

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»**

Куценко Л.М., Адашевська І.Ю.

**ГЕОМЕТРИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ
КОЛИВАНЬ БАГАТОЛАНКОВИХ
МАЯТНИКІВ**

Харків 2008

ББК 38.96
УДК 514.18
Р 74

Рецензенти:

Найдиш А.В., завідувач кафедри прикладної математики та інформаційних технологій Таврійського державного агротехнологічного університету, доктор технічних наук, професор;

Ткаченко В.П., завідувач кафедри інженерної та комп'ютерної графіки Харківського Національного університету радіоелектроніки, кандидат технічних наук, професор.

Куценко Л.М., Адашевська І.Ю.

Геометричне моделювання коливань багатоланкових маятників. Монографія. — Х.: НТУ «ХПІ», 2008. — 176 с., іл. 48.

ISBN 978 –966–8603–18–1

Роботу присвячено геометричному моделюванню та унаочненню у часі взаємного положення ланок в процесі коливань багатоланкових маятникових механічних систем на основі розв'язання системи рівнянь Лагранжа другого роду, та побудові в залежності від вхідних параметрів множини фазових портретів коливальних систем з метою виявлення особливостей цих систем.

Усі положення роботи підкріплені результатами виконання програм, складеними для середовища математичного процесора Maple. У додатку наведено тексти програм, складені авторами. Крім того, ще наведено і їх аналоги, знайдені на сайтах Інтернету.

Для студентів, аспірантів та фахівців з прикладної геометрії та інженерної графіки.

ББК 38.96

ISBN 978 –966–8603–18–1

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА	
РОЗДІЛ 1. ЗАСТОСУВАННЯ СХЕМ БАГАТОЛАНКОВИХ МАЯТНИКІВ ТА МЕТОДИ ЇХ РОЗРАХУНКУ	
1.1. Приклади застосування багатоланкових маятників	
1.2. Схеми багатоланкових маятників.....	
1.3. Методи розрахунку коливань багатоланкових маятників	
1.4. Дослідження хаотичності коливань на прикладі подвійного маятника	
1.5. Використання математичних пакетів для моделювання коливань маятників	
ВИСНОВКИ ДО ПЕРШОГО РОЗДІЛУ	
РОЗДІЛ 2. АВТОМАТИЗОВАНЕ ФОРМУВАННЯ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЛАГРАНЖА ДРУГОГО РОДУ	
2.1. Складання системи рівнянь Лагранжа другого роду за допомогою Maple-операторів	
2.2. Розв'язання системи рівнянь Лагранжа другого роду та побудови фазових портретів коливань	
2.3. Визначення коливань багатоланкових маятників неланцюгового типу	
2.4. Розрахунок нестандартних різновидів багатоланкових маятників.....	
ВИСНОВКИ ДО ДРУГОГО РОЗДІЛУ	
РОЗДІЛ 3. ГЕОМЕТРИЧНІ ІНТЕРПРЕТАЦІЇ, ПОВ'ЯЗАНІ З АНАЛІЗОМ КОЛИВАНЬ	
3.1. Дослідження на якісному рівні закону збереження енергії маятника	

3.2. Графічні зображені на фазовому циліндрі маятника	
3.3. Пояснення характеру коливань маятника за допомогою фазових портретів	
3.4. Фазові портрети параметричних маятників	
ВИСНОВКИ ДО ТРЕТЬОГО РОЗДІЛУ	
РОЗДІЛ 4. РОЗРАХУНОК ВІБРАЦІЙНИХ АПАРАТІВ ОБЕРТОВО- МАЯТНИКОВОГО ТИПУ	
4.1. Вібраційні апарати та проблема їх розрахунку	
4.2. Схема вібраційного апарату обертово – маятничого типу.....	
4.3. Математична модель вібраційного апарату	
4.4. Варіант розрахунку вібраційного апарату	
ВИСНОВКИ ДО ЧЕТВЕРТОГО РОЗДІЛУ	
ВИСНОВКИ ДО РОБОТИ	
ПІСЛЯМОВА	
ЛІТЕРАТУРА	
ДОДАТОК (програми для комп'ютера).....	

*Как маятники, в разных плоскостях
Мы движемся, порой соударяясь.
На пике единенья отдаляясь,
Сближаемся, когда велик размах.*

Наталья Рябинина. Отражение

ПЕРЕДМОВА

Маятникові коливальні системи широко застосовуються в машинах і механізмах, наприклад, у сільськогосподарських молотарках, у гасителях вібрацій та різноманітних заспокоювачів, у вібро – устаткуванні, у церковних дзвонах, у морських бакенах, розважальних атракціонах, тощо [10, 17, 20, 32 - 36, 42, 45, 78, 83, 97, 103, 106, 109, 114, 121].

Дослідженням цих систем займаються фахівці багатьох областей точних наук: теоретичної механіки, теорії машин і механізмів, прикладної й обчислювальної математики, тощо [8, 11, 14, 19, 30, 50, 101, 125, 132]. На ефективність функціонування перерахованих пристроїв істотно впливають їх експлуатаційні параметри, у тому числі і пов'язані з їх геометричною формою.

Особливо це стосується багатоланкових маятникових механічних систем [36]. При дослідженні цього різновиду пристроїв бажано було б унаочнити взаємне положення окремих ланок маятника у певні моменти часу, а також передбачити варіанти нестійкості (хаотичності) коливань [35, 49, 60, 66, 67, 94].

Ці два питання можуть стати предметом дослідження прикладної геометрії, адже взаємне положення ланок маятника можна унаочнити із застосуванням комп'ютерної анімації, а варіанти хаотичності коливань можна дослідити за допомогою спеціальних графічних зображень – фазових портретів коливань [15, 94, 97, 124, 134].

З позицій прикладної геометрії ці два питання виявились у ще не зайнятій науковій ніші. Звідси стає зрозумілою актуальність обраної теми досліджень, яка полягає в розробці алгоритмічного забезпечення програм геометричного моделювання багатоланкових механічних маятникових коливань вантажів, та вивчення цього процесу засобами унаочнення у часі фазових портретів і анімаційного моделювання положень ланок маятникових колівальних систем.

Маятникові механізми, як динамічні системи, розглядалися у роботах Є.І.Бутікова, В.С.Аніщенко, А.Л.Фрадкова, В.В.Козлова, Г.М.Яковенка, С.В.Кузнецова, Б.А.Мартінова, А.В.Борисова, О.М.Кисельова та ін. [14, 15, 25, 26, 65-67, 123, 124]. Геометричне моделювання складних за формою об'єктів як результату їх профілювання за певними законами належать до головних напрямків розвитку прикладної геометрії та інженерної графіки.

Однак проведені дослідження не дозволили створити інформаційне забезпечення геометричного моделювання фазових портретів і анімаційного моделювання. Причина цього полягала у відсутності математичних процесорів, які б дозволили здійснювати їх геометричне моделювання на аналітичному та графічному рівнях. Винятком є роботи В.В.Ваніна [28, 29] та Т.В.Гнітецької [37 – 41], а також роботи О.М.Ларіна та Б.І.Кривошея [61 – 64, 78].

У роботах Л.М.Куценка та його учнів (С.В.Росохи, О.В.Васильєва, В.В.Суліми, В.М.Попова) [69] увагу приділено методам геометричного моделювання певних процесів у середовищі математичного процесора Maple. При цьому ще не дослідженими виявились питання розробки ефективних алгоритмів моделювання та виявлення особливостей коливань багатоланкових маятникових систем. Тому темою даної роботи обрано створення теоретичної бази для алгоритмів геометричного моделювання коливань багатоланкових маятників.

Роботу виконано на кафедрі нарисної геометрії і графіки Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут» в рамках науково-технічної програми кафедри за замовленням НВП «Екструдер».

Метою дослідження є створення теоретичної бази для алгоритмів комп'ютерної анімації коливань багатоланкових маятникових систем, а також для побудови їх фазових портретів. Мали на увазі питання унаочнення у часі взаємного положення ланок в процесі коливань ба-

гатованих маятникових механічних систем на основі розв'язання системи рівнянь Лагранжа другого роду, та побудови, в залежності від вхідних параметрів, множини фазових портретів коливальних систем з метою виявлення особливостей цих систем.

Об'єктом дослідження є процес коливань механічних систем маятникового типу.

Предметом дослідження є математичне забезпечення алгоритмів геометричного моделювання та комп'ютерної анімації коливань багатоланкових маятникових систем, а також побудови їх фазових портретів.

Методи дослідження: теорія інваріантних множин динамічних систем, елементи теорії коливань, диференціальних рівнянь та обчислювальної математики, а також елементи комп'ютерної графіки у середовищі математичного процесора Maple та пакету WinSet.

Для досягнення цієї мети у роботі поставлено такі основні задачі:

- проаналізувати та класифікувати способи опису коливальних процесів, характерних для багатоланкових маятників;
- для опису процесу коливань багатоланкових маятників розробити для процесора Maple метод автоматичного визначення системи диференціальних рівнянь Лагранжа другого роду;
- скласти програму розв'язання системи диференціальних рівнянь Лагранжа другого роду за заданими початковими умовами;
- на основі знайдених розв'язків запропонувати метод унаочнення коливального процесу маятникових коливальних систем;
- проаналізувати взаємне положення ланок маятникової системи в обраний момент часу із застосуванням торової системи координат, де кількість обертів ланки дорівнює кількості витків лінії на поверхні тора;
- побудувати множини фазових портретів коливальних систем маятникового типу у середовищі пакету WinSet;
- результати впровадити у виробництво для розрахунку вібраційного апарату маятникового типу та у навчальний процес.

Наукову новизну роботи має метод унаочнення у часі процесу коливань ланок маятникових механічних систем, складовими якого є спосіб складання та розв'язання диференціальних рівнянь Лагранжа другого роду, в результаті чого одержуються залежності для кутів відхилення ланок маятника від вертикалі, а також побудовані фазові портрети процесу коливань, що дозволяють виявити особливості цих систем.

Практичне значення одержаних результатів роботи полягає у спроможності на її теоретичній базі розраховувати реальні маятникові коливальні системи в процесі їх впровадження у машинах і механізмах сільгоспмолотарок, церковних дзвонів, морських бакенів, гасителів вібрацій та різноманітних заспокоювачів, розважальних атракціонів, тощо.

РОЗДІЛ I

ЗАСТОСУВАННЯ СХЕМ БАГАТОЛАНКОВИХ МАЯТНИКІВ ТА МЕТОДИ ЇХ РОЗРАХУНКУ

Розглянуто приклади застосування багатоланкових маятників, які умовно можна поділити на маятники ланцюгового типу та маятники комбіновані.

Опис коливання маятників за умови відсутності дисипативних сил в роботі виконано на основі диференціальних рівнянь Лагранжа другого

роду $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial u'_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial u_i} = 0$ ($i = 1, 2, 3, \dots$), де u'_i - похідні за часом t від

узагальнених координат $u_i(t)$, і де лагранжіан обчислюється як $L = K - P$. Тут через K і P позначено вирази для кінетичної та потенціальної енергії. Узагальненими координатами тут обрано кути відхилення від вертикалі окремих ланок маятника.

Вважається, що кінетична енергія при плоско-паралельному русі тіла як об'єднання ланок дорівнює сумі тих кінетичних енергій, які б мало дане тіло при його поступальному русі зі швидкістю центра мас тіла в цілому, і при його обертальному русі навколо осі, яка проходить через центр мас тіла і перпендикулярної до тої нерухомої площини, паралельно якій рухається тіло.

Потенціальна енергія тіла при його плоско-паралельному русі дорівнює сумі потенціальних енергій всіх коливальних вантажів.

Показано, що процес складання рівнянь Лагранжа другого роду є досить громіздким, тому його необхідно автоматизувати за допомогою сучасних математичних пакетів. Наведено приклади автоматизованого складання рівнянь Лагранжа. Як висновок зроблено припущення, що необхідно удосконалити зазначений процес за допомогою пакета Maple.

1.1. Приклади застосування багатоланкових маятників

Наведемо декілька прикладів використання на практиці схем багатоланкових маятників, запозичених із сайтів Інтернету.

На рис. 1.1 зображено маятниковий механізм біцепс / трицепс – машини СВТ-380 виробництва BODY SOLID. При його застосуванні утворюється триланковий маятник сумісно з кінцівками спортсмена. Для одержання ефекту від тренувань необхідно розрахувати амплітуди коливань та моменти обертання його ланок.

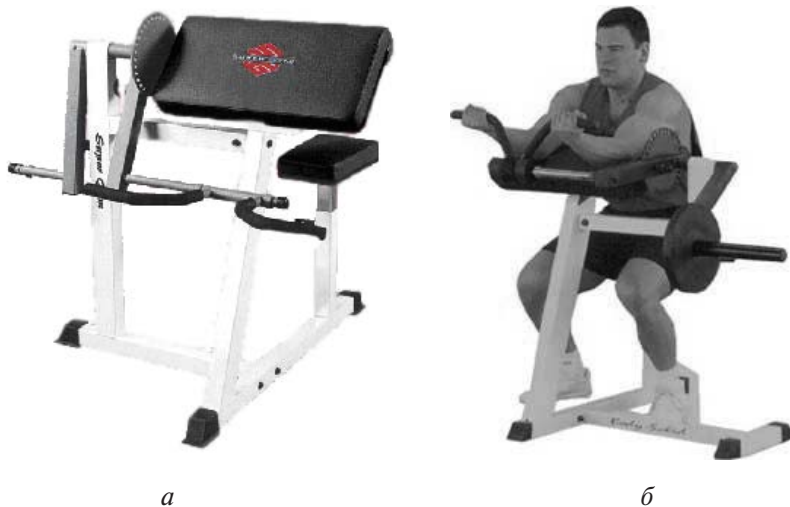


Рис. 1.1. Маятниковий тренажер (а) та його застосування (б)

На рис. 1.2 наведено водяний насос з маятниковим рушієм. Тут невеликі зусилля, які необхідно надати для коливання масивного маятника, допомагають розвинути значні зусилля на важелі насоса.

На рис. 1.3 зображено схему металної машини маятникового типу, яка використовувалася в стародавні часи під час військових баталій. Вона являє собою двох- або триланковий маятник. Розраховувати необхідно довжину ланок та вагу баластного вантажу маятника.

На рис. 1.4 а, б наведено схеми маятникових систем нахилу кузовів швидкісних залізничних вагонів, що різняться взаємним розташуванням чотирьох точок - центра повороту кузова при нахилі O_p , центра ваги кузова G , центрів спирання першого (на поворотну балку рами візка) та другого (на рухому балку) щаблів ресорного підвішування O_1 і O_2 .



Рис. 1.2. Маятниковий насос

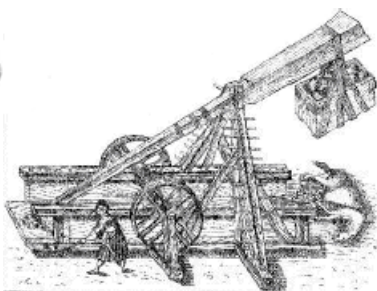


Рис. 1.3. Маятникова машина для метання

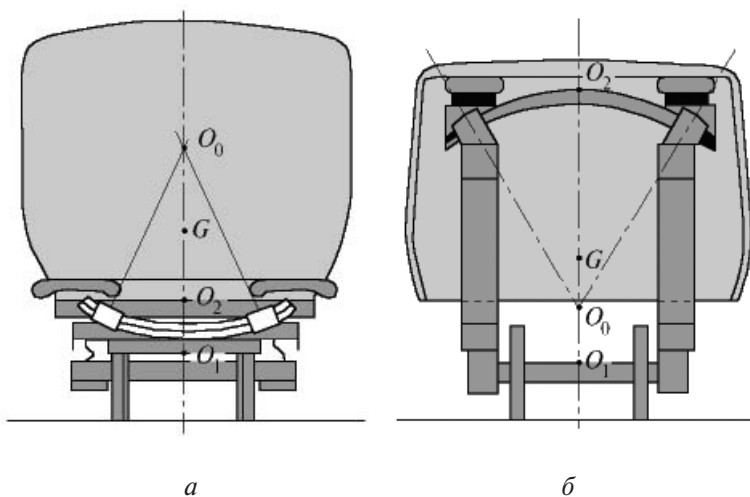


Рис. 1.4. Системи маятничової підвіски вагонів

На рис. 1.5 наведено схему маятничового віброгасія коливальних. Його використовують для запобігання руйнування машин шляхом зрівноважування коливальних імпульсів. Розраховувати необхідно довжину маятника, вагу баластного вантажу та період обертання.

При конструюванні «людиноподібних» роботів виникає проблема керування інерційного захоплювача руки–маніпулятора. При цьому при контакті з предметом захоплювач повинен автоматично «зачинитися» і «схопити» предмет.

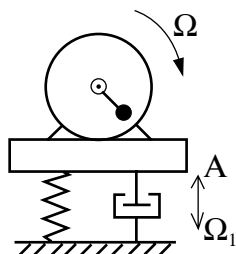


Рис. 1.5. Маятниковий віброгасій коливач

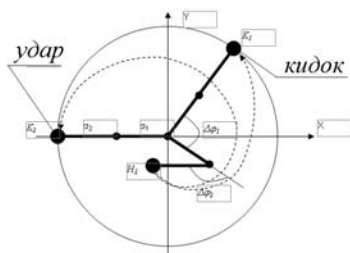
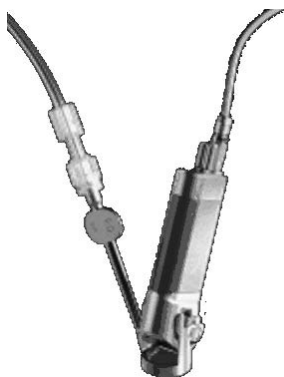


Рис.1.6. Траєкторії розгону захоплювача маніпулятора

На рис. 1.6 наведено схему інерційного двохланкового маятникового захоплювача. Розраховувати необхідно вибір початкової точки траєкторії розгону захоплювача й організації його прискореного руху при обмеженнях по швидкості й прискоренню керованих узагальнених координат при розгоні на максимальну швидкість, або мінімізації витрат на керування при заданій кінцевій швидкості.

На рис. 1.7 а наведено медичний прилад маятникового типу для здійснення операції катаракти на роговиці ока (1.7 б). На рис. 1.8 зображено послідовні кадри дії цього медичного приладу. Розраховувати необхідно геометричні та динамічні параметри цього різновиду маятника.



а



б

Рис.1.7. Маятниковий прилад (а) для операції на роговиці ока та катаракта на роговиці ока (б)

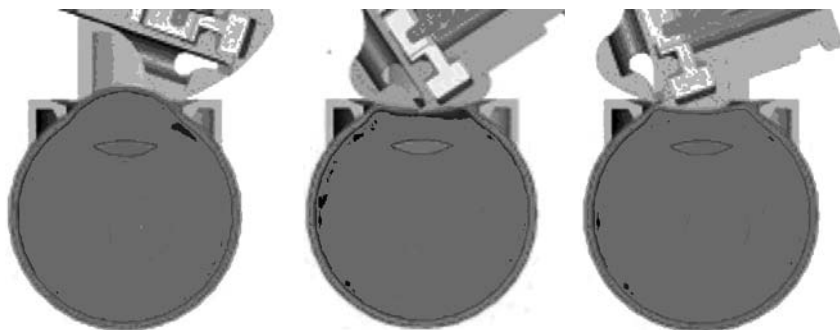


Рис.1.8. Послідовні етапи процесу операції на роговиці ока за допомогою маятничого приладу

На рис. 1.9 наведено маятничову спарену систему педалей для барабанів естрадного оркестру. Для зручності виконавця необхідно розрахувати амплітуду коливань «булави» в залежності від кута переміщення педалі.



Рис.1.9. Маятничова спарена система педалей для барабанів естрадного оркестру

На рис. 1. 10 зображено маятничові атракціони для відпочинку – гойдалку та карусель. Для надійного їх використання необхідно розрахувати параметри міцності цих механічних пристроїв.

*a**б*

Рис.1.10. Механічні атракціони маятникового типу:
гойдалка (а); карусель (в)

1.2. Схеми багатоланкових маятників

Багатоланкові маятники умовно можна поділити на маятники ланцюгового типу та маятники комбіновані.

На рис. 1.11 наведено схеми маятників ланцюгового типу. Для них характерним є послідовне сполучення ланок у вузлових точках, через які коливання передаються до наступних ланок ланцюга маятника.

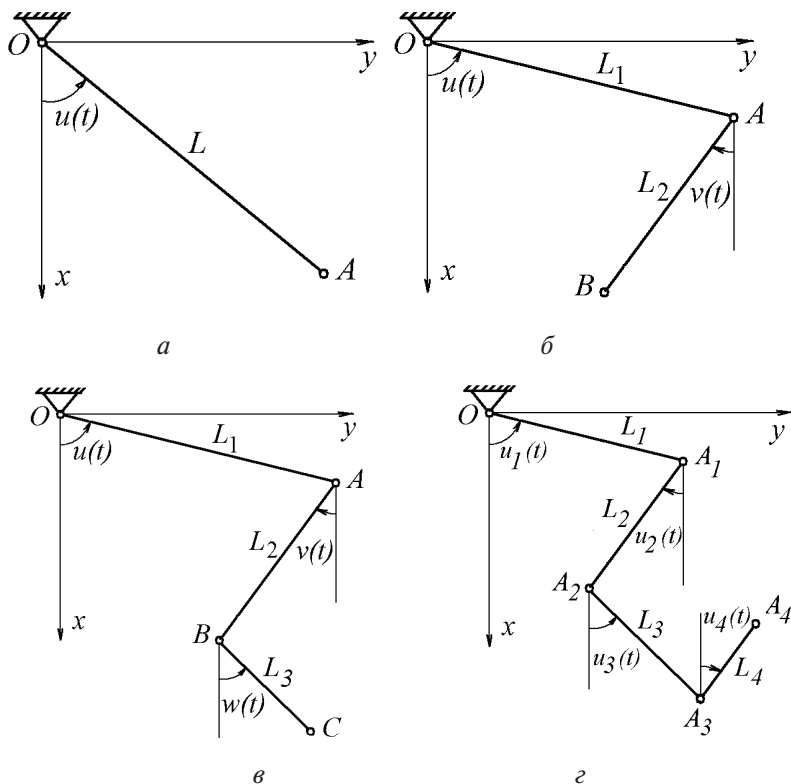


Рис. 1.11. Схеми маятників ланцюгового типу

Звичайний математичний маятник (рис. 1.11 а) складається з невагомго стержня довжини L , який шарнірно закріплений у точці O , і на який в точці A закріплено кульку масою m_1 . Узагальненою координатою обирають кут $u(t)$.

Подвійний маятник (рис. 1.11 б) складається з невагомих стержнів довжин L_1 і L_2 , які сполучаються у точці A , і на які в точках A і B закріп-

лені кульки з масами m_1 і m_2 . Узагальненими координатами обирають кути $u(t)$ і $v(t)$.

Потрійний маятник (рис. 1.11 в) складається з невагомих стержнів довжин L_1 , L_2 і L_3 , які відповідно сполучаються в точках A і B , іна які в точках A , B і C закріплені кульки з масами m_1 , m_2 і m_3 . Узагальненими координатами обирають кути $u(t)$, $v(t)$ і $w(t)$.

Чотириланковий маятник (рис. 1.11 г) складається з невагомих стержнів довжин L_1 , L_2 , L_3 , і L_4 , які сполучаються у відповідних вузлових точках, і на які в точках A_1 , A_2 , A_3 , і A_4 закріплені кульки з масами m_1 , m_2 , m_3 і m_4 . Узагальненими координатами обирають кути $u_1(t)$, $u_2(t)$, $u_3(t)$ і $u_4(t)$.

Цю послідовність схем маятників ланцюгового типу можна продовжити.

Більш складними є схеми маятників комбінованого типу (рис. 1.12). Для них є не обов'язково лише послідовне сполучення ланок, і лише у вузлових точках.

Магдебургський (обернений) маятник (рис. 1.12 а) складається з невагомих стержнів довжин $L_1 + L_0$ і L_2 , на які в точках A і C закріплені кульки з масами m_1 і m_2 . Узагальненими координатами обирають кути $u(t)$ і $v(t)$.

Коромисловий маятник (рис. 1.12 б) складається з невагомих стержнів довжин $L_1 + L_0$, L_2 і L_3 , на які в точках D і C закріплені кульки з масами m . Узагальненими координатами обирають кути $u(t)$, $v(t)$ і $w(t)$.

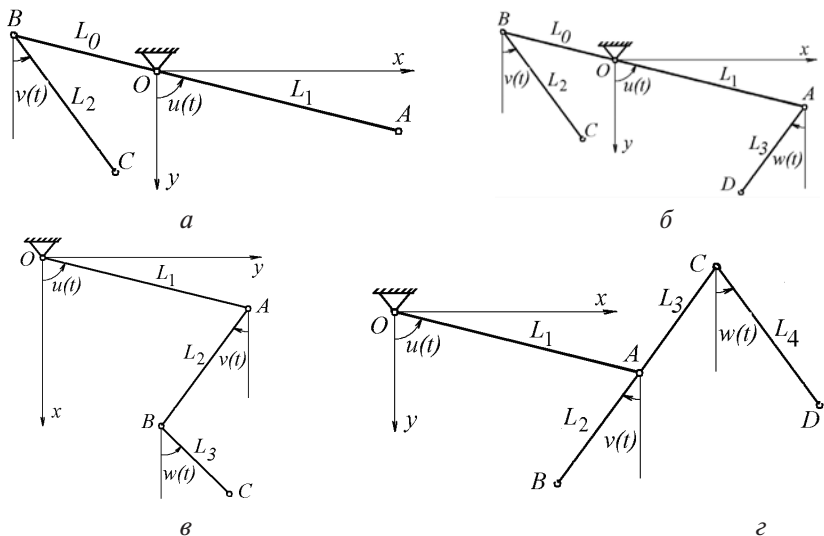


Рис. 1.12. Схеми деяких багатоланкових комбінованих маятників

Маятник Томсона – Тета (рис. 1.12 в) складається з невагомих стержнів довжин L_1 і $L_2 + L_3$, на які в точках B і C закріплені кульки з масами m_1 і m_2 . Узагальненими координатами обирають кути $u(t)$ і $v(t)$.

Комбінований маятник (рис. 1.12 г) складається з невагомих стержнів довжин $L_1, L_2 + L_3$ і L_4 , на які в точках A, B, C і D закріплені кульки з масами m_1 і m_2 . Узагальненими координатами обирають кути $u(t), v(t)$ і $w(t)$.

Опис коливання маятників за умови відсутності дисипативних сил в роботі буде виконано на основі диференціальних рівнянь Лагранжа

другого роду $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial u'_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial u_i} = 0$ ($i = 1, 2, 3, \dots$), де u'_i – похідні за часом t

від узагальнених координат $u_i(t)$, і де лагранжіан обчислюється як $L = K - P$. Тут через K і P позначено вирази для кінетичної та потенціальної енергії [17, 26, 72, 94, 98].

При цьому вважається, що кінетична енергія тіла при його плоско-паралельному русі дорівнює сумі тих кінетичних енергій, які б мало дане тіло при його поступальному русі зі швидкістю центра мас тіла, і при його обертальному русі навколо осі, яка проходить через центр мас тіла і перпендикулярна до тої нерухомої площини, паралельно якій рухається тіло.

Наприклад, для подвійного маятника маємо кінетичну енергію 2-го маятника $T_2 = \frac{m_2(x_2'^2 + y_2'^2)}{2} + \frac{J_c u_2'^2}{2}$, де J_c – момент інерції відносно центра мас [30].

Потенціальна енергія тіла при його плоско-паралельному русі дорівнює сумі потенціальних енергій всіх коливальних вантажів.

1.3. Методи розрахунку коливань багатоланкових маятників

Наведемо спрощення, які звичайно приймаються при складанні рівнянь Лагранжа (як приклад – для подвійного маятника): маятник утворений двома невагомими і нерозтяжними твердими прутами, що не згинаються (це є стандартне припущення), рух маятника здійснюється в межах площини; дві маси, що рухаються, розташовані на кінцях другої ланки (рис. 1.13). Також вважається, що кути відхилення невеликі, і що тертя руху відсутнє.

Як узагальнені координати ми вибираємо Θ і ϕ , що представляють собою кути відхилення від вертикалі першої й другої маси, відповідно.

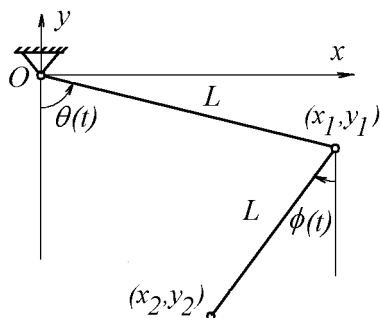


Рис. 1.13 Параметри подвійного маятника

Для переходу від декартових до узагальнених координат, використаємо співвідношення

$$x_1 = L\theta \sin \Theta \quad y_1 = -L\theta \cos \Theta, \quad (1.1)$$

де індекс 1 показує, що вирази стосуються першої маси.

Наведемо вирази для обчислення кінетичної й потенціальної енергії першої маси. Кінетична енергія в декартових координатах має вигляд

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \dot{y}^2. \quad (1.2)$$

Тоді одержуємо вирази для швидкості першої маси \dot{x}_1 й \dot{y}_1 :

$$\dot{x}_1 = L\dot{\theta} \cos \theta \quad \dot{y}_1 = L\dot{\theta} \sin \theta \quad (1.3)$$

Потенціальна енергія в декартових координатах залежить лише від y ,

$$U_1 = mgy \Rightarrow -mgL \cos \theta. \quad (1.4)$$

Тепер підставляючи замість \dot{x}_1 і \dot{y}_1 у рівняння для кінетичної енергії знаходимо в термінах узагальнених координат:

$$T_1 = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{y}_1^2 \Rightarrow \frac{1}{2} m ((\dot{\theta} L \cos \theta)^2 + (\dot{\theta} L \sin \theta)^2) \Rightarrow \frac{1}{2} m (L^2 \dot{\theta}^2). \quad (1.5)$$

Коли відомі кінетична й потенціальна енергії для першої маси, то можна перейти до обчислень, пов'язаних з другою масою. Декартові координати другої маси можна визначити аналогічно викладеному, використовуючи першу масу як точку відліку. Таким чином,

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + L \sin \phi & y_2 &= y_1 - L \cos \phi \\ \Rightarrow x_2 &= L(\sin \theta + \sin \phi) & y_2 &= L(-\cos \theta - \cos \phi) \end{aligned} \quad (1.6)$$

Ми слідуємо тієї ж самої процедури, щоб знайти T_2 й U_2 . Спочатку знайдемо координати швидкості другої маси:

$$\dot{x}_2 = L(\dot{\theta} \cos \theta + \dot{\phi} \cos \phi) \quad \dot{y}_2 = L(\dot{\theta} \sin \theta + \dot{\phi} \sin \phi). \quad (1.7)$$

Використовуємо швидкість, щоб знайти кінетичну енергію.

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{1}{2} m(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \Rightarrow \frac{1}{2} mL^2 [(\dot{\theta} \cos \theta + \dot{\phi} \cos \phi)^2 + (\dot{\theta} \sin \theta + \dot{\phi} \sin \phi)^2] \\ &\Rightarrow \frac{1}{2} mL^2 \left[(\dot{\theta}^2 \cos^2 \theta + 2\dot{\theta}\dot{\phi} \cos \theta \cos \phi + \dot{\phi}^2 \cos^2 \phi) + \right. \\ &\quad \left. (\dot{\theta}^2 \sin^2 \theta + 2\dot{\theta}\dot{\phi} \sin \theta \sin \phi + \dot{\phi}^2 \sin^2 \phi) \right] \end{aligned}$$

Або, після перетворень, одержуємо

$$T_2 = \frac{1}{2} mL^2 (\dot{\theta}^2 + 2\dot{\theta}\dot{\phi} (\cos \theta \cos \phi + \sin \theta \sin \phi) + \dot{\phi}^2). \quad (1.8)$$

Так само знаходимо вираз для U_2

$$U_2 = mgy_2 \Rightarrow mgL(-\cos \theta - \cos \phi). \quad (1.9)$$

Застосовуючи тригонометричну тотожність

$$\cos a \cos b + \sin a \sin b = \cos(a-b). \quad (1.10)$$

і поєднуючи (1.5) і (1.8), знаходимо загальну кінетичну енергію T_{tot} , а також поєднуючи (1.4) і (1.9), знаходимо потенціальну енергію U_{tot} :

$$T_{\text{tot}} = \frac{1}{2} mL^2 (2\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 + 2\dot{\theta}\dot{\phi} \cos(\theta - \phi)); \quad (1.11)$$

$$U_2 = mgL(-2\cos \theta - \cos \phi). \quad (1.12)$$

Таким чином, ми визначили повну кінетичну й потенціальну енергію для системи функція двох узагальнених координат. Ця інформація для визначення рівнянь рухів далі використовується як елемент лагранжевої механіки. Функція Лагранжа системи (лагранжіан) визначається як $L = T - U$, тобто для розглянутої системи маємо лагранжіан у вигляді

$$L = \frac{1}{2} mL^2 (2\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 + 2\dot{\theta}\dot{\phi} \cos(\theta - \phi)) + mgL (2\cos \theta + \cos \phi). \quad (1.13)$$

У лагранжевій механіці необхідно знайти рівняння руху для кожної змінної при використанні наступного співвідношення [17, 26, 97]:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} \equiv 0. \quad (1.14)$$

Це співвідношення має місце для всіх узагальнених координат q_i . Спочатку знайдемо рівняння руху для координати Θ :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\Theta}} \right) = \frac{d}{dt} (2mL^2 \dot{\Theta} + mL^2 \dot{\Phi} \cos(\Theta - \Phi)) = 2mL^2 \ddot{\Theta} + mL^2 \ddot{\Phi} \cos(\Theta - \Phi) - mL^2 \dot{\Phi} (\dot{\Theta} - \dot{\Phi}) \sin(\Theta - \Phi)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \Theta} = -mL^2 \dot{\Theta} \dot{\Phi} \sin(\Theta - \Phi) - 2mgL \sin \theta$$

Після виконання аналітичних перетворень одержуємо

$$2\ddot{\Theta} - \ddot{\Phi} \cos(\Theta - \Phi) + \dot{\Phi}^2 \sin(\Theta - \Phi) + \frac{2g}{L} \sin \theta = 0. \quad (1.15)$$

Далі виконаємо те ж саме для Φ :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\Phi}} \right) = \frac{d}{dt} (mL^2 \dot{\Phi} + mL^2 \dot{\Theta} \cos(\Theta - \Phi)) = mL^2 \ddot{\Phi} + mL^2 \ddot{\Theta} \cos(\Theta - \Phi) - mL^2 \dot{\Theta} (\dot{\Theta} - \dot{\Phi}) \sin(\Theta - \Phi)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \Phi} = -mL^2 \dot{\Theta} \dot{\Phi} \sin(\Theta - \Phi) - mgL \sin \phi$$

Перетворимо це в стандартну форму,

$$\ddot{\Phi} + \ddot{\Theta} \cos(\Theta - \Phi) - \dot{\Theta}^2 \sin(\Theta - \Phi) + \frac{g}{L} = 0. \quad (1.16)$$

Отже, було отримано подвійну систему диференціальних рівнянь другого порядку (1.15) – (1.16). Розв'язання її точно аналітичними методами навряд чи можливе (адже на практиці ці рівняння ще будуть ускладнені певними деталями). Тому систему рівнянь розв'язують чисельно за допомогою математичних пакетів наприклад, Maple або Mathcad. Для зручності необхідно спочатку виконати деякі перетворення.

Спочатку, розв'яжемо (1.15) відносно $\ddot{\Theta}$:

$$\ddot{\Theta} = \frac{-1}{2} \ddot{\Phi} \cos(\Theta - \Phi) - \frac{1}{2} \dot{\Phi}^2 \sin(\Theta - \Phi) - \frac{g}{L} \sin \theta. \quad (1.17)$$

Тоді включаючи цю величину в (1.16), одержуємо:

$$\ddot{\Phi} = \frac{1}{1 - 5 \cos^2(\Theta - \Phi)} \left(\frac{1}{2} \dot{\Phi}^2 \sin(\Theta - \Phi) \cos(\Theta - \Phi) + \frac{g}{L} \sin \theta \cos(\Theta - \Phi) + \dot{\Theta}^2 \sin(\Theta - \Phi) - \frac{g}{L} \sin \phi \right) \quad (1.18)$$

Далі розв'язуємо (1.16) відносно $\ddot{\Phi}$:

$$\ddot{\Phi} = -\ddot{\Theta} \cos(\Theta - \Phi) + \dot{\Theta}^2 \sin(\Theta - \Phi) - (g/L) \sin \phi. \quad (1.19)$$

І підставляючи це назад в (1.15), маємо:

$$\ddot{\Theta} = \frac{-1}{2 - \cos^2(\Theta - \Phi)} \left(\dot{\Theta}^2 \sin(\Theta - \Phi) \cos(\Theta - \Phi) - \frac{g}{L} \sin \phi \cos(\Theta - \Phi) + \dot{\Phi}^2 \sin(\Theta - \Phi) + \frac{2g}{L} \sin \theta \right) \quad (1.20)$$

В результаті одержано рівняння для $\ddot{\Theta}$ й $\ddot{\phi}$ тільки в термінах диференціалів більше низького порядку.

Рівняння Лагранжа є одним з математичних інструментів, які використовуються в класичній механіці. Ці рівняння дозволяють описувати у тому числі і рух багатоланкового маятника.

Далі розглянемо рух подвійного маятника за умови малої амплітуди. У цьому випадку величина $|(\Theta - \phi)|$ дорівнює 0, що у свою чергу дозволяє вважати $\cos(\Theta \pm \phi) \Rightarrow 1$ і $\sin(\Theta \pm \phi) \Rightarrow 0$, і $\sin\Theta \approx \Theta$. У такий спосіб отримана система рівнянь (1.15) – (1.16) приймає вигляд

$$\begin{aligned}\ddot{\theta} &= \frac{g}{L}(\varphi - 2\theta) \\ \ddot{\phi} &= \frac{2g}{L}(\theta - \varphi)\end{aligned}\quad (1.21)$$

Якщо ми покладемо $\Theta = B_1 e^{i\omega t}$ $\phi = B_2 e^{i\omega t}$ й візьмемо другі похідні за часом і потім підставимо ці величини назад в (1.21), ми одержуємо

$$\begin{aligned}-\omega^2 B_1 &= \frac{g}{L} B_2 - \frac{2g}{L} B_1 \\ -\omega^2 B_2 &= \frac{2g}{L} B_1 - \frac{2g}{L} B_2\end{aligned}\Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{2g}{L} & -\frac{g}{L} \\ -\frac{2g}{L} & \frac{2g}{L} \end{bmatrix} \vec{B} = \omega^2 \vec{B}.\quad (1.22)$$

Щоб знайти величину для ω , ми повинні знайти власні значення для цієї системи рівнянь. В результаті знаходимо

$$\omega^2 = \frac{g(2 \pm \sqrt{2})}{L}.\quad (1.23)$$

Це приводить до двох характерних частот системи,

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{(2+\sqrt{2})g}{L}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{(2-\sqrt{2})g}{L}}.\quad (1.24)$$

Для знаходження нормальних станів системи, ми повинні знайти власні вектори системи. Для цього ми повинні включити знайдені власні значення назад у матрицю в (1.22) і визначити, коли та система буде дорівнювати нульовому вектору [98, 99]:

$$\begin{aligned}&\frac{g}{L}(2+\sqrt{2}): \\ &\begin{bmatrix} \frac{g}{L}(2-2-\sqrt{2}) & -\frac{g}{L} \\ -\frac{2g}{L} & \frac{g}{L}(2-2-\sqrt{2}) \end{bmatrix} \vec{B} = \vec{0} \\ \Rightarrow \frac{g}{L}(-B_1\sqrt{2}-B_2) &= 0 \Rightarrow -\sqrt{2}B_1 = B_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (1.25)$$

Подібно виконаємо для другого власного значення,

$$\begin{aligned} & \frac{g}{L}(2-\sqrt{2}): \\ & \left[\begin{array}{cc} \frac{g}{L}(2-2+\sqrt{2}) & \frac{-g}{L} \\ \frac{-2g}{L} & \frac{g}{L}(2-2+\sqrt{2}) \end{array} \right] \vec{B} = \vec{0} \quad (1.26) \\ \Rightarrow \frac{g}{L}(B_1\sqrt{2} - B_2) = 0 & \Rightarrow \sqrt{2}B_1 = B_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Це означає, що будь-які два кути, які задовольняють цим відношенням, (типу $5 = \Theta$, $5\sqrt{2} = \phi$ або $3 = \Theta$, $-3\sqrt{2} = \phi$) будуть нормальними коливаннями (модами) системи. Випадок, що обидва кути – та ж сама ознака, – симетричний мода коливання й коли ці дві – протилежні ознаки антисиметрична мода [99].

Далі знайдемо рівняння руху для подвійного маятника, коли маси й довжини не рівні. Оберемо першу довжину й масу, відповідно, l_1 і m_1 , а другу довжину й масу, відповідно, l_2 і m_2 ; тоді маємо рівняння для координат вузлових точок:

$$\begin{aligned} x_1 &= l_1 \sin \theta \\ y_1 &= -l_1 \cos \theta \\ x_2 &= x_1 + l_2 \sin \varphi \Rightarrow l_1 \sin \theta + l_2 \sin \varphi \\ y_2 &= y_1 - l_2 \cos \varphi \Rightarrow -l_1 \cos \theta - l_2 \cos \varphi \end{aligned} \quad (1.27)$$

Потенціальна енергія

$$\begin{aligned} U &= m_1 g y_1 + m_2 g y_2 \\ &\Rightarrow -(m_1 + m_2) g l_1 \cos \theta - m_2 g l_2 \cos \varphi \end{aligned} \quad (1.28)$$

Кінетичну енергію знайдемо так само як і у попередньому випадку: знаходячи похідні часу кожної з координат (як в (1.3) і (1.7)) і включаючи їх у рівняння для кінетичної енергії (як в (1.5) і (1.8) і використовуючи тотожність (1.10)), одержуємо:

$$T = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_2 (l_1^2 \dot{\theta}^2 + l_2^2 \dot{\phi}^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta} \dot{\phi} \cos(\theta - \phi)). \quad (1.29)$$

Тепер можна знайти функцію Лагранжа (як в (1.13)):

$$L = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(l_1^2 \dot{\theta}^2 + l_2^2 \dot{\phi}^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta} \dot{\phi} \cos(\theta - \varphi) \right) + (m_1 + m_2) g l_1 \cos \theta + m_2 g l_2 \cos \varphi \quad (1.30)$$

Застосування тих же самих лагранжевих методів як в (1.14) стосовно дає рівняння руху,

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= m_1 l_1^2 \dot{\theta} + m_2 l_1^2 \dot{\theta} + m_2 l_1 l_2 \dot{\phi} \cos(\theta - \varphi) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) &= (m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\theta} + m_2 l_1 l_2 \ddot{\phi} \cos(\theta - \varphi) - m_2 l_1 l_2 \dot{\phi} \sin(\theta - \varphi) (\dot{\theta} - \dot{\phi}) \end{aligned} \quad (1.31)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \theta} &= -l_1 g (m_1 + m_2) \sin \theta - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta} \dot{\phi} \sin(\theta - \varphi) \\ (m_1 + m_2) l_1 \ddot{\theta} + m_2 l_2 \ddot{\phi} \cos(\theta - \varphi) + m_2 l_2 \dot{\phi}^2 \sin(\theta - \varphi) + g (m_1 + m_2) \sin(\theta) &= 0 \end{aligned}$$

а стосовно ϕ дає рівняння,

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} &= m_2 l_2^2 \dot{\phi} + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta} \cos(\theta - \varphi) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) &= m_2 l_2 \ddot{\phi} + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta} \cos(\theta - \varphi) - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta} \sin(\theta - \varphi) (\dot{\theta} - \dot{\phi}) \\ \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= m_2 l_1 l_2 \dot{\theta} \dot{\phi} \sin(\theta - \varphi) - l_2 m_2 g \sin \varphi \\ \Rightarrow m_2 l_2 \ddot{\phi} + m_2 l_1 \ddot{\theta} \cos(\theta - \varphi) - m_2 l_1 \dot{\theta}^2 \sin(\theta - \varphi) + m_2 g \sin \varphi &= 0 \end{aligned} \quad (1.32)$$

Щоб у цифровій формі було зручно використовувати ці рівняння, можна було б їх розв'язати (як в (1.17) – (1.20)).

На закінчення розглянемо рух подвійного маятника з малою амплітудою.

