} &= \iint_{\sigma} z\gamma d\sigma = \sqrt{6} \iint_{\sigma_{xy}} (4-2x-y) dx dy = \sqrt{6} \int_0^2 dx \int_0^{4-2x} (4-2x-y) dy = \\ &= \sqrt{6} \int_0^2 \left( 4y - 2xy - \frac{y^2}{2} \Big|_0^{4-2x} \right) dx = \sqrt{6} \int_0^2 (2x^2 - 8x + 8) dx = \\ &= 2\sqrt{6} \left( \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x \right) \Big|_0^2 = 2\sqrt{6} \left( \frac{8}{3} - 8 + 8 \right) = \frac{16\sqrt{6}}{3}, \end{aligned}$$

Отже,  $z_C = \frac{m_{xy}}{m} = \frac{4}{3}.$

Відповідь:  $C \left( \frac{2}{3}; \frac{4}{3}; \frac{4}{3} \right).$

**Приклад 30.** Обчислити момент інерції відносно осі  $Oz$  однорідної ( $\gamma=1$ ) сферичної оболонки  $\sigma: x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z \geq 0.$

*Розв'язання.* Скористаємося формулами (2.8):

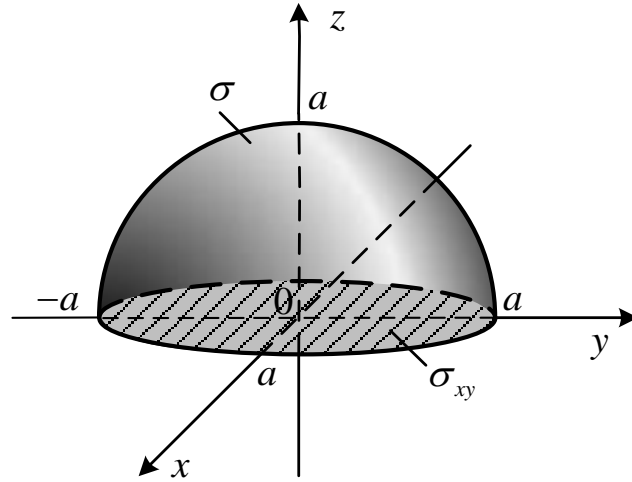
$$I_z = \iint_{\sigma} (x^2 + y^2)\gamma(x, y, z) d\sigma.$$

Оскільки  $\sigma: x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z \geq 0,$  то  $d\sigma = \frac{a dx dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$

(див. **Приклад 26**).

Отже,

$$I_z = \iint_{\sigma} (x^2 + y^2) \gamma(x, y, z) d\sigma = a \iint_{\sigma_{xy}} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy.$$



Переходячи до полярних координат, отримаємо:

$$I_z = a \iint_{\sigma_{xy}} \frac{\rho^3}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} d\varphi d\rho = 2\pi a \int_0^a \frac{\rho^3}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} d\rho.$$

Інтеграл обчислимо за допомогою тригонометричної підстановки:

$$\begin{aligned} \int_0^a \frac{\rho^3}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} d\rho &= \left\| \begin{array}{l} \rho = a \cos t, d\rho = -a \sin t dt \\ t_u = \frac{\pi}{2}, \quad t_e = 0 \end{array} \right\| = - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{(a \cos t)^3}{a \sin t} a \sin t dt = \\ &= a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 t) d \sin t = a^3 \left( \sin t - \frac{\sin^3 t}{3} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2a^3}{3}, \end{aligned}$$

отже,  $I_z = \frac{4}{3} \pi a^4$ .

Відповідь:  $I_z = \frac{4}{3} \pi a^4$ .

**Приклад 31.** Визначити, з якою силою матеріальна однорідна ( $\gamma = 1$ ) поверхня  $\sigma: z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $0 \leq b \leq z \leq a$  притягає матеріальну точку  $O(0;0;0)$  маси  $m_0$ .

*Розв'язання.* Скористаємося формулами (2.9):

$$F_x = Gm_0 \iint_{\sigma} \frac{x - x_0}{r^3} \gamma(x, y, z) d\sigma, \quad F_y = Gm_0 \iint_{\sigma} \frac{y - y_0}{r^3} \gamma(x, y, z) d\sigma,$$

$$F_z = Gm_0 \iint_{\sigma} \frac{z - z_0}{r^3} \gamma(x, y, z) d\sigma.$$

Оскільки  $\vec{r} = (x; y; z)$ , то  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . Якщо поверхня інтегрування конус  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ , то  $d\sigma = \sqrt{2} dx dy$ , тоді

$$F_x = Gm_0 \iint_{\sigma} \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} d\sigma = \sqrt{2} Gm_0 \iint_{\sigma_{xy}} \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} dx dy.$$

Оскільки  $\sigma_{xy}$  – кільце, то інтегрування проведемо в полярних координатах:

$$\begin{aligned} F_x &= \sqrt{2} Gm_0 \iint_{\sigma_{xy}} \frac{\rho^2 \cos \varphi}{(2\rho^2)^{\frac{3}{2}}} d\varphi d\rho = \frac{1}{2} Gm_0 \iint_{(\sigma_{xy})'} \frac{\cos \varphi}{\rho} d\varphi d\rho = \\ &= \frac{m_0}{2} G \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi \int_b^a \frac{d\rho}{\rho} = 0. \end{aligned}$$

Аналогічно отримаємо, що  $F_y = Gm_0 \iint_{\sigma} \frac{y}{r^3} d\sigma = 0$ . Далі,

$$F_z = Gm_0 \iint_{\sigma} \frac{z}{r^3} d\sigma = \sqrt{2} Gm_0 \iint_{\sigma_{xy}} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{(2(x^2 + y^2))^{\frac{3}{2}}} dx dy = \frac{m_0}{2} G \iint_{\sigma_{xy}} \frac{dx dy}{x^2 + y^2}.$$

Переходимо до полярних координат:

$$F_z = \frac{m_0}{2} G \iint_{\sigma_{xy}} \frac{dx dy}{x^2 + y^2} = \frac{m_0}{2} G \iint_{(\sigma_{xy})'} \frac{d\varphi d\rho}{\rho} = \frac{m_0}{2} G \int_0^{2\pi} d\varphi \int_b^a \frac{d\rho}{\rho} = \pi m_0 G \ln \frac{a}{b}.$$

*Відповідь:*  $\vec{F} = \left( 0; 0; \pi m_0 G \ln \frac{a}{b} \right)$ .

## Завдання для самостійної роботи

### Рівень 1

21. Обчислити  $\iint_{\sigma} z d\sigma$ ,  $\sigma$ : частина площини  $z=3$ , яка обмежена площинами  $x=0$ ,  $x=2$ ,  $y=0$ ,  $y=1$ .

22. Обчислити площу частини поверхні  $\sigma: x+y+z=1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ .

23. Знайти масу частини поверхні  $\sigma: z=4$  із заданою поверхневою щільністю  $\gamma(x, y, z)=2$ , яка вирізана параболоїдом  $z=x^2+y^2$ .

24. Обчислити площу частини поверхні  $\sigma: x+z=5, 0 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq 3$ .

25. Знайти координату  $x_C$  центру ваги частини однорідної ( $\gamma=1$ ) поверхні  $\sigma: x+y+z=3, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ .

