УДК 539.534.1

С.В.ФИЛИПКОВСКИЙ, канд.техн.наук

ЭФФЕКТИВНАЯ МЕТОДИКА АНАЛИЗА ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С НЕЛИНЕЙНЫМ ДЕМПФИРОВАНИЕМ

Розглянуто пружньо-демпферні підвіски агрегатів літаків. Досліджено ефективність методів розрахунку перехідних коливальних процесів підвісок при дії на них короткочасних і раптових навантажень. Визначено точність, збіжність і витрата машинного часу в методах Рунге-Кутта, Ньюмарка і Вілсона. Запропоновано модифікації методів Ньюмарка і Вілсона для розрахунку нелінійних систем. Виконано розрахунки підвісок з конструкційним розсіюванням енергії і сухим тертям. Розроблені методика і програми призначені для оптимального проектування підвісок.

The airplanes aggregates elastic-damped suspensions are reviewed. The efficiency of computational methods of transient analysis of suspensions at an operation on them of short-lived and sudden loads is investigated. Accuracy, convergence and expenses of a machining time in Runge-Kutta, Newmark and Wilson methods are determined . The modifications of Newmark and Wilson methods for calculation of non-linear systems are offered. The calculations of suspensions with constructional dispersion of energy and dry friction are executed. A designed technique and the programs are intended for optimal designing of suspensions.

Системы с нелинейным демпфированием имеют широкое применение в технике, поскольку они позволяют более эффективно снижать перегрузки объектов при ударах и вибрации, чем линейные амортизаторы [1, 2]. Помимо эффективной защиты от перегрузок подвески агрегатов должны иметь минимальный вес и габариты, а также удовлетворять множеству конструктивных и функциональных ограничений. Удовлетворение таким противоречивым требованиям возможно лишь при оптимальном проектировании. Оптимизация представляет собой многократное поочередное решение задач синтеза и анализа конструкций в процессе нахождения оптимальных значений варьируемых параметров [3]. Поэтому к решению задачи анализа предъявляются требования высокой точности и скорости счета.

Целью исследований является создание эффективного метода анализа нелинейных динамических систем. В соответствии с этим решаются задачи определения точности и затрат машинного времени разных методов интегрирования систем дифференциальных уравнений; выбора наиболее точного метода с наименьшими затратами машинного времени; доработки этого метода для нелинейных уравнений движения.

Объектом исследований является упруго-демпферная подвеска агрегата, которая обычно применяется в летательных аппаратах.

Расчет движения линейной системы сводится к решению уравнения

$$[K]\{U\}+[C]\{\dot{U}\}+[M]\{\ddot{U}\}=\{F(t)\}, \tag{1}$$

где $[K]$, $[C]$ и $[M]$ – соответственно матрицы жесткости, демпфирования и массы, а $\{U\}$ и $\{F(t)\}$ – векторы обобщенных перемещений и возмущающих воздействий. Коэффициенты матриц являются постоянными величинами.

Уравнение движения системы с нелинейным демпфированием имеет вид

$$[K]\{U\}+[C(U,\dot{U})]\{\dot{U}\}+[M]\{\ddot{U}\}=\{F(t)\}, \qquad (2)$$

Коэффициенты матрицы $[C(U,\dot{U})]$ зависят от перемещений и их производных.

Для конструкционного рассеяния энергии $c=\psi\, k\,|u|\operatorname{sign}\dot{u}$, где c – коэффициент матрицы демпфирования, ψ – коэффициент поглощения энергии материала амортизатора, k – соответствующий коэффициент матрицы жесткости, u – перемещение [4]. Для амортизатора сухого трения $c=f_T\cdot\operatorname{sign}\dot{u}$, где f_T – сила трения [4].

Для решения уравнения (1) чаще всего применяют метод Ньюмарка и Θ-метод Вилсона [5]. Их алгоритмы предполагают предварительное вычисление эффективной матрицы жесткости и приведение ее к треугольному виду, что возможно только для постоянных матриц линейной задачи.