Розв'язки (1.31) і (1.32) для коливань малої амплітуди також допускає спрощення. Використовуючи ті ж припущення, (1.31) набуде виду

$$(m_1 + m_2) l_1 \ddot{\theta} + m_2 l_2 \ddot{\phi} + g (m_1 + m_2) \theta = 0 \quad (1.33)$$

а (1.32) набуде вигляду

$$l_2 \ddot{\phi} + l_1 \ddot{\theta} + g \varphi = 0 \quad (1.34)$$

Тепер, щоб виключити другі похідні, ми розв'язуємо (1.34) відносно ϕ ,

$$\ddot{\phi} = \frac{-l_1}{l_2} \ddot{\theta} - \frac{g}{l_2} \phi. \quad (1.35)$$

і поміщаючи це в (1.33), одержуємо

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{m_1 l_1} (m_2 g \phi - g(m_1 + m_2)\theta). \quad (1.36)$$

Далі зробимо те ж саме для ϕ . Розв'язуємо (1.34) відносно $\ddot{\theta}$:

$$\ddot{\theta} = \frac{-g\phi - l_2 \ddot{\phi}}{l_1}. \quad (1.37)$$

Потім, поміщаючи це в (1.33), одержуємо:

$$\ddot{\phi} = \left(\frac{(m_1 + m_2)g}{m_1 l_2} \right) (\theta - \phi). \quad (1.38)$$

Зазначимо, що (1.36) і (1.38) дозволяють одержати вирази (1.21), якщо ми покладемо \dots .

1.4. Дослідження хаотичності коливань на прикладі подвійного маятника

Щоб переконатися в хаотичному або нехаотичному характері коливальної системи необхідні більш глибокі дослідження. Е.Пуанкаре винайшов витончений спосіб вивчити траєкторії за допомогою фазового простору (http://tabitha.phas.ubc.ca/wiki/index.php/Double_pendulum).

Для пояснення оберемо випадок подвійного маятника з однаковими ланками довжини L і однаковими масами m . У фазовому просторі визначимо деяку площину й зафіксуємо точки перетину фазової траєкторії з цією площиною. Далі спроекціюємо ці точки перетину на координатну площину. Ця побудова носить назву *відображення Пуанкаре*.

У випадку подвійного маятника доцільно використовувати проєкції на площину (Θ, p_Θ) , а у якості січної площини слід обрати площину з описом $\sin\Theta = 0$. Тут $p_\Theta = \frac{dL}{d\Theta} = \frac{1}{6} mL^2 (8\dot{\theta} + 3\dot{\phi} \cos(\theta - \phi))$ [93, 94, 132].

Для ілюстрації початку хаосу будується відображення Пуанкаре з близькими на малу величину початковими умовами. На рис. 1.14 наведені зображення приблизно для однієї тисячі коливань системи. При цьому, на рис. 1.14 а зображено відображення Пуанкаре для рідкісного випадку нехаотичного коливання подвійного маятника (детальніше див. http://tabitha.phas.ubc.ca/wiki/index.php/Poincar%C3%A9_Gallery).

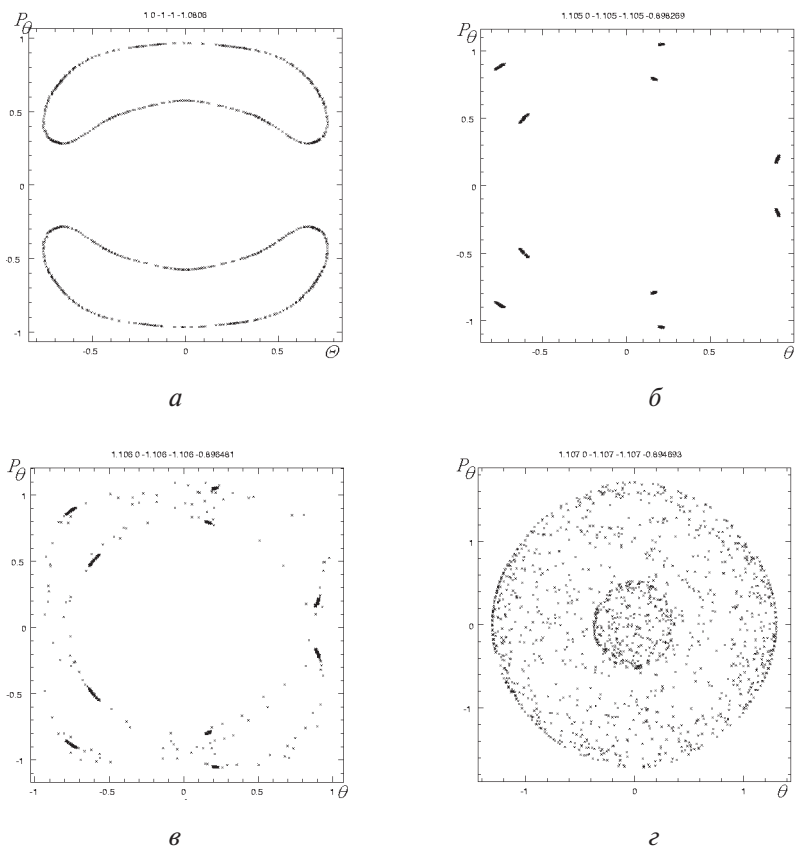


Рис. 1.14. Відображення Пуанкаре
для коливання подвійного маятника

Хаотичний рух подвійного маятника глибоко пов'язаний із фракталами [44, 50, 60, 66, 92, 105]. Так, за допомогою фрактала можна скласти прогноз стосовно того, чи перевернеться даний маятник у межах заданого проміжку часу при даному наборі початкових умов. Для цього необхідно досліджувати загальну структуру розв'язків.

На рис. 1.15 на площині (Θ, ϕ) зображено фрактал по x -напрямку у межах величини Θ від -3 до 3 , і по y -напрямку для величини ϕ від -3 до 3 .

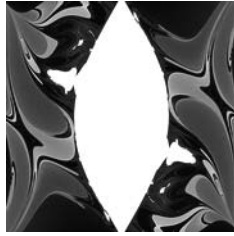


Рис. 1.15. Фрактал, який дозволяє спрогнозувати, перевороти маятника при даних початкових умовах

При цьому колір кожного пікселя вказує на те, чи перевернеться маятник. А саме, кількість його переворотів у межах $10\sqrt{g/L}$ показано зеленим кольором, у межах 100 – червоним кольором, у межах 1000 – фіолетовим кольором, а в межах 10000 – синім кольором. Ті параметри, які не дозволять маятнику обернутися в межах вище $10000\sqrt{g/L}$, зображені білими. Границя центральної білої області позначає часткове збереження енергії, і визначається кривою з рівнянням $3\cos\Theta + \cos\phi = 2$. У області, обмеженою цією кривою, тобто, якщо $3\cos\Theta + \cos\phi > 2$, то виходить, що енергії недостатньо для перевороту будь-якого маятника. Поза цією областю, маятники можуть перевертатися, і це визначається початковими умовами конкретною коливальною системою. Докладніше про це див. в http://tabitha.phas.ubc.ca/wiki/index.php/PHYS_350_2005W_F4

На завершення наведемо приклад програми для розрахунку фазового портрету і відображення Пуанкаре маятника для пакету MathCAD

```
f(x0, v0, beta, force_d, freq_d, n, dt) :=
  f0,0 - 0
  f0,1 - 0
  f0,2 - 0
  for i ∈ 0,1..(n-1)
    fi+1,2 - i·dt
    accel - beta·ti,2 - sin(ti,2) + force_d·sin(2π·freq_d·ti,0)
    fi+1,2 - ti,2 + dt·(accel)
    fi+1,1 - ti,1 + dt·(fi+1,2)
    fi+1,1 - ti,1 - 2π if fi+1,1 > π
    fi+1,1 - ti,1 - 2π if fi+1,1 > -π
  f

freq:= $\frac{0.7}{2\pi}$       freq:=0.111      p:=100
p is the number of time steps it takes to go one full drive period 1/freq
y:=f(0,0.01,0.05,0.50,freq,10000, $\frac{1}{freq\cdot p}$ )      first:=8000
```

first is the first timestep to begin plots with to get rid of transients.

```
i:=first, first+1..rows(y) - 1
rows(y) = 1×104       $\frac{\text{rows}(y)-1}{p}=100$        $\frac{\text{first}}{p}=80$ 
```

Now generate the Poincare Surface of Section

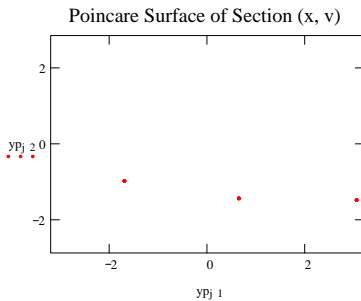
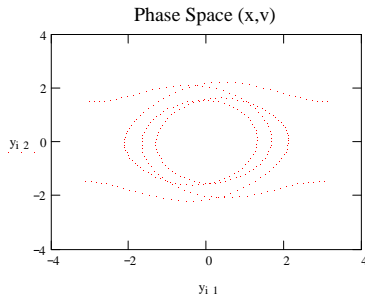
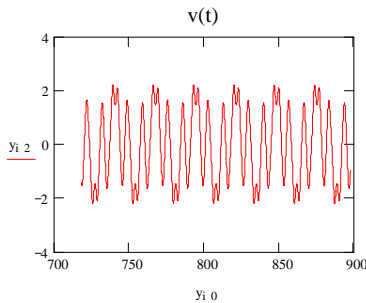
```
i:=  $\frac{\text{first}}{p}$ ,  $\frac{\text{first}}{p} + 1..(\frac{\text{rows}(y)-1}{p})-1..$   yPj,1:=yj,p,1
```

we take every pth point to generate the Poincare Surface of Section

```
yPj,2:=yj,p,2      Zi:=yi,1
```

Need this simply to get limits on plot below

```
max(z) = 2.207
```



Лістинг програми

1.5. Використання математичних пакетів для моделювання коливань маятників

Для розрахунку подвійного маятника програма для MathCAD має вигляд (див. <http://www.ifm.ethz.ch/meca/applets/doppelpendel/dPendulum.html>)

Angle conversions when playing with the above applet:

$$\theta_{upper} := 5 \cdot \text{deg} \quad \theta_{upper} = 0.087 \text{ (radians)} \quad \theta_{lower} := 0 \cdot \text{deg} \quad \theta_{lower} = 0$$

System of linearized differential equations (from above reference) :

$$\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta'_1 \\ \theta'_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{9 \cdot g \cdot (1)}{7 \cdot L} & \frac{9 \cdot g \cdot (-2)}{7 \cdot L} & 0 & 0 \\ \frac{3 \cdot g \cdot (9)}{7 \cdot L} & \frac{3 \cdot g \cdot (-8)}{7 \cdot L} & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

ORIGIN := 1. $g := 9.8$. $L := 1$ Coefficient matrix:

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{9 \cdot g \cdot (-2)}{7 \cdot L} & \frac{9 \cdot g \cdot (1)}{7 \cdot L} & 0 & 0 \\ \frac{3 \cdot g \cdot (9)}{7 \cdot L} & \frac{3 \cdot g \cdot (-8)}{7 \cdot L} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Initial conditions

$$\dot{\theta}_O := \begin{pmatrix} \dot{\theta}_{upper} \\ \dot{\theta}_{lower} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \dots \ddot{\theta} := \text{eigenvals}(A) \dots \ddot{\theta} = \begin{pmatrix} 7.185i \\ -7.185i \\ 2.679i \\ -2.679i \end{pmatrix}$$

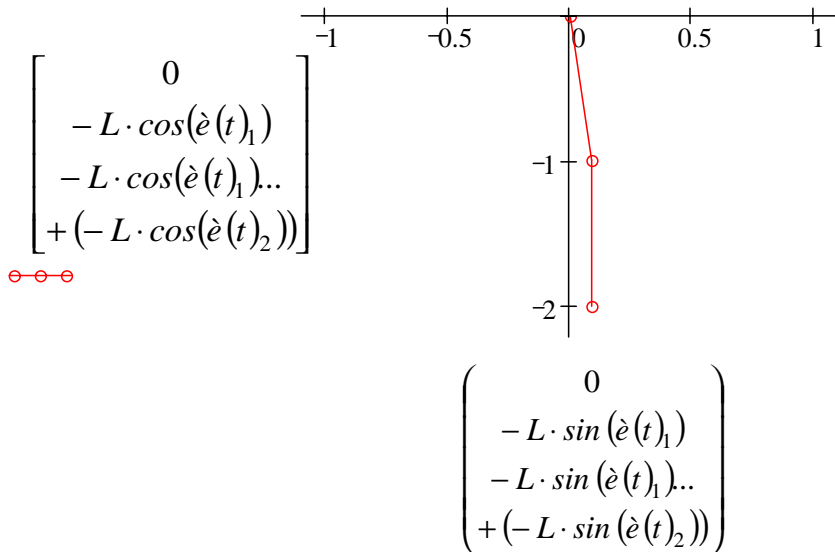
$$S = \begin{pmatrix} 0.059i & -0.059i & -0.2i & 0.2i \\ -0.124i & 0.124i & -0.287i & 0.287i \\ -0.426 & -0.426 & 0.537 & 0.537 \\ 0.894 & 0.894 & 0.768 & 0.768 \end{pmatrix}$$

$$S := \text{eigenvecs}(A)$$

Solution:

$$\theta(t) = S \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3 t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_4 t} \end{pmatrix} S^{-1} \theta_0$$

$$t := \frac{FRAME}{10} \quad \boxed{t = 0.0}$$



Далі наведемо інший варіант програми для математичного пакету MathCAD для розрахунку динаміки подвійного маятника, параметри якого зображено на рис. 1.16.

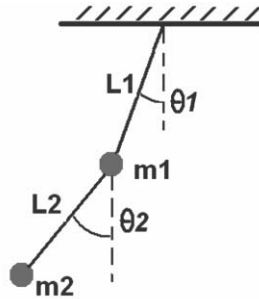


Рис. 1.16. Подвійний маятник

Наведемо screen shot програми з екрану монітора.

Одержання Лагранжіана системи:

Описание: <http://scienceworld.wolfram.com/physics/DoublePendulum.html>

Независимые переменные для системы уравнений и их производные

$$\theta := \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} \quad \theta' := \begin{pmatrix} \theta_1' \\ \theta_2' \end{pmatrix}$$

Выражение координат масс через независимые переменные

$$X := \begin{pmatrix} L1 \cdot \sin(\theta_1) \\ -L1 \cdot \cos(\theta_1) \\ L1 \cdot \sin(\theta_1) + L2 \cdot \sin(\theta_2) \\ -L1 \cdot \cos(\theta_1) - L2 \cdot \cos(\theta_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x1 \\ y1 \\ x2 \\ y2 \end{pmatrix} := X$$

Выражение для скоростей системы

$$X' := \text{Jacobian}(X, \theta) \cdot \theta' \rightarrow \begin{pmatrix} L1 \cdot \cos(\theta_1) \cdot \theta_1' \\ L1 \cdot \sin(\theta_1) \cdot \theta_1' \\ L1 \cdot \cos(\theta_1) \cdot \theta_1' + L2 \cdot \cos(\theta_2) \cdot \theta_2' \\ L1 \cdot \sin(\theta_1) \cdot \theta_1' + L2 \cdot \sin(\theta_2) \cdot \theta_2' \end{pmatrix}$$

Потенциальная и кинетическая энергия системы

$$V := m1 \cdot g \cdot y1 + m2 \cdot g \cdot y2 \qquad T := \frac{1}{2} \cdot \sum \left[\text{diag}(X')^2 \cdot \begin{pmatrix} m1 \\ m2 \\ m3 \\ m4 \end{pmatrix} \right] +$$

Лагранжиан L := T - V

Далі використано аналітичне диференціювання MathCAD для одержання рівнянь руху (зображення програми з екрану монітора)

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial \theta'} L \right) - \frac{\partial}{\partial \theta} L = 0 \qquad \text{Уравнения Лагранжа}$$

$$\text{LagrangianSol}(L, S, S') := \begin{cases} T1 \leftarrow \text{Gradient}(L, S) \\ T2 \leftarrow \text{Gradient}(L, S') \\ \text{Jacobian}(T2, S')^{-1} \cdot (T1 - \text{Jacobian}(T2, S) \cdot S') \end{cases}$$

Аналитические выражения для вторых производных $\begin{pmatrix} \theta 1'' \\ \theta 2'' \end{pmatrix}$

$$\theta'' := \text{LagrangianSol}(L, \theta, \theta')$$

$$\theta := \text{stack}(\theta, \theta') \qquad \theta' := \text{stack}(\theta', \theta'')$$

Получение правой части системы дифференциальных уравнений первого порядка, описывающая динамику поведения двойного маятника в виде удобном для численного интегрирования (далее используется для подстановки в процедуру rkfixed)

$$D(t, x) := \text{Rep}(\theta', \theta, x)$$

Наведемо вигляд правої частини системи звичайних диференціальних рівнянь, що є математичною постановкою задачі (зображення з екрану монітора).

$$\left[\begin{array}{c} x_2 \\ x_3 \\ -g \cdot (2 \cdot m1 + m2) \cdot \sin(x_0) - m2 \cdot g \cdot \sin(x_0 - 2 \cdot x_1) - 2 \cdot \sin(x_0 - x_1) \cdot m2 \cdot \left[L2 \cdot (x_3)^2 + L1 \cdot \cos(x_0 - x_1) \cdot (x_2)^2 \right] \\ \hline L1 \cdot (2 \cdot m1 + m2 - m2 \cdot \cos(2x_0 - 2x_1)) \\ \hline 2 \cdot \sin(x_0 - x_1) \cdot \left[L1 \cdot (x_2)^2 \cdot (m1 + m2) + g \cdot (m1 + m2) \cdot \cos(x_0) + (x_3)^2 \cdot L2 \cdot m2 \cdot \cos(x_0 - x_1) \right] \\ \hline L2 \cdot (2m1 + m2 - m2 \cdot \cos(2x_0 - 2x_1)) \end{array} \right]$$

$$\frac{d}{dt}x(t) = D1(t, x(t)) \quad x(t) = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad x(0) = \begin{pmatrix} x0_0 \\ x0_1 \\ x0_2 \\ x0_3 \end{pmatrix}$$

Наведемо програму інтегрування системи рівнянь і визначення координат вантажів (зображення програми з екрану монітора):

$$i0 := \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad x := \text{Rkadapt}(i0, 0, \text{end}, N, D)$$

$$\begin{aligned} x1 &:= L1 \cdot \sin((x^{(1)})) & x2 &:= L1 \cdot \sin((x^{(1)})) + L2 \cdot \sin((x^{(2)})) \\ y1 &:= L1 \cdot \cos((x^{(1)})) & y2 &:= -[L1 \cdot \cos((x^{(1)}))] - L2 \cdot \cos((x^{(2)})) \end{aligned}$$

$$kt := 1..N \quad k := \text{FRAMES}$$

На рис. 1.17 наведемо результати тестового розрахунку, а на рис. 1.18 зображено координати вантажів в залежності від часу.

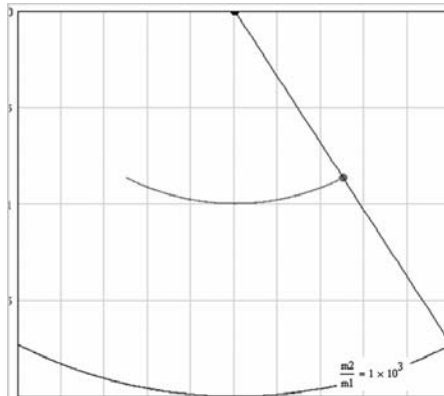


Рис. 1.17. Результати тестового розрахунку коливань

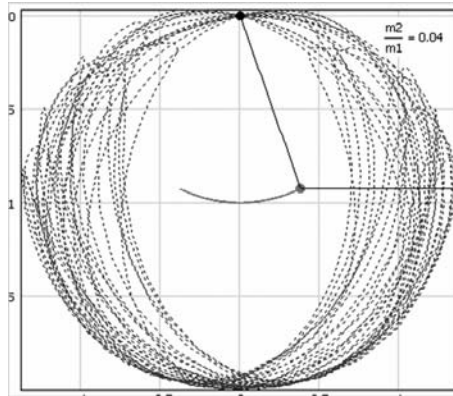


Рис. 1.18. Координати вантажів подвійного маятника в залежності від часу

На рис. 1.19 наведено залежність кута відхилення від швидкості для першого та другого вантажів

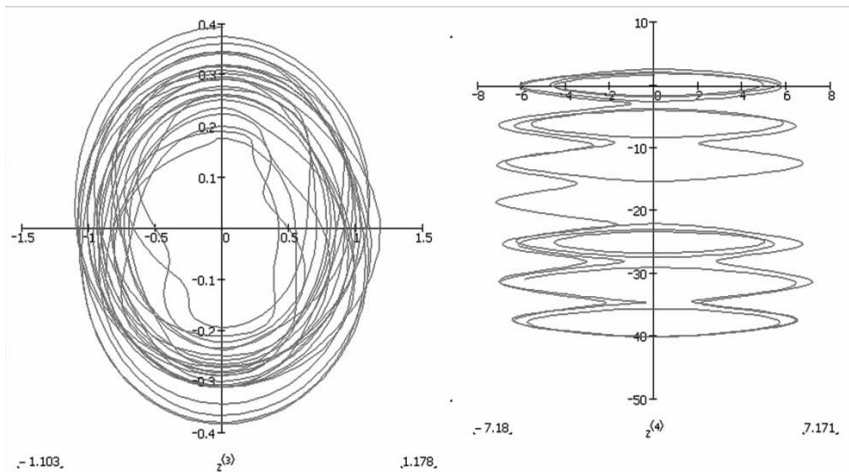


Рис. 1.19. Залежність кута відхилення від швидкості для першого та другого вантажів


```

if (mydata.forcedflag == 0)
  u = 0;
elseif (mydata.forcedflag == 1)
  u = mydata.m * mydata.g * sin(mydata.forceangle);
else
  u = mydata.m * mydata.g * sin(mydata.forceangle)...
    + mydata.m * mydata.l * (mydata.Bc * y(2));
end

if (mydata.linearflag == 0)
  tt = sin(y(1));
else
  tt = y(1);
end

f(1,1) = y(2);
f(2,1) = (u - mydata.c*y(2) - mydata.m * mydata.g * tt) ...
          /(mydata.m * mydata.l);

```

На завершення наведемо приклад програми розрахунку динаміки маятника для математичного пакету DERIVE.

```

COMMENT ***** USER ***** ;
N:=5$
ON GCD$
ARRAY Q(N),QT(N),QTT(N) ;
Q(1):=Q1$Q(2):=Q2$Q(3):=Q3$
Q(4):=Q4$Q(5):=Q5$
QT(1):=Q1'$QT(2):=-Q2] '$Q1(3):=Q3] '$
QT(4):=Q4] '$QT(5):=Q5] '$
FOR ALL ARG LET SIN(ARG)**2=1-COS(ARG)**2;
ALGEBRAIC PROCEDURE L(Q,QT,TM)$
BEGIN
  TETA:=Q(X)$FI:=Q(2)$PS:=Q(3)$
  TETA]':=QT(1)$FI]':=QT(2)$PS]':=QT(3)$
  X]':=QT(4)$ Y]':=QT(5)$
  AA:=BB:=1/4*M*R**2$ CC:=1/2*M*R**2$
  PM:=PS] *SIM(TETA)*SIN(FI)+TETA1]'*COS(FI)$
  QM:=PS] *6IN(TETA)*COS(FI)-TETA1]'*SIN(FI)$
  RM:=PS] *COS(TETA)+FI1] '$
  VX1:=X] $
  VY1:=Y] $
  VZ1:=R*COS TETA * TETA] '$

```

```

TK:=«1/2*M* (VX1**2+VY1**2+VZ1**2) $
TKi:=TK+1/2*(AA*PM**2+BB*QM**2+CC*RM**2)$
L:=TK-M*G*R*SIN TETA;
RETUIW L
END$
COMMENT ***** COMPUTER *****;
LAGR:=L(Q,QT,TM);
ARRAY P(N),FP(N)$
MATRIX A(N,N)$
FOR I:=1;N DO
    P(I):=DF(LAGR,QT(I));
FOR I:=1:N DO
    WRITE P(I)$
    ON RATIONAL;
FOR I:=1:N DO
BEGIN
    FOR J:=1;N DO
        BEGIN
            Wl:=0 $ W0:=0 $
            COEFF (P(I),QT(J),W)$
            A(I,J):= Wl
            END
        END$
    OFF RATIONAL;
ARRAY C(N)$
FOR I:=1:N DO
BEGIN
    C(I):=P(I)-FOR J:-1;N SUM A(I,J)*QT(J)$
    WRITE "C(",I,")=",C(I)
    END$
    MATRIX WORK(N,N)$
    DEL:=DET(A) ;

    FOR J:=1:N DO
        BEGIN
            WORK:=A$
            FOR I:=1:N DO WORK(I,J):=PNM(I)-C(I)$
            FP(J):=DET(WORK)
            END$
        Ht:=FOR I:=1:M SUM PNM(I)*FP(I)/DEL$
        FOR I:=1:N DO QT(I):=FP(I)/DEL$
        FOR I:=1:N DO WRITE QT(I)$
        H:=H-L(Q,QT,TM);
COMMENT ***** USER *****$
PNM(1):=P1$PNM(2):=P2$PNM(3):=P3$PNM(4):=P4$PNM(5):=P5$

```

```

COMMENT ***** COMPUTER *****$
FOR I:=1:N DO
BEGIN
  RP1:=DF(H,PNM(I))$
  Rp2:=DF(H,Q(I))$
  WRITE Q(I), "'-'",RP1$
  WRITE PNM(I), "'="",-RP2
  EMD$

```

В результаті буде одержано «псевдоаналітичний» вираз у вигляді:

$$LAGR := (M * (\cos(Q1)^2 * R^2 * Q3^2 + 4 \cos(Q1)^2 * R^2 * Q3^2 + 4 * \cos(Q1) * R^2 * Q3' * Q2 - 8 * \sin(Q1) * G * R + R^2 * Q3^2 + 2 * R^2 * Q2'^2 + R^2 * Q1'^2 + 4 * Q5'^2 + 4 * Q4'^2)) / 8$$

обобщенные импульсы

$$(M * R^2 * Q1' * (4 * \cos(Q1)^2 + 1)) / 4$$

$$(M * R^2 * (\cos(Q1) * Q3' + Q2')) / 2$$

$$(M * R^2 * (\cos(Q1)^2 * Q3' + 2 * \cos(Q1) * Q2' + Q3')) / 4$$

$$M * Q4'$$

$$M * Q5'$$

Коэффициент (1.30), не зависящие от \dot{q}_j

$$c(1) = 0$$

$$c(2) = 0$$

$$c(3) = 0$$

$$c(4) = 0$$

$$c(5) = 0$$

определитель матрицы A:

$$DEL := (M^5 * R^6 * (-4 * \cos(Q1)^4 + 3 * \cos(Q1)^2 + 1)) / 32$$

обобщенные скорости, выраженные через обобщенные импульсы,

$$(4 * PNN(1)) / (M * R^2 * (4 * \cos(Q1)^2 + 1))$$

$$(2 * (-\cos(Q1)^2 * PNN(2) + 2 * \cos(Q1) * PNN(3) - PNN(2))) /$$

$$M * R^2 * (\cos(Q1)^2 - 1))$$

Повністю цю програму наведено в монографії під редакцією В.Г.Веретеннікова [120].

ВИСНОВКИ ДО ПЕРШОГО РОЗДІЛУ

1. Схеми багатоланкових маятників застосовуються у досить великій кількості механізмів та машинах.

2. Багатоланкові маятники умовно можна поділити на маятники ланцюгового типу та маятники комбіновані.

3. Опис коливання маятників за умови відсутності дисипативних сил здійснюють на основі диференціальних рівнянь Лагранжа другого

роду $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial u_i'} \right) - \frac{\partial L}{\partial u_i} = 0$ ($i = 1, 2, 3, \dots$), де $\frac{\partial L}{\partial u_i'}$ - похідні за часом t від

узагальнених координат $u_i(t)$, L де лагранжіан обчислюється як $L = K - P$ (через K і P позначено кінетичну та потенціальну енергії). Узагальненими координатами є кути відхилення від вертикалі окремих ланок маятника.

4. Кінетичну енергію при плоско-паралельному русі тіла як об'єднання ланок дорівнює сумі тих кінетичних енергій, які б мало дане тіло при його поступальному русі зі швидкістю центра мас тіла в цілому, і при його обертальному русі навколо осі, яка проходить через центр мас тіла і перпендикулярно до тої нерухомої площини, паралельно якій рухається тіло.

5. Потенціальна енергія тіла при його плоско-паралельному русі дорівнює сумі потенціальних енергій всіх коливальних вантажів.

6. Процес складання рівнянь Лагранжа другого роду є досить громіздким, тому його необхідно автоматизувати за допомогою сучасних математичних пакетів.

7. Відомі способи складання рівнянь Лагранжа за допомогою пакетів MathCAD, MatLab і Derive потребують удосконалення.

8. Вважається за доцільне удосконалити зазначений процес складання рівнянь Лагранжа за допомогою пакета Maple.

РОЗДІЛ 2

АВТОМАТИЗОВАНЕ ФОРМУВАННЯ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЛАГРАНЖА ДРУГОГО РОДУ

Показано, що для автоматизованого формування системи рівнянь Лагранжа другого роду у аналітичному вигляді доцільно використати Maple-оператор $\text{subs}(X=A, B)$, який дозволяє у виразі B замінити підвираз X на підвираз A .

Розроблено програму розв'язання знайдених рівнянь Лагранжа, де розв'язок вдалося одержати у вигляді процедур. На практиці ці розв'язки можна трактувати і використовувати, як аналітичні вирази, що є зручним при побудові фазових портретів коливальної системи.

Все це дало підстави для розробки варіантів програм розрахунку маятників ланцюгового типу та багатоланкових маятників, компоненти яких можуть сполучатися практично довільним чином. Розглянуто базовий варіант програми, яку можна удосконалювати з метою більш адекватного опису коливального процесу. Наприклад, у виразі для кінетичної енергії можна ще враховувати і момент інерції всього коливального тіла відносно центра мас J_c .

Показано, що оцінити кількість кругових обертань вільної ланки (як приклад, подвійного) маятника можна в торовій системі координат за допомогою кількості витків кривої, намотаної на поверхню тора.

Для деяких різновидів маятників в роботі здійснено пошук тих комбінацій параметрів, які б забезпечили не хаотичність коливань багатоланкових маятників хоча б на протязі відрізка часу $[0..T]$.

Для визначення факту нехаотичності коливань на протязі T сек в роботі обчислювалися коливання з трьома близькими початковими умовами, які розрізнялися на (апріорі малу) величину $P_i/10000$.

2.1. Складання системи рівнянь Лагранжа другого роду за допомогою Maple-операторів

Для автоматизованого формування системи рівнянь Лагранжа другого роду у аналітичному вигляді доцільно використати Maple-оператор `subs (X=A, B)`, який дозволяє у виразі B замінити підвираз X на підвираз A [9, 43, 47, 84, 87].

Твердження 2.1. Результати диференціювання $\frac{\partial L}{\partial u'}$, $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial u'} \right)$ і $\frac{\partial L}{\partial u}$

у аналітичному вигляді можна одержати за допомогою Maple-операторів, відповідно, `dL_U := subs(W = diff(u(t), t), diff(subs(diff(u(t), t) = W, L), W));`
`dL_U_dt := diff(dT_U, t);`
`dL_U_ := subs(W = u(t), diff(subs(u(t) = W, L), W)).`

Тоді рівняння Лагранжа другого роду у аналітичному вигляді можна одержати за допомогою оператора `dL_U_dt - dL_U_ = 0`.

2.1.1. Проілюструємо твердження на прикладі складання рівнянь Лагранжа другого роду для подвійного маятника.

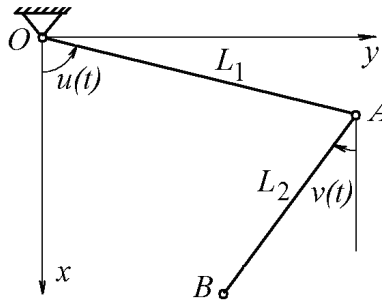


Рис. 2.1. Подвійний маятник

З рис. 2.1 одержуємо координати вузлових точок

$$x_a := L1 * \sin(u(t));$$

$$y_a := L1 * \cos(u(t));$$

$$x_b := x_a + L2 * \sin(v(t));$$

$$y_b := y_a + L2 * \cos(v(t)).$$

Враховуючи вирази для кінетичної та потенціальної енергії, одержуємо вираз для обчислення лагранжіана (тут і далі наведено screen shot робочого вікна Maple, тому аналітичні вирази є стилізованими):

$$\begin{aligned}
 L := & \frac{1}{2} m_1 \left(L_1^2 \cos(u(t))^2 \left(\frac{d}{dt} u(t) \right)^2 + L_1^2 \sin(u(t))^2 \left(\frac{d}{dt} u(t) \right)^2 \right) + \frac{1}{2} m_2 \left(\right. \\
 & \left. \left(L_1 \cos(u(t)) \left(\frac{d}{dt} u(t) \right) + L_2 \cos(v(t)) \left(\frac{d}{dt} v(t) \right) \right)^2 \right. \\
 & \left. + \left(-L_1 \sin(u(t)) \left(\frac{d}{dt} u(t) \right) - L_2 \sin(v(t)) \left(\frac{d}{dt} v(t) \right) \right)^2 \right) \\
 & + (m_1 + m_2) g L_1 \cos(u(t)) + m_2 g (L_1 \cos(u(t)) + L_2 \cos(v(t)))
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Програмна реалізація операторів наведеного твердження 2.1 приводить до системи диференціальних рівняння Лагранжа другого роду:

$$\begin{aligned}
 & L_1 \left(m_1 L_1 \left(\frac{d^2}{dt^2} u(t) \right) - m_2 \cos(u(t)) L_2 \sin(v(t)) \left(\frac{d}{dt} v(t) \right)^2 \right. \\
 & \quad \left. + m_2 \cos(u(t)) L_2 \cos(v(t)) \left(\frac{d^2}{dt^2} v(t) \right) + m_2 L_1 \left(\frac{d^2}{dt^2} u(t) \right) \right. \\
 & \quad \left. + m_2 \sin(u(t)) L_2 \cos(v(t)) \left(\frac{d}{dt} v(t) \right)^2 + m_2 \sin(u(t)) L_2 \sin(v(t)) \left(\frac{d^2}{dt^2} v(t) \right) \right. \\
 & \quad \left. + g \sin(u(t)) m_1 + 2 m_2 g \sin(u(t)) \right) = 0 \\
 & m_2 L_2 \left(-\cos(v(t)) L_1 \sin(u(t)) \left(\frac{d}{dt} u(t) \right)^2 + \cos(v(t)) L_1 \cos(u(t)) \left(\frac{d^2}{dt^2} u(t) \right) \right. \\
 & \quad \left. + \sin(v(t)) L_1 \cos(u(t)) \left(\frac{d}{dt} u(t) \right)^2 + \sin(v(t)) L_1 \sin(u(t)) \left(\frac{d^2}{dt^2} u(t) \right) \right. \\
 & \quad \left. + L_2 \left(\frac{d^2}{dt^2} v(t) \right) + g \sin(v(t)) \right) = 0
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

2.1.2. Розглянемо потрійний маятник, який складається зі стержнів довжин L_1 , L_2 і L_3 , на які в точках A , B і C закріплені кульки з масами m_1 , m_2 і m_3 . Узагальненими координатами оберемо кути $u(t)$, $v(t)$ і $w(t)$. Тоді маємо наступні вирази для обчислення координат вузлових точок:

```

xa := L1*sin(u(t)):
ya := L1*cos(u(t)):
xb := xa+L2*sin(v(t)):
yb := ya+L2*cos(v(t)):
xc := xb+L3*sin(w(t)):
yc := yb+L3*cos(w(t)):

```

Враховуючи вирази для кінетичної та потенціальної енергії, одержуємо співвідношення для лагранжіана для потрійного маятника:

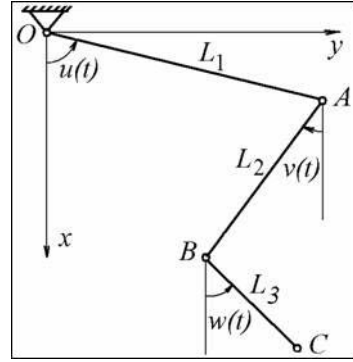


Рис. 2.2. Потрійний маятник

$$\begin{aligned}
 L := & m2 L1 \cos(u(t)) \left(\frac{d}{dt} u(t) \right) L2 \cos(v(t)) \left(\frac{d}{dt} v(t) \right) \\
 & + m2 L1 \sin(u(t)) \left(\frac{d}{dt} u(t) \right) L2 \sin(v(t)) \left(\frac{d}{dt} v(t) \right) + g m2 L2 \cos(v(t)) \\
 & + g m1 L2 \cos(v(t)) + 2 g L1 \cos(u(t)) m2 + 2 g L1 \cos(u(t)) m3 \\
 & + 2 g L1 \cos(u(t)) m1 + m3 L2 \sin(v(t)) \left(\frac{d}{dt} v(t) \right) L3 \sin(w(t)) \left(\frac{d}{dt} w(t) \right) \\
 & + m3 L1 \sin(u(t)) \left(\frac{d}{dt} u(t) \right) L3 \sin(w(t)) \left(\frac{d}{dt} w(t) \right) \\
 & + m3 L1 \sin(u(t)) \left(\frac{d}{dt} u(t) \right) L2 \sin(v(t)) \left(\frac{d}{dt} v(t) \right) \\
 & + m3 L2 \cos(v(t)) \left(\frac{d}{dt} v(t) \right) L3 \cos(w(t)) \left(\frac{d}{dt} w(t) \right) \\
 & + m3 L1 \cos(u(t)) \left(\frac{d}{dt} u(t) \right) L2 \cos(v(t)) \left(\frac{d}{dt} v(t) \right) \\
 & + m3 L1 \cos(u(t)) \left(\frac{d}{dt} u(t) \right) L3 \cos(w(t)) \left(\frac{d}{dt} w(t) \right) + m3 g L2 \cos(v(t)) \\
 & + m3 g L3 \cos(w(t)) + \frac{1}{2} m3 L3^2 \left(\frac{d}{dt} w(t) \right)^2 + \frac{1}{2} m3 L1^2 \left(\frac{d}{dt} u(t) \right)^2 \\
 & + \frac{1}{2} m3 L2^2 \left(\frac{d}{dt} v(t) \right)^2 + \frac{1}{2} m2 L1^2 \left(\frac{d}{dt} u(t) \right)^2 + \frac{1}{2} Jc \left(\frac{d}{dt} w(t) \right)^2 \\
 & + \frac{1}{2} m1 L1^2 \left(\frac{d}{dt} u(t) \right)^2 + \frac{1}{2} m2 L2^2 \left(\frac{d}{dt} v(t) \right)^2
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

За допомогою операторів твердження 2.1 одержуємо три рівняння Лагранжа другого роду (для економії місця наведемо лише перше і третє):

$$\begin{aligned}
 ODE1 := & L1 \left(-m2 \cos(u(t)) L2 \sin(v(t)) \left(\frac{d}{dt} v(t) \right)^2 \right. \\
 & + m2 \cos(u(t)) L2 \cos(v(t)) \left(\frac{d^2}{dt^2} v(t) \right) + m2 \sin(u(t)) L2 \sin(v(t)) \left(\frac{d^2}{dt^2} v(t) \right) \\
 & + m2 \sin(u(t)) L2 \cos(v(t)) \left(\frac{d}{dt} v(t) \right)^2 + m3 \sin(u(t)) L3 \sin(w(t)) \left(\frac{d^2}{dt^2} w(t) \right) \\
 & + m3 \sin(u(t)) L3 \cos(w(t)) \left(\frac{d}{dt} w(t) \right)^2 + m3 \sin(u(t)) L2 \sin(v(t)) \left(\frac{d^2}{dt^2} v(t) \right) \\
 & + m3 \sin(u(t)) L2 \cos(v(t)) \left(\frac{d}{dt} v(t) \right)^2 + m3 \cos(u(t)) L2 \cos(v(t)) \left(\frac{d^2}{dt^2} v(t) \right) \\
 & - m3 \cos(u(t)) L2 \sin(v(t)) \left(\frac{d}{dt} v(t) \right)^2 + m3 \cos(u(t)) L3 \cos(w(t)) \left(\frac{d^2}{dt^2} w(t) \right) \\
 & - m3 \cos(u(t)) L3 \sin(w(t)) \left(\frac{d}{dt} w(t) \right)^2 + 2 g \sin(u(t)) m2 + 2 g \sin(u(t)) m3 \\
 & \left. + 2 g \sin(u(t)) m1 + m1 L1 \left(\frac{d^2}{dt^2} u(t) \right) + m2 L1 \left(\frac{d^2}{dt^2} u(t) \right) + m3 L1 \left(\frac{d^2}{dt^2} u(t) \right) \right) = 0 \\
 ODE3 := & m3 L2 \cos(v(t)) \left(\frac{d}{dt} v(t) \right)^2 L3 \sin(w(t)) \\
 & + m3 L2 \sin(v(t)) \left(\frac{d^2}{dt^2} v(t) \right) L3 \sin(w(t)) \\
 & + m3 L1 \cos(u(t)) \left(\frac{d}{dt} u(t) \right)^2 L3 \sin(w(t)) \\
 & + m3 L1 \sin(u(t)) \left(\frac{d^2}{dt^2} u(t) \right) L3 \sin(w(t)) \\
 & - m3 L2 \sin(v(t)) \left(\frac{d}{dt} v(t) \right)^2 L3 \cos(w(t)) \\
 & + m3 L2 \cos(v(t)) \left(\frac{d^2}{dt^2} v(t) \right) L3 \cos(w(t)) \\
 & - m3 L1 \sin(u(t)) \left(\frac{d}{dt} u(t) \right)^2 L3 \cos(w(t)) \\
 & + m3 L1 \cos(u(t)) \left(\frac{d^2}{dt^2} u(t) \right) L3 \cos(w(t)) + m3 L3^2 \left(\frac{d^2}{dt^2} w(t) \right) + Jc \left(\frac{d^2}{dt^2} w(t) \right) \\
 & + m3 g L3 \sin(w(t)) = 0
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

2.1.3. На завершення розглянемо чотириланковий маятник, який складається з стержнів довжин $L_1, L_2, L_3, \text{ і } L_4$, на які в точках A_1, A_2, A_3 і A_4 закріплені кульки з масами m_1, m_2, m_3 і m_4 . Узагальненими координатами оберемо кути $u_1(t), u_2(t), u_3(t)$ і $u_4(t)$. Цей принцип нумерації кутів є зручним для випадків, коли кількість ланок маятника ланцюгового типу більша трьох. Тоді маємо наступні вирази для обчислення координат вузлових точок:

```
\x1 := L1*sin(u1(t)):
y1 := L1*cos(u1(t)):
x2 := x1+L2*sin(u2(t)):
y2 := y1+L2*cos(u2(t)):
x3 := x2+L3*sin(u3(t)):
y3 := y2+L3*cos(u3(t)):
x4 := x3+L4*sin(u4(t)):
y4 := y3+L4*cos(u4(t)):
```

Враховуючи вирази для кінетичної та потенціальної енергії, одержуємо співвідношення для обчислення лагранжіана:

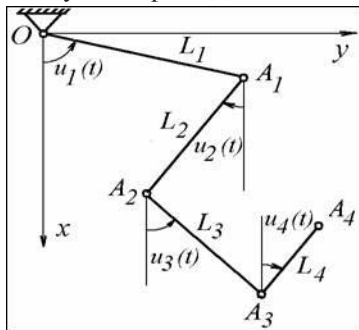


Рис. 2.3. Чотириланковий маятник

$$\begin{aligned}
 L := & \frac{1}{2} m_1 L_1^2 \left(\frac{d}{dt} u_1(t) \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 L_1^2 \left(\frac{d}{dt} u_1(t) \right)^2 + \frac{1}{2} m_3 L_2^2 \left(\frac{d}{dt} u_2(t) \right)^2 \\
 & + \frac{1}{2} m_4 L_2^2 \left(\frac{d}{dt} u_2(t) \right)^2 + \frac{1}{2} m_3 L_1^2 \left(\frac{d}{dt} u_1(t) \right)^2 + g L_1 \cos(u_1(t)) m_1 \\
 & + 2 g L_1 \cos(u_1(t)) m_2 + 3 g L_1 \cos(u_1(t)) m_3 + 4 g L_1 \cos(u_1(t)) m_4 \\
 & + g m_2 L_2 \cos(u_2(t)) + 2 g m_3 L_2 \cos(u_2(t)) + 3 g m_4 L_2 \cos(u_2(t)) \\
 & + g m_3 L_3 \cos(u_3(t)) + 2 g m_4 L_3 \cos(u_3(t)) + m_4 g L_4 \cos(u_4(t)) \\
 & + m_3 L_1 \cos(u_1(t)) \left(\frac{d}{dt} u_1(t) \right) L_2 \cos(u_2(t)) \left(\frac{d}{dt} u_2(t) \right) \\
 & + m_3 L_2 \cos(u_2(t)) \left(\frac{d}{dt} u_2(t) \right) L_3 \cos(u_3(t)) \left(\frac{d}{dt} u_3(t) \right) \\
 & + m_3 L_1 \cos(u_1(t)) \left(\frac{d}{dt} u_1(t) \right) L_3 \cos(u_3(t)) \left(\frac{d}{dt} u_3(t) \right) \\
 & + m_4 L_1 \cos(u_1(t)) \left(\frac{d}{dt} u_1(t) \right) L_2 \cos(u_2(t)) \left(\frac{d}{dt} u_2(t) \right) \\
 & + m_4 L_1 \cos(u_1(t)) \left(\frac{d}{dt} u_1(t) \right) L_3 \cos(u_3(t)) \left(\frac{d}{dt} u_3(t) \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + m4 L1 \cos(u1(t)) \left(\frac{d}{dt} u1(t) \right) L4 \cos(u4(t)) \left(\frac{d}{dt} u4(t) \right) \\
& + m3 L1 \sin(u1(t)) \left(\frac{d}{dt} u1(t) \right) L2 \sin(u2(t)) \left(\frac{d}{dt} u2(t) \right) \\
& + m3 L1 \sin(u1(t)) \left(\frac{d}{dt} u1(t) \right) L3 \sin(u3(t)) \left(\frac{d}{dt} u3(t) \right) \\
& + m3 L2 \sin(u2(t)) \left(\frac{d}{dt} u2(t) \right) L3 \sin(u3(t)) \left(\frac{d}{dt} u3(t) \right) \\
& + m4 L2 \cos(u2(t)) \left(\frac{d}{dt} u2(t) \right) L3 \cos(u3(t)) \left(\frac{d}{dt} u3(t) \right) \\
& + m4 L2 \cos(u2(t)) \left(\frac{d}{dt} u2(t) \right) L4 \cos(u4(t)) \left(\frac{d}{dt} u4(t) \right) \\
& + m4 L3 \cos(u3(t)) \left(\frac{d}{dt} u3(t) \right) L4 \cos(u4(t)) \left(\frac{d}{dt} u4(t) \right) \\
& + m4 L1 \sin(u1(t)) \left(\frac{d}{dt} u1(t) \right) L2 \sin(u2(t)) \left(\frac{d}{dt} u2(t) \right) \\
& + m4 L1 \sin(u1(t)) \left(\frac{d}{dt} u1(t) \right) L3 \sin(u3(t)) \left(\frac{d}{dt} u3(t) \right) \\
& + m4 L1 \sin(u1(t)) \left(\frac{d}{dt} u1(t) \right) L4 \sin(u4(t)) \left(\frac{d}{dt} u4(t) \right) \\
& + m4 L2 \sin(u2(t)) \left(\frac{d}{dt} u2(t) \right) L3 \sin(u3(t)) \left(\frac{d}{dt} u3(t) \right) \\
& + m4 L2 \sin(u2(t)) \left(\frac{d}{dt} u2(t) \right) L4 \sin(u4(t)) \left(\frac{d}{dt} u4(t) \right) \\
& + m4 L3 \sin(u3(t)) \left(\frac{d}{dt} u3(t) \right) L4 \sin(u4(t)) \left(\frac{d}{dt} u4(t) \right) \\
& + m2 L1 \cos(u1(t)) \left(\frac{d}{dt} u1(t) \right) L2 \cos(u2(t)) \left(\frac{d}{dt} u2(t) \right) \\
& + m2 L1 \sin(u1(t)) \left(\frac{d}{dt} u1(t) \right) L2 \sin(u2(t)) \left(\frac{d}{dt} u2(t) \right) + \frac{1}{2} m4 L3^2 \left(\frac{d}{dt} u3(t) \right)^2 \\
& + \frac{1}{2} m1 L1^2 \left(\frac{d}{dt} u1(t) \right)^2 + \frac{1}{2} m4 L4^2 \left(\frac{d}{dt} u4(t) \right)^2 + \frac{1}{2} m2 L2^2 \left(\frac{d}{dt} u2(t) \right)^2 \\
& + \frac{1}{2} m3 L3^2 \left(\frac{d}{dt} u3(t) \right)^2
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Реалізація операторів твердження 2.1 приводить до чотирьох рівнянь Лагранжа другого роду (для економії місця наведемо перше і четверте):

$$\begin{aligned}
ODE1 := & L1 \left(m3 L1 \left(\frac{d^2}{dt^2} u1(t) \right) + g \sin(u1(t)) m1 + 2 g \sin(u1(t)) m2 \right. \\
& + 3 g \sin(u1(t)) m3 + m3 \cos(u1(t)) L2 \cos(u2(t)) \left(\frac{d^2}{dt^2} u2(t) \right) \\
& + m3 \sin(u1(t)) L2 \cos(u2(t)) \left(\frac{d}{dt} u2(t) \right)^2 + m4 \sin(u1(t)) L2 \cos(u2(t)) \left(\frac{d}{dt} u2(t) \right)^2 \\
& + m3 \sin(u1(t)) L3 \cos(u3(t)) \left(\frac{d}{dt} u3(t) \right)^2 + m4 \sin(u1(t)) L3 \cos(u3(t)) \left(\frac{d}{dt} u3(t) \right)^2 \\
& + m4 \sin(u1(t)) L4 \cos(u4(t)) \left(\frac{d}{dt} u4(t) \right)^2 - m3 \cos(u1(t)) L2 \sin(u2(t)) \left(\frac{d}{dt} u2(t) \right)^2 \\
& + m2 \sin(u1(t)) L2 \cos(u2(t)) \left(\frac{d}{dt} u2(t) \right)^2 - m3 \cos(u1(t)) L3 \sin(u3(t)) \left(\frac{d}{dt} u3(t) \right)^2 \\
& - m4 \cos(u1(t)) L2 \sin(u2(t)) \left(\frac{d}{dt} u2(t) \right)^2 - m4 \cos(u1(t)) L4 \sin(u4(t)) \left(\frac{d}{dt} u4(t) \right)^2 \\
& - m4 \cos(u1(t)) L3 \sin(u3(t)) \left(\frac{d}{dt} u3(t) \right)^2 - m2 \cos(u1(t)) L2 \sin(u2(t)) \left(\frac{d}{dt} u2(t) \right)^2 \\
& + m3 \cos(u1(t)) L3 \cos(u3(t)) \left(\frac{d^2}{dt^2} u3(t) \right) + m3 \sin(u1(t)) L2 \sin(u2(t)) \left(\frac{d^2}{dt^2} u2(t) \right) \\
& + m4 \cos(u1(t)) L2 \cos(u2(t)) \left(\frac{d^2}{dt^2} u2(t) \right) + m4 \cos(u1(t)) L3 \cos(u3(t)) \left(\frac{d^2}{dt^2} u3(t) \right) \\
& + m4 \cos(u1(t)) L4 \cos(u4(t)) \left(\frac{d^2}{dt^2} u4(t) \right) + m4 \sin(u1(t)) L2 \sin(u2(t)) \left(\frac{d^2}{dt^2} u2(t) \right) \\
& + m3 \sin(u1(t)) L3 \sin(u3(t)) \left(\frac{d^2}{dt^2} u3(t) \right) + m4 \sin(u1(t)) L3 \sin(u3(t)) \left(\frac{d^2}{dt^2} u3(t) \right) \\
& + m4 \sin(u1(t)) L4 \sin(u4(t)) \left(\frac{d^2}{dt^2} u4(t) \right) \\
& + m2 \cos(u1(t)) L2 \cos(u2(t)) \left(\frac{d^2}{dt^2} u2(t) \right) \\
& + m2 \sin(u1(t)) L2 \sin(u2(t)) \left(\frac{d^2}{dt^2} u2(t) \right) + m1 L1 \left(\frac{d^2}{dt^2} u1(t) \right) \\
& + m4 L1 \left(\frac{d^2}{dt^2} u1(t) \right) + m2 L1 \left(\frac{d^2}{dt^2} u1(t) \right) + 4 g \sin(u1(t)) m4 = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ODE4} := & m4 L4 \left(L4 \left(\frac{d^2}{dt^2} u4(t) \right) + L1 \cos(u1(t)) \left(\frac{d^2}{dt^2} u1(t) \right) \cos(u4(t)) \right. \\
 & - L1 \sin(u1(t)) \left(\frac{d}{dt} u1(t) \right)^2 \cos(u4(t)) + L2 \cos(u2(t)) \left(\frac{d^2}{dt^2} u2(t) \right) \cos(u4(t)) \\
 & - L2 \sin(u2(t)) \left(\frac{d}{dt} u2(t) \right)^2 \cos(u4(t)) + L3 \cos(u3(t)) \left(\frac{d^2}{dt^2} u3(t) \right) \cos(u4(t)) \\
 & - L3 \sin(u3(t)) \left(\frac{d}{dt} u3(t) \right)^2 \cos(u4(t)) + L1 \sin(u1(t)) \left(\frac{d^2}{dt^2} u1(t) \right) \sin(u4(t)) \\
 & + L1 \cos(u1(t)) \left(\frac{d}{dt} u1(t) \right)^2 \sin(u4(t)) + L2 \sin(u2(t)) \left(\frac{d^2}{dt^2} u2(t) \right) \sin(u4(t)) \\
 & + L2 \cos(u2(t)) \left(\frac{d}{dt} u2(t) \right)^2 \sin(u4(t)) + L3 \sin(u3(t)) \left(\frac{d^2}{dt^2} u3(t) \right) \sin(u4(t)) \\
 & \left. + L3 \cos(u3(t)) \left(\frac{d}{dt} u3(t) \right)^2 \sin(u4(t)) + g \sin(u4(t)) \right) = 0
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Аналогічним чином можна скласти вираз для лагранжіану і рівняння Лагранжа для довільного маятника ланцюгового типу. У додатку А наведено Maple — програму розрахунку маятників ланцюгового типу. Це є базовий варіант програми, яку можна удосконалювати з метою більш адекватного опису коливального процесу. Наприклад, у виразі для кінетичної енергії можна ще враховувати і момент інерції всього коливального тіла відносно центра мас J_c . Тоді для попереднього прикладу тоді кінетичну енергію слід обчислювати так:

$$\begin{aligned}
 K := & (m1*(diff(x1,t)^2 + diff(y1,t)^2) + \\
 & m2*(diff(x2,t)^2 + diff(y2,t)^2) + \\
 & m3*(diff(x3,t)^2 + diff(y3,t)^2) + \\
 & m4*(diff(x4,t)^2 + diff(y4,t)^2))/2 + \\
 & Jc*diff(u4(t),t)^2/2;
 \end{aligned}$$

2.2. Розв'язання системи рівнянь Лагранжа другого роду та побудови фазових портретів коливань

Позначивши ліві частини рівнянь Лагранжа другого роду як ODE1 і ODE2, розв'яжемо одержану систему з двох (як приклад) рівнянь з початковими умовами, наприклад, такими

$$\text{initial} := \{u(0)=\text{Pi}/2, D(u)(0)=0, v(0)=\text{Pi}, D(v)(0)=0\},$$

будемо чисельно:

```
sol := dsolve({ODE1,ODE2} union initial, numeric,
method=rkf45, output=listprocedure).
```

$$dsol := \left[t = (\text{proc}(t) \dots \text{end proc}), u(t) = (\text{proc}(t) \dots \text{end proc}), \right. \\ \left. \frac{d}{dt} u(t) = (\text{proc}(t) \dots \text{end proc}), v(t) = (\text{proc}(t) \dots \text{end proc}), \right. \\ \left. \frac{d}{dt} v(t) = (\text{proc}(t) \dots \text{end proc}) \right]$$

Тут опція **output=listprocedure** дозволяє отримати розв'язок у вигляді процедур. Після доопрацювання

```
solu := subs(sol, u(t)):
solv := subs(sol, v(t)):
dsolu := subs(sol, diff(u(t),t)):
dsolv := subs(sol, diff(v(t),t)):
```

ці розв'язки можна трактувати і використовувати, як аналітичні вирази. Це є зручним при побудові фазових портретів коливальної системи.

Твердження 2.2. Фазовий портрет для змінної $u(t)$ на проміжку часу $[0 \dots T]$ можна побудувати за допомогою оператора `plot([solu(t), dsolu(t), t=0..T], labels=[u, du])`.

Розглянемо різновиди фазових портретів. У випадку подвійного маятника з параметрами **L1=0.2; L2=0.1; m1=1; m2=1** маємо залежність похідної du від кута u (рис. 2.4), залежність похідної dv від кута v (рис. 2.5), а також залежність кута u від кута v (рис. 2.6).

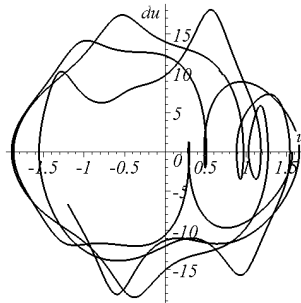
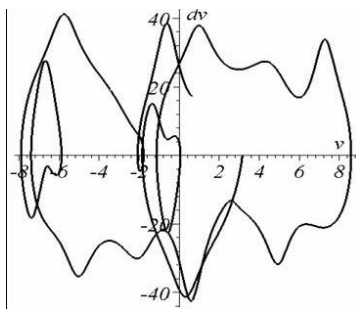
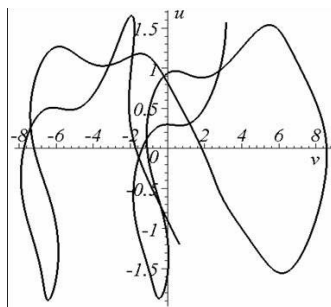


Рис. 2.4. Графік залежності похідної du від кута u

Рис. 2.5. Графік залежності похідної dv від кута v Рис. 2.6. Графік залежності кута u від кута v

Твердження 2.3. Оцінити кількість кругових обертань вільної ланки (подвійного) маятника можна в торовій системі координат (рис. 2.7 а) за допомогою кількості витків кривої

$$\begin{aligned} x &:= (L1 + L2 \cdot \cos(\text{sol}v(t))) \cdot \cos(\text{sol}u(t)); \\ y &:= (L1 + L2 \cdot \cos(\text{sol}v(t))) \cdot \sin(\text{sol}u(t)); \\ z &:= L2 \cdot \sin(\text{sol}v(t)), \end{aligned} \quad (2.7)$$

намотаної на поверхню тора (рис. 2.7 б - г)

$$\begin{aligned} x &= (L1 + L2 \cos v) \cos u \\ y &= (L1 + L2 \cos v) \sin u \\ z &= L2 \sin v \end{aligned} \quad (2.8)$$

При цьому на рисунках 2.7 б, 2.7 в і 2.7 г показано траєкторії коливання маятника, відповідно, за 1, 3 і 5 секунд.

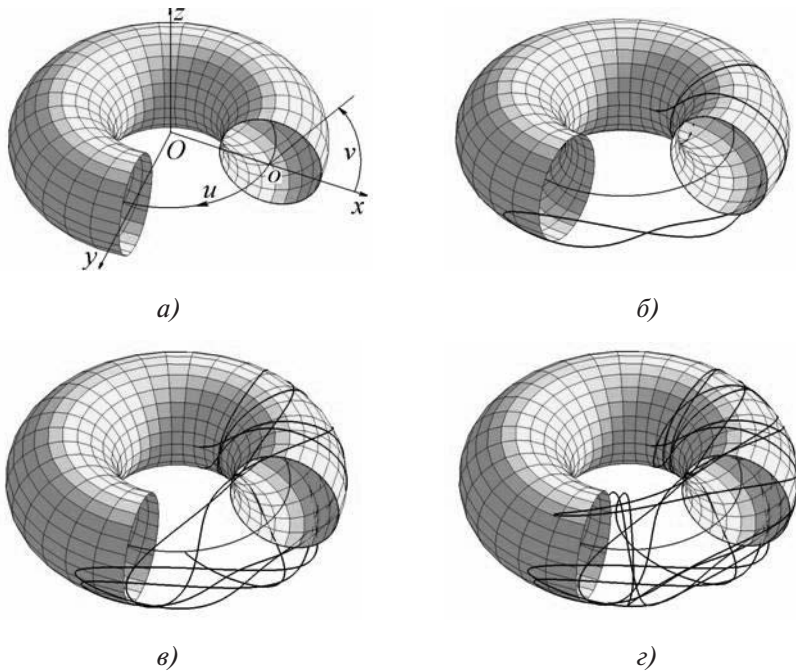


Рис. 2.7. Торова система координат та витки кривої на поверхні тора

До головних досліджень багатоланкової маятникової системи належить пошук тих параметрів, які б забезпечили не хаотичність коливань хоча б на протязі відрізка часу $[0..T]$.

Хаотичними називаються такі коливання багатоланкових маятників, коли як завгодно мала зміна початкових умов коливання призводить до зміни характеру коливання маятника на якісному рівні.

До початкових відносять як кутові і «швидкісні» параметри, так і геометричні і «вагові» параметри

Для визначення факту нехаотичності коливань на протязі T сек будемо обчислювати коливання з трьома близькими початковими умовами, які розрізнятимуться на величину $\pi/10000$

Приклад завдання початкових умов:

init:={u(0)= $\pi/2$, D(u)(0)=0, v(0)= π , D(v)(0)=0}:

(в цьому випадку розв'язок позначатиметься суцільною лінією);

init:={u(0)= $\pi/2-\pi/10000$,

$$D(u)(0)=0, v(0)=\pi, D(v)(0)=0\}:$$

(в цьому випадку розв'язок позначатиметься штрих-пунктирною лінією);

$$\text{init}:=\{u(0)=\pi/2+\pi/10000,$$

$$D(u)(0)=0, v(0)=\pi, D(v)(0)=0\}:$$

(в цьому випадку розв'язок позначатиметься пунктирною лінією).

Твердження 2.4. Для початкових значень параметрів

$$L1 = 0.75: \quad L2 = 1.2: \quad m1 = 2.: \quad m2 = 2.:$$

і початкових умов

$$u(0)=\pi/2, \quad D(u)(0)=0, \quad v(0)=\pi, \quad D(v)(0)=0:$$

коливання подвійного маятника буде нехаотичним на протязі 9 сек, що слідує з фазових портретів, зображених на рис. 2.8.

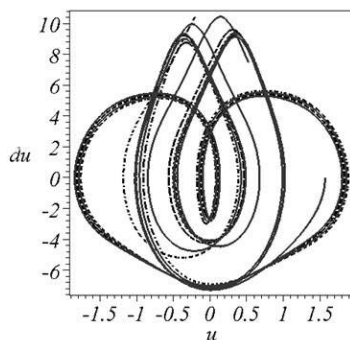


Рис. 2.8 а. Фазовий портрет для змінної $u(t)$ подвійного маятника

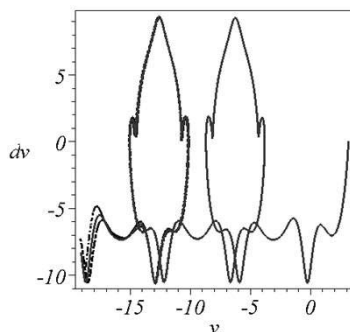


Рис. 2.8 б. Фазовий портрет для змінної $v(t)$ подвійного маятника

При цьому вільна ланка подвійного маятника зробить 11 обертів, що слідує з рис. 2.9.

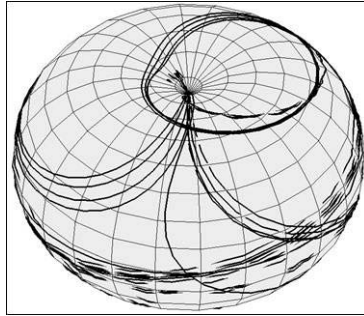


Рис. 2.9. Витки фазової кривої на поверхні тора при розрахунку подвійного маятника

2.3. Визначення коливань багатоланкових маятників неланцюгового типу

2.3.1. Для прикладу розглянемо моделювання коливань магдебурзького (оберненого) маятника (рис. 1 а). Він складається зі стержнів довжин $L_1 + L_0$ і L_2 , на яких в точках A і C закріплені кульки з масами m_1 і m_2 . Для визначеності взято $L_0 = 0,45$; $L_1 = 0,3$; $L_2 = 0,2$; $m_1 = 3.5$ і $m_2 = 1.5$ умовних одиниць. Через J_c позначено момент інерції всього тіла відносно центру мас ($J_c = 0,1$). Тоді

$$\begin{aligned} x_a &:= L_1 \sin(u(t)); & y_a &:= L_1 \cos(u(t)); \\ x_b &:= -L_0 \sin(u(t)); & y_b &:= -L_0 \cos(u(t)); \\ x_c &:= x_b + L_2 \sin(v(t)); & y_c &:= y_b + L_2 \cos(v(t)), \end{aligned}$$

і вирази для кінетичної і потенціальної енергії матимуть вигляд

$$\begin{aligned} K &:= \frac{1}{2} m_1 L_1^2 \left(\frac{d}{dt} u(t) \right)^2 - m_2 L_0 \left(\frac{d}{dt} u(t) \right) L_2 \left(\frac{d}{dt} v(t) \right) \cos(u(t) - v(t)) \\ &\quad + \frac{1}{2} m_2 L_0^2 \left(\frac{d}{dt} u(t) \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 L_2^2 \left(\frac{d}{dt} v(t) \right)^2 + \frac{1}{2} J_c \left(\frac{d}{dt} v(t) \right)^2 \end{aligned}$$

$$P := g m_1 (L_1 - L_1 \cos(u(t))) + g m_2 (-L_0 + L_2 + L_0 \cos(u(t)) - L_2 \cos(v(t)))$$

(2.9)

Автоматизовано складена система рівнянь Лагранжа другого роду має вигляд

$$\begin{aligned}
 ODE1 &:= m1 L1^2 \left(\frac{d^2}{dt^2} u(t) \right) - m2 L0 L2 \left(\frac{d^2}{dt^2} v(t) \right) \cos(u(t) - v(t)) \\
 &\quad - m2 L0 L2 \left(\frac{d}{dt} v(t) \right)^2 \sin(u(t) - v(t)) + m2 L0^2 \left(\frac{d^2}{dt^2} u(t) \right) + g m1 L1 \sin(u(t)) \\
 &\quad - g m2 L0 \sin(u(t)) = 0 \\
 ODE2 &:= - \left(\frac{d^2}{dt^2} u(t) \right) m2 L0 L2 \cos(u(t) - v(t)) + \left(\frac{d}{dt} u(t) \right)^2 m2 L0 L2 \sin(u(t) - v(t)) \\
 &\quad + m2 L2^2 \left(\frac{d^2}{dt^2} v(t) \right) + Jc \left(\frac{d^2}{dt^2} v(t) \right) + g m2 L2 \sin(v(t)) = 0
 \end{aligned}
 \tag{2.10}$$

Для визначення стійкості магдебурзького маятника до хаотичних коливань, в залежності від початкових умов, будемо одержану систему рівнянь розв’язати з трьома початковими умовами:

$$\begin{aligned}
 u(0) &= \pi/2, & D(u)(0) &= 0, & v(0) &= \pi, & D(v)(0) &= 0; \\
 \{u(0) &= \pi/2 - \pi/10000, & D(u)(0) &= 0, & v(0) &= \pi, & D(v)(0) &= 0; \\
 \{u(0) &= \pi/2 + \pi/10000, & D(u)(0) &= 0, & v(0) &= \pi, & D(v)(0) &= 0.
 \end{aligned}$$

На рис. 2.10 зображені суміщені фазові портрети цих розв’язків, які позначено лініями, відповідно, суцільною, штрих-пунктирною та пунктирною. Значення параметрів: $L0=0,4$; $L1=0,4$; $L2=0,2$; $m1=3,5$ і $m2=1,5$. Одержані зображення переконують у тому, що при цих параметрах маятник здійснюватиме хаотичні коливання.

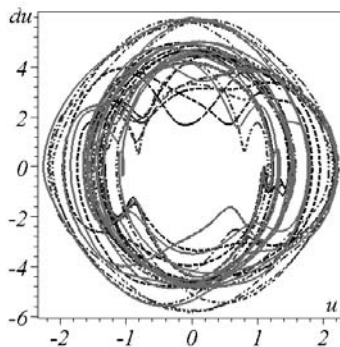


Рис. 2.10 а. Суміщені фазові портрети для параметра $u(t)$ розв’язків з близькими початковими умовами

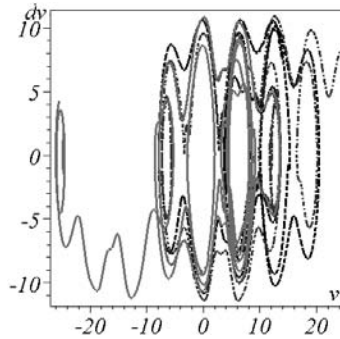


Рис. 2.10 б. Суміщені фазові портрети для параметра $v(t)$ розв'язків з близькими початковими умовами

В результаті проведених комп'ютерних експериментів в роботі знайдено набір параметрів, які забезпечать стійкість коливань маятника.

Твердження 2.5. Для початкових значень параметрів $L_1 = 0.4$: $L_2 = 0.2$: $m_1 = 3.5$: $m_2 = 1.5$: і початкових умовах

$$u(0) = \pi/2, \quad D(u)(0) = 0, \quad v(0) = \pi, \quad D(v)(0) = 0:$$

коливання магдебурзького маятника на протяжці 30 сек буде нехаотичним, що слідує з фазових портретів, зображених на рис. 2.11.

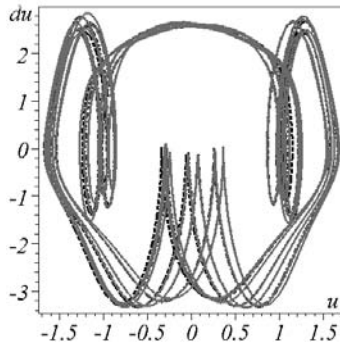


Рис. 2.11 а. Суміщені фазові портрети для параметра $u(t)$ магдебурзького маятника

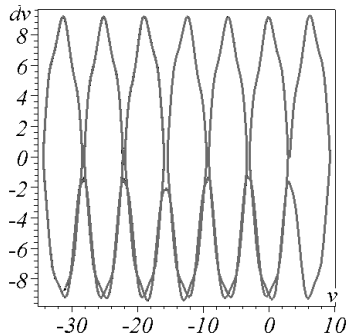


Рис. 2.11 б. Суміщені фазові портрети для параметра $v(t)$ магдебурзького маятника

2.3.2. Другий приклад стосується коливання маятника Томсона-Тета (рис. 1.1 а). Маятник Томсона-Тета складається з двох стержнів довжин L_1 і $L_2 + L_3$, на які в точках B і C закріплені кульки з масами mB і mD . Тоді координати вузлових точок можна обчислити за формулами:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_a &:= L_1 \sin(u(t)) & \mathbf{y}_a &:= L_1 \cos(u(t)) : \\ \mathbf{x}_b &:= \mathbf{x}_a + L_3 \sin(v(t)) & \mathbf{y}_b &:= \mathbf{y}_a + L_3 \cos(v(t)) : \\ \mathbf{x}_c &:= \mathbf{x}_a - L_2 \sin(v(t)) & \mathbf{y}_c &:= \mathbf{y}_a - L_2 \cos(v(t)) : \end{aligned}$$

Вирази для кінетичної і потенціальної енергії матимуть вигляд

$$\begin{aligned} K := & m_2 L_1^2 \left(\frac{d}{dt} u(t) \right)^2 + m_3 L_1^2 \left(\frac{d}{dt} u(t) \right)^2 \\ & + m_3 L_1 \left(\frac{d}{dt} u(t) \right) L_3 \left(\frac{d}{dt} v(t) \right) \cos(u(t) - v(t)) + \frac{1}{2} m_3 L_3^2 \left(\frac{d}{dt} v(t) \right)^2 \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} - & m_2 L_1 \left(\frac{d}{dt} u(t) \right) L_2 \left(\frac{d}{dt} v(t) \right) \cos(u(t) - v(t)) + \frac{1}{2} m_2 L_2^2 \left(\frac{d}{dt} v(t) \right)^2 \\ & + \frac{1}{2} J_c \left(\frac{d}{dt} v(t) \right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P := & g m_3 L_1 + g m_3 L_2 - g m_3 L_1 \cos(u(t)) - g m_3 L_3 \cos(v(t)) + g m_2 L_1 - g m_2 L_2 \\ & - g m_2 L_1 \cos(u(t)) + g m_2 L_2 \cos(v(t)) \end{aligned}$$

Тут через J_c позначено момент інерції всього коливального тіла відносно центру мас ($J_c = 0,1$).

Автоматизовано складена система рівнянь Лагранжа другого роду для маятника Томсона-Тета має вигляд

$$\begin{aligned}
 ODE1 := & L1 \left(2 m2 L1 \left(\frac{d^2}{dt^2} u(t) \right) + 2 m3 L1 \left(\frac{d^2}{dt^2} u(t) \right) \right. \\
 & + m3 L3 \left(\frac{d^2}{dt^2} v(t) \right) \cos(u(t) - v(t)) + m3 L3 \left(\frac{d}{dt} v(t) \right)^2 \sin(u(t) - v(t)) \\
 & - m2 L2 \left(\frac{d^2}{dt^2} v(t) \right) \cos(u(t) - v(t)) - m2 L2 \left(\frac{d}{dt} v(t) \right)^2 \sin(u(t) - v(t)) \\
 & \left. + g m3 \sin(u(t)) + g m2 \sin(u(t)) \right) = 0 \\
 ODE2 := & m3 L1 \left(\frac{d^2}{dt^2} u(t) \right) L3 \cos(u(t) - v(t)) - m3 L1 \left(\frac{d}{dt} u(t) \right)^2 L3 \sin(u(t) - v(t)) \\
 & + m3 L3^2 \left(\frac{d^2}{dt^2} v(t) \right) - m2 L1 \left(\frac{d^2}{dt^2} u(t) \right) L2 \cos(u(t) - v(t)) \\
 & + m2 L1 \left(\frac{d}{dt} u(t) \right)^2 L2 \sin(u(t) - v(t)) + m2 L2^2 \left(\frac{d^2}{dt^2} v(t) \right) + Jc \left(\frac{d^2}{dt^2} v(t) \right) \\
 & + g m3 L3 \sin(v(t)) - g m2 L2 \sin(v(t)) = 0
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

В результаті проведених комп'ютерних експериментів з цими рівняннями в роботі знайдено набір параметрів, які забезпечать стійкість коливань маятника Томсона-Тета.

Твердження 2.6. Для значень параметрів **L1=1.9: L2=0.5: L3=0.2: m2 = 1.0: m3 = 0.5:** і початкових умов

$$u(0)=\pi/2, D(u)(0)=0, v(0)=\pi/6, D(v)(0)=0:$$

на протязі 9 секунд коливання маятника Томсона-Тета буде нехаотичним, що слідує з фазових портретів, зображених на рис. 2.12.

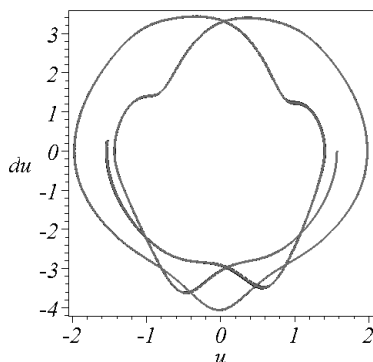


Рис. 2.12 а. Суміщені фазові портрети для параметра $u(t)$ маятника Томсона-Тета

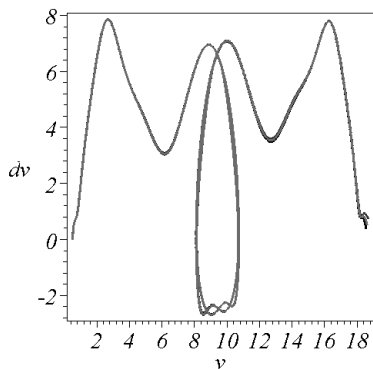


Рис. 2.12 б. Сумішені фазові портрети для параметра $v(t)$ маятника Томсона-Тета

2.3.3. На завершення розглянемо коливання комбінованого маятника (рис. 1.1 в). Комбінований маятник складається з трьох стержнів довжин L_1 , $L_2 + L_3$ і L_4 , на які в точках B і D закріплені кульки з масами mB і mD .

Тоді координати вузлових точок можна обчислити за формулами:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_a &:= L_1 \sin(u(t)) & \mathbf{y}_a &:= L_1 \cos(u(t)) \\ \mathbf{x}_b &:= \mathbf{x}_a - L_2 \sin(v(t)) & \mathbf{y}_b &:= \mathbf{y}_a - L_2 \cos(v(t)) \\ \mathbf{x}_c &:= \mathbf{x}_a + L_3 \sin(v(t)) & \mathbf{y}_c &:= \mathbf{y}_a + L_3 \cos(v(t)) \\ \mathbf{x}_d &:= \mathbf{x}_c + L_4 \sin(w(t)) & \mathbf{y}_d &:= \mathbf{y}_c + L_4 \cos(w(t)) \end{aligned}$$

Вирази для кінетичної і потенціальної енергії матимуть вигляд

$$\begin{aligned} K := & \frac{1}{2} mB L_3^2 \left(\frac{d}{dt} v(t) \right)^2 + \frac{1}{2} mD L_3^2 \left(\frac{d}{dt} v(t) \right)^2 + \frac{1}{2} mD L_1^2 \left(\frac{d}{dt} u(t) \right)^2 \\ & + \frac{1}{2} mB L_1^2 \left(\frac{d}{dt} u(t) \right)^2 + \frac{1}{2} mD L_4^2 \left(\frac{d}{dt} w(t) \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dt} u(t) \right)^2 + \frac{1}{2} L_3^2 \left(\frac{d}{dt} v(t) \right)^2 \\ & + \frac{1}{2} L_1^2 \left(\frac{d}{dt} u(t) \right)^2 + L_1 \left(\frac{d}{dt} u(t) \right) L_3 \left(\frac{d}{dt} v(t) \right) \cos(u(t) - v(t)) \\ & + mB L_1 \left(\frac{d}{dt} u(t) \right) L_3 \left(\frac{d}{dt} v(t) \right) \cos(u(t) - v(t)) \\ & + mD L_3 \left(\frac{d}{dt} v(t) \right) L_4 \left(\frac{d}{dt} w(t) \right) \cos(v(t) - w(t)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P := & -g (-mB L_1 - mB L_2 + mB L_1 \cos(u(t)) - mB L_2 \cos(v(t)) - mD L_1 + mD L_3 \\ & - mD L_4 + mD L_1 \cos(u(t)) + mD L_3 \cos(v(t)) + mD L_4 \cos(w(t))) \end{aligned}$$

Для комбінованого маятника було складено систему рівнянь Лагранжа другого роду. В результаті проведених комп'ютерних експериментів з цими рівняннями в роботі не вдалося знайти набір параметрів, які б забезпечили стійкість коливань комбінованого маятника.

Твердження. Для значень параметрів $L_1=0.2$: $L_2=0.2$: $L_3=0.2$: $L_4=0.2$: $m_B=2.6$: $m_D=1.3$ і початкових умов $u(0)=\pi/3$, $D(u)(0)=0$, $v(0)=\pi/6$, $D(v)(0)=0$, $w(0)=\pi/2$, $D(w)(0)=0$: коливання комбінованого маятника буде хаотичним принаймні 10 сек. Це слідує з фазових портретів на рис. 2.13.

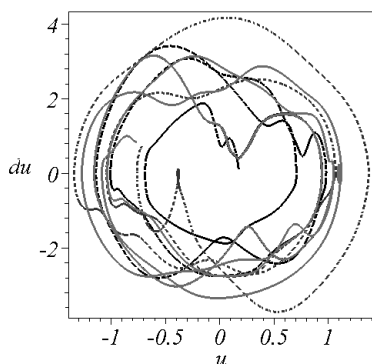


Рис. 2.13 а. Суміщені фазові портрети для параметра $u(t)$ комбінованого маятника

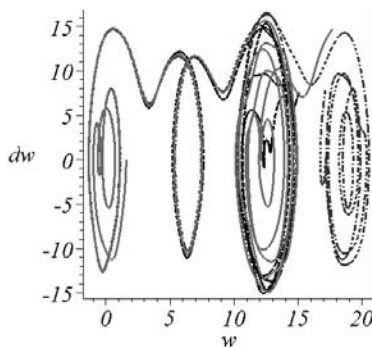


Рис. 2.13 б. Суміщені фазові портрети для параметра $v(t)$ комбінованого маятника

В додатку А наведена Mapl-програма, яка дозволяє будувати фазові портрети для багатоланкових маятників неланцюгового типу.

2.4. Розрахунок нестандартних різновидів багатоланкових маятників

В цьому підрозділі розглянемо ще два приклади багатоланкових маятників. Для першого прикладу – варіанту триланкового маятника – характерним є короткочасність (імпульсивність) дії, а для другого – подвійного маятника – характерною є зміна довжини першої ланки.

2.4.1. На рис. 2.14 наведено схему машини для метання (катапульти), яка застосовувалася у стародавні часи під час воєнних баталій.

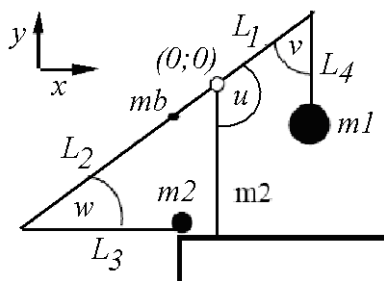


Рис. 2.14. Схема машини для метання

Катапульта складається зі стержня довжини $L_1 + L_2$, до якого шарнірно прикріплено ще два стержні довжини L_3 і L_4 . До останніх в вузлових точках закріплені вантажні кульки з масами m_1 і m_2 . На практиці масу m_1 обирають на декілька порядків більшою стосовно маси m_2 . При відпусканні цього маятника перший вантаж під дією ваги падає донизу, в результаті чого другому вантажу надається прискорення, яке і спричиняє ефект метання.

В якості узагальнених координат оберемо кути $u(t)$, $v(t)$ і $w(t)$. Тоді координати вузлових точок обчислюються так:

$$\begin{aligned}
 x_1 &:= L_1 \sin(u(t)) & y_1 &:= -L_1 \cos(u(t)) \\
 x_2 &:= -L_2 \sin(u(t)) & y_2 &:= L_2 \cos(u(t)) \\
 x_4 &:= x_1 - L_4 \sin(u(t) + v(t)) \\
 y_4 &:= y_1 + L_4 \cos(u(t) + v(t)) \\
 x_3 &:= x_2 + L_3 \sin(u(t) - w(t)) \\
 y_3 &:= y_2 - L_3 \cos(u(t) - w(t))
 \end{aligned}$$

Вирази для кінетичної і потенціальної енергії матимуть вигляд:

$$\begin{aligned}
K := & \frac{1}{6} mb \left(\frac{d}{dt} u(t) \right)^2 L2^2 + \frac{1}{2} m2 L3^2 \left(\frac{d}{dt} u(t) \right)^2 + \frac{1}{2} m2 L3^2 \left(\frac{d}{dt} w(t) \right)^2 \\
& + \frac{1}{2} m1 L4^2 \left(\frac{d}{dt} u(t) \right)^2 + \frac{1}{2} m1 L4^2 \left(\frac{d}{dt} v(t) \right)^2 + \frac{1}{6} mb \left(\frac{d}{dt} u(t) \right)^2 L1^2 \\
& + \frac{1}{2} m2 L2^2 \left(\frac{d}{dt} u(t) \right)^2 + \frac{1}{2} m1 L1^2 \left(\frac{d}{dt} u(t) \right)^2 - \frac{1}{6} mb \left(\frac{d}{dt} u(t) \right)^2 L1 L2 \\
& + m1 L4^2 \left(\frac{d}{dt} u(t) \right) \left(\frac{d}{dt} v(t) \right) - m2 L3^2 \left(\frac{d}{dt} u(t) \right) \left(\frac{d}{dt} w(t) \right) \\
& - m2 L2 \left(\frac{d}{dt} u(t) \right)^2 L3 \cos(w(t)) - m1 L1 \left(\frac{d}{dt} u(t) \right)^2 L4 \cos(v(t)) \\
& - m1 L1 \left(\frac{d}{dt} u(t) \right) L4 \left(\frac{d}{dt} v(t) \right) \cos(v(t)) \\
& + m2 L2 \left(\frac{d}{dt} u(t) \right) L3 \left(\frac{d}{dt} w(t) \right) \cos(w(t))
\end{aligned} \tag{2.14}$$

$$\begin{aligned}
P := & -g(m1 L1 \cos(u(t)) - m1 L4 \cos(u(t) + v(t)) - m2 L2 \cos(u(t)) \\
& + m2 L3 \cos(u(t) - w(t)) + mb \cos(u(t)) L1 - mb \cos(u(t)) L2)
\end{aligned}$$

Автоматизовано складена система рівнянь Лагранжа другого роду для металної машини має вигляд

$$\begin{aligned}
ODE1 := & m2 L2^2 \left(\frac{d^2}{dt^2} u(t) \right) + m1 L1^2 \left(\frac{d^2}{dt^2} u(t) \right) + \frac{1}{3} mb \left(\frac{d^2}{dt^2} u(t) \right) L2^2 \\
& + m2 L3^2 \left(\frac{d^2}{dt^2} u(t) \right) + m1 L4^2 \left(\frac{d^2}{dt^2} u(t) \right) - 2 m1 L1 \left(\frac{d^2}{dt^2} u(t) \right) L4 \cos(v(t)) \\
& + 2 m1 L1 \left(\frac{d}{dt} u(t) \right) L4 \sin(v(t)) \left(\frac{d}{dt} v(t) \right) - \frac{1}{3} mb \left(\frac{d^2}{dt^2} u(t) \right) L1 L2 \\
& - m2 L3^2 \left(\frac{d^2}{dt^2} w(t) \right) + m1 L4^2 \left(\frac{d^2}{dt^2} v(t) \right) - 2 m2 L2 \left(\frac{d^2}{dt^2} u(t) \right) L3 \cos(w(t)) \\
& + 2 m2 L2 \left(\frac{d}{dt} u(t) \right) L3 \sin(w(t)) \left(\frac{d}{dt} w(t) \right) + m2 L2 L3 \left(\frac{d^2}{dt^2} w(t) \right) \cos(w(t)) \\
& - m2 L2 L3 \left(\frac{d}{dt} w(t) \right)^2 \sin(w(t)) - m1 L1 L4 \left(\frac{d^2}{dt^2} v(t) \right) \cos(v(t)) \\
& + m1 L1 L4 \left(\frac{d}{dt} v(t) \right)^2 \sin(v(t)) + \frac{1}{3} mb \left(\frac{d^2}{dt^2} u(t) \right) L1^2 + g m1 L1 \sin(u(t)) \\
& - g m1 L4 \sin(u(t) + v(t)) - g m2 L2 \sin(u(t)) + g m2 L3 \sin(u(t) - w(t)) \\
& + g mb \sin(u(t)) L1 - g mb \sin(u(t)) L2 = 0 \\
ODE2 := & m1 L4^2 \left(\frac{d^2}{dt^2} v(t) \right) + m1 L4^2 \left(\frac{d^2}{dt^2} u(t) \right) - m1 L1 \left(\frac{d^2}{dt^2} u(t) \right) L4 \cos(v(t))
\end{aligned} \tag{2.15}$$

$$\begin{aligned}
 & -m_1 L_1 \left(\frac{d}{dt} u(t) \right)^2 L_4 \sin(v(t)) - g m_1 L_4 \sin(u(t) + v(t)) = 0 \\
 \text{ODE3} := & m_2 L_3^2 \left(\frac{d^2}{dt^2} w(t) \right) - m_2 L_3^2 \left(\frac{d^2}{dt^2} u(t) \right) + m_2 L_2 \left(\frac{d^2}{dt^2} u(t) \right) L_3 \cos(w(t)) \\
 & - m_2 L_2 \left(\frac{d}{dt} u(t) \right)^2 L_3 \sin(w(t)) - g m_2 L_3 \sin(u(t) - w(t)) = 0
 \end{aligned}$$

В результаті розв'язання цієї системи, наприклад, з параметрами $L_1 = 1$; $L_2 = 4$; $L_3 = 4,25$; $L_4 = 1$; $m_1 = 100$; $m_2 = 2$; $m_b = 0$ і початковими умовами $u(0) = 3 \cdot \text{Pi}/4$, $D(u)(0) = 0$, $v(0) = \text{Pi}/4$, $D(v)(0) = 0$, $w(0) = \text{Pi}/4$, $D(w)(0) = 0$ для проміжку часу 1,1 сек було одержано фазові портрети для кутів $u(t)$, $v(t)$ і $w(t)$ (рис. 2.15 а,б,в).