### Рівень 2

26. Обчислити поверхневий інтеграл  $\iint_{\sigma} z d\sigma$  по частині поверхні  $\sigma: z=x^2+y^2$  за умови  $0 \leq z \leq 1$ .

27. Обчислити абсцису центру ваги частини однорідної ( $\gamma=1$ ) поверхні  $\sigma: z=\sqrt{x^2+y^2}$ , яка вирізана циліндром  $x^2+y^2=2x$ .

28. Знайти масу частини матеріальної поверхні  $\sigma: x^2+y^2+z^2=R^2, z \geq 0$  із щільністю  $\gamma(x, y, z)=z$ , що лежить усередині циліндра  $x^2+y^2=Rx$ .

29. Обчислити поверхневий інтеграл  $\iint_{\sigma} (z^2+y^2) d\sigma$  по частині поверхні  $\sigma: x+z=0$ , що знаходиться усередині циліндра  $x^2+y^2=R^2$ .

30. Обчислити момент інерції  $I_z$  частини однорідної ( $\gamma=1$ ) поверхні  $\sigma: z^2=x^2+y^2 (z \geq 0)$ , яка вирізана циліндром  $x^2+y^2=1$ .

**Відповіді:** 21. 6. 22.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ . 23.  $8\pi$ . 24.  $15\sqrt{2}$ . 25.  $\frac{1}{2}$ . 26.  $\frac{\pi}{60}(25\sqrt{5}+1)$ .  
27. 1. 28.  $\frac{\pi R^3}{4}$ . 29.  $\frac{\sqrt{2}}{2}\pi R^4$ . 30.  $\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$ .

## 2.2. Поверхневі інтеграли другого роду

### 2.2.1. Поняття орієнтовної поверхні

Нехай  $\sigma$  – гладка поверхня, що обмежена контуром  $L$ . Виберемо на  $\sigma$  точку  $M_0(x_0; y_0; z_0)$ , побудуємо у цій точці нормаль  $\vec{n}$  до поверхні. Зафіксуємо один із двох можливих напрямів нормалі. Виберемо на поверхні  $\sigma$  довільний замкнений контур  $\gamma$ , що проходить через точку  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  й не має спільних точок із контуром  $L$  (рис. 2.3).

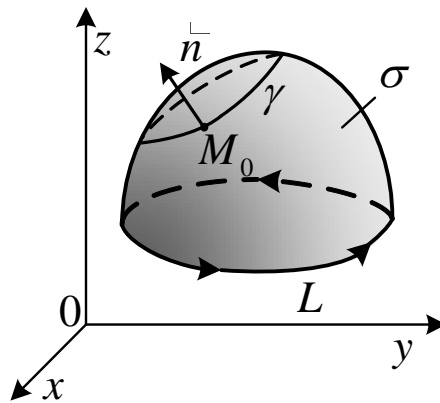


Рисунок 2.3

Якщо при переміщенні точки  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  уздовж контуру  $\gamma$  точка повернеться у початкове положення з тим же напрямом нормалі  $\vec{n}$ , то поверхня  $\sigma$  називається *двосторонньою*. Якщо ж при цьому напрям нормалі зміниться (на протилежний), то така поверхня називається *односторонньою*.

Будь-яка гладка поверхня, що задана рівнянням  $z = f(x, y)$ , двостороння. Якщо в кожній точці поверхні вибрати напрям нормалі  $\vec{n}$  таким чином, щоб вона утворювала гострий кут з віссю  $Oz$  (додатний напрям), одержимо верхню (додатну) сторону поверхні, а при протилежному напрямі нормалі  $\vec{n}$  (тупий кут з віссю  $Oz$ ) – її нижню (від’ємну) сторону.

Будь-яка замкнена поверхня без самоперетинань – двостороння. Розрізняють внутрішню й зовнішню сторони замкненої поверхні.

Двосторонні поверхні називають також орієнтовними, а вибір напрямку нормалі (сторони поверхні) – орієнтацією поверхні. Односторонні поверхні є неорієнтовними.

З поняттям сторони поверхні  $\sigma$  зв'язане поняття орієнтації контуру  $L$ , що її обмежує.

Нехай  $\sigma$  – орієнтовна поверхня, тобто з обраною стороною. Напрямок обходу контуру  $L$  називається *додатним* (відповідним орієнтації поверхні), якщо при обраному напрямку нормалі при обході контуру проти годинникової стрілки поверхня  $\sigma$  залишається ліворуч (рис. 2.3). Обхід у протилежному напрямку називається *від'ємним*.

### 2.2.2. Поверхневі інтеграли другого роду

Нехай в області  $V \subset R^3$  задана гладка поверхня  $\sigma$  й вектор-функція  $\overset{r}{a} = \{P(x, y, z); Q(x, y, z); R(x, y, z)\}$ , де  $P, Q$  й  $R$  – неперервні в області  $V$  функції. Припустимо, що в кожній точці  $M(x; y; z)$  поверхні  $\sigma$  визначається додатний напрям нормалі одиничним вектором  $\overset{r}{n}^o(M)$ , а його направляючі косинуси є неперервними функціями координат точок поверхні.

Розіб'ємо поверхню  $\sigma$  довільним чином на  $n$  елементарних площинок  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$  із площами  $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n$ . Позначимо через  $d_i$  діаметр елементарної площинки  $\sigma_i$ . На кожній елементарній площинці  $\sigma_i$  виберемо довільну точку  $M_i(x_i; y_i; z_i)$  (рис. 2.4), визначимо в ній нормаль  $\overset{r}{n}^o(M_i) = \overset{r}{n}_i^o$ , обчислимо значення вектор-функції

$$\overset{r}{a}(M_i) = \{P(M_i); Q(M_i); R(M_i)\} = \overset{r}{a}_i \text{ й складемо суму: } S_n = \sum_{i=1}^n (\overset{r}{a}_i \cdot \overset{r}{n}_i^o) \cdot \Delta\sigma_i.$$

Якщо існує кінцева границя суми  $S_n$  за умови  $\max_i d_i \rightarrow 0$ , то вона називається *поверхневим інтегралом другого роду* й позначається

$$\iint_{\sigma} (\overset{r}{a} \cdot \overset{r}{n}^o) d\sigma. \quad (2.10)$$

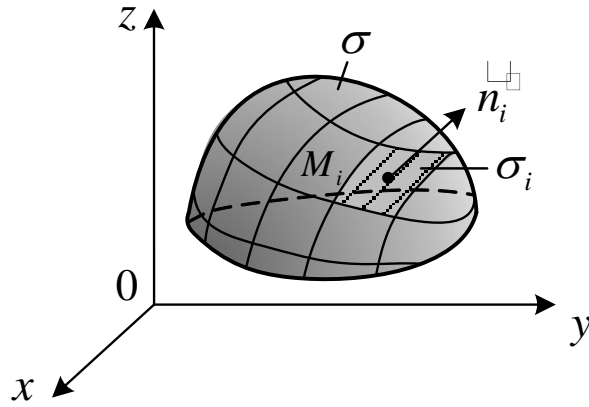


Рисунок 2.4

У випадку замкненої поверхні  $\sigma$  інтеграл (2.10) набуває вигляд:

$$\oiint_{\sigma} (\vec{a} \cdot \vec{n}^o) d\sigma.$$

Фактично інтеграл (2.10) – як поверхневий інтеграл першого роду – є поверхневим інтегралом другого роду від вектор-функції  $\vec{a}$  по обраній стороні поверхні  $\sigma$ .

