К ВЫБОРУ ОПТИМАЛЬНЫХ МОДУЛЕЙ ДЛЯ ТЕОРЕТИКО-ЧИСЛОВОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Ивашко А.В., Лунин Д.А.
НТУ «ХПИ», ул. Кирпичева, 2, г. Харьков, Украина, 61002,
ivashkoauts@ gmail.com, lunindenis77@gmail.com

Дискретный спектральный и корреляционный анализ находит широкое применение при решении задач технической и медицинской диагностики, связи, радиолокации и многих других [1].

Существует ряд методов нахождения спектральной плотности мощности сигнала: периодограммный, коррелограммный и т.д. Однако наибольшее распространение получили алгоритмы спектрального анализа, основанные на представлении сигнала как результат прохождения белого шума через цифровой фильтр. При этом коэффициенты фильтра и, как следствие, оценки спектральной плотности мощности связаны через систему уравнений Юла-Уолкера со значениями отсчетов автокорреляционной функции (АКФ) анализируемого сигнала.

Наиболее трудоемкой частью вычисления спектра обычно оказывается процедура вычисления АКФ.

$$r_{xx}[m] = \frac{1}{N-m} \sum_{i=0}^{N-m-1} x_i \cdot x_{i+m} . \qquad (1)$$

Вычисление отсчетов АКФ по формуле (1) требует порядка N^2 отсчетов, где N – объем выборки. Поскольку часто приходится обрабатывать фрагменты сигнала длиной в несколько тысяч отсчетов, эта задача становится весьма сложной, особенно при аппаратной реализации.

Поэтому был предложен метод вычисление АКФ на основе быстрого преобразования Фурье [2], требующий порядка $6N \cdot \log_2 N$ операций умножения, что позволяет значительно уменьшить объем вычислений при больших N. Неудобство этого метода состоит в том, что при расчете ДПФ необходимо проведение операций с комплексными иррациональными числами, что приводит к значительным вычислительным проблемам. Кроме того, в ходе вычислений неизбежно накапливается ошибка при округлении и переполнении разрядной сетки.

Поэтому были разработаны так называемые теоретико-числовые преобразования (ТЧП) [2]. Основным отличием ТЧП является то, что при их вычислении все расчеты производятся над конечным полем $GF(p)$, то есть по модулю простого числа p.

ТЧП последовательности x_i, $i = 0 \ldots N-1$ определяется как

$$X_k = \sum_{i=0}^{N-1} x_i \cdot g^{ik} \pmod{p} , \qquad (2)$$

где g выбирается так, чтобы выполнялось условие:

$$g^N = 1 (\mathrm{mod}\ p), \qquad (3)$$

Если все значения отсчетов АКФ будут меньше модуля p, то результат будет верным, несмотря на промежуточные переполнения. В случае же, когда результат превышает значение модуля p, восстановить значение АКФ можно по так называемой китайской теореме об остатках.

С вычислительной точки зрения желательно, чтобы длина последовательности N была степенью двойки или раскладывалась на ряд сомножителей. Если число N составное, для вычисления прямого и обратного преобразований можно использовать алгоритм, аналогичный БПФ. Были проведены поиски модулей p, удобных с точки зрения реализации ТЧП. Наиболее подходящими оказались преобразования по модулям чисел Ферма $2^{2^m}+1$ и Мерсенна $2^q - 1$ (q - простое) [2]. Однако известно небольшое количество простых чисел Ферма и Мерсенна, поэтому был проведен поиск модулей p, обеспечивающих удобство операций сложения и умножения по модулю в (2).

Так, в [3] был проведен поиск модулей вида $p=p_1 \cdot p_2+1=(2^a-1)\cdot 2^b+1$, обеспечивающих вычисление ТЧП размерности 2^n. Такие параметры ТЧП с одной стороны позволяют применять эффективные алгоритмы быстрых преобразований, с другой – упрощают вычисление арифметических операций по модулю. Помимо размерностей 2^n представляют интерес также ТЧП размерностей $3\cdot 2^n$, быстрые алгоритмы, вычисления которых лишь незначительно сложнее. В табл.1 приведены некоторые простые модули вида $=(2^a-1)\cdot 3\cdot 2^n+1$, позволяющие вычислять ТЧП длины $N=3\cdot 2^n$.

Таблица 1 – Простые модули для ТЧП длины $N=3\cdot 2^n$

N	a	b	p_1	p_2	p	g
$49152=3\cdot 2^{14}$	2	14	3	49152	147457	5
$49152=3\cdot 2^{14}$	4	14	15	49152	737281	61
$12288=3\cdot 2^{12}$	1	12	1	12288	12289	11
$12288=3\cdot 2^{12}$	3	12	7	12288	86017	40
$6144=3\cdot 2^{11}$	2	11	3	6144	18433	13
$3072=3\cdot 2^{10}$	5	10	31	3072	95233	39
$1536=3\cdot 2^{9}$	3	9	7	1536	10753	26

Список литературы

1. Марпл.-мл. С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения / С.Л. Марпл.-мл. – М. : – Мир, 1990. – 584 с.

2. Рабинер Л. Теория и применение цифровой обработки сигналов / Л. Рабинер, Б. Гоулд – М.: – Мир, 1990. – 850 с.

3. Ивашко А.В. Оценивание автокорреляционных функций с использованием теоретико-числовых преобразований / А.В. Ивашко, Д.А. Лунин // Вестник НТУ «ХПИ». – 2005. – № 38. – С. 50–54.