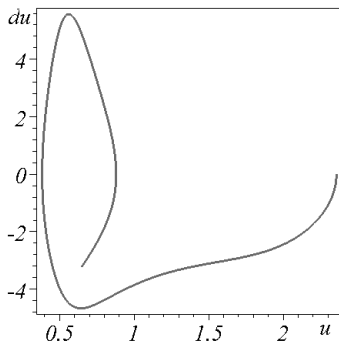


Рис. 2.15 а. Фазовий портрет для параметра $u(t)$

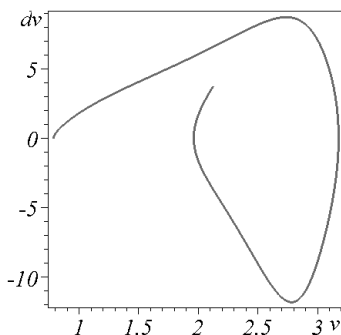


Рис. 2.15 б. Фазовий портрет для параметра $v(t)$

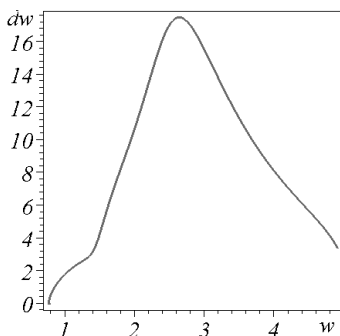


Рис. 2.15 в. Фазовий портрет для параметра $w(t)$

Аналіз фазових портретів дозволяє аналізувати цю маятникову систему. Наприклад, досить з'ясувати (рис. 2.15 в), що максимальну швидкість зміна кута $w(t)$ досягне при $w = 2,6$. Тоді ж максимальної швидкості досягне і зміна кута $v(t)$ (рис. 2.15 б). В цей момент вантаж для метання також набуде максимальної швидкості.

У додатку А наведено програму розрахунку зміни в часі кутів машини для метання. На рис. 2.16 наведено кадри анімації як результат ви-

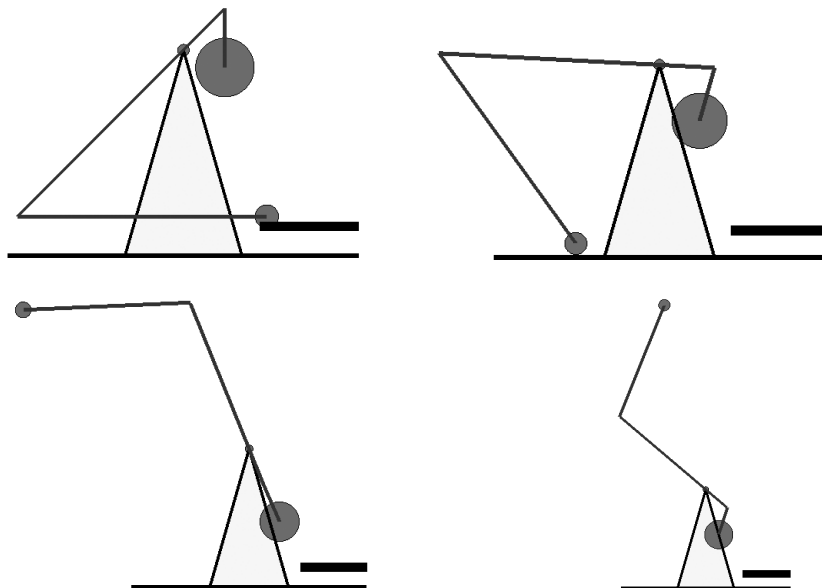


Рис. 2.16. Кадри анімації дії машини для метання

2.4.2. В якості другого прикладу «нестандартного» багатоланково-го маятника розглянемо дволанковий маятник з «гумовою» першою ланкою, тобто такою, яка змінює в часі свою довжину за пружним законом. Подвійний маятник з пружиною (рис. 2.17) складається зі стержня довжини L і пружини довжини h у спокої, на які в вузлових точках закріплено вантажі з масами m_1 і m_2 . Через k позначимо параметр жорсткості пружини.

Узагальненими координатами оберемо кути $u(t)$ і $v(t)$, та змінну довжину пружини $w(t)$. Тоді можна обчислити координати вузлових точок:

$$\begin{aligned} x_a &:= w(t) \cdot \sin(u(t)) : \\ y_a &:= w(t) \cdot \cos(u(t)) : \\ x_b &:= x_a + L \cdot \sin(v(t)) : \\ y_b &:= y_a + L \cdot \cos(v(t)) : \end{aligned}$$

Кінетичну і потенціальну енергію

Можна обчислити за формулами:

$$\begin{aligned} K &:= \frac{1}{2} m_1 \left(\left(\left(\frac{d}{dt} w(t) \right) \sin(u(t)) + w(t) \cos(u(t)) \left(\frac{d}{dt} u(t) \right) \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\left(\frac{d}{dt} w(t) \right) \cos(u(t)) - w(t) \sin(u(t)) \left(\frac{d}{dt} u(t) \right) \right)^2 \right) + \frac{1}{2} m_2 \left(\right. \\ &\quad \left. \left(\left(\frac{d}{dt} w(t) \right) \sin(u(t)) + w(t) \cos(u(t)) \left(\frac{d}{dt} u(t) \right) + L \cos(v(t)) \left(\frac{d}{dt} v(t) \right) \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\left(\frac{d}{dt} w(t) \right) \cos(u(t)) - w(t) \sin(u(t)) \left(\frac{d}{dt} u(t) \right) - L \sin(v(t)) \left(\frac{d}{dt} v(t) \right) \right)^2 \right) \\ P &:= \frac{1}{2} k (w(t) - h)^2 - m_1 g w(t) \cos(u(t)) - m_2 g (w(t) \cos(u(t)) + L \cos(v(t))) \end{aligned} \quad (2.16)$$

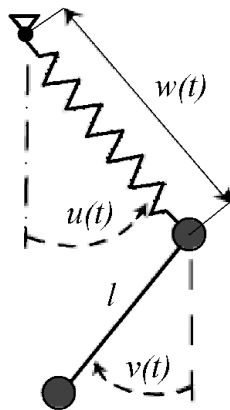


Рис. 2.17. Подвійний маятник з пружиною

Автоматизовано складена система рівнянь Лагранжа має вигляд:

$$\begin{aligned}
ODE1 := & w(t) \left(2 m_1 \left(\frac{d}{dt} u(t) \right) \left(\frac{d}{dt} w(t) \right) + m_1 w(t) \left(\frac{d^2}{dt^2} u(t) \right) \right. \\
& - m_2 \cos(u(t)) L \sin(v(t)) \left(\frac{d}{dt} v(t) \right)^2 + m_2 \cos(u(t)) L \cos(v(t)) \left(\frac{d^2}{dt^2} v(t) \right) \\
& + 2 m_2 \left(\frac{d}{dt} u(t) \right) \left(\frac{d}{dt} w(t) \right) + m_2 w(t) \left(\frac{d^2}{dt^2} u(t) \right) \\
& + m_2 \sin(u(t)) L \cos(v(t)) \left(\frac{d}{dt} v(t) \right)^2 + m_2 \sin(u(t)) L \sin(v(t)) \left(\frac{d^2}{dt^2} v(t) \right) \\
& \left. + m_1 g \sin(u(t)) + m_2 g \sin(u(t)) \right) \\
ODE2 := & m_2 L \left(\cos(v(t)) \left(\frac{d^2}{dt^2} w(t) \right) \sin(u(t)) \right. \\
& + 2 \cos(v(t)) \left(\frac{d}{dt} w(t) \right) \cos(u(t)) \left(\frac{d}{dt} u(t) \right) - \cos(v(t)) w(t) \sin(u(t)) \left(\frac{d}{dt} u(t) \right)^2 \\
& + \cos(v(t)) w(t) \cos(u(t)) \left(\frac{d^2}{dt^2} u(t) \right) - \sin(v(t)) \left(\frac{d^2}{dt^2} w(t) \right) \cos(u(t)) \\
& + 2 \sin(v(t)) \left(\frac{d}{dt} w(t) \right) \sin(u(t)) \left(\frac{d}{dt} u(t) \right) + \sin(v(t)) w(t) \cos(u(t)) \left(\frac{d}{dt} u(t) \right)^2 \\
& \left. + \sin(v(t)) w(t) \sin(u(t)) \left(\frac{d^2}{dt^2} u(t) \right) + L \left(\frac{d^2}{dt^2} v(t) \right) + g \sin(v(t)) \right) \\
ODE3 := & m_1 \left(\frac{d^2}{dt^2} w(t) \right) + m_2 \left(\frac{d^2}{dt^2} w(t) \right) - m_2 \sin(u(t)) L \sin(v(t)) \left(\frac{d}{dt} v(t) \right)^2 \\
& + m_2 \sin(u(t)) L \cos(v(t)) \left(\frac{d^2}{dt^2} v(t) \right) - m_2 \cos(u(t)) L \cos(v(t)) \left(\frac{d}{dt} v(t) \right)^2 \\
& - m_2 \cos(u(t)) L \sin(v(t)) \left(\frac{d^2}{dt^2} v(t) \right) + k w(t) - k h - m_1 g \cos(u(t)) \\
& - m_2 g \cos(u(t)) - m_1 w(t) \left(\frac{d}{dt} u(t) \right)^2 - m_2 w(t) \left(\frac{d}{dt} u(t) \right)^2
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Для коливальних систем розглянутого різновиду (тобто з «гумовими» ланками) пошук нехаотичних режимів коливань втрачає сенс. Можна знаходити лише «майже періодичні» коливання. В результаті проведення комп'ютерних експериментів, пов'язаних з розв'язанням системи рівнянь (2.17), одержано такий результат.

Твердження 2.8. Для значень параметрів $L = 1$; $k = 100$; $h = 2$; $m_1 = 1$; $m_2 = 2,5$ і початкових умов
 $u(0) = -0.3805825389$, $D(u)(0) = -0.2480367656$,
 $v(0) = -0.5639745777$, $D(v)(0) = 10.51234579$,
 $w(0) = 2.859811523$, $D(w)(0) = -4.412734653$

коливання подвійного маятника на протязі 10 сек матиме вигляд переворотів другої ланки завдяки «підсмикуванням гумової ланки». У цьому можна переконатися, аналізуючи фазові портрети, зображені на рис. 2.18 а, б, в.

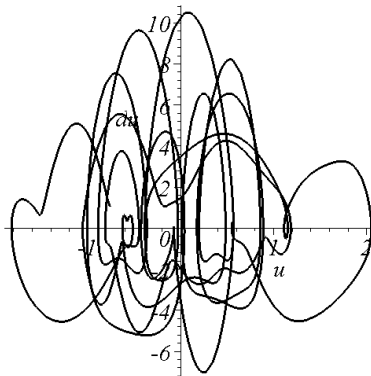


Рис. 2.18 а. Фазовий портрет для параметра $u(t)$ для подвійного маятника з «гумовою» першою ланкою

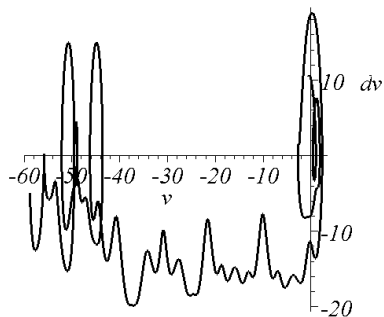


Рис. 2.18 б. Фазовий портрет для параметра $v(t)$ для подвійного маятника з «гумовою» першою ланкою

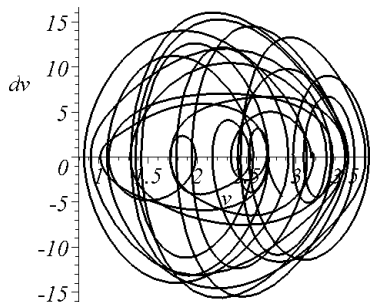


Рис. 2.18 в. Фазовий портрет для параметра $w(t)$ для подвійного маятника з «гумовою» першою ланкою

Для дослідження коливальних систем розглянутого у п/п 2.4.2 типу, використовують певні математичні прийоми [94]. Один з них – метод відображення Пуанкаре, який був розглянутий у п/п 1.4.

Інший підхід до питання дослідження коливальних систем полягає у використанні гаусіана [12, 13, 67, 94]. При цьому вважається, що коливання характеризує унаочнення Гауссової кривини G графіка функції P , яка описує потенціальну енергію коливальної системи.

У розглянутому випадку опис потенціальної енергії має вигляд

$$P = \frac{k}{2}(w-h)^2 - m_2 g(w \cos u + l \cos v) - m_1 g w \cos u. \quad (2.18)$$

Враховуючи вираз для гаусіана

$$K = \frac{\frac{\partial^2 P}{\partial u^2} \frac{\partial^2 P}{\partial v^2} - \left(\frac{\partial^2 P}{\partial u \partial v} \right)^2}{1 + \left(\frac{\partial^2 P}{\partial u^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 P}{\partial v^2} \right)^2} \quad (2.19)$$

для випадку (2.18) одержуємо

$$G := \frac{(m_1 l g w \cos(u) + m_2 g w \cos(u)) m_2 g L \cos(v)}{(m_1 l^2 g^2 w^2 + 2 m_1 l g^2 w^2 m_2 + m_2^2 g^2 w^2) \cos(u)^2 + 1 + m_2^2 g^2 L^2 \cos(v)^2}. \quad (2.20)$$

Функція G (2.20) залежить від трьох змінних u , v і w . Якщо побудувати її графік в просторі координат цих змінних, то можна проводити аналіз коливальної системи.

Наприклад, для параметрів $L = 1$; $k = 100$; $h = 2$; $m_1 = 3$; $m_2 = 5$, маємо графіки функцій, зображених на рис. 2.19.

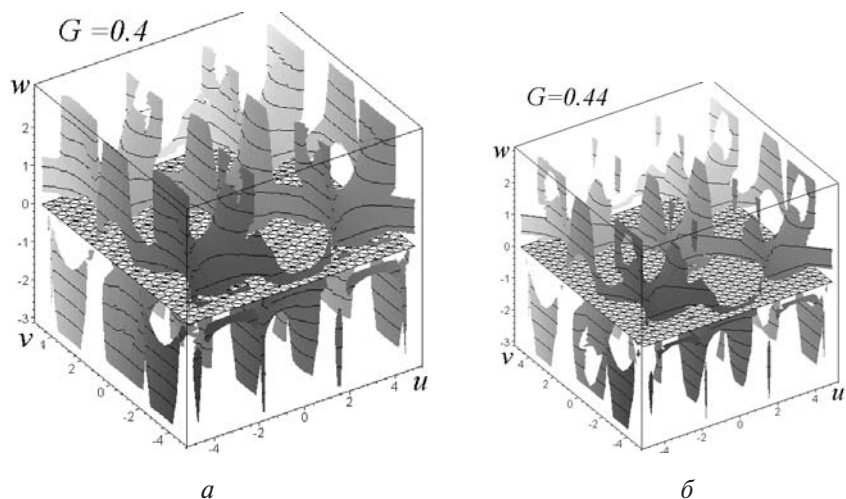


Рис. 2.19. Поверхні, які є графіками рівня функції трьох змінних:
 $G(u, v, w) = 0,4$ (а) і $G(u, v, w) = 0,44$ (б)

На рис. 2.20 зображено декілька анімаційних кадрів коливань подвійного маятника, у якого перша ланка є пружиною. Коливання подвійного маятника на протязі 10 сек візуально матиме вигляд переворотів другої ланки завдяки ніби то «підсмикуванню» пружинної ланки.

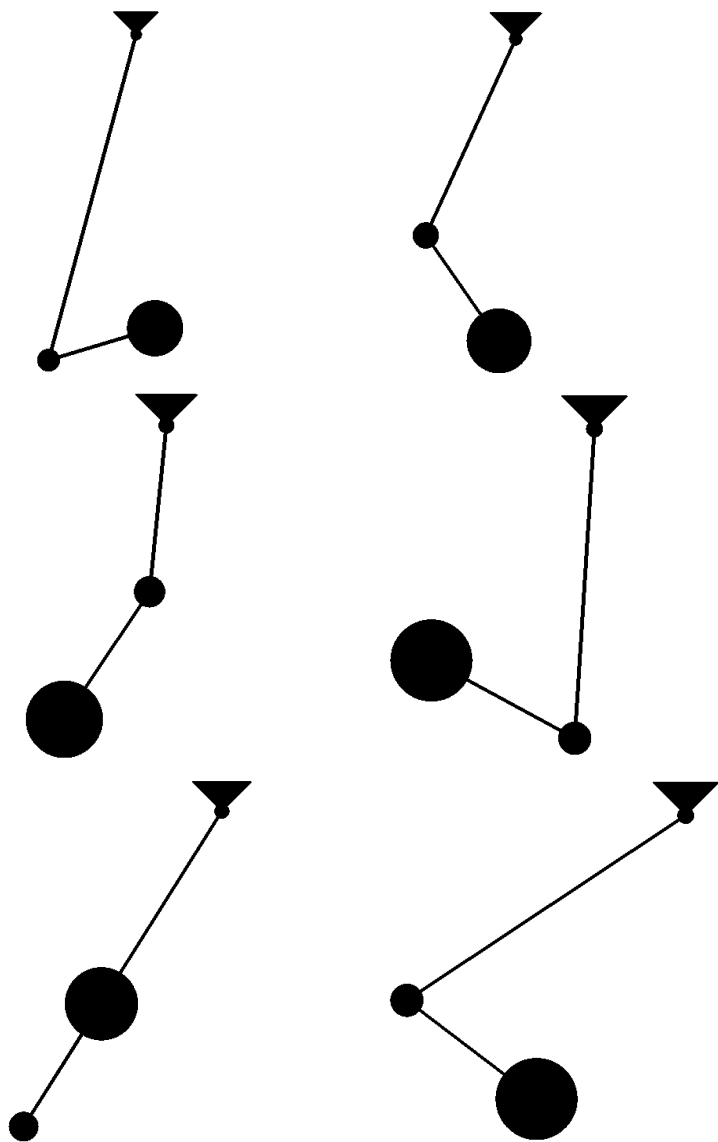


Рис. 2.20. Анімаційні кадри коливань подвійного маятника, у якого перша ланка є пружиною

ВИСНОВКИ ДО ДРУГОГО РОЗДІЛУ

1. Для автоматизованого формування системи рівнянь Лагранжа другого роду у аналітичному вигляді доцільно використати Maple-оператор **subs (X=A, B)**, який дозволяє у виразі B замінити підвираз X на підвираз A.

2. Було розроблено програму розв'язання знайдених рівнянь Лагранжа, де розв'язок вдалося одержати у вигляді процедур. Ці розв'язки можна трактувати і використовувати, як аналітичні вирази, що є зручним при побудові фазових портретів коливальної системи.

3. Це дало підставу для розробки варіантів програм розрахунку маятників ланцюгового типу та багатоланкових маятників, компоненти яких можуть сполучатися практично довільним чином. Розглянуто базовий варіант програми, яку можна удосконалювати з метою більш адекватного опису коливального процесу.

4. Показано, що оцінити кількість кругових обертань вільної ланки (подвійного) маятника можна в торовій системі координат за допомогою підрахунку кількості витків кривої, намотаної на поверхню тора.

5. В роботі для деяких різновидів маятників здійснено пошук тих комбінацій параметрів, які б забезпечили не хаотичність коливань багатоланкових маятників хоча б на протязі відрізка часу $[0..T]$.

6. Для визначення факту нехаотичності коливань на протязі T сек в роботі обчислювалися коливання з трьома близькими початковими умовами, які розрізнялися на (апріорі малу) величину $Pi/10000$.

7. Проведені комп'ютерні експерименти дозволили знайти параметри, які забезпечують на протязі певного часу не хаотичність коливань для деяких різновидів маятників. Ці положення у роботі зафіксовано у вигляді тверджень.

РОЗДІЛ 3

ГЕОМЕТРИЧНІ ІНТЕРПРЕТАЦІЇ, ПОВ'ЯЗАНІ З АНАЛІЗОМ КОЛИВАНЬ

Поряд з математичними методами дослідження коливань маятників існує *геометричний шлях* досліджень, який дозволяє усвідомити основні особливості коливання. Геометричний підхід базується на «геометрії енергетичних поверхонь», і забезпечує розуміння динаміки руху маятника.

Головними об'єктами унаочнення є фазова крива коливання для обраного початкового положення й швидкості маятника, та фазовий портрет, що складається з сім'ї всіх фазових кривих.

Періодичність розташування ліній фазового портрета дозволяє розглянути фазовий циліндр, який утворений в результаті «згортання» у трубку фазової площини маятника.

Для пояснення на графічному рівні факту зростання амплітуди коливань аж до межі вершини й початку обертання маятника навколо осі, доцільно використати мнемонічний прийом «згину» фазового циліндра в U-подібну трубу. Це дозволило проілюструвати, як рівні енергій можна поставити у відповідність рухам маятника. При цьому дисипативність (затухання) коливань можна трактувати як «скочування вниз» абстрактної точки по U – подібній поверхні.

Геометричний аналіз коливань маятника не потребує розв'язання рівняння руху, адже формула коливань використовується лише для побудови фазового портрету. Адже розв'язати рівняння в математиці означає: визначити, які значення x і v відповідають кожному моменту часу t . Але в геометричних побудовах параметр t ніде не використовується.

Для аналізу коливань математичного маятника було складено програми мовою Maple, а для аналізу коливань параметричних маятників було побудовано низку фазових портретів за допомогою пакету WinSet.

3.1. Дослідження на якісному рівні закону збереження енергії маятника

При строгому підході до аналізу руху маятника потрібно сформулювати й довести теорему, яка пояснює, що одержане рішення є точним розв'язком близької задачі, що може також розглядатися як наближене розв'язання точної задачі. Необхідна теорема була доведена в 1895 році О.М.Ляпуновим [81]. В основі його підходу було положення, що малі коливання маятника можна апроксимувати простим гармонійним рухом, адже тільки коливання з дуже невеликою амплітудою є синусоїдальними.

Але крім «малих коливань» практика спонукає розглядати й вивчати коливання з великими амплітудами. Адже в технічних впровадженнях зустрічаються і маятники, які обертаються колами, подібно літаковому пропелеру. І він рухається тим швидше, чим більше енергії витрачено на його розкручування. Що можна сказати про його період, чи завжди він залишається постійним? На це питання також є класична відповідь, яка вимагає залучення еліптичних функцій [95].

Однак існує ще один – геометричний шлях досліджень, що дозволяє усвідомити основні особливості коливання. Геометричний підхід має ту перевагу, що він забезпечує дійсне розуміння динаміки руху маятника. Для цього розглянемо «геометрію енергетичних поверхонь».

Нехай у нульовий момент часу маятник відвели убік на кут α і відпустили. Через час t , величина кута стане рівною $\alpha = \cos\sqrt{gt/L}$, де: t – час, g – прискорення сили ваги, L – довжина маятника. Зазначимо, що початкове відхилення α і маса маятника m не входять у цей вираз, адже легкі й важкі тіла падають з однаковою швидкістю (на це звернув увагу ще Галілей). Умовимося від'ємні кути відлічувати «ліворуч від вертикалі», а додатні – «праворуч».

Щоб зрозуміти поведінку маятника, ми повинні знати дві величини: положення й швидкість маятника, які позначимо як x і v . Треба визначити характер їх зміни в часі. Щоб графічно зобразити це в прямокутній системі координат відкладають x по горизонталі, а V по вертикалі. Одержана лінія є траєкторією руху для обраного початкового положення й швидкості. Назва цієї кривої – фазова крива [12]. Інші початкові положення приведуть до інших траєкторій, які разом утворюють сім'ю кривих, що покривають всю площину. Сім'я таких кривих називається фазовим портретом.

Для маятника простого гармонійного осцилятора, ці криві утворюють концентричні кола. Для «реального» маятника картина має більше складну структуру: вона нагадує око із бровами, розташованими як над оком, так і під ним (рис. 3.1).

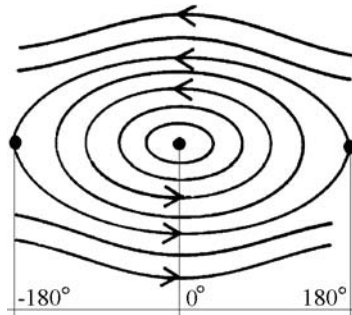


Рис.3.1. Фазовий портрет «реального» нелінійного маятника.

Криві, утворені великою кількістю коливань, найімовірніше, дадуть саме таку картину. Покажемо, як це довести, використовуючи закон збереження енергії. Загальна енергія складається з кінетичної плюс потенційної. Вона зберігається при русі в гравітаційному полі (вважаємо, що тертя відсутнє).

Якщо маса вантажу дорівнює 1, то кінетична енергія маятника дорівнює $v^2/2$ а його потенційна енергія $\sin x$. У цьому випадку за законом збереження енергії для будь-якої траєкторії маємо $\frac{1}{2v^2} + \sin x = const$.

Розв'язуючи це рівняння відносно швидкості v , знайдемо:

$$v = \pm \sqrt{const - 2 \sin x}$$

Тепер за цією формулою можна обчислити v , як функцію аргументу x . Виберемо значення константи, скажемо 1.5, і обчислимо $\sqrt{1.5 - 2 \sin x}$ для всіх x , від 0° до 360° . Якщо вираз, що розташований під коренем, стане від'ємним, то будемо ігнорувати його. Нанесемо дві точки на вертикальну вісь для $x: \sqrt{1.5 - 2 \sin x}$ і $-\sqrt{1.5 - 2 \sin x}$. У цих окремих випадках виходить крива, подібна овалу. Якщо постійна менше, ніж -2, то точок немає взагалі. Якщо вона дорівнює -2, то виходить єдина (сингулярна) точка. При +2 овал має виразні кути на кінцях, а якщо постійна більше, ніж 2, то виникають дві окремі криві. Вся система траєкторій маятника є точною картиною «ока»: точка «зіниця», овали «райдушна оболонка ока», овал з «різкими кутами край ока», а «окремі лінії брови» (вище) і «зморшки» (нижче).

Можна проінтерпретувати різні частини фазового портрету в термінах динаміки маятника. Так, наприклад, єдина ізольована точка представляє стан, коли маятник висить вертикально й нерухомий. Положення точки x і швидкість V при цьому постійні, саме тому виникає

сингулярна точка. Енергія системи в точці -2 є найнижчою з можливих. Потенційна енергія може бути від'ємною, це залежить від вибору точки відліку. Замкнуті овали характеризують стандартні коливання маятника, дійсні і єдині.

Тепер розглянемо одну з «брів». Тут величина V завжди додатна, у той час як точка x пробігає значення від -180° (тобто, поворот за годинниковою стрілкою на 180°) до $+180^\circ$, що завершують повний оберт. Це пропелероподібна траєкторія являє собою коло, де обертання відбувається завжди в одному напрямку. Нижні брови відповідають подібним же рухам, але здійснюваним не за годинниковою стрілкою, а в протилежному напрямку. Що можна сказати про «край ока», що розташовується в куті овалу? Це така траєкторія, яка відповідає такому «граничному» коливанню маятника, коли він завершує рухи «туда–сюди» і перетворюється в пропелер.

Край «ока» також характеризує шлях маятника, по якому він би рухався, якби був установлений вертикально нагору від точки підвісу, а потім відпущений. Але це не зовсім вірно. Якби це було так, то він повинен був би таким і залишатися, тобто точно збалансованим у єдиній точці (кут на краю ока), цей стан нагадує шпильку, поставлену на гострий кінець. Згаданий стан є нестійким. Найменше збурювання викличе падіння маятника. Воно починається нескінченно повільно, але потім набирає швидкість, і маятник виконує переміщення, минаючи найнижче положення, а потім піднімається нагору з іншого боку, і знову все ближче й ближче наближаючись до вершини. У теорії повний рух здійснюється нескінченно довго, а на практиці він нетривкий із за дисипативних сил.

Таким чином, геометричний аналіз коливань маятника не потребує розв'язання рівняння руху, адже цю формулу коливань було використано лише для побудови фазового портрета. Адже розв'язати рівняння в математиці означає: визначити, які значення x і v відповідають кожному моменту часу t . Але наголосимо, що в геометричних побудовах параметр t ніде не використовувався!

Зазначимо, що картина фазового портрету не надає ніякої інформації про величину періодів. Однак, незважаючи на цей недолік, такий підхід дозволяє одержати зв'язаний і послідовний якісний опис всіх можливих рухів реального, хоча й ідеалізованому маятника.

Це ж саме пояснимо за допомогою формул. Нехай математичним маятником є кулька маси m , підвішена на нитці довжини L , яка відхилена на кут φ від вертикалі. Такий маятник звичайно досліджують за допомогою рівняння $\varphi'' + \omega^2 \sin \varphi = 0$, де $\omega^2 = g/L$, або при заміні $t \rightarrow t/\omega$, $\varphi'' + \sin \varphi = 0$ [12]. Розв'язки цього диференціального рівняння мають

вигляд: $\varphi = 2\pi k$ і $\varphi = \pi(2k+1)$, де $k \in \mathbb{Z}$, і відповідають положення рівноваги: $\varphi = 0$ - нижній й $\varphi = \pi$ - верхній.

Вираз $\varphi'' + \sin\varphi$ помножимо φ' на і виконаємо інтегрування по t : $\frac{1}{2}(\varphi')^2 - \cos\varphi = E$. В результаті одержимо закон збереження енергії E для маятника. Якщо досліджувати тільки дійсні розв'язки, то повинно виконуватися $2E + 2\cos(\varphi) \geq 0$, тобто $E \geq -1$. $E = -1$ відповідає стаціонарним розв'язкам $\varphi = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. При $E > 1$ швидкість φ' ніколи не дорівнює нулю. Тобто, випадок $E > 1$ відповідає обертовим розв'язкам. Тобто маятник буде обертатися навколо точки його закріплення (як пропелер літака).

Якщо $E > -1$ і $E < 1$, тоді рівняння визначає сім'ю замкнених кривих. Крайні значення φ досягаються при $\varphi' = 0$ і дорівнюють $\varphi_{\pm} = \pm 1/2\arccos(-E) + 2\pi k$. Максимальні значення швидкостей досягаються в точці $\varphi = 2\pi k$ і дорівнюють $\pm\sqrt{2E}$ [56, 73, 97].

Значенню $E = 1$ відповідають два типи траєкторій, це точки рівноваги $\varphi = \pi(2k+1)$ і сепаратриси, що відокремлюють коливальні рухи маятника від його обертових рухів. В п/п 3.3 наведено лінії рівня функції енергії маятника $E = E(\varphi, \varphi')$, що зображені на фазовій площині маятника.

3.2. Графічні зображення на фазовому циліндрі маятника

Далі проведемо дослідження шляхом використання картинки фазового портрету маятника, що допоможе виявити інші його особливості (див. <http://imi.sitc.ru/~amleonov/Stuart/chap5.pdf>). Під час обговорення кругового (подібного до пропелера) руху маятника, було відзначено, що рух від кута -180° до кута $+180^\circ$ утворить повний оберт, тому ці значення характеризують ідентичне положення маятника. Як це відбувається, фазовий портрет не показує, але очевидно, що рух вправо до кута $+180^\circ$ подібно зворотному руху до кута -180° . Як же показати, що ці стани по суті характеризують те саме положення маятника?

Проблема тут пов'язана не стільки з маятником, скільки із застосовуваною системою координат. Маятник «знає», що $-180^\circ = +180^\circ$, і це скоріше доводиться його гладкими круговими рухами, ніж кидками через «невласну точку», щоб знову досягти верхньої точки. Тут необхідно пояснити спосіб виміру кутів. Спробуємо представляти кут повороту маятника числом на прямої лінії. Тоді обертаючи лінію навколо кола, після досягнення 360° , необхідно знову вертатися до початку в 0° . Це означає, що при добавці 360° , і отже будь-якій, кратного цій величині кута, виходить той самий кут. Якщо $-180^\circ + 360^\circ = +180^\circ$, то це один кут.

До речі, можна розділити обидві частини на 180° і вивести, що $-1^\circ = +1^\circ$. Чому геометричне коло «знає», що $-180^\circ = +180^\circ$? Зробимо підсумок, і легко одержимо коло для різних топологій від лінії, ось це і пояснює, чому виникають проблеми: ми намагаємося використовувати числа, що характеризують лінію, для подання об'єкта з нетрадиційною топологією.

Щоб одержати більше достовірну картину руху маятника і щоб його геометрія точно відбивала дійсність, ми повинні скрутити всю картинку фазового портрету так, щоб з'єднати її лівий і правий краї, а фізично ми сполучаємо -180° і $+180^\circ$. Інакше кажучи, ми скачуємо фазову площину в циліндр. Тобто періодичність розташування ліній рівня дозволяє розглянути фазовий циліндр, який утворений в результаті «згортання» у трубку фазової площини маятника (рис. 3.2).

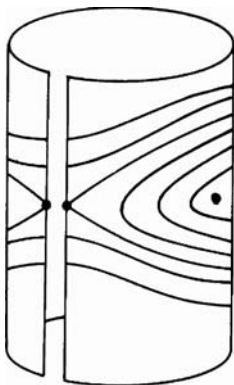


Рис. 3.2. Згорнута фазова площина маятника на циліндрі

Зазначимо, що подібна проблема не виникає зі швидкістю маятника. Кутова швидкість 180° у секунду це зовсім не те ж саме, що кутова швидкість -180° у секунду. У першому випадку, ми маємо справу із пропелером, що обертається проти годинникової стрілки, а в другому – за годинниковою стрілкою. З цих позицій динаміка поведінки маятника повністю відбита на циліндрі, і періодичні рухи маятника дійсно виглядають періодичними.

Деякі рухи маятника вимагають більше енергії, ніж інші, але в цій інтерпретації важко побачити такі «енергетичні рівні». З позицій мнемонічного прийому попереднього підрозділу про «око», ілюстрація повинна пояснити очевидні положення. А саме, щоб із «зіниці ока» можна було простежити рух, починаючи з найнижчого рівня енергії й побачити, що відбувається, коли енергія зростає. При цьому маятник рухається через «райдужну оболонку ока», проходить «край ока», і далі

переміщується до «брів» і «зморшок». Або інакше, необхідно на графічному рівні простежити, як коливання ростуть, поки не досягнуть вершини й не почнеться обертання маятника навколо осі.

Розв'язок полягає в тому, щоб зігнути фазовий циліндр в U-подібну трубу (рис. 3.3). Якщо діяти так, то вийде картинка, що показує як рух маятника, так і відповідні рівні енергій. Якщо провести горизонтальну площину через U-подібну трубу, то вийде перетин, що відповідає даному рівню енергії й містить результуючу криву, яка зображує відповідний рух. Тобто якщо циліндричний фазовий простір маятника перенести на U-подібну трубу, то траєкторії залишаться на тій же висоті.

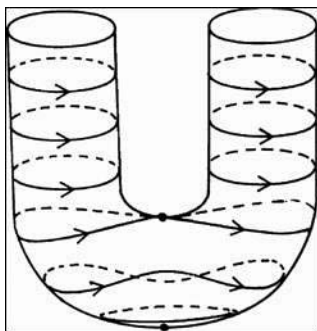


Рис. 3.3. Геометрична ілюстрація закону збереження енергії.

На рис.3.3 показано, що при досить великих рівнях енергії маятник може обертатися двома різними способами (за годинниковою стрілкою й проти її напрямку), у той час як при низьких рівнях є тільки один спосіб руху «туди й назад». При цьому немає ніякої можливості відрізнити рух «туди й назад» за годинниковою стрілкою від руху проти годинникової стрілки. Тому U-подібна труба має два відгалуження зверху, які в основі з'єднуються до купи, у протилежному випадку, ми мали б не U, а 11 - подібну трубу (тобто без перемички).

Наведені геометричні ілюстрації показують, що фактично всі якісні особливості динаміки маятника не тільки поблизу стану спокою, але й глобально, при високій чи низькій енергії можуть бути розглянуті в рамках однієї геометричної картини.

Ця картина може бути формалізована, представлена зрозумілою математичною мовою й застосована не тільки для вивчення маятника, але й (принаймні, у принципі) для вивчення будь-яких динамічних систем, що характеризуються відомою складністю. Геометрія й топологія пропонують для цього дуже потужну математичну техніку, яку можна використовувати для одержання такої інформації про динаміку,

яка зовсім недоступна при класичному, тобто заснованому на формулах, способі розгляду. Формули може не бути, а геометрію завжди можна використати для яви [86, 90].

Крім того, увагу привертає ще й таке явище, як і тертя [102, 135]. Слушність розглянутої геометричної точки зору на коливання дозволяє відповісти і на деякі питання стосовно тертя маятника «об повітря» та у точці підвіски. Строгі відповіді на ці питання можна одержати за допомогою обчислення еліптичних функцій. Однак, використання геометрії також може дати відповіді на деякі питання.

Зрозуміло, що тертя викликає втрату енергії. Практично енергія перетворюється в теплоту, що спричиняється невеликим переформулюванням закону збереження енергії.

На рис. 3.2 U-подібної труби втрата енергії означає перехід на більш низький енергетичний рівень. Нехай рух пропелера починається на великій швидкості. Тоді рух точки по одному з відгалужень U-подібної труби відповідає повторюваному руху маятника, що робить оберт за обертом. Врахування невеликого тертя змушує «фазову» точку маятника повільно опускатися донизу по спіралі труби (рис. 3.4). Тобто спіралі загасаючого маятника відповідають зниженню рівня енергії. Спуск відбувається відповідно до обертання, здійснюваним в тому ж напрямку, оскільки маятник перебуває в тому самому відгалуженні труби (див. <http://imi.sitc.ru/~amleonov/Stuart/chap5.pdf>).

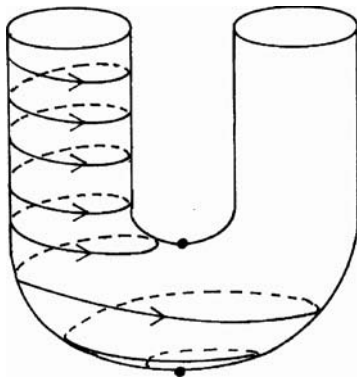


Рис. 3.4. Ілюстрація до процесу загасання дисипативної енергії:

В підсумку, спіраль досягає вигину на трубі, і переходить у нижче розташовану область спірального руху, при якому маятник гойдається «туди й сюди». В цьому випадку маятник буде обертатися все повільніше й повільніше, він падає, щоб піднятися, настає момент, коли він

застигає в стані хиткої рівноваги. На рис. 3.4 цьому стану відповідає верхня точка ділянка спряження U – труби.

Далі обертання здійснюється іншим чином, воно відповідає руху маятника від вершини однієї сторони до вершини іншої сторони, маятник падає, щоб досягти іншого краю по найкоротшим шляхом. Маятник осцилює, амплітуда його коливань повільно зменшується, і, зрештою, він застигає в стані спокою на дні труби.

Все це інтуїтивно зрозуміло й проявляється на рис. 3.4 U -подібної труби. Але, як показують дослідження [12, 13, 24], таку наочну картину не просто пояснити на основі класичних динамічних рівнянь.

3.3. Пояснення характеру коливань маятника за допомогою фазових портретів

Розглянемо математичний маятник, який складається з невагомий стержня довжини L і вантажу масою m . Позначимо через u кут відхилення, а через v – швидкість вантажу.

В цьому випадку кінетичну та потенціальну енергію маятника можна обчислити, відповідно, як $K = 0,5mL^2v^2$ та $P = mgL(1 - \cos u)$. Тоді повну енергію коливань математичного маятника можна обчислити за формулою $E = K + P$ [18, 97, 111].

На рис. 3.5 наведено графік функції $E(u, v)$ для обчислення повної енергії коливань математичного маятника.

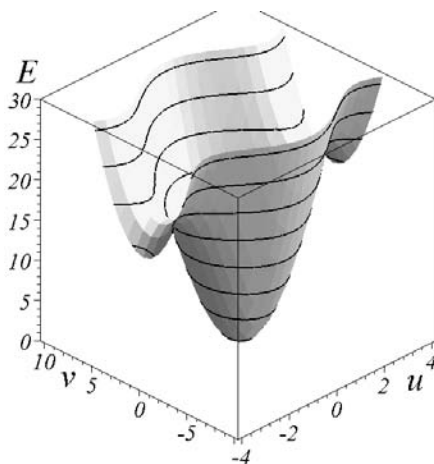


Рис. 3.5. Графік функції для обчислення повної енергії коливань математичного маятника.

На рис. 3.6 зображено суміщені графіки функції повної енергії коливань і ліній рівня цієї функції, що пояснює ефект затухання коливань (дисипативних коливань) як мнемонічний рух «кульки, що скачується» по цій поверхні.

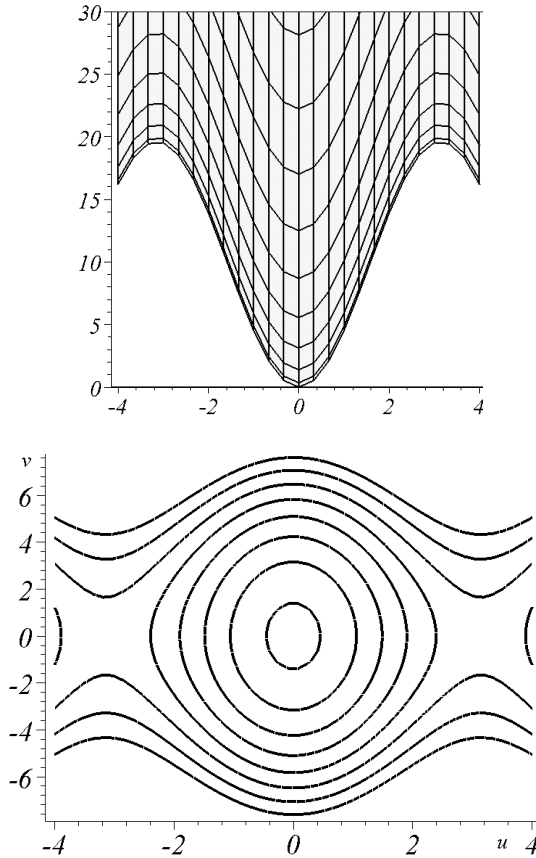


Рис. 3.6. Суміщені графіки функції повної енергії коливань і ліній рівня цієї функції

Наведені зображення побудовано за допомогою Maple-програми

```
K := 1/2*m*L^2*v^2:
```

```
P := m*g*L*(1-cos(u)):
```

```
L := 1.: m := 1.: g := 9.81:
```

```
contourplot(K + P, u = -4..4, v = -10..10,
```

```
contours=[1,5,9,13,17,21,25,29], grid=[50,50],
```

```

thickness=4, labels=[u,v], axes=boxed,
axesfont=[TIMES,ITALIC,24],
labelfont=[TIMES,ITALIC,18]);
plot3d(K + P, u= -4..4, v=-10..10,
contours=[1,5,9,13,17,21,25,29],
axes=boxed, color=yellow,view=0..30,thickness=2,
orientation=[-135, 60],
axesfont=[TIMES,ITALIC,18]);

```

Також відоме [111] диференціальне рівняння, за допомогою якого можна описати коливання математичного маятника:

$$\ddot{u}(t) = -(9,81/L)\sin u(t) - \varepsilon \dot{u}(t).$$

Тут ε – параметр дисипації (затухання) коливань.

За допомогою складеної програми

```

L := 1.: m := 1.: g := 9.81:
sys_F := [diff(u(t),t) = v(t),
          diff(v(t),t) = -(g/L)*sin(u(t))-eps*v(t)];
DEplot(sys_F,[u,v], t=0..9, [[u(0)=-4,v(0)=9],
 [u(0)=-4,v(0)=5],[u(0)=-3,v(0)=0]],thickness=2,
stepsize=0.01, u= -4..4, v=-10..10, color=red,
linecolor=black, labels=[u,v],
axes=boxed,arrows=MEDIUM);

```

можна побудувати фазові портрети для дисипативних маятників в залежності від параметра дисипації ε (рис. 3.7).