Якщо поверхня  $\sigma$  задана рівнянням  $z = z(x, y)$ , де  $z(x, y)$  – неперервна разом зі своїми частинними похідними функція в області  $V$ , то на верхній (додатній) стороні поверхні одиничний вектор нормалі  $\vec{n}^o(M)$  визначається за формулою:

$$\vec{n}^o(M) = \frac{-z'_x(M)\vec{i} - z'_y(M)\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{1 + (z'_x(M))^2 + (z'_y(M))^2}}, \quad (2.11)$$

а на нижній (від'ємній) стороні:

$$\vec{n}^o(M) = \frac{z'_x(M)\vec{i} + z'_y(M)\vec{j} - \vec{k}}{\sqrt{1 + (z'_x(M))^2 + (z'_y(M))^2}}. \quad (2.12)$$

Оскільки  $\vec{n}^o = \{\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma\}$ , то:  $\vec{a} \cdot \vec{n}^o = P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma$ .

Якщо кути  $\alpha, \beta, \gamma$  – гострі, то  $\cos \alpha d\sigma = dydz$ ,  $\cos \beta d\sigma = dzdx$ ,  $\cos \gamma d\sigma = dxdy$ , а інтеграл (2.10) тоді можна записати у вигляді:

$$\oiint_{\sigma} (\vec{a} \cdot \vec{n}^o) d\sigma = \iint_{\sigma} P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dzdx + R(x, y, z) dxdy. \quad (2.13)$$

Інтеграл у правій частині (2.13) називається поверхневим інтегралом другого роду в координатній формі. Рівність (2.13) визначає зв'язок між поверхневими інтегралами першого й другого роду.

З означення поверхневого інтеграла другого роду випливає, що при зміні напрямку нормалі на протилежний знак інтеграла (2.10) також змінюється на протилежний:

$$\iint_{\sigma^+} (\vec{a} \cdot \vec{n}^0) d\sigma = - \iint_{\sigma^-} (\vec{a} \cdot \vec{n}^0) d\sigma,$$

де  $\sigma^+$  й  $\sigma^-$  – відповідно додатна й від'ємна сторони поверхні  $\sigma$ .

### **Фізичний зміст поверхневих інтегралів другого роду**

Якщо вектор-функція  $\vec{a}(M)$  визначає в кожній точці  $M \in V$  швидкість течії рідини, то поверхневий інтеграл (2.10) обчислює потік або кількість рідини, що протікає через обрану сторону поверхні  $\sigma$  за одиницю часу. Якщо  $\sigma$  – замкнена поверхня, то інтеграл (2.10) – різниця між кількістю рідини, що втікає в область, що обмежена поверхнею  $\sigma$ , і кількістю рідини, що витікає з неї.

### **2.2.3. Обчислення поверхневих інтегралів другого роду**

Обчислювати поверхневі інтеграли другого роду можна двома способами:

1) зведенням його до поверхневого інтеграла першого роду за формулою (2.13);

2) безпосереднє обчислення, яке також зводиться до обчислення подвійного інтеграла по пласкій області. При цьому поверхневий інтеграл другого роду в координатній формі розбивають на три інтеграли з наступним обчисленням кожного з них.

Нехай в області  $V \subset R^3$  задана гладка поверхня  $\sigma$  рівнянням  $z = z(x, y)$  і функція  $R(x, y, z)$ , яка безперервна в цій області. Тоді для верхньої (додатної) сторони поверхні  $\sigma$

$$\iint_{\sigma^+} R(x, y, z) dx dy = \iint_{\sigma_{xy}} R[x, y, z(x, y)] dx dy, \quad (2.14)$$

де  $\sigma_{xy}$  – проекція поверхні  $\sigma$  на координатну площину  $xOy$ .

Аналогічно обчислюються інші два інтеграли. Якщо поверхня  $\sigma$  задана рівнянням  $x = x(y, z)$ , то

$$\iint_{\sigma} P(x, y, z) dydz = \pm \iint_{\sigma_{yz}} P[x(y, z), y, z] dydz. \quad (2.15)$$

Якщо поверхня  $\sigma$  задана рівнянням  $y = y(x, z)$ , то

$$\iint_{\sigma} Q(x, y, z) dzdx = \pm \iint_{\sigma_{zx}} Q[x, y(x, z), z] dzdx. \quad (2.16)$$

Знак в (2.15) і (2.16) вибирається залежно від того, по якій стороні поверхні  $\sigma$  проводиться інтегрування.

*Зауваження 1.* Якщо поверхня  $\sigma$  замкнена, то при обчисленні інтеграла її слід розбити на частини, що задаються рівняннями  $x = x(y, z)$ ,  $y = y(x, z)$  або  $z = z(x, y)$ , та інтегрування проводити по кожній з них з урахуванням обраної сторони поверхні  $\sigma$ .

*Зауваження 2.* Поверхневий інтеграл  $\iint_{\sigma} R(x, y, z) dx dy$ , узятий по частині циліндричної поверхні з твірними, що паралельні осі  $Oz$ , дорівнює нулю. В аналогічних випадках дорівнюють нулю й поверхневі інтеграли  $\iint_{\sigma} P(x, y, z) dy dz$  (твірна циліндричної поверхні паралельна осі  $Ox$ ) і  $\iint_{\sigma} Q(x, y, z) dz dx$  (твірна циліндричної поверхні паралельна осі  $Oy$ ).

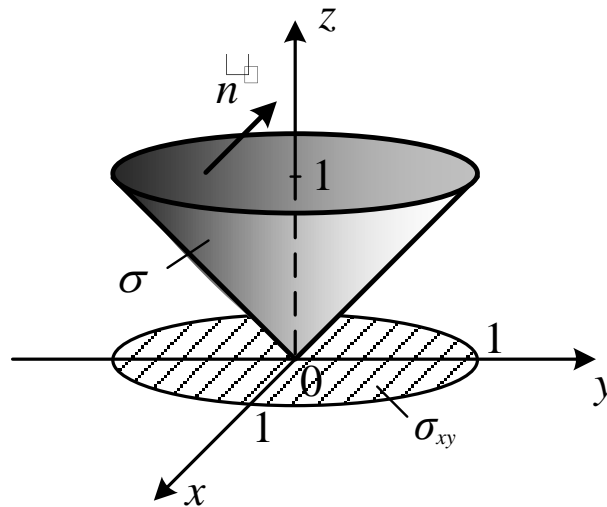
*Зауваження 3.* Якщо поверхня інтегрування лежить у площині, що перпендикулярна осі  $Oz$ , тобто задається рівнянням  $z = const$ , то поверхневі інтеграли  $\iint_{\sigma} P(x, y, z) dy dz$  й  $\iint_{\sigma} Q(x, y, z) dz dx$  відповідно до формул (2.15) і (2.16) дорівнюють нулю, тому що дорівнюють нулю площі проєкцій  $\sigma_{yz}$  і  $\sigma_{zx}$  поверхні  $\sigma$  на відповідні координатні площини.