Для нелинейных задач удобно использовать метод Рунге-Кутта [6]. В этом случае уравнение (2) приводится к виду

$$\{\dot{Y}\}=\{R\}-[A]\{Y\}, \qquad (3)$$

где

$$\{Y\}=\begin{Bmatrix}\{V\}\\ \{U\}\end{Bmatrix},\ \{R\}=\begin{Bmatrix}[M]^{-1}\{F(t)\}\\ 0\end{Bmatrix};\ [\mathrm{A}]=\begin{bmatrix}-[M]^{-1}[C] & -[M]^{-1}[K]\\ [E] & 0\end{bmatrix};\ \{\mathrm{V}\}=\{\dot{\mathrm{U}}\},$$

$[E]$ – единичная матрица.

В процессе интегрирования уравнений (3) в каждый заданный момент времени можно вычислить искомые векторы независимо от вида коэффициентов матриц. Однако в методе 4-го порядка на каждом шаге интегрирования необходимо четыре раза вычислять производные, а в методе 5-го порядка – шесть раз, что увеличивает время счета по сравнению с методами Ньюмарка и Вилсона.

При решении задач с большим нелинейным демпфированием по методу Рунге-Кутта замечено снижение точности вычислений. Программа с автоматическим выбором шага RKF45 [6] измельчает шаг интегрирования и еще больше затягивает время счета.

Было проведено сравнение результатов решения линейных и нелинейных задач с большим демпфированием тремя названными методами. Во всех методах использовался одинаковый постоянный шаг интегрирования.

Рассчитаны колебания жесткого блока, закрепленного на четырех опорах. Чтобы система совершала колебания только по одной координате взято тело с симметричными распределением масс и расположением амортизаторов. Масса тела m = 2 кг, коэффициент жесткости каждого амортизатора k = 200 Н/м. Нагрузка действует по вертикальной оси и задана полуволной синусоиды $F(t) = 10g\cdot\sin(10t)$ при $t < (\pi/10)$ с, $F(t) = 0$ при $t > (\pi/10)$ с, g = 9,81 м/с^2.

В табл. 1 показаны результаты решения уравнений движения с вязким демпфированием. Коэффициент демпфирования амортизатора с = 16 Н·с/м

Наибольшие значения перемещений u_{max} , скоростей v_{max} и ускорений a_{max}, полученные всеми численными методами совпадают с точным решением до пятого знака. Моменты времени, в которые наблюдаются максимумы исследуемых функций ($t_{U,\ max}$, $t_{V,\ max}$, $t_{a,\ max}$) для методов Ньюмарка и Вилсона совпадают с точным решением, а для метода Рунге-Кутта отличаются на 1-2% при этом время счета T по методу Рунге-Кутта в четыре-пять раз превышает время счета по методам Ньюмарка и Вилсона.

Таблица 1

Метод решения	u_{max}, м	$t_{U,\ max}$, с	v_{max}, м/с	$t_{V,\ max}$, с	a_{max}, м/с^2	$t_{a,\ max}$, с	T, с
Точное	-0,33526	0,21598	3,9258	0,32070	-59,384	0,39270	
Рунге-Кутта	-0,33526	0,21926	3,9258	0,32398	-59,384	0,39597	7,25
Ньюмарка	-0,33526	0,21598	3,9258	0,32070	-59,384	0,39270	1,43
Вилсона	-0,33526	0,21598	3,9258	0,32070	-59,384	0,39270	1,70

Для решения нелинейных задач сделаны доработки методов Ньюмарка и Вилсона. В алгоритме решения линейной задачи по этим методам сначала выполняются общие для всего процесса вычисления: формируются матрицы, задаются начальные значения переменных, выбирается временной шаг Δt и вычисляются постоянные интегрирования, формируется эффективная матрица жесткости. После этого для каждого временного шага вычисляется эффективная нагрузка в момент времени $t + \Delta t$. Для этого момента решается система линейных алгебраических уравнений и определяются перемещения, а через них ускорения и скорости [5].