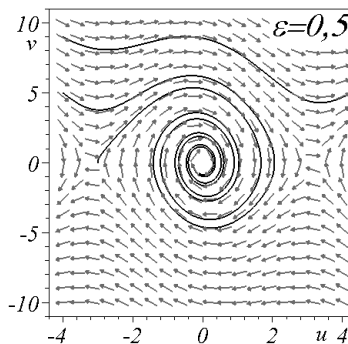
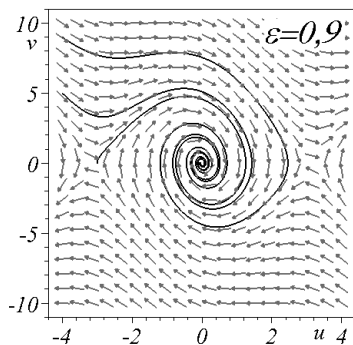
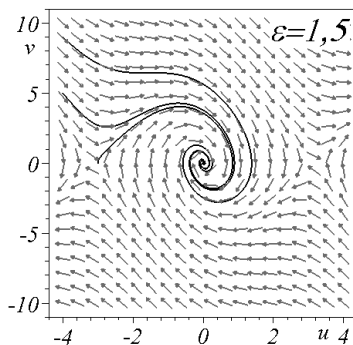


Рис. 3.7 а. Фазовий портрет маятників для параметра $\varepsilon = 0,5$

Рис. 3.7 б. Фазовий портрет маятника для параметра $\epsilon = 0,9$ Рис. 3.7 в. Фазовий портрет маятника для параметра $\epsilon = 1,5$

За допомогою програми побудуємо фазові портрети маятника

```

L := 10: eps := 0.05: g := 9.81:
sys_F := [diff(u(t),t) = v(t),
           diff(v(t),t) = -(g/L)*sin(u(t))-eps*v(t)];
DEplot(sys_F,[u,v], t=0..20,
        [[u(0)=0,v(0)=3.],
         [u(0)=0,v(0)=2.7083423],
         [u(0)=8*Pi,v(0)=-3.258285],
         [u(0)=8*Pi,v(0)=-2.7083423],
         [u(0)=0,v(0)=3.258285],
         [u(0)=8*Pi,v(0)=-3.]],
        thickness=2,arrows=MEDIUM, axes=BOXED,
        u=0..8*Pi,v=-4..4, stepsize=0.1, labels=[u,v]);

```

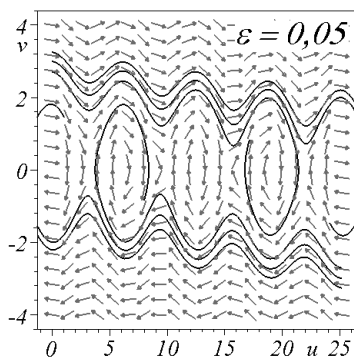


Рис. 3.8 а. Фазовий портрет маятників для значення $\epsilon = 0,05$

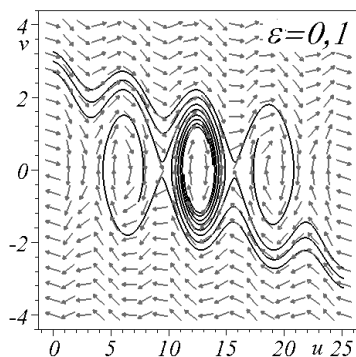
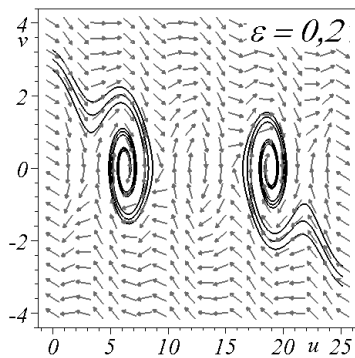
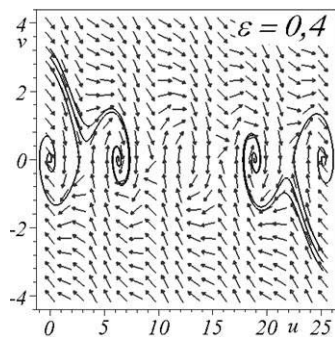
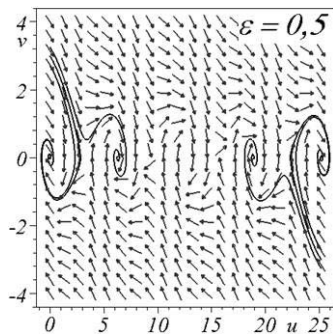


Рис. 3.8 б. Фазовий портрет маятників для значення $\epsilon = 0,1$

В результаті виконання програми одержано фазові портрети (рис. 3.8). Для них характерним є те, що коливання трьох маятників розпочиналися з близькими початковими умовами. Це дає змогу переконатися у тому, що на вигляд коливань впливає параметр ϵ .

Рис. 3.8 в. Фазовий портрет маятників для значення $\varepsilon = 0,2$ Рис. 3.8 г. Фазовий портрет маятників для значення $\varepsilon = 0,4$ Рис. 3.8 д. Фазовий портрет маятників для значення $\varepsilon = 0,5$

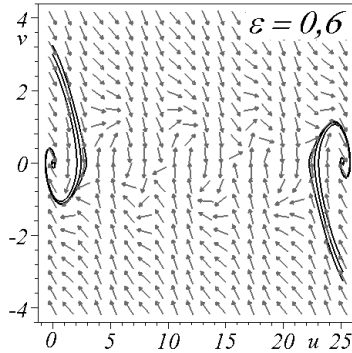


Рис. 3.8 е. Фазовий портрет маятників для значення $\varepsilon = 0,6$

Одержані фазові портрети дозволяють у певній мірі пояснити ефект виникнення хаотичних коливань. Більш детально це питання буде розглянуто в п/п. 3.4.

3.4. Фазові портрети параметричних маятників

На практиці використовуються більш складні коливальні системи, порівняно з розглянутими вище. У монографії А.Д.Морозова і Т.Н.Драгунова [93] для коливальних систем та їх описів диференціальними рівняннями запропоновано наступну класифікацію.

1. Звичайний маятник (тест $p_1 = 0$; $p_2 = 1$):

$$\frac{dx}{dt} = y; \quad \frac{dy}{dt} = -\sin x + p_1 \sin(p_2 t).$$

2. Параметричний маятник (тест $p_1 = 0, 1$; $p_2 = p_3 = 0$; $p_4 = 2$):

$$\frac{dx}{dt} = y \quad \frac{dy}{dt} = -\sin x + p_1 \cos(p_4 t) \sin x + (p_2 + p_3 \cos x) y$$

3. Маятник Морозова (тест $p_1 = -0,027$; $p_2 = 1$; $p_3 = 3$):

$$\frac{dx}{dt} = y; \quad \frac{dy}{dt} = -\sin x + y(p_1 + p_2 \cos(p_3 x))$$

4. Маятник генератора циклів

(тест $p_1 = -0,0285$; $p_2 = 1$; $p_3 = 3$, $p_4 = 1$; $p_5 = 1$):

$$\frac{dx}{dt} = y; \quad \frac{dy}{dt} = -\sin x + y(p_1 + p_2 \cos(p_3 x)) (1 + p_4 \sin(p_5 t)).$$

5. Полігармонічний маятник (тест $p_1 = 0,2$; $p_2 = -1$; $p_3 = 0,1$, $p_4 = 1$):

$$\frac{dx}{dt} = y; \quad \frac{dy}{dt} = -p_1 \sin x - p_2 \sin(3x) + p_3 \sin(p_4 t).$$

Нижче наведено фазові портрети, які побудовані за допомогою пакету WinSet [93]. Цей пакет призначено для побудови інваріантних множин динамічних систем у вигляді диференціальних рівнянь. Головним результатом тут є можливість визначення «зон» параметрів маятника, які спонукають до появи його хаотичних коливань. На рис. 3.10 – 3.23 такі «зони» будуть зображуватися «точковими хмарами».

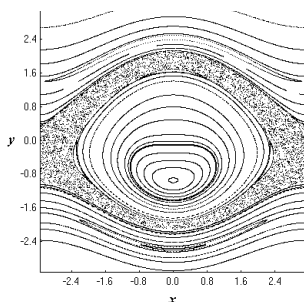


Рис. 3.10. Фазовий портрет для звичайного маятника з параметрами $p_1 = 0$; $p_2 = 0,1$

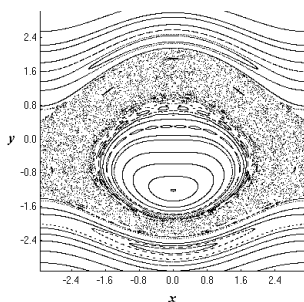


Рис. 3.11. Фазовий портрет для звичайного маятника з параметрами $p_1 = 0$; $p_2 = 0,2$

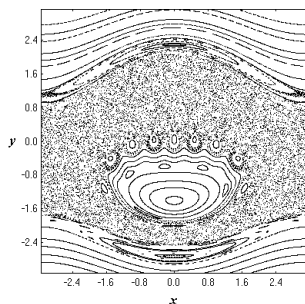


Рис. 3.12. Фазовий портрет для звичайного маятника з параметрами $p_1 = 0$; $p_2 = 0,3$

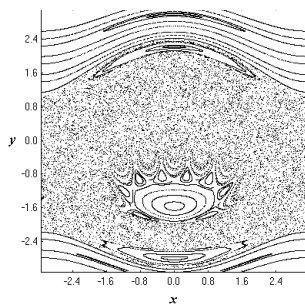


Рис. 3.13. Фазовий портрет для звичайного маятника з параметрами $p_1 = 0$; $p_2 = 0,4$

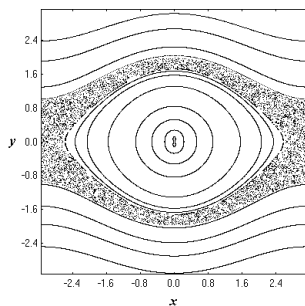


Рис. 3.14. Фазовий портрет для параметричного маятника з параметрами $p_1 = 0,1$; $p_2 = p_3 = 0$; $p_4 = 1$

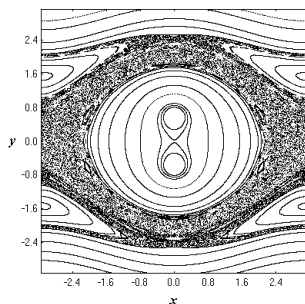


Рис. 3.15. Фазовий портрет для параметричного маятника з параметрами $p_1 = 0,1$; $p_2 = p_3 = 0$; $p_4 = 2$

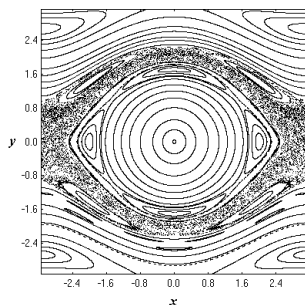


Рис. 3.16. Фазовий портрет для параметричного маятника з параметрами $p_1 = 0,1$; $p_2 = p_3 = 0$; $p_4 = 3$

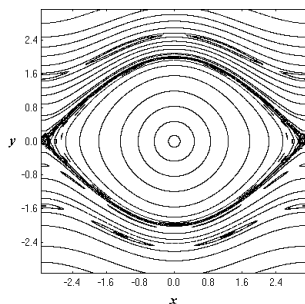


Рис. 3.17. Фазовий портрет для параметричного маятника з параметрами $p_1 = 0,1$; $p_2 = p_3 = 0$; $p_4 = 6$

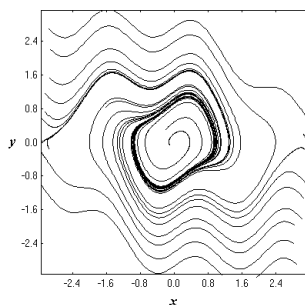


Рис. 3.18. Фазовий портрет для маятника генератора циклів з параметрами $p_1 = -0,0285$; $p_2 = 1$; $p_3 = 5$, $p_4 = 0$; $p_5 = 1$

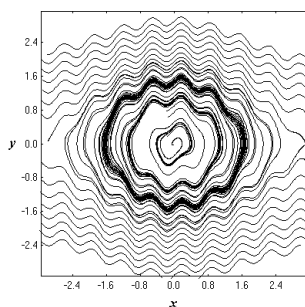


Рис. 3.19. Фазовий портрет для маятника генератора циклів з параметрами $p_1 = -0,0285$; $p_2 = 1$; $p_3 = 9$, $p_4 = 0$; $p_5 = 1$

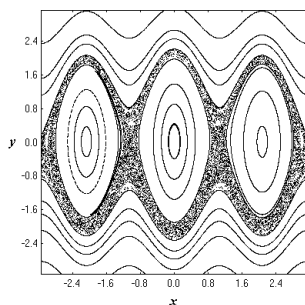


Рис. 3.20. Фазовий портрет для полігармонічного маятника з параметрами $p_1 = 0,2$; $p_2 = 3$; $p_3 = 0,1$, $p_4 = 1$

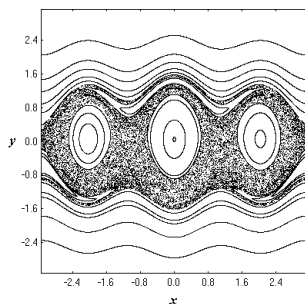


Рис. 3.21. Фазовий портрет для полігармонічного маятника з параметрами $p_1 = 0,2$; $p_2 = -1$; $p_3 = 0,1$, $p_4 = 1$

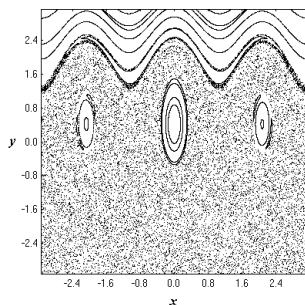


Рис. 3.22. Фазовий портрет для полігармонічного маятника з параметрами $p_1 = 0,2$; $p_2 = 3$; $p_3 = 2$, $p_4 = 1$

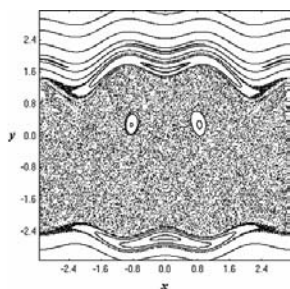


Рис. 3.23. Фазовий портрет для полігармонічного маятника з параметрами $p_1 = 0,5$; $p_2 = -1$; $p_3 = -0,5$, $p_4 = 1$

ВИСНОВКИ ДО ТРЕТЬОГО РОЗДІЛУ

1. Поряд з математичними методами дослідження коливань маятників існує геометричний шлях досліджень, який дозволяє усвідомити особливості коливання. Геометричний підхід базується на «геометрії енергетичних поверхонь», і забезпечує розуміння динаміки руху маятника.

2. Головними об'єктами унаочнення є фазова крива коливання для обраного початкового положення й швидкості маятника, та фазовий портрет, що складається з сім'ї всіх фазових кривих.

3. Періодичність розташування ліній фазового портрета дозволяє розглянути фазовий циліндр, який утворений в результаті «згортання» у трубку фазової площини маятника.

4. Для пояснення на графічному рівні факту зростання амплітуди коливань аж до межі вершини й початку обертання маятника навколо осі, було використано мнемонічний прийом «згину» фазового циліндра в U-подібну трубу. Це дозволило проілюструвати, як рухам маятника можна поставити у відповідність рівні енергій. При цьому затухання коливань можна трактувати як «скочування вниз» точки по U – подібній поверхні.

5. Геометричний аналіз коливань маятника не потребує розв'язання рівняння руху, адже формула коливань використовується лише для побудови фазового портрету. Адже розв'язати рівняння в математиці означає: визначити, які значення x і v відповідають кожному моменту часу t . Але в геометричних побудовах параметр t ніде не використовується.

6. Для аналізу характеру коливань математичного маятника було складено програми мовою Maple.

7. Для аналізу коливань параметричних маятників було побудовано низку фазових портретів за допомогою пакету WinSet.

РОЗДІЛ 4

РОЗРАХУНОК ВІБРАЦІЙНИХ АПАРАТІВ ОБЕРТОВО-МАЯТНИКОВОГО ТИПУ

Вібраційне змішування та вібраційну обробку деталей звичайно здійснюють у вібробункері, які встановлюються на пружних опорах, де коливання виникають завдяки ексцентричному балансу, що обертається завдяки електродвигуну. Параметри вібробункера визначають шляхом його моделювання як динамічної системи обертово-маятничого типу.

Математичне моделювання процесу віброобробки дало можливість встановити усереднені траєкторії зміщення, яке забезпечується відносним рухом деталі та гранул, внаслідок чого робоче середовище здійснює циркуляційний рух, що є спорідненим обертовому маятниковому руху.

Розроблено математичну модель вібраційного апарата з інерційним самоцентрувальним вібратором і асинхронний електродвигуном у якості приводу, що дозволяє наблизитись до розв'язання задачі спрощення електродвигуна цього типу з механізмами вібробункера.

Розроблено схему вібраційного механізму. Для запису рівнянь його руху було складено рівняння Лагранжа другого роду. Узагальненими координатами тут обрано: кути повороту ротора електродвигуна й ротора механізму; декартові координати, що визначають положення центра мас робочої камери щодо нерухомої системи координат, а також кут повороту робочої камери.

Наведено програму розв'язання одержаної системи рівнянь, яку складено на прохання замовника в кодах математичного пакету MathCAD.

Знайдений розв'язок дозволив виявити залежності кутової швидкості вала електродвигуна від часу при запуску установки, а також визначити закони руху характерних точок робочої камери на сталому режимі.

4.1. Вібраційні апарати та проблема їх розрахунку

Вібраційне змішування та вібраційна обробка деталей звичайно здійснюється у вібробункері [35, 121, 127], встановленому на пружних опорах (рис. 4.1). Наведемо опис цього процесу, використовуючи монографію В.Б.Струтинського [117].

Вібрації бункера виникають під дією спеціального інерційного навантажувача з електроприводом. Вібробункер має порожнину, в якій розміщується робоче середовище, що включає оброблювані деталі, гранули абразиву та спеціальний-розчин. Під дією вібрації відбувається відносне зміщення деталей та гранул абразиву і відповідно здійснюється обробка поверхні деталі.

Для виконання теоретичних досліджень процесу віброобробки у [117] розроблена математична модель процесу вібраційної обробки деталей. Вона побудована на основі дискретизації всього робочого простору вібробункера з приведенням його до кінцевого числа ділянок, в яких здійснюється віброобробка окремих деталей. Виконано аналіз загальних вібраційних параметрів вібробункера, повільного відносного руху деталей та гранул абразиву у всьому об'ємі робочого середовища, а також здійснено визначення базових технологічних параметрів процесу віброобробки (середньої швидкості взаємодії деталей з гранулами абразиву).

Загальні вібраційні параметри вібробункера визначені шляхом математичного моделювання бункера як динамічної коливальної системи. Вібробункер представляє собою слабодемпфовану механічну динамічну коливальну систему, яка приводиться в рух вібраційним механізмом, що включає обертову ексцентричну масу (рис. 4.1).

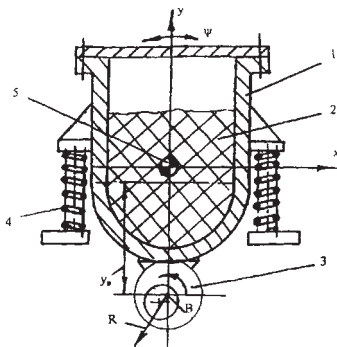


Рис. 4.1. С хема вібробункера з вібраційним приводом [117]:
 1 - корпус; 2 - робоче середовище; 3 - вібраційний механізм;
 4 - пружна опора бункера; 5 - центр мас системи бункера та робочого середовища.

З метою спрощення теоретичних розрахунків динамічна модель бункера прийнята умовно у вигляді масивного твердого тіла, яке здійснює плоский коливальний рух (рис. 4.2).

При плоскому русі вібробункера його положення як твердого тіла характеризується трьома ступенями вільності. В даному випадку це положення центра мас у напрямку осей x та y і поперечно-кутові коливання вібробункера відносно центра мас. Коливання відбуваються під дією неврівноважених сил, що діють у вібраційному механізмі. Ці сили змінюються за гармонічним законом і залежать від частоти обертання вала вібраційного механізму.

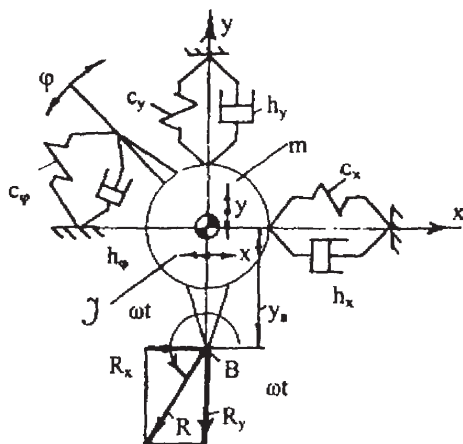


Рис. 4.2. Динамічна модель вібробункера у вигляді твердого тіла, яке здійснює плоский коливальний рух

Проекції на осі x і y навантаження на вібробункер з боку вібраційного механізму визначаються залежностями:

$$R_x = m_b \varepsilon \omega^2 \cos(\omega t) \quad (4.1)$$

$$R_y = m_b \varepsilon \omega^2 \sin(\omega t) \quad (4.2)$$

де m_b - ексцентрична маса вібраційного механізму; ε - ексцентриситет маси відносно осі обертання; ω - кутова швидкість обертання вала вібраційного механізму; t - час.

Крутний момент, який діє на вібробункер з боку вібраційного механізму, визначається наближеною залежністю:

$$M = R_x y_B, \quad (4.3)$$

де y_B - плече дії горизонтальної проекції сили на вібробункер.

Розглянуто окремо рівняння вимушених коливань вібробункера для кожного з трьох ступенів вільності.

Колівання вібробункера в напрямку осі x описується диференціальним рівнянням:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + h_x \frac{dx}{dt} + c_x x = R_x, \quad (4.5)$$

де m – маса бункера;

h_x – еквівалентний коефіцієнт опору при горизонтальному переміщенні вібробункера;

c_x – еквівалентна жорсткість пружин в горизонтальному напрямку.

Розв'язок даного рівняння із врахуванням (4.1) описує вимушені коливання вібробункера в напрямку осі x і відповідає залежності:

$$x = \varepsilon \frac{m_B}{m} \frac{\sin \left(\omega t - \arctg \left(\frac{m\omega^2 - c_x}{h_x \omega} \right) \right)}{\sqrt{\left(\frac{c_x}{m\omega^2} - 1 \right)^2 + \frac{h_x^2}{\omega^2 m^2}}}. \quad (4.6)$$

Аналогічно одержано залежність вимушеного переміщення вібробункера у вертикальному напрямку (y) та закон поперечно-кутових коливань вібробункера відносно центра мас (φ):

$$y = \varepsilon \frac{m_B}{m} \frac{\sin \left(\omega t - \arctg \left(\frac{m\omega^2 - c_y}{h_y \omega} \right) \right)}{\sqrt{\left(\frac{c_y}{m\omega^2} - 1 \right)^2 + \frac{h_y^2}{\omega^2 m^2}}}, \quad (4.7)$$

$$\varphi = \varepsilon y_B \frac{m_B}{m} \frac{\sin \left(\omega t - \arctg \left(\frac{m\omega^2 - c_\varphi}{h_\varphi \omega} \right) \right)}{\sqrt{\left(\frac{c_\varphi}{m\omega^2} - 1 \right)^2 + \frac{h_\varphi^2}{\omega^2 m^2}}}. \quad (4.8)$$

Знайдені залежності дозволяють визначити векторне поле прискорень в робочому середовищі вібробункера, яке має місце при його усталеному вібраційному русі. Векторне поле прискорень в кожній точці робочого середовища характеризується проєкціями віброприскорень (A_x, A_y) на осі координат x і y . Проєкції віброприскорень визначаються залежностями:

$$A_x = \frac{d^2x}{dt^2} - A_t \sin\alpha - A_n \cos\alpha;$$

$$A_y = \frac{d^2y}{dt^2} - A_t \sin\alpha - A_n \cos\alpha, \quad (4.9)$$

де $A_t = r \frac{d^2\varphi}{dt^2}$ - тангенціальне віброприскорення, що виникає при

поперечно-кутових коливаннях вібробункера відносно центра мас;

$A_n = r \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2$ - нормальна складова віброприскорення поперечно-ку-

тових коливань вібробункера;

r - відстань від центра мас до точки робочого середовища (радіус-вектор);

α - кут між радіусом-вектором r та горизонтальною віссю x .

Значення інших складових векторного поля віброприскорень знаходяться шляхом подвійного диференціювання законів руху вібробункера відповідно по всіх трьох ступенях вільності (формули (4.6) та (4.7)).

При коливаннях вібробункера деталі та гранули абразиву підлягають дії знакозмінних прискорень, величина і напрямок яких визначаються залежностями (4.7). Прискорення призводять до виникнення інерційних навантажень на деталі та гранули. Інерційні навантаження спричиняють високочастотний коливальний рух деталей та гранул наповнювача. У процесі коливань деталі та гранули стикаються між собою. В залежності від швидкості зіткнення змінюється енергія ударної взаємодії деталей і гранул, а отже, і енергетичні параметри процесу віброобробки.

Проведене математичне моделювання процесу віброобробки [117] дало можливість встановити усереднені параметри взаємодії деталі з гранулами наповнювача. Від цього залежить інтенсивність обробки конкретної ділянки поверхні деталі та іншим важливим параметром технологічного процесу є рівномірність обробки. Вона визначається взаємним зміщенням деталі та гранул. Це зміщення забезпечується відносним рухом деталі та гранул, що має місце при коливаннях вібробункера (рис. 4.3).

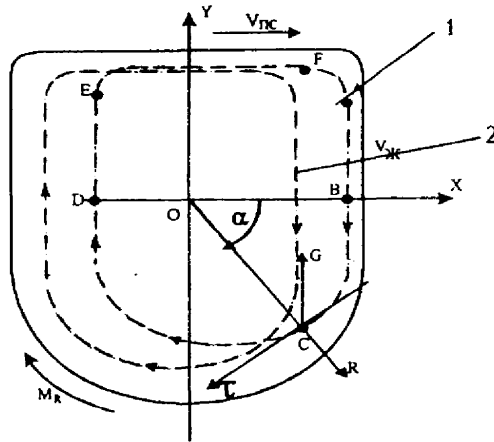


Рис. 4.3. Траєкторії переміщення деталей та гранул наповнювача при повільному циркуляційному русі робочого середовища.

В роботі [117] було встановлено, що в процесі віброобробки робоче середовище здійснює повільний циркуляційний рух. Оскільки щільність деталей і гранулонаповнювача різна, то під дією гравітаційних сил відбувається додаткове переміщення деталей відносно наповнювача. На рис. 4.3 позначено: 1 – траєкторія деталі, щільність якої менша щільності наповнювача; 2 – траєкторія циркуляційного руху гранули наповнювача, щільність якої більша щільності деталі.

Ці особливості впливають на технологічний процес обробки поверхні деталі. Для з'ясування основних закономірностей відносного переміщення деталей та гранул наповнювача розглянемо спрощену схему руху деталей у робочому середовищі. На статистичне середній елемент робочого середовища (деталі або гранули наповнювача), щільність якого відрізняється від усередненої щільності робочого середовища, діє Архімедова сила. Якщо елемент рухається вниз і Архімедова сила додатна, то це призводить до його уповільнення відносно робочого середовища. Це стосується лише зони робочого середовища з вертикальним рухом вниз (ділянка АВ на рис. 4.3).

Наведені дослідження дають підстави віднести процеси, які відбуваються у вібробункері, до коливань маятниково-обертового типу.

4.2. Схема вібраційного апарату обертово-маятничкового типу

Перспективним напрямком інтенсифікації багатьох технологічних процесів у хімічній промисловості, фармацевтичному виробництві є використання низькочастотних вібрацій, реалізація яких може бути здійснена в поліфункціональних і спеціалізованих вібраційних пристроях певного різновиду [127, 128]. Хоча конструкції зазначених механізмів на перший погляд не є складними, достовірний опис параметрів їхніх рухів представляє певні труднощі. Через те, що станини пристроїв роблять коливальний рух, останні можуть бути визначені тільки шляхом динамічного аналізу.

На даний час математичні моделі вібраційних апаратів розроблені недостатньо. У роботі [42] отримані рівняння руху найпростішої моделі механізму на сталих режимах роботи й у припущенні, що робочий орган робить лише поступальний рух. Однак, у більшості випадків умови поступального руху не виконуються й, крім того, характерними режимами роботи пристроїв є часті запуски й зупинки, що робить актуальними розрахунки перехідних процесів. Тому що на практиці, як правило, у якості приводного двигуна використовується асинхронний електродвигун як найбільш простий, дешевий і зручний в експлуатації.

Однак, це породжує додаткові труднощі, пов'язані з описом його динамічної характеристики при перехідних режимах і навантаженні, яка не є лінійною, і має коливальний характер. Використання лінеаризованих статичних характеристик [46], або лінеаризованих диференціальних рівнянь [32], що наближено описують електромагнітні перехідні процеси в електродвигунах даного класу приводить до істотного завищення розрахункового моменту в асинхронному електродвигуні [113].

Відсутність достовірних математичних моделей утрудняє вибір електродвигунів, які забезпечують запуск, визначення характеру коливань робочої камери, що істотно впливають на технологічний ефект, розв'язання різних завдань синтезу, знаходження оптимальних значень конструктивних параметрів, що зменшують передачу вібрацій на основу. Ці дослідження допоможуть забезпечити розвантаження підшипників та знизити матеріало- і енергоємності апаратів.

У даному розділі наведено математичну модель одного класу вібраційних апаратів обертово-маятничкового різновиду з інерційним самоцентрувальним вібратором і асинхронний електродвигуном у якості приводу, що дозволяє наблизитись до розв'язання зазначених завдань.

На рис. 4.4 показано схему вібраційного обертово-маятничкового апарата, запропонованого В.М.Шатохіним [129, 130].

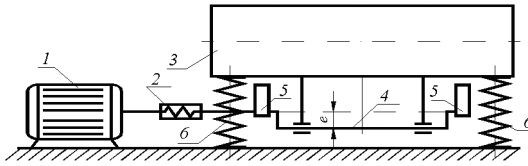


Рис. 4.4. Схема вібраційного обертово-маятничого апарата

Робоча камера апарата (3) установлена на чотирьох вертикальних пружинах (6). У двох підшипниках, жорстко пов'язаних з камерою, перебуває коліно ексцентрикового (e - значення ексцентриситету) вала ротора (4), на якому укріплені дебаланси (5). Ротор зв'язаний гнучким валом (дюритом, 2) з валом електродвигуна (1).

Для запису рівнянь руху застосуємо методику складання рівнянь Лагранжа другого роду, для чого скористаємося схемою механізму, зображеного на рис. 4.5 у поточному положенні.

На рис. 4.5 показано: Oxy - основна (нерухлива) система координат, щодо якої робоча камера робить плоскопаралельний рух, причому її початок збігається із центром мас (точка C) камери, коли остання перебуває в положенні статичної рівноваги (точки C й O при цьому збігаються); $Sx''y''$ - рухома, що поступально переміщується система координат; $Sx'y'$ - рухома, жорстко пов'язана з тілом система координат;

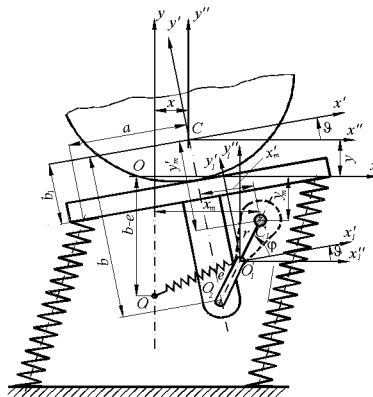


Рис. 4.5. Розрахункова схема вібраційного механізму

x, y - поточні значення координат центра мас робочої камери; ϑ - кут повороту рухомої системи координат; x'_m, y'_m і x_m, y_m - координати

центра мас (точка C_1) ротора відповідно в рухливій і основній системах координат; φ - кут повороту ротора; e - ексцентриситет ротора; r - відстань від осі ротора (точка O'_1) до його центра мас; b - відстань від центра мас робочої камери до осі підшипників; a, b_1 - параметри, що визначають положення точок кріплення верхніх кінців пружин; пружина $O_1 O'_1$ моделює пружні властивості гнучкого вала (вісь електродвигуна проходить через точку O_1 ; вісь ротора - через точку O'_1).

Крім того, надалі використані наступні позначення: M - сумарна маса робочої камери й оброблюваного матеріалу; m - маса всіх обертових деталей ротора; J - момент інерції робочої камери щодо осі, що проходить через центр мас C ; I - момент інерції ротора щодо осі, що проходить через центр мас C_1 ; Je - момент інерції електродвигуна; H_0 - довжина недеформованої пружини; k_x, k_y, k_ϑ - твердості пружин відповідно на зрушення, розтягання-стиск, поворот; $\Delta_0 = (M+m)g/4k_y$ - початкова деформація пружини; $H = H_0 - \Delta_0$ - довжина статично деформованої пружини; k - твердість гнучкого вала на крутіння; k_r - вигинова твердість гнучкого вала.

Узагальненими координатами розглянутої системи є: кути повороту ротора електродвигуна й ротора механізму відповідно ψ й φ ; декартові координати x й y , що визначають положення центра мас робочої камери щодо нерухливої системи координат Oxy ; кут повороту робочої камери ϑ .

4.3. Математична модель вібраційного апарату

Запишемо вирази для кінетичної енергії тіл, що утворюють коливальну систему. Кінетичну енергію робочої камери можна обчислити за формулою [52]

$$T_1 = M \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2} + J \frac{\dot{\vartheta}^2}{2}. \quad (4.11)$$

Кінетичну енергію ротора можна обчислити за формулою

$$T_2 = m \frac{v_m^2}{2} + I \frac{\omega_m^2}{2} \quad (4.12)$$

де v_m - абсолютна швидкість центра мас ротора; ω_m - абсолютна кутова швидкість ротора, причому

$$\omega_m = \dot{\varphi} + \dot{\vartheta}. \quad (4.13)$$

Координати центра мас ротора мають вигляд (рис. 4.5):

$$\left. \begin{aligned} x_m &= x_{C_1} = x + (e+r) \cos \varphi \cos \vartheta - (e+r) \sin \varphi \sin \vartheta + b \sin \vartheta, \\ y_m &= y_{C_1} = y + (e+r) \cos \varphi \sin \vartheta + (e+r) \sin \varphi \cos \vartheta - b \cos \vartheta. \end{aligned} \right\}$$

Ці вирази впливають із формул перетворення координат при плос-копаралельному русі, тому

$$v_m^2 = \dot{x}_m^2 + \dot{y}_m^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + (e+r)^2 (\dot{\varphi} + \dot{\vartheta})^2 + b^2 \dot{\vartheta}^2 - 2(e+r)(\dot{\varphi} + \dot{\vartheta})[\dot{x} \sin(\varphi + \vartheta) - \dot{y} \cos(\varphi + \vartheta)] + 2b(\dot{x} \cos \vartheta + \dot{y} \sin \vartheta) \dot{\vartheta} - 2(e+r)b \sin \varphi (\dot{\varphi} + \dot{\vartheta}) \dot{\vartheta} \quad (4.14)$$

а формула (4.12) з урахуванням виразів (4.13) і (4.15) набуває вигляду

$$T_2 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \dot{y}^2 + \frac{1}{2} [m(e+r)^2 + I] (\dot{\varphi} + \dot{\vartheta})^2 + \frac{1}{2} m b^2 \dot{\vartheta}^2 - m(e+r)(\dot{\varphi} + \dot{\vartheta})[\dot{x} \sin(\varphi + \vartheta) - \dot{y} \cos(\varphi + \vartheta)] + m b (\dot{x} \cos \vartheta + \dot{y} \sin \vartheta) \dot{\vartheta} - m(e+r)b \sin \varphi (\dot{\varphi} + \dot{\vartheta}) \dot{\vartheta}. \quad (4.15)$$

Кінетична енергія ротора електродвигуна

$$x = \varepsilon \frac{m_B}{m} \frac{\sin \left(\omega t - \arctg \left(\frac{m \omega^2 - c_x}{h_x \omega} \right) \right)}{\sqrt{\left(\frac{c_x}{m \omega^2} - 1 \right)^2 + \frac{h_x^2}{\omega^2 m^2}}} \quad (4.16)$$

Вважаючи, що при русі системи зміни координат x, y, ϑ поблизу положення стійкої рівноваги ($x = y = \vartheta = 0$) малі, тому $\sin(\varphi + \vartheta) \approx \cos \varphi$, і повну кінетичну енергію представимо наближено з урахуванням формул (4.11), (4.15), (4.16) у вигляді

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = \frac{1}{2} (M+m) \dot{x}^2 + \frac{1}{2} (M+m) \dot{y}^2 + \frac{1}{2} \{ J + m [(e+r)^2 + b^2 - 2(e+r)b \sin \varphi] + I \} \dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2} [m(e+r)^2 + I] \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} J_e \dot{\psi}^2 - m[(e+r) \sin \varphi - b] \dot{x} \dot{\vartheta} + m(e+r) \cos \varphi \dot{y} \dot{\vartheta} - m(e+r) \sin \varphi \dot{x} \dot{\varphi} + m(e+r) \cos \varphi \dot{y} \dot{\varphi} + \{ I + m(e+r) [(e+r) - b \sin \varphi] \} \dot{\vartheta} \dot{\varphi}. \quad (4.17)$$

Потенціальна енергія системи складеться з енергії положення й енергії деформації пружних зв'язків.

Потенціальна енергія сил ваги обчислюється за формулою

$$P_1 = (M+m)gy + mg[b(1 - \cos \vartheta) - (e+r)(1 - \sin(\varphi + \vartheta))] \quad (4.18)$$

Потенціальну енергію розтягання-стиску чотирьох пружин обчислимо так:

$$\Pi_2 = 2 \frac{k_y}{2} (\Delta_1^2 - \Delta_0^2) + 2 \frac{k_y}{2} (\Delta_2^2 - \Delta_0^2) \quad (4.19)$$

де Δ_1, Δ_2 – відповідно деформації лівої й правої пружини в поточно-м положенні. Попередньо при їхньому знаходженні визначалися координати верхніх кінців пружин і їхня поточна довжина. З урахуванням параметрів, уведених вище, і позначень рис. 4.5 формула (4.19) набуває вигляду

$$\Pi_2 = 2k_y \left\{ x^2 + (H + y)^2 + 2[a^2 + b_1^2 + b_1(H + y)](1 - \cos \vartheta) + 2xb_1 \sin \vartheta - [h_1(x, y, \vartheta) + h_2(x, y, \vartheta)]H_0 + H_0^2 - \Delta_0^2 \right\},$$

де

$$h_1(x, y, \vartheta) = x^2 + (H + y)^2 + 2[a^2 + b_1^2 + xa + b_1(H + y)](1 - \cos \vartheta) + 2[xb_1 - a(H + y)]\sin \vartheta, \quad (4.20)$$

$$h_2(x, y, \vartheta) = x^2 + (H + y)^2 + 2[a^2 + b_1^2 - xa + b_1(H + y)](1 - \cos \vartheta) + 2[xb_1 + a(H + y)]\sin \vartheta.$$

Фактично h_1 і h_2 являють собою квадрати довжин лівої й правої пружин для поточного положення механізму (рис. 4.5), тому для їхніх деформацій будуть справедливі формули:

$$\Delta_1 = \sqrt{h_1(x, y, \vartheta)} - H_0, \quad \Delta_2 = \sqrt{h_2(x, y, \vartheta)} - H_0.$$

Далі обчислюється потенціальна енергія зрушення для чотирьох пружин

$$\Pi_3 = 2 \frac{k_x}{2} \Delta_{1x}^2 + 2 \frac{k_x}{2} \Delta_{2x}^2 \quad (4.21)$$

де Δ_{1x}, Δ_{2x} – зсув в горизонтальному напрямку верхніх кінців відповідно лівої й правої пружини.

Її аналогічно попередньому можна виразити через параметри поточного положення механізму

$$\Pi_3 = 2k_x \left[(x + b_1 \sin \vartheta)^2 + a^2 (1 - \cos \vartheta)^2 \right] \quad (4.22)$$

Потенціальна енергія повороту для чотирьох пружин

$$\Pi_4 = 4 \frac{k_\vartheta}{2} \vartheta^2 = 2k_\vartheta \vartheta^2 \quad (4.23)$$

Потенціальна енергія гнучкого пружного вала при вигині (хоча її внесок у сумарне значення потенціальної енергії системи з міркувань конструктора не повинно бути суттєвим, доцільно мати відповідний вираз, що дозволяє одержати кількісну оцінку цього внеску) має вигляд

$$\Pi_5 = \frac{k_r \Delta_r^2}{2} \quad (4.24)$$

де Δ_r – зсув осей валів електродвигуна й ротора.

Через поточні значення узагальнених координат вираз для цієї потенціальної енергії запишеться так

$$\Pi_5 = \frac{k_r}{2} \left\{ x^2 + y^2 + 2 \left[xb \sin \vartheta + xe \cos(\varphi + \vartheta) - y(e-b) - yb \cos \vartheta + ye \sin(\varphi + \vartheta) + b(e-b) \cos \vartheta - e(e-b) \sin(\varphi + \vartheta) - eb \sin \varphi + e^2 + b^2 - eb \right] \right\}. \quad (4.25)$$

Потенціальну енергію крутіння гнучкого пружного вала обчислимо як

$$\Pi_6 = \frac{1}{2} k(\varphi - \psi)^2 \quad (4.26)$$

Розкладаючи сумарну потенціальну енергію системи

$$\Pi = \sum_{k=1}^6 \Pi_k \quad (4.27)$$

у ряд Маклорена поблизу положення статичної рівноваги й, виключаючи доданки порядку малості, що не вище другого щодо змінних x, y , для узагальнених сил одержимо наступні вирази:

$$Q_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x} = - \left[4 \left(k_x - \frac{\Delta_0}{H} k_y \right) + k_r \right] x - \left[4b_1 \left(k_x - \frac{\Delta_0}{H} k_y \right) + k_r (b - e \sin \varphi) \right] \vartheta - k_r e \cos \varphi, \quad (4.28)$$

$$Q_y = -\frac{\partial \Pi}{\partial y} = -(4k_y + k_r)y - k_r e \cos \varphi \vartheta + k_r e (1 - \sin \varphi) \quad (4.29)$$

$$Q_\vartheta = -\frac{\partial \Pi}{\partial \vartheta} = - \left[4b_1 \left(k_x - \frac{\Delta_0}{H} k_y \right) + k_r (b - e \sin \varphi) \right] x - k_r e \cos \varphi y - \left\{ mgb + 4k_y \left[a^2 - b_1(b_1 + H) \frac{\Delta_0}{H} \right] + 4k_\vartheta - k_r(e-b)b + 4k_x b_1^2 - [mg(e+r) - k_r(e-b)e] \sin \varphi \right\} \vartheta - [mg(e+r) - k_r e(e-b)] \cos \varphi, \quad (4.30)$$

$$Q_\varphi = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = k_r e \sin \varphi x - k_r e \cos \varphi y + [mg(e+r) - k_r e(e-b)] \sin \varphi \vartheta - [mg(e+r) - k_r e^2] \cos \varphi - k(\varphi - \psi), \quad (4.31)$$

$$Q_{\psi} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \psi} = k(\varphi - \psi) \quad (4.32)$$

Коректний математичний опис сил опору представляє складне завдання, однак при дослідженні перехідних режимів і розрахунку змусених резонансних коливань, характерних для розглянутих пристроїв, спочатку їхнім впливом можна знехтувати.

При проведенні уточнених розрахунків приймалося до уваги таке. Тому що для зазначених режимів має значення інтегральний ефект дії сил опору, то для простоти опису узагальнені сили опору приймалися пропорційними відповідним узагальненим швидкостям \dot{x} , \dot{y} , $\dot{\vartheta}$,

тобто у вигляді $Q_y^* = -\beta_y \dot{y}$, $Q_x^* = -\beta_x \dot{x}$, $Q_{\vartheta}^* = -\beta_{\vartheta} \dot{\vartheta}$, демпфірування ж на ділянці гнучкого вала – пропорційно різниці відповідних узагальнених

швидкостей у вигляді $\beta_{\gamma}(\dot{\varphi} - \dot{\psi})$. Момент же опору M_d на роторі вібраційного пристрою цілком виправдано прийнято постійним.

Необхідно врахувати, що до ротора електродвигуна варто прикласти обертаючий момент M_D , обумовлений динамічною характеристикою асинхронного електродвигуна. Для її опису, з врахуванням сказаного вище, у роботі використовується диференціальне рівняння, отримане W.Wenske (див. Zur Ableitung der dynamischen Kennlinie des Asynchromotors in Hinblick auf die Berechnung von Schwingungserscheinungen in Antriebsanlagen.-Wissenschaftliche Zeitschrift der Technischen Hochschule O. Guericke, Magdeburg, 1970. jg.14, Heft 5/6, s. 517-523). При складанні рівняння використовувалося допущення, що полягає у нехтуванні активного опору статора в порівнянні з активним опором ротора. Як показали дослідження, розбіжність розрахункових і експериментальних моментів у цьому випадку становить не більше 10%. Характеристика має такий вигляд

$$T_D^2 \xi \ddot{M}_D + T_D \xi \left(2 - \frac{T_D}{s} \dot{s} \right) \dot{M}_D + \left(1 - \frac{T_D \xi}{s} \dot{s} \right) M_D = 2 \xi M_k \beta \quad (4.33)$$

Тут M_D – момент, що розвивається двигуном у перехідному процесі;
 M_k – критичний момент двигуна;

$\xi = \frac{1}{1 + \beta^2}$, де $\beta = \frac{\omega_0 - \dot{\psi}}{\omega_0}$ – відносне ковзання, ω_0 – кутова швидкість

ідеального ходу, $\dot{\psi}$ – кутова швидкість електродвигуна в перехідному процесі;

$s = \omega_0 - \dot{\psi}$ - поточне ковзання;

$T_D = \frac{1}{\omega_c s_k}$ - електромагнітна постійна часу,

де $\omega_c = 50 \cdot 2\pi$ - кругова частота напруги мережі,

$$s_k = \frac{s_n + \sqrt{s_n \frac{\mu_m - 1}{\mu_i - 1}}}{1 + \sqrt{s_n \frac{\mu_m - 1}{\mu_i - 1}}} - \text{критичне ковзання [53].}$$

В останній формулі прийняті позначення: $s_n = \frac{\omega_0 - \omega_n}{\omega_0}$ - номінальне ковзання, ω_n - номінальна кутова швидкість; $\mu_m = \frac{M_k}{M_n}$, $\mu_u = \frac{M_s}{M_n}$, $\mu_i = \frac{\mu_m}{\mu_u}$, де M_n , M_s - відповідно номінальні, пусковий моменти двигуна.