Аналогічно, дорівнюють нулю поверхневі інтеграли  $\iint_{\sigma} P(x, y, z) dydz$  й  $\iint_{\sigma} R(x, y, z) dx dy$ , якщо поверхня  $\sigma$  задається рівнянням  $y = \text{const}$ , і дорівнюють нулю поверхневі інтеграли  $\iint_{\sigma} Q(x, y, z) dz dx$  й  $\iint_{\sigma} R(x, y, z) dx dy$ , якщо поверхня  $\sigma$  задається рівнянням  $x = \text{const}$ .

**Приклад 32.** Обчислити  $\iint_{\sigma} z dx dy$ , де  $\sigma$  – додатна сторона частини поверхні  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  за умови  $0 \leq z \leq 1$ .

*Розв'язання.*

З умови випливає, що інтегрування проводиться по верхній стороні поверхні. Користуючись рівнянням поверхні  $\sigma$ , перетворимо заданий інтеграл у подвійний за формулою (2.14).



З рівняння поверхні  $\sigma$ :  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Тоді

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma^+} z dx dy &= \iint_{\sigma_{xy}} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy = \iint_{(\sigma_{xy})'} \rho^2 d\varphi d\rho = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho^2 d\rho = 2\pi \cdot \left( \frac{\rho^3}{3} \Big|_0^1 \right) = \frac{2\pi}{3}, \end{aligned}$$

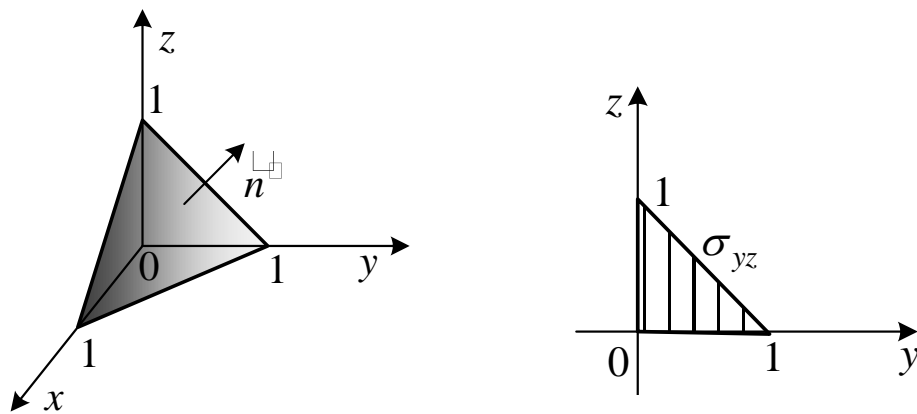
де  $\sigma_{xy}$  – проекція  $\sigma$  в площину  $xOy$  – круг  $x^2 + y^2 \leq 1$ . Тому подальші обчислення були проведені в полярних координатах.

Відповідь:  $\frac{2\pi}{3}$ .

**Приклад 33.** Обчислити  $\iint_{\sigma} xy^2 dy dz$ , де  $\sigma$  – додатна сторона частини

площини  $x + y + z = 1$ , що розташована в першому октанті.

*Розв'язання.* З умови випливає, що інтегрування проводиться по верхній стороні площини. Користуючись рівнянням поверхні  $\sigma$ , перетворимо заданий інтеграл у подвійний за формулою (2.15).



З рівняння поверхні  $\sigma$ :  $x = 1 - y - z$ . Тоді

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma^+} xy^2 dy dz &= \iint_{\sigma_{yz}} (1 - y - z)y^2 dy dz = \int_0^1 y^2 dy \int_0^{1-y} (1 - y - z) dz = \\ &= \int_0^1 y^2 \left( z - yz - \frac{z^2}{2} \right) \Big|_0^{1-y} dy = \int_0^1 y^2 \left( 1 - y - y(1 - y) - \frac{(1 - y)^2}{2} \right) dy = \end{aligned}$$

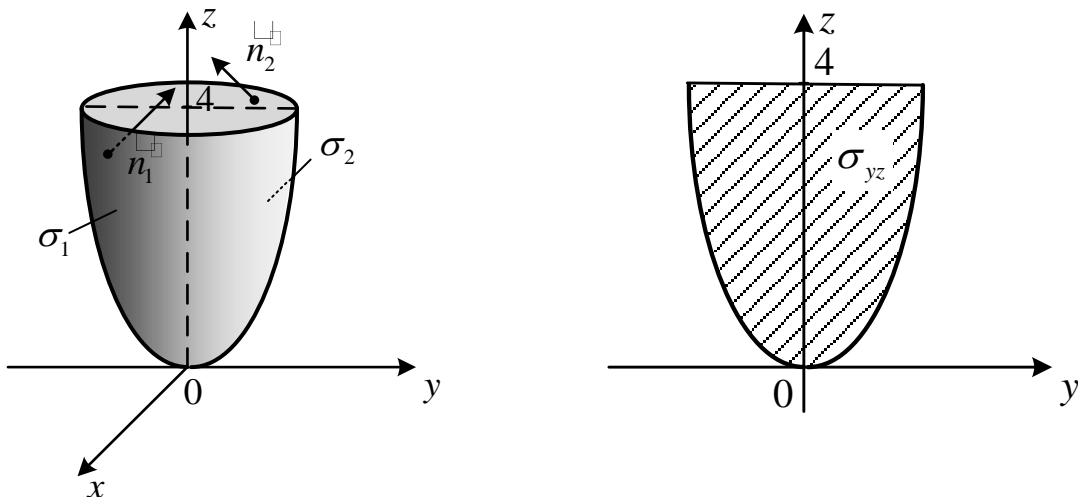
$$= \int_0^1 \left( \frac{y^4}{2} - y^3 + \frac{y^2}{2} \right) dy = \left( \frac{y^5}{10} - \frac{y^4}{4} + \frac{y^3}{6} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{60}.$$

Відповідь:  $\frac{1}{60}$ .

**Приклад 34.** Обчислити  $\iint_{\sigma} x dy dz$ , де  $\sigma$  – додатна сторона частини поверхні  $z = x^2 + y^2$  за умови  $0 \leq z \leq 4$ .

*Розв'язання.* З умови випливає, що інтегрування проводиться по верхній стороні поверхні. Користуючись рівнянням поверхні  $\sigma$ , перетворимо заданий інтеграл у подвійний за формулою (2.15).

З рівняння поверхні  $\sigma$ :  $x = \pm\sqrt{z - y^2}$ . У випадку, коли  $\sigma_1: x = \sqrt{z - y^2}$ , заданий напрям нормалі до обраної сторони цієї частини поверхні утворює тупий кут з додатним напрямом осі  $Ox$ , відповідний подвійний інтеграл буде зі знаком мінус. Якщо обрана та частина параболоїда, для якої  $\sigma_2: x = -\sqrt{z - y^2}$ , то відповідний подвійний інтеграл також буде зі знаком мінус, оскільки задана нормаль для обраної сторони поверхні утворює гострий кут з додатним напрямом осі  $Ox$ .