В нелинейных системах матрицы меняются в процессе интегрирования, поэтому вычисление эффективной матрицы производится заново на каждом шаге. Неизвестные векторы $\{U\}$ и $\{\dot{U}\}$ входят в матрицы левой и правой части, поэтому уравнение для нахождения $\{U\}_{t+\Delta t}$ становится нелинейным. Для решения такой задачи каждый шаг интегрирования выполняется за две итерации. На первой итерации принимаем допущение о том, что матрица $[C(U,\dot{U})]$ остается постоянной, такой как вычислена в конце предыдущего шага. В результате уравнение для определения $\{U\}_{t+\Delta t}$ получается линейным. Вычислив $\{U\}_{t+\Delta t}$, в соответствии с алгоритмом определяем векторы $\{\dot{U}\}_{t+\Delta t}$, $\{\ddot{U}\}_{t+\Delta t}$ и уточненную матрицу $[C(U,\dot{U})]$ в момент $t + \Delta t$. Далее выполняем вторую итерацию с новыми значениями нелинейных матриц и получаем уточненные значения $\{U\}$, $\{\dot{U}\}$ и $\{\ddot{U}\}$ в момент $t + \Delta t$. Итерации решения на каждом временном шаге можно продолжать, однако численные эксперименты показали, что вычисленные с точностью до пяти знаков значения искомых переменных после первой и второй итераций не отличаются друг от друга.

Для системы с конструкционным рассеянием энергии уравнение движения будет иметь вид:

$$[K]\{U\} + \psi[K]\{U\,\mathrm{sign}\,\dot{U}\} + [M]\{\ddot{U}\} = \{F(t)\}. \tag{4}$$

В соответствии с предложенным алгоритмом считаем во втором слагаемом (4) все величины постоянными. Тогда его можно перенести в правую часть как добавку к внешней нагрузке

$$[K]\{U\} + [M]\{\ddot{U}\} = \{F(t)\} - \psi[K]\{U\,\mathrm{sign}\,\dot{U}\}. \tag{5}$$

Аналогично уравнение движения с сухим трением примет вид:

$$[K]\{U\} + [M]\{\ddot{U}\} = \{F(t)\} - \{f_T\,\mathrm{sign}\,\dot{U}\}, \tag{6}$$

где нелинейный вектор сил трения в правой части считаем постоянным на каждом временном шаге.

В алгоритме интегрирования уравнений (5) или (6) методом Ньюмарка общими для всех шагов будут следующие вычисления:

1) формирование матриц $[K]$ и $[M]$;

2) .задание начальных значений $\{U_0\}$, $\{\dot{U}_0\}$ и $\{\ddot{U}_0\}$;

3) выбор временного шага Δt, параметров α и δ ($\delta \geq 0{,}50$, $\alpha \geq 0{,}25(0{,}5+\delta)^2$) и вычисление постоянных $a_0 = 1/(\alpha\cdot\Delta t^2)$, $a_1 = \delta/(\alpha\cdot\Delta t)$, $a_2 = 1/(\alpha\cdot\Delta t)$, $a_3 = 1/2\alpha - 1$, $a_4 = \delta/\alpha - 1$, $a_5 = (\delta/\alpha - 2)\cdot\Delta t/2$, $a_6 = \Delta t\cdot(1-\delta)$, $a_7 = \delta\cdot\Delta t$;

4) формирование эффективной матрицы жесткости $[\hat{K}]$

$$[\hat{K}] = [K] + a_0[M].$$

После этого для каждого временного шага выполняем:

1) вычисление линейной части вектора эффективной нагрузки для момента времени $t + \Delta t$

$$\{\hat{R}\}_{t+\Delta t} = \{R\}_{t+\Delta t} + [M]\left(a_0\{U\}_t + a_2\{\dot{U}\}_t + a_3\{\ddot{U}\}_t\right);$$

2)вычисление нелинейной добавки первой итерации

$$\{\hat{R}\}_1 = \psi[K]\{U\,\mathrm{sign}\,\dot{U}\}_t \quad \text{или} \quad \{\hat{R}\}_1 = \{f_T\,\mathrm{sign}\,\dot{U}\}_t;$$

3) решение системы алгебраических уравнений

$$[\hat{K}]\{U\}_{t+\Delta t} = \left(\{\hat{R}\}_{t+\Delta t} + \{\hat{R}\}_1\right);$$

4) вычисление ускорений и скоростей для момента времени $t + \Delta t$:

$$\{\ddot{U}\}_{t+\Delta t} = a_0\left(U_{t+\Delta t} - U_t\right) - a_2\dot{U}_t - a_3\ddot{U}_t,$$

$$\{\dot{U}\}_{t+\Delta t} = \dot{U}_t + a_6\{\ddot{U}\}_t + a_7\{\ddot{U}\}_{t+\Delta t};$$

5) вычисление нелинейной добавки второй итерации

$$\{\hat{R}\}_2 = \psi[K]\{U\,\mathrm{sign}\,\dot{U}\}_{t+\Delta t} \quad \text{или} \quad \{\hat{R}\}_2 = \{f_T\,\mathrm{sign}\,\dot{U}\}_{t+\Delta t};$$

6) повторение третьего и четвертого шагов с нелинейной добавкой $\{\hat{R}\}_2$.