Для компактного запису рівнянь руху введемо позначення:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= M + m, & \alpha_2 &= m(e + r), & \alpha_3 &= m(e + r)^2 + I, & \alpha_4 &= g\alpha_2, \\ \alpha_5 &= b\alpha_2, \alpha_6 = mb, & \delta &= \Delta_0/H, & \alpha_7 &= 4(k_x - \delta k_y), & \alpha_8 &= \alpha_7 b_1, & \alpha_9 &= 4k_y, \\ \alpha_{10} &= J + \alpha_3 + mb^2, & & & & & \alpha_{11} &= 2\alpha_5, \\ \alpha_{12} &= mgb + 4k_y [a^2 - b_1(b_1 + H)\delta] + 4k_\vartheta + 4k_x b_1^2, & \alpha_{13} &= k_r e, & \alpha_{14} &= \alpha_{13} e, \\ \alpha_{15} &= \alpha_4 - \alpha_{14}, & \alpha_{16} &= \alpha_{13}(e - b), & \alpha_{17} &= \alpha_4 - \alpha_{16}, & \alpha_{18} &= \alpha_7 + k_r, & \alpha_{19} &= k_r b, \\ \alpha_{20} &= \alpha_8 + \alpha_{19}, & \alpha_{21} &= \alpha_9 + k_r, & \alpha_{22} &= k_r(e - b)b, & \alpha_{23} &= \alpha_{12} - \alpha_{22}. \end{aligned}$$

Після виконання стандартних операцій по складанню рівнянь Лагранжа 2-го роду й обліку динамічної характеристики асинхронний електродвигун, було отримано систему сумісних диференціальних рівнянь:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\psi} &= f_\psi, \\ \alpha_3 \ddot{\phi} - \alpha_2 \sin \phi \ddot{x} + \alpha_2 \cos \phi \ddot{y} + (\alpha_3 - \alpha_5 \sin \phi) \ddot{\vartheta} &= f_\phi, \\ -\alpha_2 \sin \phi \ddot{\phi} + \alpha_1 \ddot{x} + (\alpha_6 - \alpha_2 \sin \phi) \ddot{\vartheta} &= f_x, \\ \alpha_2 \cos \phi \ddot{\phi} + \alpha_1 \ddot{y} + \alpha_2 \cos \phi \ddot{\vartheta} &= f_y, \\ (\alpha_3 - \alpha_5 \sin \phi) \ddot{\phi} + (\alpha_6 - \alpha_2 \sin \phi) \ddot{x} + \alpha_2 \cos \phi \ddot{y} + (\alpha_{10} - \alpha_{11} \sin \phi) \ddot{\vartheta} &= f_\vartheta, \\ \ddot{M}_D &= f_{M_D}, \end{aligned} \right\} \quad (4.34)$$

де праві частини мають такий вигляд

$$\begin{aligned}
 f_{\psi} &= \frac{k}{J_e}(\varphi - \psi) + \frac{\beta_{\gamma}}{J_e}(\dot{\varphi} - \dot{\psi}) + \frac{M_D}{J_e} \\
 f_{\varphi} &= \alpha_{13} \sin \varphi x - \alpha_{13} \cos \varphi y - \alpha_2 \left[(\dot{x} + b\dot{\vartheta}) \cos \varphi + \dot{y} \sin \varphi \right] \dot{\vartheta} - \alpha_{15} \cos \varphi + \\
 &\quad + \alpha_{17} \sin \varphi \dot{\vartheta} - k(\varphi - \psi) - \beta_{\gamma}(\dot{\varphi} - \dot{\psi}) - M_d, \\
 f_x &= \alpha_2 \cos \varphi (\dot{\varphi} + \dot{\vartheta}) \dot{\varphi} - \alpha_{18} x - (\alpha_{20} - \alpha_{13} \sin \varphi) \dot{\vartheta} - \alpha_{13} \cos \varphi - \beta_x \dot{x} \\
 f_y &= \alpha_2 \sin \varphi (\dot{\varphi} + \dot{\vartheta}) \dot{\varphi} - \alpha_{21} y - \alpha_{13} \cos \varphi \dot{\vartheta} + \alpha_{13} (1 - \sin \varphi) - \beta_y \dot{y} \\
 f_{\vartheta} &= \alpha_5 \cos \varphi (\dot{\varphi} + 2\dot{\vartheta}) \dot{\varphi} + \alpha_2 (\dot{x} \cos \varphi + \dot{y} \sin \varphi) \dot{\varphi} - (\alpha_{20} - \alpha_{13} \sin \varphi) x - \\
 &\quad - \alpha_{13} \cos \varphi y - (\alpha_{23} - \alpha_{17} \sin \varphi) \dot{\vartheta} - \alpha_{17} \cos \varphi - \beta_{\vartheta} \dot{\vartheta}, \\
 f_{M_D} &= -\omega_c s_k \left\{ 2 + \frac{[k(\varphi - \psi) + \beta_{\gamma}(\dot{\varphi} - \dot{\psi}) + M_D]}{\omega_c s_k (\omega_0 - \dot{\psi}) J_e} \right\} \dot{M}_D - \\
 &\quad - \left\{ \omega_c^2 s_k^2 \left[1 + \frac{(\omega_0 - \dot{\psi})^2}{\omega_0^2} \right] + \omega_c s_k \frac{[k(\varphi - \psi) + \beta_{\gamma}(\dot{\varphi} - \dot{\psi}) + M_D]}{(\omega_0 - \dot{\psi}) J_e} \right\} M_D + \\
 &\quad + 2M_k \omega_c^2 s_k^2 \frac{(\omega_0 - \dot{\psi})}{\omega_0}.
 \end{aligned}$$

.. Останнє рівняння системи (4.34) являє собою розв'язаний відносно \dot{M}_D вираз (4.33) з врахуванням наведених вище формул для параметрів, причому в похідній за часом від поточного ковзання __ друга похідна від кута повороту ротора електродвигуна $\dot{\psi}$ замінена відповідним виразом з першого рівняння зазначеної системи. Таким чином, перше й останнє рівняння цієї системи є розв'язками щодо другої похідної однієї зі змінних.

Однак інтегрування системи рівнянь (4.34) безпосередньо з використанням широко розповсюджених алгоритмів чисельного інтегрування неможливе, тому що рівняння цієї системи не розв'язані щодо другої похідної для кожної з узагальнених координат φ, x, y, ϑ . Якби матриця, утворена з коефіцієнтів при других похідних від зазначених координат у лівій частині цих рівнянь,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha_3 & -\alpha_2 \sin \varphi & \alpha_2 \cos \varphi & \alpha_3 - \alpha_5 \sin \varphi \\ -\alpha_2 \sin \varphi & \alpha_1 & 0 & \alpha_6 - \alpha_2 \sin \varphi \\ \alpha_2 \cos \varphi & 0 & \alpha_1 & \alpha_2 \cos \varphi \\ \alpha_3 - \alpha_5 \sin \varphi & \alpha_6 - \alpha_2 \sin \varphi & \alpha_2 \cos \varphi & \alpha_{10} - \alpha_{11} \sin \varphi \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

мала постійні елементи, то знаходження оберненої матриці \mathbf{A}^{-1} , а, отже, і подання рівнянь у формі, зручної для чисельного інтегрування, було б тривіальним завданням. Тому що елементи матриці є змінними, знаходження її оберненої представляє трудомістку операцію, хоча матриця й має розмірність 4×4 . На даному етапі труднощі, що виникають при цьому, істотно вдається знизити, а надійність результатів підвищити, використовуючи математичні пакети для комп'ютерів, що включають символічну математику.

4.4. Варіант розрахунку вібраційного апарату

Розглянемо прийом знаходження оберненої матриці зазначеного у п.4.3 типу розмірності 4×4 . Для цього суттєвим є використання математичного пакету Mathcad [125], що включає символічну математику.

Тоді зазначені чотири рівняння, розв'язані відносно других похідних, набудуть вигляду

$$\ddot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{f}, \quad (4.36)$$

$$\text{де } \mathbf{z} = [\varphi, x, y, \vartheta]^T, \quad \mathbf{f} = [f_\varphi, f_x, f_y, f_\vartheta]^T.$$

Матриця \mathbf{A}^{-1} через її громіздкість тут не приводиться.

Розроблена система диференціальних рівнянь використовувалася для дослідження динамічних процесів у вібраційному апараті з наступними параметрами: $M=300$ кг, $m = 36.09$ кг, $e = 0,0025$ м, $r = 0,03345$ м, $I = 0,06539$ кгм², $J = 9,375$ кгм², $a = 0,25$ м, $b = 0,28$ м, $b_1 = 0,18$ м, $H_0 = 0,225$ м, $k_x = 5,957 \cdot 10^4$ Н/м, $k_y = 2,383 \cdot 10^4$ Н/м, $k_\vartheta = 41,443$ Н/м, $k = 24,038$ Нм.

У доданку А наведено програму розрахунку вібраційного апарату, складеної на вимогу замовника для математичного пакету MathCAD.

Зсувова, поздовжня й поворотна твердості пружин підраховані за формулами [33] для пружини з діаметром дроту $d = 0.011$ м, середнім діаметром витка $D = 0.08$ м, числом робочих витків $i = 12$ і зазначеної вище висоти пружини Н0 ($E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $G = 8 \cdot 10^4$ МПа). Твердість на крутіння гнучкого вала отримана для порожнього вала із зовнішнім і внутрішнім діаметрами відповідно $D_d = 0,06$ м, $d_d = 0,048$ м, і довгої

$l_d = 0.25$ м ($G_d = 8$ МПа – модуль зрушення матеріалу дюрита) [33]. Твердість на вигин зазначеного вала покладалася рівною нулю ($k_r = 0$).

Значення коефіцієнтів демпфірування визначалися за власними частотами вільних коливань парціальних систем у припущенні, що безрозмірний коефіцієнт демпфірування $\eta = 0,2$.

Було отримано значення: $\beta_x = 3,447 \cdot 10^3$ кг/с; $\beta_y = 2,264 \cdot 10^3$ кг/с, $\beta_\psi = 138,5$ кгм²/с, $\beta_\gamma = 0,238$ кгм²/с. Постійний момент опору на роторі вібраційного пристрою покладалася рівним 5% від номінального моменту M_n асинхронного двигуна.

При використанні двигуна 4A100L6B3 $M_d = 1,107$ Нм. Каталогні параметри зазначене асинхронного двигуна [176]: $N_n = 2,2$ кВт; $n_0 = 1000$ об/мин (синхронна частота обертання); $s_n = 0,051$; $\mu_m = 2,2$; $\mu_u = 1,2$. Момент інерції ротора двигуна [57] $Je = 0,015$ кгм².

При розв'язанні системи диференціальних рівнянь використано наступні початкові умови (рис. 4.4, 4.5).

$$\psi(0) = \varphi(0) = \pi/2, \quad x(0) = y(0) = \vartheta(0) = 0,$$

$$M_D(0) = M_s, \quad \dot{\psi}(0) = \dot{\varphi}(0) = \dot{x}(0) = \dot{y}(0) = \dot{\vartheta}(0) = \dot{M}_D(0) = 0$$

На рис. 4.6 представлені залежності кутової швидкості вала електродвигуна від часу в момент запуску установки.

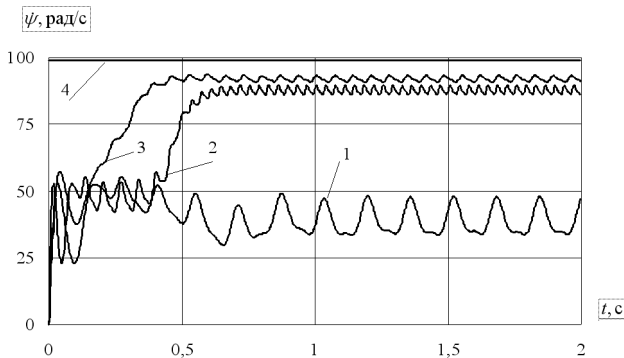


Рис. 4.6. Залежності кутової швидкості вала електродвигуна від часу в момент запуску

Для значень параметрів $b = 0.35$ м, $b_1 = 0.25$ м запуск зазначеним двигуном неможливий – кутова швидкість вала (крива 1) складає менш ніж 50 % від номінальної (лінія 4). Обумовлено це тим, що власна частота обертальних коливань робочої камери виявляється в цьому

випадку порівняно високою (32,79 рад/с). Тому потужність двигуна витрачається в основному не на розгін, а на підтримку інтенсивних змушених коливань, що й призводить до його «зависання» [34].

Запуск при зазначених параметрах установки можливий (крива 3), якщо використовувати подібний за потужністю двигун розглянутої серії 4A112MA6B3 ($N_n = 3$ кВт). Це, однак, можна реалізувати й за допомогою вихідного двигуна (крива 2), якщо тільки зменшити параметр, що характеризує відстань між пружинами. При цьому зменшується власна частота обертальних коливань камери за рахунок зниження відповідної еквівалентної твердості. Максимальне значення зазначеного параметра, при якому ще реалізується запуск $a = 0,245$ м.

На рис. 4.7 показані закони руху характерних точок робочої камери на сталому режимі ($b = 0.28$ м, $b_1 = 0.18$ м).

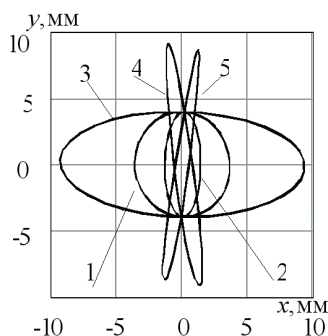


Рис. 4.7. Закони руху точок робочої камери

На рис.4.7 прийнято таку нумерацію:

- 1 - центр мас;
- 2 - точка, що лежить на осі камери;
- 3 - щонайнижча точка вертикального діаметра;
- 4 і 5 - ліва й права точки горизонтального діаметра (рис. 4.5).

Рівняння кривих, після інтегрування диференціальних рівнянь, отримані з використанням формул перетворення координат

$$\begin{aligned} x_i &= x + x'_i \cos \vartheta - y'_i \sin \vartheta, \\ y_i &= y + x'_i \sin \vartheta + y'_i \cos \vartheta \quad (i = \overline{1,5}), \end{aligned}$$

причому, для зручності зіставлення графіки зображені без врахування зсуву. З рис. 4.7 видно, що поворотні коливання можуть вплинути на характер руху точок робочої камери.

На рис. 4.8 у полярній системі координат представлений закон зміни сили тиску на підшипник (сталій режим роботи) залежно від кута повороту ротора .

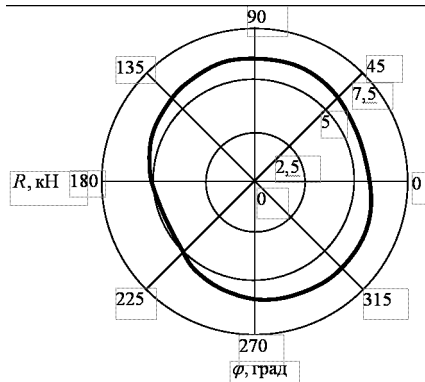


Рис. 4.8. Сила тиску на підшипник в залежності від кута повороту ротора

У відповідності з теоремою про рух центра мас [35] проекції зазначеної сили на координатні осі для одного підшипника мають вигляд

$$R_x = m\ddot{x}_m/2, \quad R_y = (m\ddot{y}_m + mg)/2,$$

а модуль $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$, причому

$$\ddot{x}_m = \ddot{x} - (e+r) \left[\cos(\varphi + \vartheta) (\ddot{\varphi} + \ddot{\vartheta})^2 + \sin(\varphi + \vartheta) (\ddot{\varphi} + \ddot{\vartheta}) \right] - b(\cos \vartheta \ddot{\vartheta} - \sin \vartheta \dot{\vartheta}^2),$$

$$\ddot{y}_m = \ddot{y} + (e+r) \left[-\sin(\varphi + \vartheta) (\ddot{\varphi} + \ddot{\vartheta})^2 + \cos(\varphi + \vartheta) (\ddot{\varphi} + \ddot{\vartheta}) \right] + b(\cos \vartheta \dot{\vartheta}^2 + \sin \vartheta \ddot{\vartheta}).$$

Останні формули записані з урахуванням виразів для x_m й y_m , наведених вище. Максимальне зусилля для розглянутого варіанта конструкції досягає 6,081кН; статичне навантаження для порівняння становить усього лише 0,177кН.

Сила тиску апарата на підставу буде визначатися відповідно до формули $P = 2k_y(\Delta_1 + \Delta_2)$.

Проведені дослідження показали ефективність запропонованої електромеханічної моделі, що дозволило встановити:

- 1) істотний вплив параметрів апарата на характер його запуску;
- 2) важливість обліку обертальних коливань робочої камери;
- 3) значна відмінність середньої кутової швидкості вала асинхронного електродвигуна на сталих режимах від номінальної (до 12%).

Її застосування дає можливість визначати такі важливі при конструюванні параметри як закон руху робочої камери, зусилля в підшипниках, тиск на основу, тощо.

ВИСНОВКИ ДО ЧЕТВЕРТОГО РОЗДІЛУ

1. Вібраційне змішування та обробка деталей здійснюється у вібробункері, який встановлений на пружних опорах. Загальні параметри вібробункера визначаються шляхом математичного моделювання бункера як динамічної системи маятниково-обертового типу.

2. Математичне моделювання процесу віброобробки дало можливість встановити, що робоче середовище здійснює циркуляційний рух, який є спорідненим маятниковому руху.

3. Розроблено математичну модель класу вібраційних апаратів обертово-маятникового різновиду з інерційним самоцентрувальним вібратором і асинхронним електродвигуном у якості приводу.

4. Розроблено схему вібраційного механізму, для запису рівнянь руху якого було складено рівняння Лагранжа. Узагальненими координатами обрано: кути повороту ротора електродвигуна й ротора механізму; декартові координати центра мас робочої камери щодо нерухомої системи координат, а також кут повороту робочої камери.

5. Для математичного пакету MathCAD складено програму розв'язання знайденої системи рівнянь.

6. Одержаний розв'язок дозволив виявити залежності кутової швидкості вала електродвигуна від часу в момент запуску установки, а також визначити закони руху характерних точок робочої камери на сталому режимі.

7. Проведені дослідження показали ефективність запропонованої електромеханічної моделі, що дозволило встановити істотний вплив параметрів апарата на характер його запуску; важливість обліку обертальних коливань робочої камери; значну відмінність середньої кутової швидкості вала асинхронного електродвигуна на сталих режимах від номінальної (до 12%).

ВИСНОВКИ ДО РОБОТИ

Роботу присвячено новому розв'язанню задачі геометричного моделювання та унаочненню у часі взаємного положення ланок в процесі коливань багатоланкових маятникових механічних систем на основі розв'язання системи рівнянь Лагранжа другого роду, та побудові в залежності від вхідних параметрів множини фазових портретів коливальних систем з метою виявлення особливостей цих систем.

Значення для науки роботи полягає у подальшому розвитку способів опису та аналізу коливань багатоланкових маятникових механічних систем.

Значення для практики досліджень полягає в скороченні термінів та підвищенні точності моделювання коливань, одержанні моделей, що задовольняють заданим вимогам і прискорюють проектування виробів.

При цьому отримані результати, що мають науково-практичну цінність.

1. Виконано огляд методів опису коливальних процесів, характерних для багатоланкових маятників, з чого випливає необхідність розробок комп'ютерних програм розрахунку їх коливань за допомогою математичних процесорів, здатних оперувати з аналітичними виразами.
2. Для опису процесу коливань багатоланкових маятників розроблено для математичного процесора Maple метод автоматичного визначення системи диференціальних рівнянь Лагранжа другого роду; це дозволило розширити множину описів різновидів коливальних маятникових систем.
3. Складено програму розв'язання системи диференціальних рівнянь Лагранжа другого роду за заданими початковими умовами, що дозволить розширити клас диференціальних рівнянь, які використовуються у методах прикладної геометрії.
4. На основі знайдених розв'язків було запропоновано метод унаочнення коливального процесу різновидів маятникових коливальних систем, що дозволило доповнити множину анімаційних зображень в прикладній геометрії.
5. Було проаналізовано взаємне положення ланок маятничкової системи в обраний момент часу із застосуванням торової системи координат, де кількість обертів ланки дорівнює кількості витків лінії на поверхні тора; це дозволить суттєво формалізувати аналіз процесу коливань багатоланкових маятників.

-
-
6. Було побудовано множину фазових портретів коливальних систем маятникового типу у середовищі пакету WinSet, що дозволило аналізувати коливальний процес, у тому числі і визначати області хаотичності маятника.

ПІСЛЯМОВА

На завершення наведемо більш строгий з математичної точки зору огляд алгоритмів формування рівнянь руху механічних систем багатоланкових маятників (у тому числі за умови замкнутості кінематичних ланцюгів), де за основу взяті результати робіт О.М.Дмитроченка [47] і В.В.Ландовського [76, 77].

При розгляді методів формування рівнянь руху систем тіл обмежимося лише методами, пов'язаними із чисельним моделюванням. Основну увагу приділимо саме побудові рівнянь руху системи, тобто визначенню набору узагальнених координат для окремих тіл і конкретних кінематичних співвідношень.

Почнемо із класичного формалізму аналітичної механіки - рівнянь Лагранжа 2-го роду для голономних консервативних систем. Основою для одержання рівнянь руху систем служать рівняння

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} = - \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{q}} \quad (\text{П.1})$$

де $T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ – кінетична енергія системи; q – стовпець узагальнених координат системи (розміром n); $\Pi(\mathbf{q}, t)$ – потенціальна енергія системи.

Рівняння руху після обчислення похідних мають вигляд

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}, t) \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), \quad (\text{П.2})$$

де \mathbf{M} – матриця мас системи розміром $n \times n$; \mathbf{Q} – вектор узагальнених активних сил і сил інерції.

Цей спосіб одержання рівнянь руху досить простий і обчислення відповідно до його можуть бути виконані вручну студентами початкових курсів.

Однак, для реальних технічних систем, що складаються з десятків і сотень тіл, вивід рівнянь вручну просто неможливий через їхню надзвичайну громіздкість. Тому для рішення таких завдань створюються автоматизовані програми синтезу рівнянь руху.

Але виявляється, що для складних систем, що складаються з довгих кінематичних ланцюгів, як-то багатоланкових маятників або тросів, застосування формалізму Лагранжа (П.1) призводить до майже експонентного росту об'єму обчислень, необхідних для формування рівнянь, залежно від довжини ланцюжка n . Крім того, у проміжних обчисленнях часто зустрічаються тригонометричні тотожності типу $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ та інші, які сильно захаращують обчислення.

Крім того, досвід даної роботи показує, що навіть маючи створену автоматизовану програму синтезу рівнянь руху для середовища процесора Maple, при значеннях $n > 6$ час інтегрування рівнянь є непринятно великим.

Звідси випливає, що застосування операції диференціювання небажано, тому що воно призводить до появи величезних проміжних викладок. Досить сказати, що рівняння руху, наприклад, двадцятиланкового маятника, побудовані з використанням значно більш ефективних методів, описаних нижче, і до того ж, у машинних кодах, займають приблизно 25000 рядків тексту!

Все вищевикладене змушує шукати інші, більш ефективні методи побудови рівнянь руху. У наступних пунктах буде коротко викладена суть сучасних методів синтезу рівнянь руху більших систем.

Розглянемо довільне тіло, здатне деформуватися, яке зображено на рис. П.1 жирною лінією у вигляді осьової лінії балки. Те, що на рисунку зображена балка, не відіграє істотної ролі й використовується лише для простоти зображення. Всі виклади, наведені тут, справедливі як для тіла, здатного деформуватися, так і для абсолютно твердого тіла.

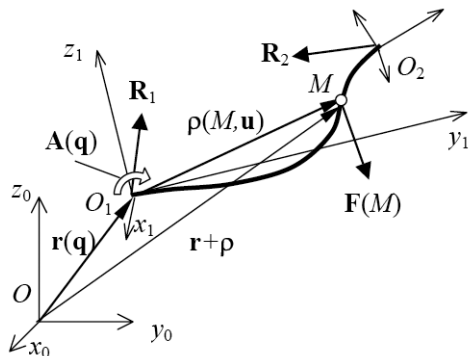


Рис. П.1. Умовне позначення тіла, здатного деформуватися.

У загальному випадку на тіло діють розподілені сили $\mathbf{f}(M)$ і моменти $\mathbf{m}(M)$ у кожній точці M , що зображені на рисунку вектором

$\mathbf{F}(\mathbf{M}) = \{\mathbf{f}^i, \mathbf{m}^{iT}\}^T$, і зосереджені сили й моменти реакції \mathbf{R}_k (на рисунку їх дві), що також представляють собою шестикомпонентні вектори.

Дотримуючись формалізму рухомої системи координат, для забезпечення можливості довільного просторового руху тіла щодо фіксованої системи координат x_0, y_0, z_0 (СК0) слід ввести систему координат x_1, y_1, z_1 (СК1) з початком у точці $O1$. Положення й орієнтація рухомої системи координат СК1 задається відповідно радіус-вектором $\mathbf{r}(\mathbf{q})$ і матрицею повороту $\mathbf{A}(\mathbf{q})$, які залежать від елементів стовпця узагальнених координат \mathbf{q} .

Якщо тіло вільне в просторі, то найчастіше стовпець \mathbf{q} містить шість координат – три координати початку відліку O_1 і одну з можливих трійок кутів повороту (Ейлера, Кардано, тощо). Для запобігання виродження кутів орієнтації можна використовувати чотири параметри Ейлера. У випадку, якщо тіло є не вільним, а з'єднаним із сусідніми тілами за допомогою шарнірів, вектор \mathbf{q} може включати довільне число узагальнених шарнірних координат.

Обчислимо вектор швидкості початку відліку O_1 , а також вектор $\boldsymbol{\omega}$ кутової швидкості рухомої системи координат

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{r}'_t, \\ \boldsymbol{\omega} &= \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\omega}'_t, \end{aligned} \quad (\text{П.3})$$

де матриці $\mathbf{D}(\mathbf{q})$ і $\mathbf{B}(\mathbf{q})$ складені зі стовпців \mathbf{d}_i і \mathbf{b}_i :

$$\begin{aligned} \mathbf{D} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}^T} &= [\mathbf{d}_1 \ \mathbf{d}_2 \ \dots \ \mathbf{d}_n] \quad \mathbf{d}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}_i}; \quad \mathbf{r}'_t = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}; \\ &\text{, де} \quad ; \\ \mathbf{B} = \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{\mathbf{q}}^T} &= [\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \dots \ \mathbf{b}_n] \quad \tilde{\mathbf{b}}_i = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{q}_i} \mathbf{A}^T; \quad \tilde{\boldsymbol{\omega}}'_t = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \mathbf{A}^T; \\ &\text{, де} \quad . \end{aligned}$$

Докладніше про способи формування цих матриць див. у роботі [47].

Деформований стан тіла визначається залежністю радіус-вектора $\rho_*(\mathbf{M}, \mathbf{u})$ довільної точки \mathbf{M} тіла від вектора локальних узагальнених координат \mathbf{u} , які виражають міру деформації тіла. Звичайно їх обирають так, щоб при $\mathbf{u} = 0$ тіло вважалось недеформованим. Залежність $\rho_*(\mathbf{u})$ може бути лінійної вигляду $\rho_* = \mathbf{S} \cdot \mathbf{u}$, якщо розглядаються тільки малі деформації тіла й $\|\mathbf{u}\| \ll 1$. У загальному випадку залежність $\rho_*(\mathbf{u})$ звичайно є нелінійною. Звернемо увагу на те, що компоненти вектора ρ_* представлені в проєкціях на осі рухомої СК1, а в проєкціях на осі нерухомої СК0 маємо

$$\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}(\mathbf{q}, M, \mathbf{u}) = \mathbf{A}(\mathbf{q})\boldsymbol{\rho}^*(M, \mathbf{u})$$

Похідна вектора $\boldsymbol{\rho}$ за часом має вигляд

$$\dot{\boldsymbol{\rho}} = \dot{\mathbf{A}}\boldsymbol{\rho}^* + \mathbf{A}\dot{\boldsymbol{\rho}}^* = \underbrace{\dot{\mathbf{A}}\mathbf{A}^T}_{\tilde{\boldsymbol{\omega}}} \underbrace{\mathbf{A}\boldsymbol{\rho}^*}_{\boldsymbol{\rho}} + \underbrace{\mathbf{A}\dot{\boldsymbol{\rho}}^*}_{\tilde{\mathbf{v}}_u} = \tilde{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{\rho} + \mathbf{v}_u$$

Відносна швидкість \mathbf{v}_u довільної точки тіла, яка викликана його деформацією, і відносна кутова швидкість $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_u$ системи координат, яка пов'язана з даною точкою, дорівнюють

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_u &= \mathbf{A}\dot{\boldsymbol{\rho}}^* = \underbrace{\mathbf{A}\mathbf{D}_*}_{\mathbf{D}_u} \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{D}_u \dot{\mathbf{u}}, \\ \tilde{\boldsymbol{\omega}}_u &= \underbrace{\mathbf{A}\mathbf{B}_*}_{\mathbf{B}_u} \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{B}_u \dot{\mathbf{u}}, \end{aligned} \quad (\text{П.4})$$

де уведені матриці \mathbf{D}_u і \mathbf{B}_u за аналогією з рівняннями (П.3).

Таким чином, стан деформованого тіла повністю описується набором узагальнених координат $\mathbf{x} = \{\mathbf{q}^T, \mathbf{u}^T\}^T$.

Для побудови рівнянь руху тіла скористаємося формалізмом рівнянь Лагранжа другого роду

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{x}}} - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\delta W}{\delta \mathbf{x}} \quad (\text{П.5})$$

де T – кінетична енергія тіла, $\Pi(\mathbf{u}, t)$ – потенціальна енергія внутрішніх сил пружних деформацій, $\delta W = \delta W' + \delta W''$ – віртуальна робота $\delta W'$ активних зовнішніх сил і реакцій ($\delta W''$), викликаних довільною варіацією координат $\delta \mathbf{x}$.

Кінетична енергія – це інтеграл по об'єму тіла $T = \frac{1}{2} \int_V \mu \mathbf{v}^T \mathbf{v} dV$, де μ – щільність тіла; $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{\rho} + \mathbf{v}_u$ – абсолютна швидкість точок тіла.

Обчислимо вирази для похідних від кінетичної енергії:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{x}}} - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{x}} = \int_V \mu \left(\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathbf{v}^T}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right] \mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{v}^T}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \dot{\mathbf{v}} - \frac{\partial \mathbf{v}^T}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{v} \right) dV = \int_V \mu \frac{\partial \mathbf{v}^T}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \dot{\mathbf{v}} dV. \quad (\text{П.6})$$

Знайдемо похідні від швидкості \mathbf{v} , використовуючи (П.3):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}^T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} &= \mathbf{D}^T + \mathbf{B}^T \tilde{\boldsymbol{\rho}}, \quad \frac{\partial \mathbf{v}^T}{\partial \dot{\mathbf{u}}} = \mathbf{D}_u^T, \\ \dot{\mathbf{v}} &= \ddot{\mathbf{r}} + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}\boldsymbol{\rho} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}\tilde{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{\rho} + 2\tilde{\boldsymbol{\omega}}\dot{\boldsymbol{\rho}} + \ddot{\boldsymbol{\rho}}. \end{aligned} \quad (\text{П.7})$$

Остання рівність виражає теорему Кориоліса про додавання прискорення довільної точки тіла в переносному русі СК1, і її прискорення у відносному русі, викликаному деформацією тіла.

У рівнянні (П.5) $\partial\Pi/\partial\mathbf{q} = 0$, тому що потенціальна енергія деформації кінцевого елемента залежить лише від локальних координат. Похідна потенціальної енергії по \mathbf{u} дає узагальнену силу $\partial\Pi/\partial\mathbf{u} = -\mathbf{F}_u^{elast}(\mathbf{u})$.

Віртуальна робота зовнішніх сил $\delta W'$ складається з робіт розподілених сил $\mathbf{f}(\mathbf{M})$ і моментів $\mathbf{m}(\mathbf{M})$ на можливих переміщеннях точок тіла. Уведемо стовпець лінійних і кутових швидкостей

$$\dot{\xi} = \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{r}} - \tilde{\rho}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{v}_u \\ \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}_u \end{Bmatrix}.$$

Перша його складова виражає собою теорему про додавання швидкостей, друга складова – кутових швидкостей. Переходячи за аналогією до варіацій і врахувавши залежності (П.3) і (П.4), одержимо вирази для можливих лінійних і кутових переміщень через варіації узагальнених координат:

$$\delta\xi = \begin{Bmatrix} \delta\mathbf{r} - \tilde{\rho}\delta\boldsymbol{\omega} + \delta\mathbf{v}_u \\ \delta\boldsymbol{\omega} + \delta\boldsymbol{\omega}_u \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{D}\delta\mathbf{q} - \tilde{\rho}\mathbf{B}\delta\mathbf{q} + \mathbf{D}_u\delta\mathbf{u} \\ \mathbf{B}\delta\mathbf{q} + \mathbf{B}_u\delta\mathbf{u} \end{Bmatrix} = \mathbf{C}\boldsymbol{\Phi}\delta\mathbf{q} + \mathbf{S}\delta\mathbf{u}, \quad (\text{П.8})$$

де уведені матриці

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\tilde{\rho} \\ \mathbf{O} & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} \mathbf{D} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_u \\ \mathbf{B}_u \end{bmatrix}.$$

Тепер обчислимо віртуальну роботу сил і моментів $\mathbf{F} = \{\mathbf{f}^T, \mathbf{m}^T\}^T$ на можливому переміщенні $\delta\xi$:

$$\delta W' = \int_V \delta\xi^T \mathbf{F} dV = \int_V (\delta\mathbf{q}^T \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{C}^T \mathbf{F} + \delta\mathbf{u}^T \mathbf{S}^T \mathbf{F}) dV,$$

а також стовпці узагальнених активних сил

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}'_q &= \frac{\delta W'}{\delta\mathbf{q}} = \boldsymbol{\Phi}^T \left(\int_V \mathbf{C}^T \mathbf{F} dV \right) = \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{F}_q, \\ \mathbf{Q}'_u &= \frac{\delta W'}{\delta\mathbf{u}} = \int_V \mathbf{S}^T \mathbf{F} dV. \end{aligned} \quad (\text{П.9})$$

Аналогічно одержимо узагальнені сили \mathbf{Q}'' від зосереджених сил і моментів реакцій \mathbf{R}_k (рис. П.1), замінивши інтегрування по об'єму підсумовуванням за числом реакцій:

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}_q'' &= \Phi^T \left(\sum_k \mathbf{C}_{|M_k}^T \mathbf{R}_k \right) = \Phi^T \mathbf{R}_q, \\ \mathbf{Q}_u'' &= \left(\sum_k \mathbf{S}_{|M_k}^T \mathbf{R}_k \right) = \mathbf{R}_u.\end{aligned}\quad (\text{П.10})$$

У цих формулах матриці \mathbf{C} і \mathbf{S} обчислені в тих точках тіла M_k , у яких діють реакції \mathbf{R}_k .

При підстановці виразів (6) - (10) в рівняння (5) приймають вигляд

$$\Phi^T \left\{ \begin{array}{l} m\ddot{\mathbf{r}} - m\tilde{\rho}_C \dot{\boldsymbol{\omega}} + \int_V \mu \ddot{\boldsymbol{\rho}} dV + \tilde{\boldsymbol{\omega}} \tilde{\boldsymbol{\omega}} m \rho_C + 2 \int_V \mu \tilde{\boldsymbol{\omega}} \dot{\boldsymbol{\rho}} dV \\ m\tilde{\rho}_C \ddot{\mathbf{r}} + \mathbf{J}_C \dot{\boldsymbol{\omega}} + \int_V \mu \tilde{\boldsymbol{\rho}} \ddot{\boldsymbol{\rho}} dV + \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{J}_C \boldsymbol{\omega} + 2 \int_V \mu \tilde{\boldsymbol{\rho}} \tilde{\boldsymbol{\omega}} \dot{\boldsymbol{\rho}} dV \end{array} \right\} - \mathbf{F}_q - \mathbf{R}_q = \mathbf{0}, \quad (\text{П.11})$$

$$\int_V \mathbf{D}_u^T (\mu \ddot{\mathbf{r}} - \mu \tilde{\boldsymbol{\omega}} \dot{\boldsymbol{\rho}} + \mu \ddot{\boldsymbol{\rho}} + \mu \tilde{\boldsymbol{\omega}} \tilde{\boldsymbol{\omega}} \boldsymbol{\rho} + 2 \mu \tilde{\boldsymbol{\omega}} \dot{\boldsymbol{\rho}}) dV - \mathbf{Q}'_u - \mathbf{F}_u^{elast} - \mathbf{R}_u = \mathbf{0}.$$

Тут $m = \int_V \mu dV$ – маса тіла, $m \rho_C = \int_V \mu \boldsymbol{\rho} dV$ – радіус-вектор центра мас тіла щодо точки $O1$, помножений на масу, $\mathbf{J}_C = -\int_V \mu \tilde{\boldsymbol{\rho}} \tilde{\boldsymbol{\rho}} dV$ – тензор інерції тіла щодо точки $O1$.

Щоб винести другі похідні з-під знаків інтегралів, виразимо $\ddot{\mathbf{u}}$ через набір узагальнених координат \mathbf{u} і їхні похідні (цю процедуру іноді називають дискретизацією):

$$\ddot{\boldsymbol{\rho}} = \mathbf{D}_u \ddot{\mathbf{u}} + \dot{\mathbf{D}}_u \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{D}_u \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{a}_u'' . \quad (\text{П.12})$$

Матриця Φ є квадратною (6×6) і невинродженою, тому після множення першого рівняння системи (П.11) ліворуч на Φ^{-T} одержимо остаточні рівняння руху окремого тіла у вигляді:

$$\begin{aligned}\mathbf{M}^q \mathbf{w} + \mathbf{M}^{qu} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}_q &= \mathbf{F}_q + \mathbf{R}_q, \\ \mathbf{M}^{quT} \mathbf{w} + \mathbf{M}^u \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}_u &= \mathbf{F}_u + \mathbf{R}_u.\end{aligned}\quad (\text{П.13})$$

Тут використані такі позначення:

$$\mathbf{w} = \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{r}} \\ \dot{\boldsymbol{\omega}} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{F}_u = \mathbf{Q}'_u + \mathbf{F}_u^{elast},$$

$$\mathbf{M}^q(\mathbf{q}, \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} m\mathbf{E} & m\tilde{\rho}_C^T \\ m\tilde{\rho}_C & \mathbf{J}_C \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}^{qu}(\mathbf{q}, \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \int_V \mu \mathbf{D}_u dV \\ \int_V \mu \tilde{\boldsymbol{\rho}} \mathbf{D}_u dV \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}^u(\mathbf{u}) = \int_V \mu \mathbf{D}_u^T \mathbf{D}_u dV,$$

$$\mathbf{k}_q = \begin{Bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\omega}} \tilde{\boldsymbol{\omega}} m \rho_C + 2 \int_V \mu \tilde{\boldsymbol{\omega}} \dot{\boldsymbol{\rho}} dV + \int_V \mu \mathbf{a}_u'' dV \\ \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{J}_C \boldsymbol{\omega} + 2 \int_V \mu \tilde{\boldsymbol{\rho}} \tilde{\boldsymbol{\omega}} \dot{\boldsymbol{\rho}} dV + \int_V \mu \tilde{\boldsymbol{\rho}} \mathbf{a}_u'' dV \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{k}_u = \int_V \mathbf{D}_u^T \mu (\tilde{\boldsymbol{\omega}} \tilde{\boldsymbol{\omega}} \boldsymbol{\rho} + 2 \tilde{\boldsymbol{\omega}} \dot{\boldsymbol{\rho}} + \mathbf{a}_u'') dV.$$

Зазначимо, що традиційно рівняння (П.13) одержують на основі принципу можливих переміщень [47]. Звідси слідує, що у випадку «затвердіння» кінцевого елемента, тобто коли $\dot{\rho}(M) \equiv \mathbf{0}$, і при записі рівнянь щодо центра мас, коли $\rho_C \equiv \mathbf{0}$, вони перетворюються в динамічні рівняння Ньютона-Ейлера для абсолютно твердого тіла:

$$\begin{aligned} m\ddot{\mathbf{r}} &= \mathbf{f}^{\text{акт}} + \mathbf{f}^{\text{реакт}}, \\ \mathbf{J}_C \dot{\boldsymbol{\omega}} + \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{J}_C \boldsymbol{\omega} &= \mathbf{m}^{\text{акт}} + \mathbf{m}^{\text{реакт}}. \end{aligned} \quad (\text{П.14})$$

Далі розглянемо *прямий метод формування рівнянь руху* системи тіл на основі рівняння руху окремого абсолютно твердого або тіла, здатного деформуватися. Тут виводяться рівняння руху системи таких тіл.

Рівняння (П.13) іноді називаються напівдискретизованими, щоб підкреслити те, що лише відносні прискорення $\ddot{\mathbf{u}}$ були виражені через узагальнені прискорення $\ddot{\mathbf{u}}$, формула (П.12).

Виразимо стовпець \mathbf{w}_i прискорень кожного тіла через його узагальнені координати \mathbf{q}_i і похідні від них, подібно, як у виразах (П.3):

$$\mathbf{w}_i = \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{r}}_i \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{D}_i \ddot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{a}_i'' \\ \mathbf{B}_i \ddot{\mathbf{q}}_i + \boldsymbol{\varepsilon}_i'' \end{Bmatrix} = \boldsymbol{\Phi}_i \ddot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{w}_i''. \quad (\text{П.15})$$

Якщо тепер підставити це значення \mathbf{w}_i у рівняння (П.13) для i -го тіла й виконати підсумовування по всіх тілах системи, то одержимо рівняння руху системи в узагальнених координатах

$$\sum_{i=1}^n \left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_i^T \mathbf{M}_i^q \boldsymbol{\Phi}_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{\Phi}_i^T \mathbf{M}_i^{qu} \\ \mathbf{M}_i^{quT} \boldsymbol{\Phi}_i & \mathbf{M}_i^u \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_i \\ \ddot{\mathbf{u}}_i \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_i^T \mathbf{Q}_i^q \\ \mathbf{Q}_i^u \end{Bmatrix}. \quad (\text{П.16})$$

де позначено:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_i^q &= \mathbf{F}_i^q - \mathbf{k}_i^q - \mathbf{M}_i^q \mathbf{w}_i'', \\ \mathbf{Q}_i^u &= \mathbf{F}_i^u - \mathbf{k}_i^u - \int_{V_i} \mathbf{D}_i^{uT} \mu_i (\mathbf{a}_i'' + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_i'' \mathbf{p}_i) dV_i. \end{aligned}$$

У короткому матричному записі рівняння (П.16) можна записати у вигляді

$$[\mathbf{M}^q + \mathbf{M}^{qu}] \ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{Q}. \quad (\text{П.17})$$

де \mathbf{x} – глобальний стовпець узагальнених координат системи, що є об'єднанням всіх стовпців $\mathbf{x}_i = \{\mathbf{q}_i^T, \mathbf{u}_i^T\}^T$ з урахуванням глобальної нумерації координат. Зазначимо, що сили реакцій у ці рівняння не входять, що є наслідком ідеальності зв'язків у шарнірах.

Слід наголосити на тому, що всі елементи рівнянь руху (П.16) обчислюються з використанням тільки алгебраїчних матричних операцій добутку й додавання. Матриці похідних \mathbf{D}_p , \mathbf{V}_p , що входять у співвідношення (П.15) і далі через матриці Φ_i в (П.16), можна обчислити без застосування диференціювання, використовуючи лише рекурентні співвідношення для ланцюжків тіл [31].