Оскільки проекції поверхонь  $\sigma_1$  і  $\sigma_2$  в площину  $yOz$  співпадають,

то

$$\begin{aligned}
\iint_{\sigma^+} x dy dz &= - \iint_{(\sigma_{yz})_1} \sqrt{z-y^2} dy dz - \iint_{(\sigma_{yz})_2} \sqrt{z-y^2} dy dz = -2 \iint_{\sigma_{yz}} \sqrt{z-y^2} dy dz = \\
&= -2 \int_{-2}^2 dy \int_{y^2}^4 \sqrt{z-y^2} dz = -\frac{4}{3} \int_{-2}^2 \left( (z-y^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_{y^2}^4 \right) dy = -\frac{4}{3} \int_{-2}^2 (4-y^2)^{\frac{3}{2}} dy = \\
&= -\frac{8}{3} \int_0^2 (4-y^2)^{\frac{3}{2}} dy = \left\| \begin{array}{l} y = 2 \sin t, \\ dy = 2 \cos t dt \end{array} \right\| = -\frac{8}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \cos t)^3 2 \cos t dt = -\frac{128}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t dt = \\
&= -\frac{32}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t)^2 dt = -\frac{32}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + 2 \cos 2t + \cos^2 2t) dt = \\
&= -\frac{32}{3} \left( \frac{3}{2} t + \sin 2t + \frac{1}{8} \sin 4t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -16t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -8\pi.
\end{aligned}$$

Відповідь:  $-8\pi$ .

#### 2.2.4. Зв'язок між інтегралами різних видів

З однією з таких формул – формулою Гріна – ми вже познайомилися в Темі 1. Формула Гріна дозволяє обчислення криволінійного інтегралу по замкненому контуру звести до обчислення подвійного інтегралу по області, що обмежена цим замкненим контуром. Аналогічна формула має місце й для поверхневих інтегралів.

#### Формула Стокса

**Теорема.** Нехай в області  $V \subset R^3$  задана орієнтовна гладка поверхня  $\sigma$ , що обмежена додатно орієнтовним гладким контуром  $L$ . Функції  $P(x, y, z)$ ,  $Q(x, y, z)$  й  $R(x, y, z)$  неперервні в області  $V$  разом зі своїми частинними похідними. Тоді

$$\int_L P dx + Q dy + R dz = \iint_{\sigma} \left( \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma \right) d\sigma,$$

де  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  – напрямні косинуси нормалі  $\vec{n}$  до поверхні  $\sigma$ ,  $L$  – лінія, що обмежує поверхню  $\sigma$  (рис. 2.5).

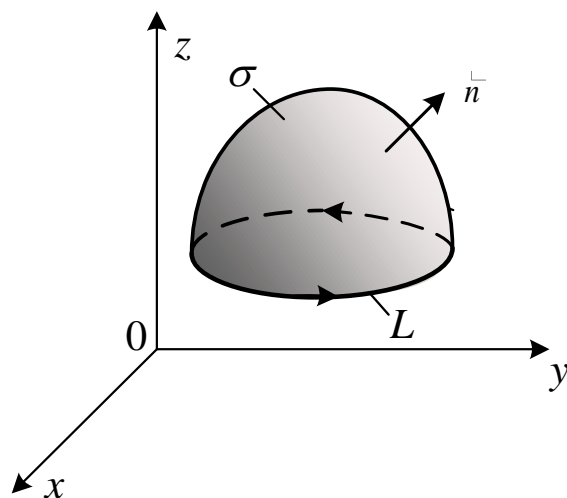


Рисунок 2.5

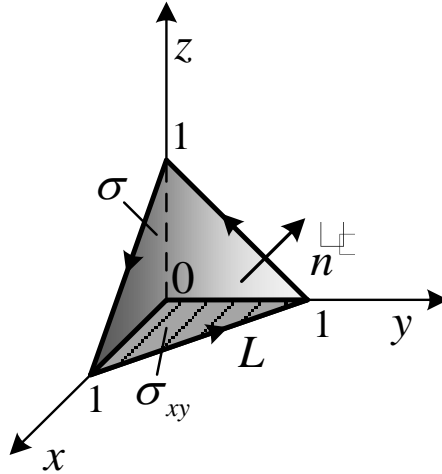
**Приклад 35.** Обчислити криволінійний інтеграл за формулою Стокса:  $\oint_L y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz$ , де  $L$  – контур, що утворений перетинанням площини  $\sigma: x + y + z = 1$  з координатними площинами ( $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ ) (інтегрування по замкненому контуру  $L$  проводиться в напрямку за годинниковою стрілкою, якщо спостерігати з початку координат).

*Розв'язання.* Для обчислення криволінійного інтеграла за формулою Стокса визначимо вектор нормалі до площини й одиничний вектор нормалі.

Оскільки обрана додатна сторона поверхні  $\sigma$  ( $\cos \gamma > 0$ ), то нормаль  $\vec{n} = \{1; 1; 1\}$ , а одиничний вектор нормалі  $\vec{n}^0 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}} \right\}$ .

Тепер знайдемо необхідні для формули Стокса частинні похідні від функцій  $P(x, y, z) = y^2$ ,  $Q(x, y, z) = z^2$  й  $R(x, y, z) = x^2$ :

$$\frac{\partial R}{\partial y} = 0, \frac{\partial Q}{\partial z} = 2z, \frac{\partial P}{\partial z} = 0, \frac{\partial R}{\partial x} = 2x, \frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \frac{\partial P}{\partial y} = 2y.$$



За формулою Стокса маємо:

$$\oint_L y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz = \frac{-2}{\sqrt{3}} \iint_{\sigma} (x + y + z) d\sigma = \frac{-2}{\sqrt{3}} \iint_{\sigma_{xy}} \sqrt{3} dx dy = -2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = -1.$$

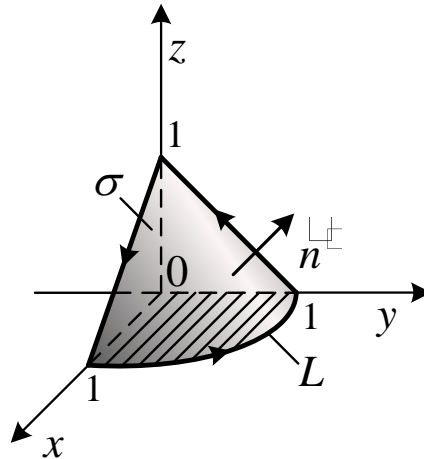
Відповідь:  $-1$ .

**Приклад 36.** Обчислити криволінійний інтеграл за формулою Стокса:  $\oint_L (2xy - z) dx + (x^2 - 2z) dy - 2x dz$ , де  $L$  – контур, утворений перетинанням поверхні конуса  $(z-1)^2 = x^2 + y^2$  з координатними площинами ( $x \geq 0, y \geq 0, 0 \leq z \leq 1$ ) (інтегрування по замкненому контуру  $L$  проводиться в напрямку за годинниковою стрілкою, якщо спостерігати з початку координат).

*Розв'язання.* Для обчислення криволінійного інтеграла за формулою Стокса визначимо вектор нормалі до поверхні й одиничний вектор нормалі.