Модифицированный алгоритм решения уравнений (5) или (6) методом

Вилсона аналогичен.

В табл. 2 показаны результаты расчета той же задачи с конструкционным демпфированием. Коэффициент рассеяния энергии материалом амортизатора $\psi = 0{,}48$. В табл. 3 показаны результаты расчетов с сухим трением. Сила трения $f_T = 44{,}2$ Н. В этих случаях эквивалентное вязкое демпфирование близко к вязкому демпфированию первой задачи.

Все три метода интегрирования дают близкие значения искомых величин. При этом результаты, полученные по методам Ньюмарка и Вилсона, совпадают между собой. Затраты машинного времени у этих методов в три-четыре раза меньше, чем у метода Рунге-Кутта. Для проверки сходимости методов расчеты были повторены с шагом, уменьшенным в десять раз. Результаты с точностью до пятого знака не изменились.

Таблица 2

Метод решения	u_{max}, м	$t_{U,\,max}$, с	v_{max}, м/с	$t_{V,\,max}$, с	a_{max}, м/с^2	$t_{a,\,max}$, с	T, с
Рунге-Кутта	-0,33384	0,19962	4.6801	0,35026	-39.790	0,065451	6.48
Ньюмарка	-0,36526	0,21926	5.2343	0,32725	-40.314	0,081821	1,21
Вилсона	-0,33900	0,19635	4.8193	0,34688	-40.449	0,062177	1,70

Таблица 3

Метод решения	u_{max}, м	$t_{U,\,max}$, с	v_{max}, м/с	$t_{V,\,max}$, с	a_{max}, м/с^2	$t_{a,\,max}$, с	T, с
Рунге-Кутта	-0,35866	0,22253	5,0240	0,33052	-39,618	0,085081	8,23
Ньюмарка	-0,36526	0,21926	5,2343	0,32725	-40,314	0,081812	1,42
Вилсона	-0,36525	0,21926	5,2338	0,32725	-40,310	0,081812	1,37

Таким образом, на основе методов Ньюмарка и Вилсона разработаны эффективные численные методы для анализа переходных процессов с нелинейным демпфированием. Проверена точность и сходимость этих методов на исследовании движения систем с конструкционным демпфированием и сухим трением. Предложенные методы и программы предназначены для оптимального проектирования агрегатов самолетов и ракетно-космической техники.

Список литературы: **1.** Виброзащитные системы с квазинулевой жесткостью / *Алибуджиев П.М., Гритчин А.А., Ким Л.И., Мигиренко Г.С., Хом В.Ф., Степанов П.Т.* – Л.: Машиностроение, 1986. – 96 с. **2.** Виброзащита радиоэлектронной аппаратуры полимерными компаундами / *Зеленев Ю.В., Кирилин А.А., Слободник Э.Б., Галицкий Е.Н.* – М.: Радио и связь, 1984. – 120 с. **3.** *Филипковский С.В., Шелудько Г.А.* Оптимизация виброзащитных элементов самолетных систем // Вестник Нац. техн. ун-та «ХПИ». – 2002. – Вып. 9, т. 9. – С. 77−84. **4.** *Филипковский С.В., Шелудько Г.А.* Виброзащита элементов самолетных систем комбинированными демпферами // Вестник Нац. техн. ун-та «ХПИ». – 2003. – Вып. 8, т. 3. – С. 111−116. **5.** *Бате К., Вилсон Е.* Численные методы анализа и метод конечных элементов. – М.: Стройиздат, 1982. – 448 с. **6.** *Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К.* Машинные методы математических вычислений. – М.: Мир, 1980. – 280 с.

Поступила в редколлегию 19.05.2006.