Оцінімо обчислювальну складність формування рівнянь руху в цьому методі на прикладі системи у вигляді ланцюжка з n тіл. Число алгебраїчних операцій для обчислення (трудомісткість обчислення) складових \mathbf{M}^q і \mathbf{M}^{qu} матриці мас системи (П.17) дорівнює, відповідно $O(n^3)$ і $O(n^2)$, як нескладно зрозуміти з їхньої структури в рівнянні (П.16). Трудомісткість кожного множення на матрицю Φ_i пропорційна n , тому що вона має розмір $6 \times n$ і, загалом кажучи, є щільною. Крім того, у формулі здійснюється підсумовування по n тілах. Трудомісткість обчислення глобального вектора узагальнених сил також дорівнює $O(n^2)$.

Далі розглянемо більш ефективні алгоритми. Один з них умовно названий методом складених тіл, де ефективність обчислень можна підвищити за рахунок більш глибокого аналізу внутрішньої структури матриці мас. При цьому знову розглядається система у вигляді ланцюжка n тіл (тут для простоти розглядається ланцюжок з абсолютноно твердих тіл). Матриця мас із формули (П.16) прийме вигляд

$$\mathbf{M}_i = \Phi_i^T \mathbf{M}_i^q \Phi_i \quad (\text{П.18})$$

Розглянемо співвідношення між лінійними й кутовими швидкостями двох суміжних тіл ланцюжка, що мають вид, аналогічний виду (8) :

$$\mathbf{V}_{i+1} = \mathbf{C}_{i,i+1} \mathbf{V}_i + \mathbf{S}_{i+1}^l \dot{\mathbf{q}}_{i+1} + \mathbf{V}'_{i+1}. \quad (\text{П.19})$$

де $\mathbf{V}_i = \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{r}}_i \\ \boldsymbol{\omega}_i \end{Bmatrix}$, $\mathbf{C}_{i,i+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\tilde{\mathbf{p}}_{i,i+1} \\ \mathbf{O} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$ – матриця перетворення, $\mathbf{p}_{i,i+1}$ – раді-

ус-вектор між центрами мас тіл i і $(i-1)$; \mathbf{S}_{i+1}^l і $\dot{\mathbf{q}}_{i+1}$ – локальна матриця Якобі в шарнірі $(i+1)$ і стовпець локальних шарнірних швидкостей.

Аналізуючи співвідношення між швидкостями в шарнірах ланцюжка тіл, можна одержати такі співвідношення

$$\Phi_i = \sum_{k=1}^i \mathbf{C}_{k,i} \bar{\mathbf{S}}_k^l, \quad \bar{\mathbf{S}}_k^l = \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \dots & \mathbf{O} & \mathbf{s}_k^l & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{O} \end{bmatrix}$$

для рекурентного обчислення матриць Φ_i . Тут матриця $\bar{\mathbf{S}}_k^l$ містить єдину ненульову підматрицю \mathbf{S}_k^l , розташовану на k -тім місці.

В остаточному підсумку перехід до рекурентних співвідношень дозволяє знизити трудомісткість обчислення матриці мас (П.18) до $O(n^2)$ і стовпці узагальнених сил Q до $O(n)$ за рахунок зміни порядку підсумовування.

Далі розглянемо метод, умовно названий *методом окремих тіл*. Відзначимо, що обчислити матрицю мас за менше, чим n^2 , число операцій, неможливо, тому що вона сама містить n^2 елементів. Однак А.Ф.Верещагінім [31] був запропонований метод формування рівнянь руху складності $O(n)$, у якому глобальна матриця мас взагалі не обчислюється.

Викладемо суть методу в трактуванні роботи [47]. Розглянемо два кінцеві тіла ланцюжка, які зображені на рис. П.2.

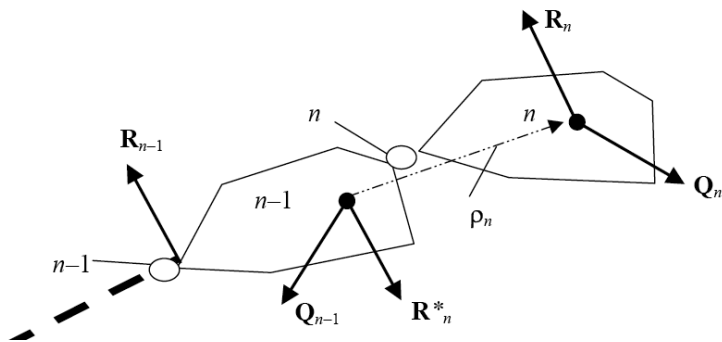


Рис.П.2. Кінцеві тіла ланцюжка тіл і сили, що діють на них

Запишемо рівняння руху кінцевого тіла n . На нього діють узагальнені сили Q_n і сили реакції R_n у шарнірі n (наведені до центра мас, порівняйте з рівняннями (П.13)):

$$M_n w_n = Q_n + R_n. \tag{П.20}$$

Запишемо далі те ж рівняння для попереднього тіла в ланцюжку ($n - 1$) з врахуванням того, що на нього діють, крім активних сил Q_{n-1} і сил реакції R_{n-1} у шарнірі $(n - 1)$, ще й реакції R_n^* з боку шарніра n :

$$R_n^* = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{O} \\ \tilde{\rho}_n & \mathbf{I} \end{bmatrix} \cdot (-R_n) = -C_n^T R_n \tag{П.21}$$

При приведенні стовпця $R_n = \left\{ \mathbf{f}_n^T \quad \mathbf{m}_n^T \right\}^T$ сил реакцій \mathbf{f}_n і їхніх моментів \mathbf{m}_n до центра мас тіла $(n-1)$ необхідно додати момент від цих сил щодо центра приведення, що й виражається формулою (П.21).

Отже, для тіла (n-1) запишемо:

$$\mathbf{M}_{n-1} \mathbf{w}_{n-1} = \mathbf{Q}_{n-1} + \mathbf{R}_{n-1} - \mathbf{C}_n^T \mathbf{R}_n \quad (\text{П.22})$$

Запишемо кінематичне співвідношення між прискореннями двох тіл, що є продовженням серії рівнянь (П.8) і (П.19):

$$\mathbf{w}_n = \mathbf{C}_n \mathbf{w}_{n-1} + \mathbf{S}_n \ddot{\mathbf{q}}_n + \mathbf{w}'_n. \quad (\text{П.23})$$

У випадку ідеальних зв'язків виконується співвідношення

$$\mathbf{S}_n^T \mathbf{R}_n = \mathbf{0} \quad (\text{П.24})$$

воно впливає з умови рівності нулю робіт на можливому переміщенні.

Використовуємо умову (П.24) для виключення сил реакцій з рівняння (П.20), помноживши його ліворуч на \mathbf{S}_n^T :

$$\mathbf{S}_n^T \mathbf{M}_n \mathbf{w}_n = \mathbf{S}_n^T \mathbf{Q}_n.$$

Підставимо в цей вираз замість \mathbf{w}_n його значення з (П.23)

$$\mathbf{S}_n^T \mathbf{M}_n (\mathbf{C}_n \mathbf{w}_{n-1} + \mathbf{S}_n \ddot{\mathbf{q}}_n + \mathbf{w}'_n) = \mathbf{S}_n^T \mathbf{Q}_n$$

З останнього рівняння одержимо важливу формулу, що зв'яже прискорення тіла й другу похідну за часом від координат у шарнірі:

$$\ddot{\mathbf{q}}_n = \mathbf{U}_n^{-1} \mathbf{S}_n^T \{ \mathbf{Q}_n - \mathbf{M}_n (\mathbf{C}_n \mathbf{w}_{n-1} + \mathbf{w}'_n) \}. \quad (\text{П.25})$$

Тут матриця \mathbf{U}_n має вигляд

$$\mathbf{U}_n = \mathbf{S}_n^T \mathbf{M}_n \mathbf{S}_n \quad (\text{П.26})$$

Розмір цієї матриці дорівнює числу n ступенів свободи в шарнірі. Вона симетрична і позитивно визначена. У даному методі потрібно оперувати лише з подібними їй матрицями. І оскільки їх розмір завжди малий (він не перевищує 6), то саме цим і обумовлена ефективність описуваного методу.

Тепер ми можемо виразити сили реакції \mathbf{R}_n з (П.20) через прискорення \mathbf{w}_n , виконавши підстановку вираження (П.25) в (П.23). Так ми виключимо реакції \mathbf{R}_n з рівняння (П.22) і перетворимо до виду

$$\mathbf{M}_{n-1}^* \mathbf{w}_{n-1} = \mathbf{Q}_{n-1}^* + \mathbf{R}_{n-1}. \quad (\text{П.27})$$

У цій формулі уведено позначення (де n замінено на k)

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{k-1}^* &= \mathbf{M}_{k-1} + \mathbf{C}_k^T \mathbf{M}_k \mathbf{C}_k - \mathbf{C}_k^T \mathbf{M}_k \mathbf{S}_k \mathbf{U}_k^{-1} \mathbf{S}_k^T \mathbf{M}_k \mathbf{C}_k, \\ \mathbf{Q}_{k-1}^* &= \mathbf{Q}_{k-1} - \mathbf{C}_k^T \left\{ \mathbf{M}_k \left\langle \mathbf{S}_k \mathbf{U}_k^{-1} \mathbf{S}_k^T (\mathbf{Q}_k - \mathbf{M}_k \mathbf{w}'_k) + \mathbf{w}'_k \right\rangle - \mathbf{Q}_k \right\} \end{aligned} \quad (\text{П.28})$$

Таким чином, почавши з рівняння (П.20) для тіла n , після деяких перетворень ми дійшли до подібного рівняння (П.27) для тіла $(n - 1)$. Перетворена матриця мас \mathbf{M}_{n-1}^* уже не буде блочно-діагональною, але як і раніше буде залишатися симетричною й позитивно визначеною. Тепер ми можемо записати рівняння, аналогічне (П.27), для тіла $k = n - 1$, потім для тіла $k = n - 2$ і так далі аж до тіла $k = 1$, обчислюючи матриці \mathbf{M}_{k-1}^* й вектори \mathbf{Q}_{k-1}^* . При цьому в (П.28) замість величин \mathbf{M}_k і \mathbf{Q}_k будуть входити їхні перетворені значення з попереднього кроку рекурсії.

Так реалізується обернений хід алгоритму від кінця ланцюжка до його початку.

Прямий хід – від початку ланцюжка (тіла 1) до її кінця – реалізується з використанням формул (П.25), (П.23), $k = 1, \dots, n$. При цьому враховується, що при $k = 1$ прискорення попереднього тіла (тіла 0) дорівнює нулю: \mathbf{w}_{k-1} , якщо $k = 1$.

Знайшовши локальні прискорення $\ddot{\mathbf{q}}_k$ згідно (П.25), обчислюємо прискорення поточного тіла \mathbf{w}_k за формулою (П.23).

Описаний вище класичний метод окремих тіл є, мабуть, найефективнішим методом чисельного моделювання систем з довгими кінематичними ланцюгами (більше 10-15 обертальних ступенів свободи в ланцюжку). Його можна легко узагальнити на систему у вигляді дерева, однак він має й обмеження за областю застосування.

Насамперед, це відноситься до систем із замкнутими кінематичними ланцюгами – у цьому випадку неможливо виділити в системі кінцеве тіло, як на рис. П.2, і почати рекурентну процедуру. Однак, для такого типу систем також були розроблені модифікації методу, засновані на переході до множників Лагранжа в «розрізаних» шарнірах.

Інший клас систем, для яких цей метод неможливо застосувати – це жорсткі системи, які розв'язуються неявними методами з використанням матриць Якобі рівнянь руху. Проте, цей метод можна модифікувати, що дозволить усунути деякі з описаних недоліків

На закінчення наведемо метод окремих тіл для систем із замкнутими кінематичними ланцюгами.

Застосування методу окремих тіл неможливо при наявності в системі замкнутих ланцюгів. У цьому випадку ефективний підхід, заснований на виключенні не сил реакцій, а прискорень.

Рівняння (П.24) має загальний розв'язок у вигляді

$$\mathbf{R}_n = \mathbf{H}_n \boldsymbol{\lambda}_n, \quad (\text{П.29})$$

Тоді $\mathbf{H}_n^T \mathbf{S}_n = \mathbf{0}$, де λ_n – множники Лагранж (у сенсі незалежних реакцій).

На рис. П.3 показаний один шарнір (j) системи в оточенні сусідніх тіл. Він з'єднує тіла i і k . Шарнір j_p з'єднує тіло i з попереднім на шляху до тіла 0. Шарніри, приєднані до тіла i , позначені i_1, \dots, i_m, \dots ; одним з них, наприклад, i_m , буде поточний шарнір j . Шарніри, приєднані до тіла k , позначені k_1, \dots, k_p, \dots

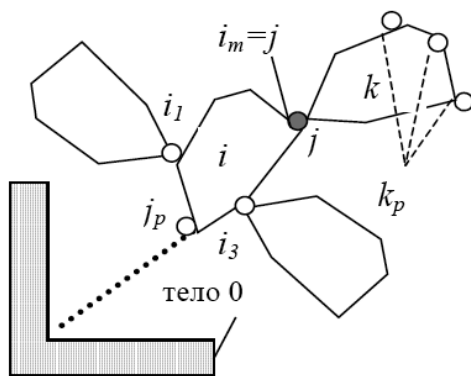


Рис. П.3. Шарнір системи.

Запишемо рівняння (П.22) для тіл k і i , куди ввійдуть реакції у всіх пов'язаних з ними шарнірах. Виключимо ці реакції згідно (П.29) і підставимо прискорення w_k і w_i у рівняння кінематики (П.23). Тоді ми одержимо розв'язне рівняння щодо множників Лагранжа:

$$\mathbf{H}_j^T \mathbf{M}_k^{-1} \left(\mathbf{Q}_k + \mathbf{H}_j \boldsymbol{\lambda}_j - \sum_p \mathbf{C}_{k_p}^T \mathbf{H}_{k_p} \boldsymbol{\lambda}_{k_p} \right) = \mathbf{H}_j^T \mathbf{C}_j \mathbf{M}_i^{-1} \left(\mathbf{Q}_i + \mathbf{H}_{j_p} \boldsymbol{\lambda}_{j_p} - \sum_m \mathbf{C}_{i_m}^T \mathbf{H}_{i_m} \boldsymbol{\lambda}_{i_m} \right) + \mathbf{H}_j^T \mathbf{w}'_k$$

Записавши ці рівняння для всіх шарнірів системи, одержимо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно множників Лагранжа. Для ланцюжка тіл матриця цієї системи буде блочно – трьохдіагональною.

Поява замкнутих ланцюгів призведе лише до порушення блокової трьохдіагональності і до локального збільшення ширини стрічки матриці, що не призводить до істотного збільшення трудомісткості обчислень.

Отримана система рівнянь має цікаву особливість: розмірність стовпця множників Лагранжа λ_k дорівнює $(6 - n_k)$, де n_k – число ступенів у шарнірі. Це означає, що чим більше ступенів свободи в шарнірі,

тим менший буде розмір стовпця множників Лагранжа, звідки слідує, що тим меншим буде розмір системи рівнянь, яку слід розв'язати.

Ефектним прикладом системи зв'язаних багатоланкових маятників є дискретна модель тканини й алгоритми для моделювання поведінки тканини на поверхні твердого багатогранного об'єкта.

Моделювання поведінки тканини при драпіруванні з'явилося в списку комп'ютерних впроваджень порівняно недавно. Тут досліджуються такі проблеми: як буде виглядати тканина з певними властивостями на певному об'єкті, та як зі зміною властивостей тканини змінюється її драпірування? Відповіді на ці й інші питання в наочній формі й повинне давати комп'ютерне моделювання тканини.

Одна із задач у цій області пов'язана з унікальністю тканих матеріалів. Завжди було ясно, що ткани матеріали мають властивості, які дозволяють їм деформуватися в значній мірі по-іншому, ніж аркуші інших матеріалів, наприклад, паперу або металевої фольги. Особливі можливості деформації тканини були відзначені й відомі здавна, але не були ніколи повністю зрозумілі з наукової або інженерної точки зору.

У роботах [76, 77], присвячених цій проблемі, увагу приділено питанням вибору тієї або іншої схеми апроксимації диференціальних рівнянь, що описують поведінку тканини.

Для розробки математичної моделі необхідно враховувати, що в тканині тонкі волокна скручені в нитці, і ці нитки більш-менш жорстко сплетені у взаємозалежну сітку. Уявимо модель тканини як систему багатоланкових «мікромаятників», кінці яких розміщені в точках перетину поздовжніх і поперечних ниток тканини (рис. П.4).

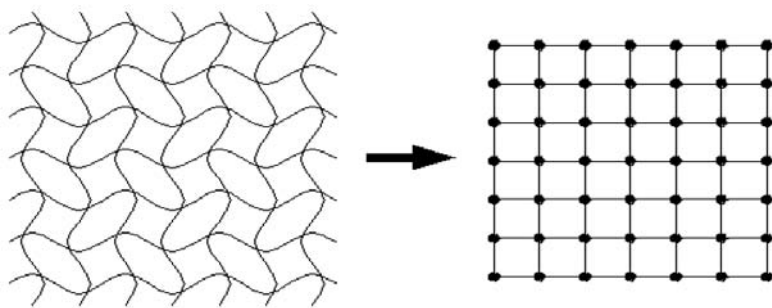


Рис. П. 4. Дискретна модель тканини.

Рух системи «мікромаятників» описується узагальненими переміщеннями $x_i(t)$, і на кожному тимчасовому «обчислювальному про шарку» вишуковуються положення вузлів у просторі. Таким чином,

тканина буде являти собою механічну систему із трьома ступенями свободи, яка здійснює рух стосовно стійкої рівноважної форми.

Із принципу Гамільтона для функції L , що залежить від координат x_i і швидкостей \dot{x}_i , слідує рівняння Ейлера-Лагранжа:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) = 0. \quad (\text{П.30})$$

Це рівняння визначає динамічну траєкторію системи, як тільки знайдена функція Лагранжа для цієї системи.

У класичній механіці лагранжіан визначено як різницю між кінетичною енергією T і потенціальною енергією U , тобто $L = T - U$.

Досить важливо при визначенні лагранжіана врахувати розсіювання в системі. Для цього необхідно визначити функцію D , що залежить від швидкості. Її називають функцією втрат і визначають як $D = \frac{1}{2} c_i (\dot{x}_i)^2$. Таким чином, рівняння рівноваги буде мати вигляд:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_i} = 0. \quad (\text{П.31})$$

Нехай елементарна частка має масу m_i . Кінетична енергія такої частки, що рухається зі швидкістю \dot{x}_i дорівнюватиме $T = \frac{1}{2} m_i (\dot{x}_i)^2$.

Потенціальна енергія частки, що перебуває в гравітаційному полі землі, визначається як $U_g = m_i g x_i$. Однак, повна потенціальна енергія частки буде включати складову, обумовлену взаємодіями між частками U_{int} . Використовуючи вирази для кінетичної енергії, функції втрат і гравітаційної складової, одержимо таке рівняння руху частки:

$$m_i \ddot{x}_i + c_i \dot{x}_i + m_i g + \frac{\partial U_{\text{int}}}{\partial x_i} = 0. \quad (\text{П.32})$$

Для визначення U_{int} необхідно більш докладно розглянути деформаційні властивості тканини. Припускаємо, що на кожну внутрішню точку впливають 12 сусідніх точок, тому що тканина достатньо легка й вага тканини у вилучених вузлах робить незначний малий вплив на кожну розглянуту точку.

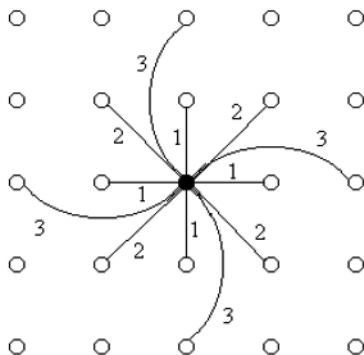


Рис. П.5. Типи ребер сітки, які деформовані.

На рис. П.5 цифрою 1 зображені ребра, що стягаються по прямій і визначають деформації розтягання-стиску. Енергія таких зв'язків визначається як $E_{p,сж} \frac{kl^2}{2}$, де l – відхилення від положення рівноваги, а k – коефіцієнт жорсткості зв'язку між відповідними вузловими точками.

Можна також припустити наявність інших типів взаємодій, таких як зрушення й вигин; на рис. П.5 ці зв'язки позначені цифрами 2 і 3, відповідно.

Енергія вигину обумовлена вигином ниток стосовно площини навколишньої тканини. Енергія вигину: $E_u = \mu_u \cos^2(\theta/2)$, де θ – кут вигину, і μ_u – лінійний коефіцієнт вигину.

Енергія зрушення обумовлена вигином навколо нитки в площині перетину. Ця частина енергії обумовлює S – форму нитки. Енергія зрушення: $E_{сое} = \mu_{сое} \frac{l_1 l_2}{2} \phi^2$, де $\mu_{сое}$ – лінійний коефіцієнт зрушення, $l_1 l_2$ – суміжні ребра комірки, яка деформується, ϕ – кут зрушення.

Використання таких енергетичних функцій навіть із інтуїтивно обраними кількісними залежностями може давати задовільні результати при моделюванні тканини. Для представлення конкретної тканини потрібно побудувати ці функції енергії, ґрунтуючись на існуючих вимірвальних системах фізичних властивостей тканин. Загальна енергія деформацій тканини може бути визначена як $U_{int} = E_{p,сж} + E_{сое} + E_u$.

Таким чином, остання складова рівняння руху являє собою деяку функцію координат вузла x_i і координат x_j , $j \in \mathbb{R}$, де \mathbb{R} – множина пар

індексів зв'язаних вузлів. У фізичному сенсі $F_{\text{int}}(x_i, x_j)$ – це результуюча сила внутрішніх взаємодій. Тоді рівняння руху вузла прийме вигляд:

$$m_i x_i'' + c_i x_i' + m_i g + F_{\text{int}}(x_i, x_j) = 0. \quad (\text{П.33})$$

Або для всієї системи

$$Mx'' + Cx' + Mg + F_{\text{int}}(x) = 0, \quad (\text{П.34})$$

де M - матриця інерції - діагональна матриця, що описує розподіл мас тканини, C - матриця демпфірування, $x = \{x_i\}$.

Розв'язавши рівняння відносно x'' і згрупувавши в правій частині всі сили, що діють на систему комірок, одержимо повну систему диференціальних рівнянь:

$$x'' = M^{-1}F(x, x'), \quad (\text{П.35})$$

де $F(x, x')$ – функція, що описує дію внутрішніх і зовнішніх сил на тканину.

При цьому маємо початкові умови: $x|_{t_0} = x_0$, $x'|_{t_0} = 0$, $F_{\text{int}}|_{t_0} = 0$; і крайові умови: $x'|_S = 0$, де S – поверхня твердого тіла.

Уведемо позначення $v = x'$ і перепишемо систему рівнянь так:

$$\begin{aligned} x' &= v \\ v' &= M^{-1}F(x, v) \end{aligned} \quad (\text{П.36})$$

Далі займемося питаннями інтегрування системи рівнянь (П.36). У процесі переходу від математичного опису до алгоритму програми моделювання безперервні функції замінюються їхніми значеннями в дискретні моменти часу. Вибір того або іншого методу інтегрування залежить від чотирьох основних критеріїв: погодженість, точність, стійкість і ефективність.

Алгебраїчна апроксимація диференціального рівняння узгоджена з диференціальним рівнянням, якщо вона переходить у це рівняння в межах нескінченно малого кроку. Розглянуті в роботі методи задовольняють критерію узгодженості.

У силу того, що число часток велике, обмежимося розглядом методу, у якому необхідно одне обчислення правої частини на один крок інтегрування.

Найбільш простим є метод Ейлера, застосування цього методу приведе до наступної системи алгебраїчних співвідношень

$$\begin{aligned}x_{n+1} - x_n &= hv_n \\v_{n+1} - v_n &= hM^{-1}F(x_n, v_n)\end{aligned} \quad . \quad (\text{П.37})$$

Виразимо швидкість із першого рівняння $v_n = \frac{x_{n+1} - x_n}{h}$, тоді одержимо

$$\frac{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n}{h^2} = \frac{F(x_n, v_n)}{m}. \quad (\text{П.38})$$

Нехай X є розв'язком, тобто $\frac{d^2 X}{dt^2} = FM^{-1}$. Тоді похибка на тимчасовому прошарку n , δ^n визначимо в такий спосіб:

$$\frac{X_{n+2} - 2X_{n+1} + X_n}{h^2} = \frac{F(X_n, v_n)}{m} - \delta^n. \quad (\text{П.39})$$

Розклавши X_{n+1} і X_{n+2} у ряд Тейлора біля точки $X_n = X(t_n)$, одержимо:

$$\frac{F(X_n, v_n)}{m} - \delta^n = \frac{3}{2} \frac{d^2 X}{dt^2} + \frac{10h}{6} \cdot \frac{d^3 X}{dt^3} + \dots \quad (\text{П.40})$$

Цей метод має перший порядок точності, тобто похибка апроксимації на тимчасовому прошарку n має порядок $h^n \square \sim h$.

Однак необхідно також ураховувати поширення похибок. Можна навести приклади, коли навіть мала похибка, внесена на деякій стадії розрахунку, накопичується — і чисельна схема стає нестійкою. Виникнення нестійкості пов'язане з наявністю нефізичного розв'язання дискретних рівнянь. Нас же цікавить залежність стійкості методу від зміни кроку інтегрування.

Для схеми Ейлера запишемо рівняння еволюції похибок:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{n+2} - 2\varepsilon_{n+1} + \varepsilon_n &= \varepsilon_n \left(\frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{x=X_n} \frac{h^2}{m} \right) = \\ &= \frac{1}{m} \left| \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{\max} h^2 \varepsilon_n = -\Omega^2 h^2 \varepsilon_n\end{aligned} \quad .(\text{П.41})$$

Модуль і від'ємний знак виникають із припущення, що розв'язок має обмежений вигляд, тобто X_n ніколи не перевершить деякого значення.

Рівняння лінійне по ε і завжди має розв'язок у вигляді $\varepsilon_n = \lambda^n = \exp(i\omega n h)$. Підставивши це рішення, одержимо квадратне

рівняння $\lambda^2 + \lambda + 1 = -\Omega^2 h^2$, розв'язком якого служать дві характеристичні функції $\lambda_{\pm} = 1 \pm \sqrt{-\Omega^2 h^2}$, які повністю визначатимуть поведіння розв'язку рівняння еволюції похибок.

Якщо величина $|\lambda_{\pm}|$ або $|\lambda_{-}|$ більша одиниці, то нагромадження похибок відбувається за експоненціальним законом, і, в остаточному підсумку, воно «забиває» адекватний розв'язок. Легко помітити, що якщо $(\Omega h)^2 > 1$, то метод стає нестійким. Зрозуміло, що застосування такого методу вимагає вибору настільки малих значень h , що кількість ітерацій, необхідних для одержання результату, зростає до неприпустимо великих значень.

Розглянемо інший варіант апроксимації рівнянь (П.36):

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= h v_{n+1} \\ v_{n+1} - v_n &= h M^{-1} F(x_n, v_n) \\ v_{n+1} &= \frac{x_{n+1} - x_n}{h} \end{aligned} \quad (\text{П.42})$$

звідки

$$\frac{x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}}{h^2} = \frac{F(x_n, v_n)}{m}. \quad (\text{П.43})$$

Використовуючи підхід, аналогічний тому, що застосували до класичної схеми Ейлера, одержимо $\delta^n \sim h^2$. Проаналізуємо стійкість

$$\begin{aligned} \lambda^2 + \lambda + 1 &= -\lambda \cdot \Omega^2 h^2 \\ \Rightarrow \lambda_{\pm} &= 1 - \frac{\Omega^2 h^2}{2} \pm \frac{\Omega^2 h^2}{2} \sqrt{1 - \frac{4}{\Omega^2 h^2}}. \end{aligned} \quad (\text{П.44})$$

Метод стійкий поки $\Omega h \leq 2$. Отже, маємо більш вигідну апроксимацію, яка не вимагає додаткових обчислювальних витрат.

Строго кажучи, такий метод уже можна назвати неявним, тому що для обчислення x_n використовується v_{n+1} , однак для обчислення v_{n+1} не потрібно вирішувати ніяких алгебраїчних рівнянь, а досить перерахувати швидкість до «обчислювального прошарку» наступного положення.

У роботі [77] запропоновано обчислювальну схему із ще більшим ступенем стійкості завдяки переходу до неявних методів інтегрування, у яких значення F визначається в точці (x_{n+1}, v_{n+1}) . На рис. П.6 наведені приклади результатів моделювання драпірування тканини на поверхні твердого багатогранного об'єкта.

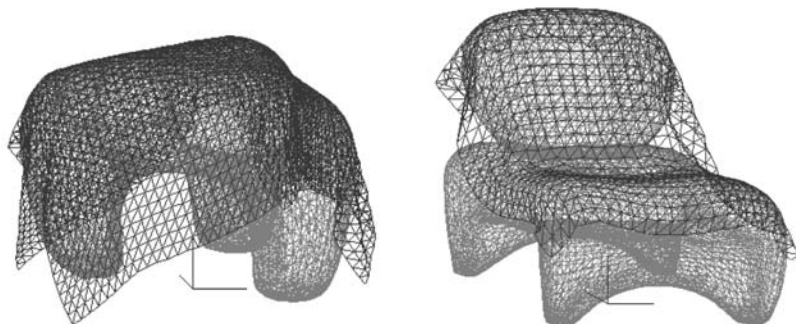


Рис. П. 6. Результати моделювання драпірування тканини на поверхні твердого багатогранного об'єкта.

Приклад моделювання драпірування тканини на поверхні твердого багатогранного об'єкта нами обрано з метою показати різнопланові можливості використання алгоритмів розрахунку руху та унаочненню у часі взаємного положення ланок в процесі коливань багатоланкових маятникових механічних систем на основі розв'язання системи рівнянь Лагранжа другого роду.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Адашевська І.Ю. Програма опису та побудови кривої шляхом приведення її рівняння до канонічного виду // Геометричне та комп'ютерне моделювання. Харків: ХДУХТ, 2004. Вип. 7. – С. 74-81
2. Адашевська І.Ю., Запольський Л.Л. Дослідження шестиланкового механізму крокування для машин опорної прохідності // Геометричне та комп'ютерне моделювання. Харків: ХДУХТ, 2005. Вип. 10. – С. 112-119
3. Адашевська І.Ю. Динамічний розрахунок важільного механізму у середовищі пакету MODEL VISIUN STUDIUM // Геометричне та комп'ютерне моделювання. Харків: ХДУХТ, 2006. Вип. 14. – С. 188-197
4. Адашевська І.Ю., Запольський Л.Л. Геометричне моделювання циклічних механізмів крокування з пасивно керованою стопою // Геометрическое и компьютерное моделирование: энергосбережение, экология, дизайн. Сб. научных трудов. - Киев: КНУТИД, 2005. – С. 90-98
5. Адашевська І.Ю. Про можливість прокручування ланок чотири шарнірного механізму крокування для машин опорної прохідності // Прикладна геометрія та інженерна графіка. Київ: КНУБА, 2005. Вип. 75. – С.210 - 216
6. Адашевська І.Ю., Запольський Л.Л. Основні типи механізмів крокування для машин опорної прохідності // Праці Таврійської державної агротехнічної акад. Мелітополь: ТДАТА, 2005. Вип. 4. – Т. 29. – С. 79-83
7. Адашевська І.Ю., Запольський Л.Л. Аналітичні методи аналізу і синтезу механізмів машин (огляд літературних джерел) // Праці Таврійської держ. агротехн. академії. Мелітополь: ТДАТА, 2006. Вип. 4.- Т. 31.- С. 137-146
8. Адашевська І.Ю. Геометричне моделювання коливань багатоланкових маятникових механічних систем : Автореф. дис... канд. техн. наук: 05.01.01/ Київський нац. унів. будівництва і архітектури. – Київ 2006. – 18 с.
9. Аладьев В.З., Богдявичус М.А. Maple 6: Решение математических, статистических и физико-технических задач. — М.: Лаборатория базовых знаний, 2001.—824с.
10. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959. 915 с.; Наука, 1981. 568 с.
11. Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л. Элементы математического моделирования в программных средах MATLAB 5 и Scilab. СПб.: Наука, 2001.

12. Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л. Управление хаосом: Методы и приложения. I. Методы // Автоматика и телемеханика. 2003. № 5. С. 3–45.
13. Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л. Управление хаосом: Методы и приложения. II. Приложения // Автоматика и телемеханика. 2004. № 4.
14. Анищенко В.С. Знакомство с нелинейной динамикой. Москва - Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. 144 с.
15. Анищенко В.С. Динамические системы. Соросовский образовательный журнал, № 11, 1997. С. 77 – 84
16. Бабаков И.М. Теория колебаний. М.: ГИТТЛ, 1958. 628 с.
17. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. Т.1. — М.: Наука, 1984. — 560 с.
18. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний, 1980.
19. Биргоф Дж. Динамические системы. Ижевск: РХД, 1999. 408 с.
20. Блехман И.И. Вибрационная механика. М.: Наука, 1994. 394 с.
21. Борисов А.В., Мамаев И.С. Динамика твердого тела. Ижевск: НИЦ РХД, 2001. - 384 с.
22. Брус Дж., Джиблин П. Кривые и особенности. М.: Мир . 1988. - 263с.
23. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики. — СПб.: Лань, 1998. — 446 с.
24. Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Введение в теорию нелинейных колебаний. М.: Наука, 1987. 384 с.
25. Бутиков Е.И. Компьютерное моделирование нелинейных явлений в учебной лаборатории. <http://www.ifmo.ru/butikov>
26. Бутиков Е.И., Кондратьев А.С. Механика: Учеб. пособие: М.; СПб.: Физматлит и др., 2000. - 352 с.;
27. Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики. М.: Наука. 1969.
28. Ванін В.В., Гнітецька Т.В. Курс «Деякі теоретичні положення нелінійної динаміки та теорії хаосу, фрактальна геометрія» в базовій підготовці студентів фізико-математичного факультету.//V Міжнародна науково-методична конференція «Проблеми та шляхи розвитку вищої технічної освіти» 18-19 травня 2000 р.-К.: НТУУ «КПІ», 2000-С.116-117.
29. Ванін В.В., Гнітецька Т.В. Реалізація ідей геометричного моделювання у курсі «Деякі теоретичні положення нелінійної динаміки та теорії хаосу, фрактальна геометрія».//Тезиси міжнародної

- научно-практической конференции «Современные проблемы геометрического моделирования» 21-24 июня 2000 г. Донецк: ДонГТУ, 2000.-С.20-21.
30. Веретенников В.Г., Карпов И.И., Маркеев А.П. и др. Теоретическая механика. Вывод и анализ уравнений движения на ЭВМ: учебное пособие для вузов. — М.: Высшая школа, 1990. — 174 с.
 31. Верещагин А.Ф. Компьютерное моделирование динамики сложных механизмов роботов-манипуляторов // Инженерная кибернетика, вып. 6, — С. 65-70.
 32. Вейц В. Л. Динамика машинных агрегатов.- Л.: Машиностроение, 1969.-368 с.
 33. Вибрации в технике: Справочник. В 6-ти т.-М.: Машиностроение, 1980-т.3. Колебание машин, конструкций и их элементов. 1980. 544 с.
 34. Вибрации в технике: Справочник. В 6-ти т.-М.: Машиностроение, 1981-т.4. Вибрационные процессы и машины. 1981. 509 с.
 35. Вульфсон И.И. Колебания машин с механизмами циклового действия. Л.: Машиностроение, 1990. 309 с.
 36. Гаврилов С.В., Коноплев В.А. Компьютерные технологии исследования мехатронных многозвенных систем. М.: СПб.: Наука, 2004, 191 с.
 37. Гнітецька Т.В. Дослідження нелінійних явищ у системі гідравлічного випромінювача методами геометричного моделювання. : Автореф. дис... канд. техн. наук: 05.01.01/Київський нац. унів. будівництва і архітектури. — Київ 2001. — 18 с.
 38. Гнітецька Т.В. Аналіз нелінійних явищ гідроакустичного випромінювача методами геометричного моделювання //Прикл. геометрія і інж. графіка.-К.КНУБА, 1999.-Вип.66.-С.209-212.
 39. Гнітецька Т.В. Побудова геометричного зображення стану хаотичної динамічної системи, одержаного чисельним інтегруванням, із застосуванням САПР AUTOCAD//Прикл. геометрія та інж. графіка.-К.КНУБА, 2000.- Вип.67.-С.191-195.
 40. Гнітецька Г.О., Гнітецька Т.В. Зміст і структура курсу «Ергономіка і дизайн побутової радіоелектронної апаратури»././ Прикладна геометрія та інженерна графіка: -К.КНУБА,1997.- Вип. 61, -С.182-184.
 41. Гнітецька Т.В., Ванін В.В. Геометричне моделювання поведінки об'єктів нелінійної динаміки././Матеріали Міжнародної науково-практичної конференції «Сучасні проблеми геометричного моделювання»: Ч.2, -Харків: ХІПБ МВС України, 1998.-С.7-8.
 42. Гончаревич И. Ф., Земсков В.Д., Корешков В. И. Вибрационные грохоты и конвейеры. М.: Госгортехиздат, 1960.

43. Говорухин В., Цибулин В. Компьютер в математическом исследовании. Учебный курс.— СПб.: Питер, 2001. — 624 с.
44. Гукенхеймер Дж., Ф. Холмс. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. М.: Изд-во УРСС, 2002.
45. Гуляев В.И., Баженов В.А., Попов С.Л. Прикладные задачи теории нелинейных колебаний механических систем, 1989.
46. Давыдов Б. Л., Скородумов Б. А. Статика и динамика машин. — М.: Машиностроение, 1967. —431 с.
47. Дмитроченко О.Н. Эффективные методы численного моделирования динамики нелинейных систем абсолютно твердых и деформированных тел. Дисс. на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук. М.: МГУ им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет. 2003. - 125 с.
48. Журавлев В .Ф . Основы теоретической механики . — М .: Наука , 1997.
49. Заславский Г.М. Стохастичность динамических систем. - М.: Наука, 1983.
50. Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. Введение в нелинейную физику. От маятника до турбулентности и хаоса. М.: Наука, 1988 368 стр.
51. Капица П.Л. Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса // ЖЭТФ, 1951, т.21, С.558-607.
52. Капранов М.В., Кулешов В.Н., Уткин Г.М. Теория колебаний в радиотехнике. М.: Наука, 1984. 320 с.
53. Карвовский Г. А., Окорочков С. П. Справочник по асинхронным двигателям и пускорегулирующей аппаратуре. М.: Энергия, 1969,-256 с.
54. Кепе О.Э., Виба Я.А., Грапис О.П. и др. Сборник коротких задач по теоретической механике. — М.: Высшая школа, 1989. — 368 с.
55. Кильчевский Н.А. Курс теоретической механики. — М.: Наука, 1972. - 456 с.
56. Киселев О.М. Введение в теорию нелинейных колебаний. НИЦ РХД, 2004. — 121 с.
57. Кокорев А. С. Справочник молодого обмотчика электрических машин. -М.: Высш. шк., 1985.-207 с.
58. Кожевников С.Н., Есиненко Я. И., Раскин Я. М. Механизмы. Справочное пособие / Под ред. С. Н. Кожевникова. - М.: Машиностроение, 1976. - 784 с.
59. Крюков Б.И., Середович Г.И. О «странном» поведении решений уравнения Дуффинга. // ДАН СССР. 1981. т.258, № 2, С.311-314.

60. Кроновер Р.М. Фракталы и хаос в динамических системах. М.: Постмаркет. 2000. 350 с.
61. Кривошей Б.І. Геометричне моделювання механічних коливальних систем у фазових просторах. - Харків: „С.А.М”. - 2005. - 26 с.
62. Кривошей Б.І. Анімаційне моделювання малих гармонійних коливань вантажу на пружині з маятником // Геометричне та комп’ютерне моделювання. Харків: ХДУХТ, 2005. Вип. 9. — С. 128-137
63. Кривошей Б.І. Фазові портрети коливань надресорного вантажу, спричинених профілем шляху «одиночний бугор» // Геометричне та комп’ютерне моделювання. Харків: ХДУХТ, 2005. Вип. 11. — С. 133-140
64. Кривошей Б.І. Анімаційне моделювання маятника, який здійснює малі гармонійні коливання // Праці Таврійської державної агротехнічної академії. Мелітополь: ТДАТА, 2005. Вип. 4. - Т. 29. - С. 94-101
65. Кузнецов С.И. Колебания и волны. Волновая оптика. Учебное пособие. Томск: Изд-во ТПУ, 2006. — 145 с.
66. Кузнецов С.П. Динамический хаос. Курс лекций. М: Эдиториал УРСС, 2001. - 296 с.
67. Куценко Л.М., Адашевська І.Ю., Шеліхова І.Б. Дослідження маятникових коливань за допомогою зображень на фазовому циліндрі // Геометричне та комп’ютерне моделювання. Харків: ХДУХТ, 2007. Вип. 16. — С. 3-13
68. Куценко Л.М., Грінченко Є.М. Геометричне моделювання нестійкості фазових траєкторій рівняння Дуффінга // Праці Таврійської державної агротехнічної академії. Мелітополь: ТДАТА, 2007. Вип. 4.-Т.36.- С. 22-28
69. Куценко Л.Н. Диссертации по прикладной геометрии, выполненные в харьковском регионе. В сб. Современные проблемы геометрического моделирования. Сб. научных трудов украинско-российской научно-практической конференции. Харьков: ХГУПТ, 2005. — С. 21- 26.
70. Куценко Л.М., Адашевська І.Ю. Визначення положення прямої відносно множини точок на площині методом професора А.В.Найдиша // Геометричне та комп’ютерне моделювання. Харків: ХДУХТ, 2005. Вип. 13. — С. 49-59
71. Куценко Л.М., Адашевська І.Ю. Шестиланковий механізм крокування для машин опорної прохідності // Геометричне та комп’ютерне моделювання. Харків: ХДУХТ, 2005. Вип. 9. — С. 82-89
72. Куценко Л.Н., Адашевская И.Ю., Шатохин В.М. Геометрическое моделирование фазовых портретов колебания двойного маятника // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. — Вип. 2(43), Дніпропетровськ, 2006 — С. 120 - 124

73. Куценко Л.М., Піксамов М.М. Визначення критичних значень параметрів нелінійних диференціальних рівнянь за допомогою анімації зображень їх розв'язків // Прикладна геометрія і інженерна графіка // Київ: КНУБА, вип. 78, 2007. – С. 33 – 40
74. Куценко Л.М., Піксамов М.М. Визначення області стійкості горизонтального руху корабля на повітряній подушці // Геометричне та комп'ютерне моделювання. Харків: ХДУХТ, 2007. Вип. 20. – С. 45-52
75. Куценко Л.М., Піксамов М.М., Сидоренко О.С. Геометричне моделювання поведінки динамічних систем з нечіткими параметрами // Современные проблемы геометрического моделирования. - Харьков: КГУПТ, 2007 – С. 108-121
76. Ландовский В.В. Методы интегрирования дифференциальных уравнений в задаче моделирования поведения ткани методом частиц http://www.graphicon.ru/2006/proceedings/papers/fr06_15_Landovsky.pdf77
77. Ландовский В.В. Методы интегрирования дифференциальных уравнений в задаче моделирования поведения ткани методом частиц. Материалы 15-ой международной конференции по компьютерной графике. Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН. Новосибирск, Академгородок. 2005. С. 234-241.
78. Ларін О.М., Кривошей Б.І. Математична модель руху транспортного засобу по нерівній дорозі // Проблеми пожежної безпеки. Харків: Фолио, 2004. Вип. 16. - С. 127-135.
79. Ларін О.М., Кривошей Б.І. Фазові портрети коливань надресорного вантажу, спричинених періодичними нерівностями шляху // Геометричне та комп'ютерне моделювання. Харків: ХДУХТ, 2005. Вип. 10. – С. 25-32
80. Лоскутов А.Ю. Проблемы нелинейной динамики. II. Подавление хаоса и управление динамическими системами // Вестн. МГУ. 2001. № 2. С. 3–21.
81. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. М.: Гостехиздат, 1950. 356 с.
82. Магницкий Н.А., Сидоров С.В. Управление хаосом в нелинейных динамических системах // Дифференциальные уравнения. 1998. № 11. С. 1501–1509.
83. Малинецкий Г.Г. Хаос. Структуры. Вычислительный эксперимент: Введение в нелинейную динамику // М.: Наука. 1997. 254с.
84. Манзон Б.М. Maple V Power Edition. – М.: ИИД «Филинь», 1998. – 240 с.
85. Маркеев А.П. Теоретическая механика. – М.: Наука, 1990.