Оскільки обрана додатна сторона поверхні  $\sigma$  ( $\cos \gamma > 0$ ), то нормаль до поверхні  $\vec{n} = \{-z'_x; -z'_y; 1\}$ , а одиничний вектор нормалі

$$\vec{n}_0 = \left\{ \frac{-z'_x}{\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}}; \frac{-z'_y}{\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}}; \frac{1}{\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}} \right\}.$$



Оскільки  $z'_x = \frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ ,  $z'_y = \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ , то  $\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} = \sqrt{2}$ , і

$$\vec{n}^o = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}; 1 \right), \text{ тобто}$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{2(x^2 + y^2)}}, \quad \cos \beta = \frac{y}{\sqrt{2(x^2 + y^2)}}, \quad \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Тепер знайдемо необхідні для формули Стокса частинні похідні від функцій  $P(x, y, z) = 2xy - z$ ,  $Q(x, y, z) = x^2 - 2z$  й  $R(x, y, z) = -2x$ :

$$\frac{\partial R}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = -2, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = -1, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = -2, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 2x.$$

За формулою Стокса маємо:

$$\oint_L (2xy - z)dx + (x^2 - 2z)dy - 2xdz = \frac{1}{\sqrt{2}} \iint_{\sigma} \frac{2x + y}{\sqrt{x^2 + y^2}} d\sigma = \iint_{\sigma_{xy}} \frac{2x + y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy.$$

Подальші обчислення проведемо в полярних координатах:

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma_{xy}} \frac{2x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy &= \iint_{(\sigma_{xy})'} \frac{\rho(2\cos\varphi + \sin\varphi)}{\rho} \rho d\varphi d\rho = \iint_{(\sigma_{xy})'} (2\cos\varphi + \sin\varphi) \rho d\varphi d\rho = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cos\varphi + \sin\varphi) d\varphi \int_0^1 \rho d\rho = \frac{1}{2} (2\sin\varphi - \cos\varphi) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Відповідь:  $\frac{3}{2}$ .

Тепер розглянемо зв'язок між інтегралом по замкненій поверхні й потрійним інтегралом по області, що обмежена цією поверхнею.

### Формула Остроградського-Гаусса

Нехай у замкненій області  $V \subset R^3$ , що обмежена поверхнею  $\sigma$ , функції  $P(x, y, z)$ ,  $Q(x, y, z)$  й  $R(x, y, z)$  неперервні разом зі своїми частинними похідними. Тоді для додатно орієнтовної поверхні  $\sigma$  (нормаль зовнішня) має місце формула:

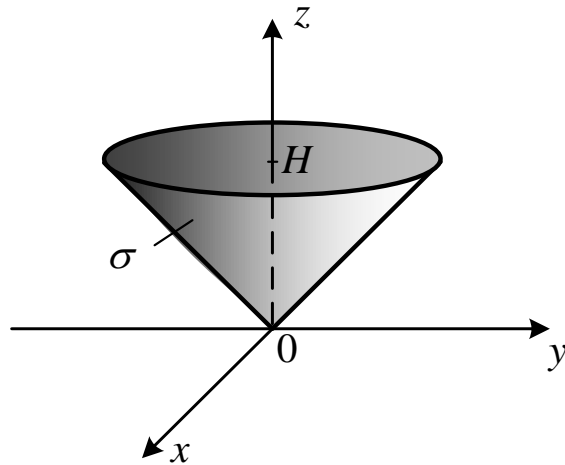
$$\iint_{\sigma^+} (P \cos\alpha + Q \cos\beta + R \cos\gamma) d\sigma = \iiint_V \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz.$$

**Приклад 37.** Обчислити поверхневий інтеграл по зовнішній стороні замкненої поверхні  $\sigma$  за формулою Остроградського-Гаусса:

$$\iint_{\sigma^+} x dy dz + y dz dx + z dx dy, \quad \sigma: \quad z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z = H.$$

*Розв'язання.* Знайдемо необхідні для формули Остроградського-Гаусса частинні похідні від функцій  $P(x, y, z) = x$ ,  $Q(x, y, z) = y$  й

$$R(x, y, z) = z: \quad \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial R}{\partial z} = 1.$$



Тоді

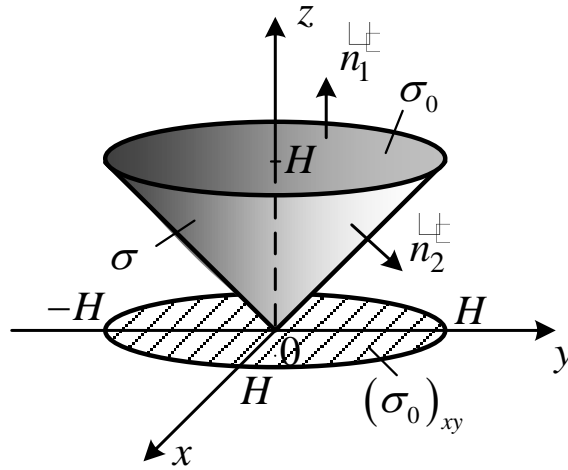
$$\begin{aligned} \iint_{\sigma^+} xdydz + ydzdx + zdxdy &= \iiint_V \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz = \\ &= 3 \iiint_V dxdydz = 3V_{\text{конуса}} = 3 \cdot \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot H = \pi H^3. \end{aligned}$$

Відповідь:  $\pi H^3$ .

**Приклад 38.** Обчислити поверхневий інтеграл по нижній стороні поверхні  $\sigma$ :

$$\iint_{\sigma} (y-z)dydz + (z-x)dzdx + (x-y)dxdy, \quad \sigma: z = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (0 \leq z \leq H).$$

*Розв'язання.* Скористаємося для обчислення цього поверхневого інтеграла формулою Остроградського-Гаусса. Для цього доповнимо поверхню інтегрування  $\sigma$  до замкненої частиною площини  $z = H$  ( $\sigma_0$ ), що міститься усередині конуса  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ , і виберемо додатну (зовнішню) сторону цієї замкненої поверхні.



Тоді

$$\begin{aligned}
 & \iint_{\sigma} (y-z) dydz + (z-x) dzdx + (x-y) dxdy = \\
 & = \iint_{\sigma^{\#}} (y-z) dydz + (z-x) dzdx + (x-y) dxdy - \\
 & - \iint_{\sigma_0^+} (y-z) dydz + (z-x) dzdx + (x-y) dxdy.
 \end{aligned}$$

Знайдемо необхідні для формули Остроградського-Гаусса частинні похідні від функцій  $P(x, y, z) = y - z$ ,  $Q(x, y, z) = z - x$  й  $R(x, y, z) = x - y$ :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial R}{\partial z} = 0.$$

Тоді за формулою Остроградського-Гаусса

$$\iint_{\sigma^{\#}} (y-z) dydz + (z-x) dzdx + (x-y) dxdy = 0.$$

Поверхня  $\sigma_0$  задається рівнянням  $z = H$  і проектується в площину  $xOy$  в круг  $x^2 + y^2 \leq H^2$ . Тому

$$\iint_{\sigma_0^+} (y-z) dydz + (z-x) dzdx + (x-y) dxdy =$$

$$= \iint_{(\sigma_0)_{xy}} (x-y) dx dy = \iint_{(\sigma_0)'_{xy}} (\cos \varphi - \sin \varphi) \rho^2 d\varphi d\rho = 0,$$

оскільки  $\int_0^{2\pi} (\cos \varphi - \sin \varphi) d\varphi = 0$ . Остаточно одержуємо, що

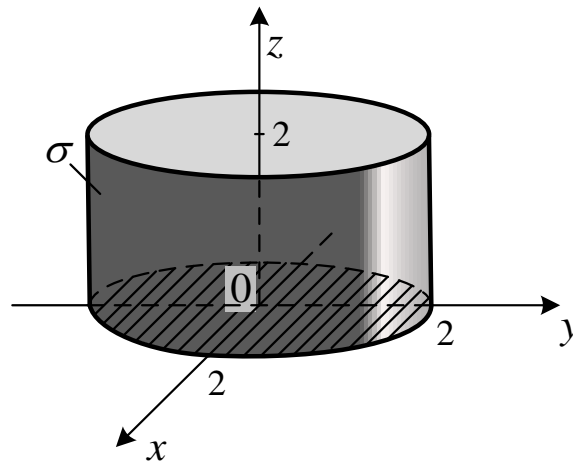
$$\iint_{\sigma} (y-z) dy dz + (z-x) dz dx + (x-y) dx dy = 0.$$

*Відповідь: 0.*

**Приклад 39.** Обчислити поверхневий інтеграл по зовнішній стороні замкненої поверхні  $\sigma$  за формулою Остроградського-Гаусса:

$$\iint_{\sigma^+} 3xy^2 dy dz + 3yx^2 dz dx + z^3 dx dy, \quad \sigma: \quad x^2 + y^2 = 4, \quad z = 0, \quad z = 2.$$

*Розв'язання.*



Знайдемо необхідні для формули Остроградського-Гаусса частинні похідні від функцій  $P(x, y, z) = 3xy^2$ ,  $Q(x, y, z) = 3yx^2$  й  $R(x, y, z) = z^3$ :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 3y^2, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = 3x^2, \quad \frac{\partial R}{\partial z} = 3z^2.$$

Обчислення проведемо у циліндричній системі координат:

$$\begin{aligned}
\iint_{\sigma^+} 3xy^2 dydz + 3yx^2 dzdx + z^3 dxdy &= 3 \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dxdydz = \\
&= 3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho d\rho \int_0^2 (\rho^2 + z^2) dz = 6\pi \int_0^2 \rho \left( \rho^2 z + \frac{z^3}{3} \Big|_0^2 \right) d\rho = 6\pi \int_0^2 \left( 2\rho^3 + \frac{8}{3}\rho \right) d\rho = \\
&= 6\pi \left( \frac{\rho^4}{2} + \frac{4}{3}\rho^2 \right) \Big|_0^2 = 6\pi \left( 8 + \frac{16}{3} \right) = 80\pi.
\end{aligned}$$

Відповідь:  $80\pi$ .

**Приклад 40.** Обчислити поверхневий інтеграл за формулою Остроградського-Гаусса по зовнішній стороні замкненої поверхні  $\sigma$ :

$$\iint_{\sigma^+} x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy, \quad \sigma: (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 9.$$

*Розв'язання.* Знайдемо необхідні для формули Остроградського-Гаусса частинні похідні від функцій  $P(x, y, z) = x^2$ ,  $Q(x, y, z) = y^2$  й

$$R(x, y, z) = z^2: \quad \frac{\partial P}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial R}{\partial z} = 2z.$$

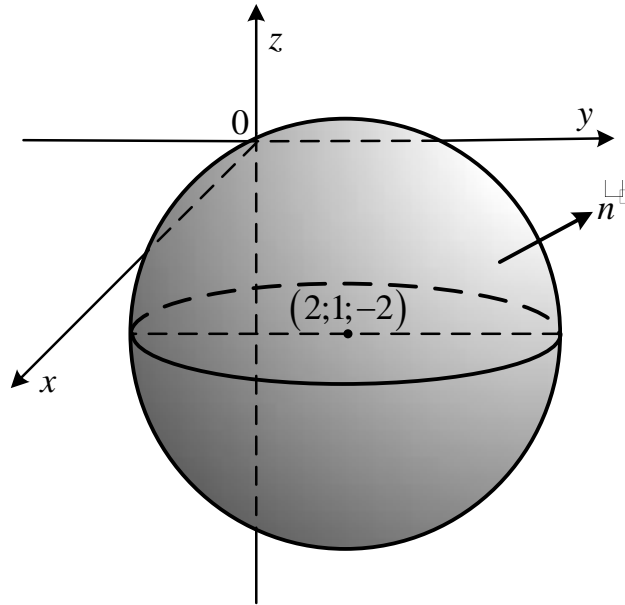
$$\iint_{\sigma^+} x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy = 2 \iiint_V (x + y + z) dxdydz,$$

де  $V$  – куля  $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 \leq 9$ .

Обчислення проведемо у сферичних координатах:

$$\begin{aligned}
&\iiint_V (x + y + z) dxdydz = \\
&= \iiint_V ((x-2) + (y-1) + (z+2) + 1) dxdydz = \left\| \begin{array}{l} x-2 = \rho \cos \varphi \sin \theta, \\ y-1 = \rho \sin \varphi \sin \theta, \\ z+2 = \rho \cos \theta, \quad |J| = \rho^2 \sin \theta \end{array} \right\| = \\
&= \iiint_{V'} (\rho(\cos \varphi \sin \theta + \sin \varphi \sin \theta + \cos \theta) + 1) \rho^2 \sin \theta d\varphi d\theta d\rho.
\end{aligned}$$

Скористаємося властивістю лінійності інтегралів для представлення отриманого потрійного інтеграла у вигляді суми таких інтегралів:



$$I_1 = \iiint_{V'} \rho^3 \sin^2 \theta (\cos \varphi + \sin \varphi) d\varphi d\theta d\rho,$$

$$I_2 = \iiint_{V'} \rho^3 \sin \theta \cos \theta d\varphi d\theta d\rho, \quad I_3 = \iiint_{V'} \rho^2 \sin \theta d\varphi d\theta d\rho.$$

Обчислимо перший з них:

$$I_1 = \iiint_{V'} \rho^3 \sin^2 \theta (\cos \varphi + \sin \varphi) d\varphi d\theta d\rho = \int_0^{2\pi} (\cos \varphi + \sin \varphi) d\varphi \int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta \int_0^3 \rho^3 d\rho = 0,$$

оскільки  $\int_0^{2\pi} (\cos \varphi + \sin \varphi) d\varphi = 0$ .

Далі,

$$I_2 = \iiint_{V'} \rho^3 \sin \theta \cos \theta d\varphi d\theta d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta \cos \theta d\theta \int_0^3 \rho^3 d\rho =$$

$$= 2\pi \cdot \left( \frac{\sin^2 \theta}{2} \Big|_0^\pi \right) \cdot \left( \frac{3^4}{4} \right) = 0,$$

оскільки  $\sin 0 = \sin \pi = 0$ . Нарешті,

$$I_3 = \iiint_{V'} \rho^2 \sin \theta d\varphi d\theta d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^3 \rho^2 d\rho = 2\pi \cdot \left( -\cos \theta \Big|_0^\pi \right) \cdot \left( \frac{3^3}{3} \right) = 36\pi.$$

Остаточно маємо, що

$$\oiint_{\sigma^+} x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy = 2 \iiint_V (x + y + z) dxdydz = 72\pi.$$

*Відповідь:  $72\pi$ .*

## Завдання для самостійної роботи

### Рівень 1

**31.** Обчислити за формулою Остроградського-Гаусса  $\iint_{\sigma} (2x - y) dydz + (z + 3y) dx dz + (x - z) dx dy$ , де  $\sigma$  – зовнішня сторона поверхні піраміди, що обмежена площинами  $x + y + z = 2$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ .

**32.** Обчислити за формулою Остроградського-Гаусса  $\iint_{\sigma} (x + 2y - 3z) dydz + (e^y + 2z) dx dy$ , де  $\sigma$  – зовнішня сторона поверхні циліндра  $x^2 + y^2 = 1$ , що обмежений площинами  $z = 1$  й  $z = 3$ .

**33.** Обчислити за формулою Остроградського-Гаусса  $\iint_{\sigma} (3y + 2z - 1) dx dz - (e^{2x} - 4y + z) dx dy$ , де  $\sigma$  – зовнішня сторона поверхні паралелепіпеда, що обмежений площинами  $x = 0$ ,  $x = 2$ ,  $y = 0$ ,  $y = 3$ ,  $z = 0$ ,  $z = 4$ .

**34.** Обчислити за формулою Стокса  $\oint_L x dx + y dy + z dz$ ,  $L$ : контур  $VABC$  з вершинами  $A(1;0;0)$ ,  $B(0;1;0)$ ,  $C(0;0;1)$ , за умови, що обхід контуру інтегрування відбувається за годинниковою стрілкою, якщо спостерігати з початку координат.

**35.** Обчислити за формулою Стокса:

$$\oint_L (2y + \sin x) dx + (\cos y + z) dy + (3x + z^3) dz, L: \begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ z = 3, \end{cases}$$

за умови, що обхід контуру інтегрування відбувається за годинниковою стрілкою, якщо спостерігати з початку координат.

### Рівень 2

**36.** Обчислити  $\iint_{\sigma} yz dydz + xz dx dz + xy dx dy$ , де  $\sigma$  – зовнішня сторона частини циліндричної поверхні  $x^2 + y^2 = a^2$  при  $0 \leq z \leq h$ .

**37.** Обчислити  $\int_L ydx + zdy + xdz$ , де  $L$ : коло  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $z = 2$  (обхід

контур  $L$  відбувається за годинниковою стрілкою, якщо спостерігати з початку координат) двома способами: а) безпосередньо; б) користуючись формулою Стокса.

**38.** Обчислити за формулою Стокса:  $\int_L ydx + zdy + xdz$ , де  $L$  – коло

$x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ,  $x + y + z = 0$ , яке пробігається проти годинникової стрілки, якщо дивитися із точки  $A(2;0;0)$ .

**39.** Користуючись формулою Остроградського-Гаусса обчислити поверхневий інтеграл  $\iint_{\sigma} x^3 dydz + y^3 dx dz + z^3 dx dy$ , де  $\sigma$  – зовнішня сторона поверхні  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ .

**40.** Користуючись формулою Остроградського-Гаусса обчислити поверхневий інтеграл  $\iint_{\sigma} x^3 dydz + y^3 dx dz + z^3 dx dy$ , де  $\sigma$  – зовнішня сторона поверхні  $x^2 + y^2 + z^2 = x$ .

**Відповіді:** 31.  $\frac{16}{3}$ . 32.  $6\pi$ . 33. 48. 34. 0. 35.  $-8\pi$ . 36. 0. 37.  $-\pi$ .

38.  $-4\pi\sqrt{3}$ . 39.  $\frac{12\pi a^5}{5}$ . 40.  $\frac{\pi}{5}$ .

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Геворкян Ю. Л. Краткий курс высшей математики : учеб. пособ. в 2 ч. Ч. 2. / Ю. Л. Геворкян, А. Л. Григорьев, Н. А. Чикина. – Харьков: НТУ «ХПИ», 2010. – 476 с.
2. Бермант А. Ф. Краткий курс математического анализа / А. Ф. Бермант, И. Г. Араманович. – Москва: Наука, 1973. – 722 с.
3. Высшая математика в примерах и задачах : учеб. пособ. в 2 т. Т. 2. / под ред. Ю. Л. Геворкяна. – Харьков: Вид-во «Підручник» НТУ «ХПИ», 2011. – 376 с.
4. Збірник розрахунково-графічних завдань з вищої математики : у 2 ч. Ч. 2. / за ред. Чікіної Н. О. – Харків: Підручник НТУ «ХПИ», 2013. – 216 с.
5. Бутузов В. Ф. Математический анализ в вопросах и задачах. Функции нескольких переменных: учеб. пособие для студентов вузов / В. Ф. Бутузов, Н. Ч. Крутицкая, Г. Н. Медведев, А. А. Шишкин. – Москва : Высш. школа, 1988. – 288 с.

## ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА.....	3
Тема 1. КРИВОЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛИ.....	4
1.1. Криволінійні інтеграли першого роду.....	4
1.1.1. Основні означення.....	4
1.1.2. Властивості криволінійних інтегралів першого роду.....	5
1.1.3. Деякі застосування криволінійних інтегралів першого роду.....	5
Завдання для самостійної роботи .....	15
1.2. Криволінійні інтеграли другого роду.....	16
1.2.1. Основні означення.....	16
1.2.2. Фізичний зміст криволінійного інтеграла по координатах.....	17
1.2.3. Обчислення криволінійних інтегралів по координатах.....	17
1.2.4. Криволінійні інтеграли по замкненому контуру.....	20
1.2.5. Формула Гріна.....	23
1.2.6. Обчислення площі пласкої фігури за допомогою криволінійного інтеграла другого роду.....	26
1.2.7. Умова незалежності інтеграла від форми шляху інтегрування....	27
1.2.8. Знаходження функції за її повним диференціалом.....	29
Завдання для самостійної роботи.....	33
Тема 2. ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ.....	35
2.1. Поверхневі інтеграли першого роду.....	35
2.1.1. Основні означення.....	35
2.1.2. Властивості поверхневих інтегралів першого роду.....	36
2.1.3. Обчислення поверхневих інтегралів першого роду.....	37
2.1.4. Деякі застосування поверхневих інтегралів першого роду.....	43
Завдання для самостійної роботи.....	52
2.2. Поверхневі інтеграли другого роду.....	53
2.2.1. Поняття орієнтовної поверхні.....	53
2.2.2. Поверхневі інтеграли другого роду.....	54
2.2.3. Обчислення поверхневих інтегралів другого роду.....	56
2.2.4. Зв'язок між інтегралами різних видів.....	61
Завдання для самостійної роботи.....	72
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ.....	74

Навчальне видання

ЧІКІНА Наталія Олександрівна  
АНТОНОВА Ірина Володимирівна

КРИВОЛІНІЙНІ ТА ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ

Навчально-методичний посібник  
для студентів технічних спеціальностей  
усіх форм навчання вищих навчальних закладів

Відповідальний за випуск проф. Геворкян Ю. Л.  
Роботу до видання рекомендувала доц. Руднева Г. В.

В авторській редакції

План 2019 р., поз. 135

Підп. до друку 25.11.2019. Формат 60×84 1/16. Папір офсетний.  
Riso-друк. Гарнітура Times New Roman. Ум. друк. арк. \_\_\_\_\_.  
Наклад 50 прим. Зам. № \_\_\_\_\_. Ціна договірна.

---

Видавець Видавничий центр НТУ «ХПІ».

Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 5478 від 21.08.2017 р.  
61002, Харків, вул. Кирпичова, 2

---

Виготовлювач \_\_\_\_\_

---

---