86. Матвеев С.В, Фоменко А.Т. Алгоритмические и компьютерные методы в трехмерной топологии. М.: Изд-во МГУ. 1991. 301 с.
87. Матросов А.В. Maple 6. Решение задач высшей математики и механики. — СПб.: БХВ - Петербург, 2001.— 528 с.
88. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике. — М.: Наука, 1981. — 480 с.
89. Мигулин В.В., Медведев В.И., Мустрель Е.Р., Парыгин В.Н. Основы теории колебаний, 1978.
90. Милнор Дж., Уоллес А. Дифференциальная топология. Начальный курс. М.: Мир. 1972. 278 с.
91. Милнор Дж. Голоморфная динамика. Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика. 2000. 319 с.
92. Морозов А.Д. Введение в теорию фракталов. Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского университета. 1999. 140 с.
93. Морозов А.Д., Драгунов Т.Н. Визуализация и анализ инвариантных множеств динамических систем. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. — 304 с.
94. Мун Ф. Хаотические колебания: Вводный курс для научных работников и инженеров. —М.: Мир, 1990. — 312 с.
95. Мак-Лахлан Н.В. Теория и приложения функций Матъе. М.: ИЛ, 1953. 320 с.
96. Малинецкий Г.Г. Хаос. Структуры. Вычислительный эксперимент: Введение в нелинейную динамику // М.: Наука. 1997. 254 с.
97. Мартынов Б.А. Теория колебаний. Математические модели динамических систем. Учеб. пособие. СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2002. 56 с.
98. Мандельштам Л.И. Лекции по теории колебаний. М.: Наука, 1972. 472 с.
99. Тер Хаар Д. Основы гамильтоновой механики М.: Наука, 1974. 222 с.
100. Мигулин В.В., Медведев В.И., Мустрель Е.Р., Парыгин В.Н. Основы теории колебаний. М.: Наука, 1988. 392 с.
101. Неймарк Ю.И., Ланда П.С. Стохастические и хаотические колебания. — М.: Наука, 1987. — 424 с.
102. Новожилов И.В. Зацепин М.Ф. Типовые расчеты по теоретической механике на базе ЭВМ.- М.: Высшая школа, 1986. - 136 с.
103. Обморшев А.Н. Введение в теорию колебаний. М.: Наука, 1965. 276 с.
104. Павловский М.А., Акинфиева Л.Ю., Бойчук О.Ф. Теоретическая механика. Динамика. — Киев: Выща шк., 1990. — 480 с.

105. Пайтген Х.-О., Рихтер П.Х. Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем. М.: Мир. 1993. 176 с.
106. Пановко Я.Г. Введение в теорию механических колебаний. —М.: Наука, 1991. 288 с.
107. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1965. 332 с.
108. Плисс В.А. Нелокальные проблемы теории колебаний. —М.: Мир, 1964. 368 с.
109. Попов С.А. Курсовое проектирование по теории механизмов и механике машин. — М.: Высшая школа, 1986. — 294 с.
110. Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. М.— Л.: ОГИЗ, 1947. 296 с.
111. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1992. 432 с.
112. Рабинович М.И., Езерский А.Б. Динамическая теория формообразования. М.: Янус-К. 1998. 192 с.
113. Ривин Е. И. Динамика привода станков.- М.: Машиностроение, 1966.-204 с. .
114. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: Учеб. пособие для техн. вузов / Яблонский А.А., Норейко С.С., Вольфсон С.А. и др.; Под ред. А.А.Яблонского. — 3-е изд — М.: Высшая школа, 1972. — 432 с.
115. Светлицкий В.А., Стасенко И.В. Сборник задач по теории колебаний. — М.: Высшая школа, 1973. — 456 с.
116. Справочник по электрическим машинам: В 2 т. —М.: Энергоатомиздат, т.1. 1988.-456 с.
117. Струтинський В.Б. Математичне моделювання процесів та систем механіки. —Житомир: ЖІТІ, 2001. — 612 с.
118. Тарасевич Ю.Ю. Математическое и компьютерное моделирование. Вводный курс. М: Эдиториал УРСС, 2004. 152 с.
119. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. — М.: Высшая школа, 1998. — 416 с.
120. Теоретическая механика. Вывод и анализ уравнений движения на ЭВМ. Под редакцией В.Г.Веретенникова. —М.: Высшая школа, 1990.-174с.
121. Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле, 1967.
122. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М. Мир. 1974.

123. Управление мехатронными вибрационными установками / Под ред. И.И. Блехмана, А.Л. Фрадкова. СПб.: Наука, 2001. 278 с.
124. Фрадков А.Л. Кибернетическая физика: Принципы и примеры. СПб.: Наука, 2003. – 208 с., 47 ил.
125. Херхагер М., Партоль Х. Mathcad 2000: полное руководство. – К.: Издательская группа ВНУ, 2000.-416с.
126. Хаяси Т. Нелинейные колебания в физических системах. – М.: «Мир», 1968. 432 с.
127. Чистовалов С. М., Мельников В. Д. Вибрационный комбинированный аппарат для малотоннажных производств химических реактивов и особо чистых веществ. Химическая промышленность, 1990, №6, с. 357-358.
128. Чернов А.В., Чистовалов С.М. Застосування вібраційного впливу в апаратах хіміко-фармацевтичних виробництв.-Вісник фармації, Харків, 1994, №1-2, с. 39-42.
129. Шатохин В.М., Адашевская И.Ю. Моделирование динамических процессов в шариковых радиально-поршневых насосах // Геометричне та комп'ютерне моделювання. Харків: ХДУХТ, 2006. Вип. 14. – С. 41-51
130. Шатохін В.М., Адашевська І.Ю. Геометричне моделювання переміщення точок робочої камери вібраційного апарату // Геометричне та комп'ютерне моделювання. Харків: ХДУХТ, 2005. Вип. 12. – С. 94-100
131. Широносков В.Г. Резонанс в физике, химии и биологии. Ижевск. Издательский дом «Удмуртский университет», 2000/01. 92 с.
132. Электронная версия конспектов по нелинейной динамике. МГУ, 1999г., [http:// kali.ilc.msu.ru/educat/nld.htm](http://kali.ilc.msu.ru/educat/nld.htm) .
133. Элементы приборных устройств. Курсовое проектирование. Часть 1. Расчеты/под ред. О.Ф. Тищенко. - М.: Высшая школа, 1978.-327 с.
134. Яблонский А.А., Норейко С.С. Курс теории колебаний. — М.: Высшая школа, 1975.— 163 с.
135. Яковенко Г.Н. Лекции по теоретической механике. Устойчивость, колебания, гамильтонова механика. М.:МФТИ, 2003.-186 с.
136. Weisstein Eric. Double Pendulum – from Eric Weisstein’s World of Physics [On-line]. Accessed November 16, 2003. Available at: <http://scienceworld.wolfram.com/physics/DoublePendulum.html> .
137. Neumann Erik. My Physics Lab - Double Pendulum [On-line]. Available at: <http://www.myphysicslab.com/dblpendulum.html>. Accessed November 16, 2003.

138. Dullin H. R. Melnikov's method applied to the double pendulum. *Z. Phys. B*, 93 (1994), 521 - 528.
139. Paul A., Richter P.H. Application of Greene's method and the MacKay residue criterion to the double pendulum. *Z. Phys. B*, 93(1994), 515-520.
140. Richter P.H., Scholz H.-J. Chaos in classical mechanics: The double pendulum. In: Schuster, P. (ed.): *Stochastic Phenomena and Chaotic Behaviour in Complex Systems*. Springer, Berlin, Heidelberg, 1984, pp. 86-97.
141. Richter P.H., Scholz H.-J. Das ebene Doppelpendel - the planar double pendulum. *Publikationen zu Wissenschaftlichen Filmen, Sektion Technische Wissenschaften/Naturwissenschaften, Serie 9* (1986) 7, 3-35.
142. Zhang C.: Parameter dependence of chaotic behavior in the double pendulum. Dissertation, Universität Bremen, 1994.
143. Bellman R., Bentsman J., Meerkov S. Vibrational control of nonlinear systems // *IEEE Trans. Autom. Control*. 1986. V. AC-31. № 8. P. 710–724.
144. Boccaletti S., Grebogi C., Lai Y.C., et al. The control of chaos: theory and applications // *Physics Reports*. 2000. V. 329. P. 103–197.
145. Brockett R.W. Control theory and analytical mechanics // *Geometric Control Theory, Lie Groups*. V. VII / Eds. C. Martin, R. Hermann. *Mat. Sci. Press*, Brookline, MA, 1977. P. 1–48.
146. Byrnes C., Isidori A., Willems I.C. Passivity, feedback equivalence and the global stabilization of minimum phase nonlinear systems // *IEEE Trans. Automat. Control*. V. AC-36, No. 11, P. 1228–1240.
147. Shiriaev A.S., O. Egeland, H. Ludvigsen, A.L. Fradkov. VSS-version of energy-based control for swinging up a pendulum // *Systems & Contr. Lett.* 2001. V. 44 (1). P. 45–56.
148. Stuart J. imi.sitc.ru/~amleonov/Stuart/chap5.pdf (Односторонний маятник) 27.02.2006 - 189 Kb - <http://imi.sitc.ru/~amleonov/Stuart/chap5.pdf> imi.sitc.ru (всего 2)
149. http://www.rpd.univ.kiev.ua/new/ukr_f/cikavo/phys_world.php
150. <http://online.redwoods.cc.ca.us/instruct/darnold/deproj/index.htm>
151. <http://scienceworld.wolfram.com/physics/DoublePendulum.html>
152. [http://en.wikipedia.org/wiki/Pendulum_\(disambiguation\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Pendulum_(disambiguation))
153. http://en.wikipedia.org/wiki/Double_pendulum
154. <http://en.wikipedia.org/wiki/Image:Pendulumphase.png>
155. http://en.wikipedia.org/wiki/Image:Simple_pendulum_height.jpg

ДОДАТОК

(програми для комп'ютера)

1. Maple – програма розрахунку коливань маятника ланцюгового типу (як приклад - чотириланкового).

```
T := 2:      N := 100:      g := 9.8:
L1 := 0.2:  L2 := 0.2:  L3 := 0.2:  L4 := 0.2:
m1 := 1.:  m2 := 1.:  m3 := 1.:  m4 := 1.:
q1 := Pi/2:  q2 := Pi/2:  q3 := 0.:  q4 := 0.:
Jc := 0.: # момент інерції всього тіла відносно центра мас
```

```
x1 := L1*sin(u1(t)):
y1 := L1*cos(u1(t)):
x2 := x1 + L2*sin(u2(t)):
y2 := y1 + L2*cos(u2(t)):
x3 := x2 + L3*sin(u3(t)):
y3 := y2 + L3*cos(u3(t)):
x4 := x3 + L4*sin(u4(t)):
y4 := y3 + L4*cos(u4(t)):
```

кінетическая енергія

```
K := (m1*(diff(x1,t)^2 + diff(y1,t)^2) +
      m2*(diff(x2,t)^2 + diff(y2,t)^2) +
      m3*(diff(x3,t)^2 + diff(y3,t)^2) +
      m4*(diff(x4,t)^2 + diff(y4,t)^2) )/2:
# + Jc*diff(v(t),t)^2/2;
```

потенціальна енергія

```
P1 := -(m1 + m2 + m3 + m4)*g*y1:
P2 := -(m2 + m3 + m4)*g*y2:
P3 := -(m3 + m4)*g*y3:
P4 := -m4*g*y4:
P := P1 + P2 + P3 + P4:
L := simplify(K - P, trig):
```

```
dT_U1:=subs(Q=diff(u1(t),t),
            diff(subs(diff(u1(t),t)=Q,L),Q)):
dT_U2:=subs(Q=diff(u2(t),t),
            diff(subs(diff(u2(t),t)=Q,L),Q)):
dT_U3:=subs(Q=diff(u3(t),t),
            diff(subs(diff(u3(t),t)=Q,L),Q)):
dT_U4:=subs(Q=diff(u4(t),t),
            diff(subs(diff(u4(t),t)=Q,L),Q)):
dT_U1_dt := diff(dT_U1, t):
```

```

dT_U2_dt := diff(dT_U2, t):
dT_U3_dt := diff(dT_U3, t):
dT_U4_dt := diff(dT_U4, t):
dP_U1 := subs(Q = u1(t),
              diff(subs(u1(t) = Q, L), Q)):
dP_U2 := subs(Q = u2(t),
              diff(subs(u2(t) = Q, L), Q)):
dP_U3 := subs(Q = u3(t),
              diff(subs(u3(t) = Q, L), Q)):
dP_U4 := subs(Q = u4(t),
              diff(subs(u4(t) = Q, L), Q)):

```

Финальная система уравнений:

```

ODE1 := dT_U1_dt - dP_U1 = 0:
ODE2 := dT_U2_dt - dP_U2 = 0:
ODE3 := dT_U3_dt - dP_U3 = 0:
ODE4 := dT_U4_dt - dP_U4 = 0:

```

Начальные условия:

```

initial := {u1(0)=q1, D(u1)(0)=0,
            u2(0)=q2, D(u2)(0)=0,
            u3(0)=q3, D(u3)(0)=0,
            u4(0)=q4, D(u4)(0)=0}:

```

Решаем численно:

```

sol := dsolve({ODE1, ODE2, ODE3, ODE4}
              union initial, numeric,
              method=rkf45,output=listprocedure):
solu1 := subs(sol, u1(t)):
solu2 := subs(sol, u2(t)):
solu3 := subs(sol, u3(t)):
solu4 := subs(sol, u4(t)):
dsolu1 := subs(sol, diff(u1(t),t)):
dsolu2 := subs(sol, diff(u2(t),t)):
dsolu3 := subs(sol, diff(u3(t),t)):
dsolu4 := subs(sol, diff(u4(t),t)):

unassign('t'):t:
Glu1 := plot([solu1(t), dsolu1(t),t=0..T]):
unassign('t'):t:
Glu2 := plot([solu2(t), dsolu2(t),t=0..T]):
unassign('t'):t:
Glu3 := plot([solu3(t), dsolu3(t),t=0..T]):
unassign('t'):t:
Glu4 := plot([solu4(t), dsolu4(t),t=0..T]):

```

```

# вторые начальные условия
initial := {u1(0)=q1, D(u1)(0)=0,
            u2(0)=q2, D(u2)(0)=0,
            u3(0)=q3 + Pi/1000, D(u3)(0)=0,
            u4(0)=q4, D(u4)(0)=0}:
Решаем численно:
sol := dsolve({ODE1, ODE2, ODE3, ODE4}
              union initial,numeric,
              method=rkf45, output=listprocedure):
solu1 := subs(sol, u1(t)):
solu2 := subs(sol, u2(t)):
solu3 := subs(sol, u3(t)):
solu4 := subs(sol, u4(t)):
dsolu1 := subs(sol, diff(u1(t),t)):
dsolu2 := subs(sol, diff(u2(t),t)):
dsolu3 := subs(sol, diff(u3(t),t)):
dsolu4 := subs(sol, diff(u4(t),t)):

unassign('t'):t:
G2u1 := plot([solu1(t), dsolu1(t),t=0..T], linestyle=4):
unassign('t'):t:
G2u2 := plot([solu2(t), dsolu2(t),t=0..T], linestyle=4):
unassign('t'):t:
G2u3 := plot([solu3(t), dsolu3(t),t=0..T], linestyle=4):
unassign('t'):t:
G2u4 := plot([solu4(t), dsolu4(t),t=0..T], linestyle=4):

# третьи начальные условия
initial := {u1(0)=q1, D(u1)(0)=0,
            u2(0)=q2, D(u2)(0)=0,
            u3(0)=q3 - Pi/1000, D(u3)(0)=0,
            u4(0)=q4, D(u4)(0)=0}:
Решаем численно:
sol := dsolve({ODE1, ODE2, ODE3, ODE4} union
initial,numeric,
method=rkf45, output=listprocedure):
solu1 := subs(sol, u1(t)):
solu2 := subs(sol, u2(t)):
solu3 := subs(sol, u3(t)):
solu4 := subs(sol, u4(t)):
dsolu1 := subs(sol, diff(u1(t),t)):
dsolu2 := subs(sol, diff(u2(t),t)):

```

```

dsolu3 := subs(sol, diff(u3(t),t)):
dsolu4 := subs(sol, diff(u4(t),t)):

unassign('t'):t:

G3u1 := plot([solu1(t), dsolu1(t),t=0..T],
linestyle=3):
unassign('t'):t:
G3u2 := plot([solu2(t), dsolu2(t),t=0..T],
linestyle=3):
unassign('t'):t:
G3u3 := plot([solu3(t), dsolu3(t),t=0..T],
linestyle=3):
unassign('t'):t:
G3u4 := plot([solu4(t), dsolu4(t),t=0..T],
linestyle=3):

```

Изображение совмещенных фазовых портретов для близких начальных условий с целью выявления хаотических колебаний

```

display(G1u1, G1u2, G1u3, G1u4, labels=[u1,du1],
axes=BOXED, axesfont=[TIMES,ITALIC,18],
labelfont=[TIMES,ITALIC,18]);
display(G2u1, G2u2, G2u3, G2u4, labels=[u2,du2],
axes=BOXED, axesfont=[TIMES,ITALIC,18],
labelfont=[TIMES,ITALIC,18]);
display(G3u1, G3u2, G3u3, G3u4, labels=[u3,du3],
axes=BOXED, axesfont=[TIMES,ITALIC,18],
labelfont=[TIMES,ITALIC,18]);
display(G4u1, G4u2, G4u3, G4u4, labels=[u4,du4],
axes=BOXED, axesfont=[TIMES,ITALIC,18],
labelfont=[TIMES,ITALIC,18]);

```

2. Maple – программа розрахунку коливань комбінованого маятника (як приклад – маятника Томсона-Тета).

```

T := 9:      N := 500:      g := 9.8:
L1 := 1.:   L2 := 0.5:   L3 := 0.2:
m2 := 1.:   m3 := 0.5:
q1 := Pi/2:  q2 := Pi/6:
xa := L1*sin(u(t)):      ya := L1*cos(u(t)):
xb := xa + L3*sin(v(t)):  yb := ya + L3*cos(v(t)):
xc := xa - L2*sin(v(t)):  yc := ya - L2*cos(v(t)):

```

```

# Jc - момент инерции всего тела относительно центра масс
Jc := 0.1:

кинетическая энергия маятников
K := ((m2 + m3)*(diff(xa,t)^2 + diff(ya,t)^2) +
      m3*(diff(xb,t)^2 + diff(yb,t)^2) +
      m2*(diff(xc,t)^2 + diff(yc,t)^2))/2 +
      Jc*diff(v(t),t)^2/2:

потенциальная энергия
P1 := g*m3*(L1 + L2 - yb):
P2 := g*m2*(L1 - L2 - yc):
P := P1 + P2:
L := K - P:
dL_U:=subs(W=diff(u(t),t),
           diff(subs(diff(u(t),t)=W,L),W)):
dL_V:=subs(W=diff(v(t),t),
           diff(subs(diff(v(t),t)=W,L),W)):
dT_U_dt := diff(dL_U, t):
dT_V_dt := diff(dL_V, t):
dL_U_ := subs(W = u(t), diff(subs(u(t) = W, L), W)):
dL_V_ := subs(W = v(t), diff(subs(v(t) = W, L), W)):

Финальная система уравнений:
ODE1 := simplify(dT_U_dt - dL_U_)=0:
ODE2 := simplify(dT_V_dt - dL_V_)=0:

Начальные условия:
initial := {u(0)=q1, D(u)(0)=0, v(0)=q2, D(v)(0)=0}:

Решаем численно:
sol := dsolve({ODE1,ODE2} union initial, numeric,
method=rkf45, output=listprocedure):
solu := subs(sol, u(t)):
solv := subs(sol, v(t)):
dsolu := subs(sol, diff(u(t),t)):
dsolv := subs(sol, diff(v(t),t)):

unassign('t'):t:
Gu1 := plot([solu(t), dsolu(t),t=0..T]):
unassign('t'):t:
Gv1 := plot([solv(t), dsolv(t),t=0..T]):

```

```
# вторые начальные условия
initial:={u(0)=q1, D(u)(0)=0, v(0)=q2 + Pi/1000,
D(v)(0)=0}:
```

Решаем численно:

```
unassign('t'):t:
sol:= dsolve({ODE1,ODE2} union initial, numeric,
method=rkf45, output=listprocedure):
solu := subs(sol, u(t)):
solv := subs(sol, v(t)):
dsolu := subs(sol, diff(u(t),t)):
dsolv := subs(sol, diff(v(t),t)):

unassign('t'):t:
Gu2 := plot([solu(t), dsolu(t),t=0..T],linestyle=4):
unassign('t'):t:
Gv2 := plot([solv(t), dsolv(t),t=0..T], linestyle=4):
# третьи начальные условия
initial := {u(0)=q1, D(u)(0)=0, v(0)=q2-Pi/1000,
D(v)(0)=0}:
```

Решаем численно:

```
unassign('t'):t:
sol:= dsolve({ODE1,ODE2} union initial, numeric,
method=rkf45, output=listprocedure):
solu := subs(sol, u(t)):
solv := subs(sol, v(t)):
dsolu := subs(sol, diff(u(t),t)):
dsolv := subs(sol, diff(v(t),t)):

unassign('t'):t:
Gu3 := plot([solu(t), dsolu(t),t=0..T], linestyle=3):
unassign('t'):t:
Gv3 := plot([solv(t), dsolv(t),t=0..T], linestyle=3):
display(Gu1, Gu2, Gu3, labels=[u,du], axes=BOXED,
axesfont=[TIMES,ITALIC,18],
labelfont=[TIMES,ITALIC,18]);
display(Gv1, Gv2, Gv3, labels=[v,dv],axes=BOXED,
axesfont=[TIMES,ITALIC,18],
labelfont=[TIMES,ITALIC,18]);
```

3. Maple – программа розрахунку машини для метання (катапульти)

```

g := 9.8: T := 1.1: N := 100:
L1 := 1.: L2 := 4.: L3 := 4.25: L4 := 1.:
m1 := 100.: m2 := 2.: mb := 0.:
q1 := Pi/2+Pi/4: q2 := Pi/4: q3 := Pi/4:
x1 := L1*sin(u(t)): y1 := -L1*cos(u(t)):
x2 := -L2*sin(u(t)): y2 := L2*cos(u(t)):
x4 := x1 - L4*sin(u(t) + v(t)):
y4 := y1 + L4*cos(u(t) + v(t)):
x3 := x2 + L3*sin(u(t) - w(t)):
y3 := y2 - L3*cos(u(t) - w(t)):

```

кінетическа енергія

```

K := m1*(diff(x4,t)^2 + diff(y4,t)^2)/2 +
     m2*(diff(x3,t)^2 + diff(y3,t)^2)/2 +
     mb*(L1^2 - L1*L2 + L2^2)*diff(u(t),t)^2/6:

```

потенціальна енергія

```

P := m1*g*y4 + m2*g*y3 - mb*g*cos(u(t))*(L1 - L2):
L := simplify(K - P);
dL_U:=subs(Q=diff(u(t),t),
           diff(subs(diff(u(t),t)=Q,L),Q)):
dL_V:=subs(Q=diff(v(t),t),
           diff(subs(diff(v(t),t)=Q,L),Q)):
dL_W:=subs(Q=diff(w(t),t),
           diff(subs(diff(w(t),t)=Q,L),Q)):
dT_U_dt := diff(dL_U, t):
dT_V_dt := diff(dL_V, t):
dT_W_dt := diff(dL_W, t):
dL_U_ := subs(Q = u(t), diff(subs(u(t) = Q, L), Q)):
dL_V_ := subs(Q = v(t), diff(subs(v(t) = Q, L), Q)):
dL_W_ := subs(Q = w(t), diff(subs(w(t) = Q, L), Q)):

```

Фінальна система рівнянь:

```

ODE1 := dT_U_dt - dL_U_ = 0:
ODE2 := dT_V_dt - dL_V_ = 0:
ODE3 := dT_W_dt - dL_W_ = 0:

```

Начальні умови:

```

initial := {u(0)=q1, D(u)(0)=0,
           v(0)=q2, D(v)(0)=0,
           w(0)=q3, D(w)(0)=0}:

```

Решаем численно:

```
sol := dsolve({ODE1, ODE2, ODE3} union initial,
numeric, method=rkf45, output=listprocedure):
```

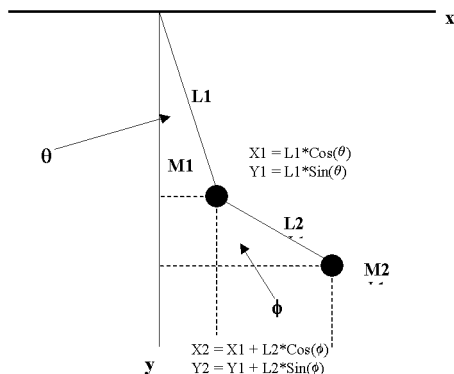
```
solu := subs(sol, u(t)):
solv := subs(sol, v(t)):
solw := subs(sol, w(t)):
dsolu := subs(sol, diff(u(t),t)):
dsolv := subs(sol, diff(v(t),t)):
dsolw := subs(sol, diff(w(t),t)):
unassign('t'):t:
```

изображаются фазовые портреты для всех трех углов

```
plot([solu(t), dsolu(t),t=0..T], color=red,
thickness=3, numpoints=500, labels=[u,du],
axes=BOXED, axesfont=[TIMES,ITALIC,18],
labelfont=[TIMES,ITALIC,18]);
unassign('t'):t:
plot([solv(t), dsolv(t),t=0..T], color=red,
thickness=3, numpoints=500, labels=[v,dv],
axes=BOXED, axesfont=[TIMES,ITALIC,18],
labelfont=[TIMES,ITALIC,18]);
unassign('t'):t:
plot([solw(t), dsolw(t),t=0..T], color=red,
thickness=3, numpoints=500, labels=[w,dw],
axes=BOXED, axesfont=[TIMES,ITALIC,18],
labelfont=[TIMES,ITALIC,18]);
```

На завершення, у якості довідника програмування, наведемо чотири Maple-програми розрахунку подвійних маятникових систем, які нам вдалося знайти на сайтах Інтернету.

Першу програму було знайдено на сайті http://www.maplesoft.com/applications/app_center_view.aspx. Автор цієї програми R.A.Smith. Програму, яка дозволяє будувати траєкторії переміщення вузлів подвійного маятника, наведемо з авторськими коментарями.



restart;

Cartesian co-ordinates for the upper mass.

x1:=L1*cos(theta(t));

y1:=L1*sin(phi(t));

y1 := L1 sin(theta(t))

y1 := L1 sin(theta(t))

And for the lower mass.

x2:=L1*cos(theta(t))+L2*cos(phi(t));

y2:=L1*sin(theta(t))+L2*sin(phi(t));

y2 := L1 sin(theta(t)) + L2 sin(phi(t))

y2 := L1 sin(theta(t)) + L2 sin(phi(t))

Now calculate the velocities.

x1dot:=diff(x1,t); y1dot:=diff(y1,t);

x2dot:=diff(x2,t); y2dot:=diff(y2,t);

ewd := -0.05366032069+ 5.787069938i, -0.05366032069- 5.787069938i,
-0.0713396793i+ 2.396151146i, -0.0713396793i- 2.396151146i

$$x2dot := -L1 \sin(\theta(t)) \left(\frac{d}{dt} \theta(t) \right) - L2 \sin(\phi(t)) \left(\frac{d}{dt} \phi(t) \right)$$

$$y2dot := L1 \cos(\theta(t)) \left(\frac{d}{dt} \theta(t) \right) + L2 \cos(\phi(t)) \left(\frac{d}{dt} \phi(t) \right)$$

Calculate the Kinetic Energy, T

$$\mathbf{T} := \mathbf{simplify}(m1/2 * (\mathbf{x1dot}^2 + \mathbf{y1dot}^2) + m2/2 * (\mathbf{x2dot}^2 + \mathbf{y2dot}^2));$$

$$\begin{aligned} Lg := & \frac{1}{2} m1 L1^2 \left(\frac{d}{dt} \theta(t) \right)^2 - \frac{1}{2} m1 L1^2 \left(\frac{d}{dt} \theta(t) \right)^2 \cos(\theta(t))^2 \\ & + \frac{1}{2} m1 L1^2 \cos(\phi(t))^2 \left(\frac{d}{dt} \phi(t) \right)^2 + \frac{1}{2} m2 L1^2 \left(\frac{d}{dt} \theta(t) \right)^2 \\ & + m2 L1 \sin(\theta(t)) \left(\frac{d}{dt} \theta(t) \right) L2 \sin(\phi(t)) \left(\frac{d}{dt} \phi(t) \right) + \frac{1}{2} m2 L2^2 \left(\frac{d}{dt} \phi(t) \right)^2 \\ & + m2 L1 \cos(\theta(t)) \left(\frac{d}{dt} \theta(t) \right) L2 \cos(\phi(t)) \left(\frac{d}{dt} \phi(t) \right) \end{aligned}$$

The potential energy is calculated with reference to the point L1 + L2 below the x axis since this is the zero point.

$$\mathbf{V} := m1 * \mathbf{g} * (\mathbf{L1} + \mathbf{L2} - \mathbf{L1} * \mathbf{cos}(\mathbf{theta}(t))) + m2 * \mathbf{g} * (\mathbf{L1} + \mathbf{L2} - (\mathbf{L1} * \mathbf{cos}(\mathbf{theta}(t)) + \mathbf{L2} * \mathbf{cos}(\mathbf{phi}(t))));$$

$$V := m1 g (L1 + L2 - L1 \cos(\theta(t))) + m2 g (L1 + L2 - L1 \cos(\theta(t)) - L2 \cos(\phi(t)))$$

Define the Lagrangian for the system

$$\mathbf{Lg} := \mathbf{T} - \mathbf{V};$$

$$\begin{aligned} Lg := & \frac{1}{2} m1 L1^2 \left(\frac{d}{dt} \theta(t) \right)^2 - \frac{1}{2} m1 L1^2 \left(\frac{d}{dt} \theta(t) \right)^2 \cos(\theta(t))^2 \\ & + \frac{1}{2} m1 L1^2 \cos(\phi(t))^2 \left(\frac{d}{dt} \phi(t) \right)^2 + \frac{1}{2} m2 L1^2 \left(\frac{d}{dt} \theta(t) \right)^2 \\ & + m2 L1 \sin(\theta(t)) \left(\frac{d}{dt} \theta(t) \right) L2 \sin(\phi(t)) \left(\frac{d}{dt} \phi(t) \right) + \frac{1}{2} m2 L2^2 \left(\frac{d}{dt} \phi(t) \right)^2 \\ & + m2 L1 \cos(\theta(t)) \left(\frac{d}{dt} \theta(t) \right) L2 \cos(\phi(t)) \left(\frac{d}{dt} \phi(t) \right) \\ & - m1 g (L1 + L2 - L1 \cos(\theta(t))) - m2 g (L1 + L2 - L1 \cos(\theta(t)) - L2 \cos(\phi(t))) \end{aligned}$$

The next step is to calculate the partial derivatives necessary to set up the equations of motion. Even doing this by hand would be quite a challenge.

$$\mathbf{Ltheta} := \mathbf{subs}(pg = \theta(t), \mathbf{diff}(\mathbf{subs}(\theta(t) = pg, Lg), pg));$$

$$\begin{aligned} Ltheta := & m1 L1^2 \left(\frac{d}{dt} \theta(t) \right)^2 \cos(\theta(t)) \sin(\theta(t)) \\ & + m2 L1 \cos(\theta(t)) \left(\frac{d}{dt} \theta(t) \right) L2 \sin(\phi(t)) \left(\frac{d}{dt} \phi(t) \right) \\ & - m2 L1 \sin(\theta(t)) \left(\frac{d}{dt} \theta(t) \right) L2 \cos(\phi(t)) \left(\frac{d}{dt} \phi(t) \right) - m1 g L1 \sin(\theta(t)) \\ & - m2 g L1 \sin(\theta(t)) \end{aligned}$$

$$\mathbf{Lphi} := \mathbf{subs}(k = \phi(t), \mathbf{diff}(\mathbf{subs}(\phi(t) = k, Lg), k));$$

$$\begin{aligned} Lphi := & -m1 L1^2 \cos(\phi(t)) \left(\frac{d}{dt} \phi(t) \right)^2 \sin(\phi(t)) \\ & + m2 L1 \sin(\theta(t)) \left(\frac{d}{dt} \theta(t) \right) L2 \cos(\phi(t)) \left(\frac{d}{dt} \phi(t) \right) \\ & - m2 L1 \cos(\theta(t)) \left(\frac{d}{dt} \theta(t) \right) L2 \sin(\phi(t)) \left(\frac{d}{dt} \phi(t) \right) - m2 g L2 \sin(\phi(t)) \end{aligned}$$

$$\mathbf{Lthetadot} := \mathbf{subs}(td = \mathbf{diff}(\theta(t), t), \mathbf{diff}(\mathbf{subs}(\mathbf{diff}(\theta(t), t) = td, Lg), td));$$

$$\begin{aligned} Lthetadot := & m1 L1^2 \left(\frac{d}{dt} \theta(t) \right) - m1 L1^2 \left(\frac{d}{dt} \theta(t) \right) \cos(\theta(t))^2 + m2 L1^2 \left(\frac{d}{dt} \theta(t) \right) \\ & + m2 L1 \sin(\theta(t)) L2 \sin(\phi(t)) \left(\frac{d}{dt} \phi(t) \right) + m2 L1 \cos(\theta(t)) L2 \cos(\phi(t)) \left(\frac{d}{dt} \phi(t) \right) \end{aligned}$$

$$\mathbf{Lphidot} := \mathbf{subs}(pd = \mathbf{diff}(\phi(t), t), \mathbf{diff}(\mathbf{subs}(\mathbf{diff}(\phi(t), t) = pd, Lg), pd));$$

$$\begin{aligned} Lphidot := & m1 L1^2 \cos(\phi(t))^2 \left(\frac{d}{dt} \phi(t) \right) + m2 L1 \sin(\theta(t)) \left(\frac{d}{dt} \theta(t) \right) L2 \sin(\phi(t)) \\ & + m2 L2^2 \left(\frac{d}{dt} \phi(t) \right) + m2 L1 \cos(\theta(t)) \left(\frac{d}{dt} \theta(t) \right) L2 \cos(\phi(t)) \end{aligned}$$

The Euler-Lagrange equations for this system are defined as

$$\mathbf{eq1} := \mathbf{diff}(Lthetadot, t) = Ltheta;$$

$$\mathbf{eq2} := \mathbf{diff}(Lphidot, t) = Lphi;$$

$$\begin{aligned} eq1 := & m1 L1^2 \left(\frac{d^2}{dt^2} \theta(t) \right) - m1 L1^2 \left(\frac{d^2}{dt^2} \theta(t) \right) \cos(\theta(t))^2 \\ & + 2 m1 L1^2 \left(\frac{d}{dt} \theta(t) \right)^2 \cos(\theta(t)) \sin(\theta(t)) + m2 L1^2 \left(\frac{d^2}{dt^2} \theta(t) \right) \\ & - m2 L1 \sin(\theta(t)) \left(\frac{d}{dt} \theta(t) \right) L2 \cos(\phi(t)) \left(\frac{d}{dt} \phi(t) \right) \\ & - m2 L1 \cos(\theta(t)) L2 \sin(\phi(t)) \left(\frac{d}{dt} \phi(t) \right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + m_2 L_1 \sin(\theta(t)) L_2 \sin(\phi(t)) \left(\frac{d^2}{dt^2} \phi(t) \right) \\
& - m_2 L_1 \sin(\theta(t)) \left(\frac{d}{dt} \theta(t) \right) L_2 \cos(\phi(t)) \left(\frac{d}{dt} \phi(t) \right) \\
& - m_2 L_1 \cos(\theta(t)) L_2 \sin(\phi(t)) \left(\frac{d}{dt} \phi(t) \right)^2 \\
& + m_2 L_1 \cos(\theta(t)) L_2 \cos(\phi(t)) \left(\frac{d^2}{dt^2} \phi(t) \right) = m_1 L_1^2 \left(\frac{d}{dt} \theta(t) \right)^2 \cos(\theta(t)) \sin(\theta(t)) \\
& + m_2 L_1 \cos(\theta(t)) \left(\frac{d}{dt} \theta(t) \right) L_2 \sin(\phi(t)) \left(\frac{d}{dt} \phi(t) \right) \\
& - m_2 L_1 \sin(\theta(t)) \left(\frac{d}{dt} \theta(t) \right) L_2 \cos(\phi(t)) \left(\frac{d}{dt} \phi(t) \right) - m_1 g L_1 \sin(\theta(t)) \\
& - m_2 g L_1 \sin(\theta(t)) \\
eq2 := & -2 m_1 L_1^2 \cos(\phi(t)) \left(\frac{d}{dt} \phi(t) \right)^2 \sin(\phi(t)) + m_1 L_1^2 \cos(\phi(t))^2 \left(\frac{d^2}{dt^2} \phi(t) \right) \\
& + m_2 L_1 \cos(\theta(t)) \left(\frac{d}{dt} \theta(t) \right)^2 L_2 \sin(\phi(t)) \\
& + m_2 L_1 \sin(\theta(t)) \left(\frac{d^2}{dt^2} \theta(t) \right) L_2 \sin(\phi(t)) \\
& + m_2 L_1 \sin(\theta(t)) \left(\frac{d}{dt} \theta(t) \right) L_2 \cos(\phi(t)) \left(\frac{d}{dt} \phi(t) \right) + m_2 L_2^2 \left(\frac{d^2}{dt^2} \phi(t) \right) \\
& - m_2 L_1 \sin(\theta(t)) \left(\frac{d}{dt} \theta(t) \right)^2 L_2 \cos(\phi(t)) \\
& + m_2 L_1 \cos(\theta(t)) \left(\frac{d^2}{dt^2} \theta(t) \right) L_2 \cos(\phi(t)) \\
& - m_2 L_1 \cos(\theta(t)) \left(\frac{d}{dt} \theta(t) \right) L_2 \sin(\phi(t)) \left(\frac{d}{dt} \phi(t) \right) = \\
& - m_1 L_1^2 \cos(\phi(t)) \left(\frac{d}{dt} \phi(t) \right)^2 \sin(\phi(t)) \\
& + m_2 L_1 \sin(\theta(t)) \left(\frac{d}{dt} \theta(t) \right) L_2 \cos(\phi(t)) \left(\frac{d}{dt} \phi(t) \right) \\
& - m_2 L_1 \cos(\theta(t)) \left(\frac{d}{dt} \theta(t) \right) L_2 \sin(\phi(t)) \left(\frac{d}{dt} \phi(t) \right) - m_2 g L_2 \sin(\phi(t))
\end{aligned}$$

Before trying a numerical method it is necessary to define the masses and length and of course the acceleration due to gravity.

$$\mathbf{g} := 9.81: \quad \mathbf{L1} := 6: \quad \mathbf{L2} := 4: \quad \mathbf{m1} := 2: \quad \mathbf{m2} := 3:$$

The initial conditions defined here are fairly arbitrary, they give a nice plot at the end. You can change them if you want to see what happens.

```
ff := dsolve({eq1,eq2, theta(0)=.5,D(theta)(0)=4,
              phi(0)=1,D(phi)(0)=-2},
             {theta(t),phi(t)},type=numeric,output=listprocedure);
```

```
ff := [ t = (proc(t) ... end proc), phi(t) = (proc(t) ... end proc),
        d/dt phi(t) = (proc(t) ... end proc), theta(t) = (proc(t) ... end proc),
```

```
0.05366032069+ 5.787069938I, -0.05366032069- 5.787069938I,
7133967931+ 2.396151146I, -0.07133967931- 2.396151146I
```

```
Theta := subs(ff,theta(t));
```

```
Phi := subs(ff,phi(t));
```

```
Phi := proc(t) ... end proc
```

```
Phi := proc(t) ... end proc
```

Define the functions which will be used to calculate the position in the xy plane of the two masses.

```
X1 := t -> L1*cos(Theta(t));
```

```
Phi := proc(t) ... end proc
```

```
Y1 := t -> L1*sin(Phi(t));
```

```
Phi := proc(t) ... end proc
```

```
X2 := t -> L1*cos(Theta(t)) + L2*cos(Phi(t));
```

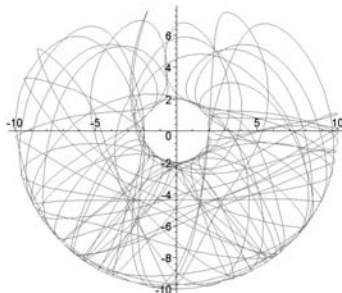
```
Y2 := t -> L1*sin(Theta(t)) + L2*sin(Phi(t))
```

```
Y2 := t -> L1*sin(Theta(t)) + L2*sin(Phi(t));
```

```
Y2 := t -> L1*sin(Theta(t)) + L2*sin(Phi(t))
```

Finally plot the position of the lower mass against time (this takes a while). It would be interesting to be able to show an animation of the pendulum in motion but that is beyond my expertise with Maple.

```
plot([Y2,-X2,0...100],numpoints=100);
```



На сайті www.physics.uiowa.edu/~grayne/teaching/205_2006/double-pendulum.mws було розміщено Maple програму розрахунку подвійної маятникової коливальної системи. Відмінність *другої програми* від попередньої полягає у її можливості будувати анімаційні зображення коливань.

```
restart;
x1:=L1*cos(theta(t)); y1:=L1*sin(theta(t));
      y1:=L1*sin(theta(t))
      y1:=L1*sin(theta(t))
x2:=L1*cos(theta(t))+L2*cos(phi(t));
y2:=L1*sin(theta(t))+L2*sin(phi(t));
      y2:=L1*sin(theta(t))+L2*sin(phi(t))
      y2:=L1*sin(theta(t))+L2*sin(phi(t))
x1dot:=diff(x1,t); y1dot:=diff(y1,t);
```

$[c_1 = 0.05530135874, d_1 = -0.003734858006, d_2 = 0.06344835473, c_2 = 0.05751281740]$

$ewd := -0.05366032069 + 5.787069938i, -0.05366032069 - 5.787069938i,$
 $-0.07133967931 + 2.396151146i, -0.07133967931 - 2.396151146i$

```
x2dot:=diff(x2,t); y2dot:=diff(y2,t);
```

$$x2dot := -L1 \sin(\theta(t)) \left(\frac{d}{dt} \theta(t) \right) - L2 \sin(\phi(t)) \left(\frac{d}{dt} \phi(t) \right)$$

$$y2dot := L1 \cos(\theta(t)) \left(\frac{d}{dt} \theta(t) \right) + L2 \cos(\phi(t)) \left(\frac{d}{dt} \phi(t) \right)$$

Calculate the kinetic energy, T

```
T:=simplify(m1/2*(x1dot^2+y1dot^2)+
            m2/2*(x2dot^2+y2dot^2));
```

$$Lg := \frac{1}{2} m1 L1^2 \left(\frac{d}{dt} \theta(t) \right)^2 + \frac{1}{2} m2 L1^2 \left(\frac{d}{dt} \theta(t) \right)^2$$

$$+ m2 L1 \sin(\theta(t)) \left(\frac{d}{dt} \theta(t) \right) L2 \sin(\phi(t)) \left(\frac{d}{dt} \phi(t) \right) + \frac{1}{2} m2 L2^2 \left(\frac{d}{dt} \phi(t) \right)^2$$

$$+ m2 L1 \cos(\theta(t)) \left(\frac{d}{dt} \theta(t) \right) L2 \cos(\phi(t)) \left(\frac{d}{dt} \phi(t) \right)$$

The potential energy is calculated with reference to the point $L1 + L2$ below the x axis since this is the zero point.

```
V := m1*g*(L1+L2-L1*cos(theta(t)))+
      m2*g*(L1+L2-(L1*cos(theta(t))+L2*cos(phi(t))));
```

$$V := m1 g (L1 + L2 - L1 \cos(\theta(t))) + m2 g (L1 + L2 - L1 \cos(\theta(t)) - L2 \cos(\phi(t)))$$

Define the Lagrangian for the system.

$$\begin{aligned} \mathbf{Lg} &:= \mathbf{T} - \mathbf{V}; \\ Lg &:= \frac{1}{2} m_1 L_1^2 \left(\frac{d}{dt} \theta(t) \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 L_2^2 \left(\frac{d}{dt} \theta(t) \right)^2 \\ &\quad + m_2 L_1 \sin(\theta(t)) \left(\frac{d}{dt} \theta(t) \right) L_2 \sin(\phi(t)) \left(\frac{d}{dt} \phi(t) \right) + \frac{1}{2} m_2 L_2^2 \left(\frac{d}{dt} \phi(t) \right)^2 \\ &\quad + m_2 L_1 \cos(\theta(t)) \left(\frac{d}{dt} \theta(t) \right) L_2 \cos(\phi(t)) \left(\frac{d}{dt} \phi(t) \right) \\ &\quad - m_1 g (L_1 + L_2 - L_1 \cos(\theta(t))) - m_2 g (L_1 + L_2 - L_1 \cos(\theta(t)) - L_2 \cos(\phi(t))) \end{aligned}$$

The next step is to calculate the partial derivatives necessary to set up the equations of motion. Doing this by hand would be quite tedious.

$$\begin{aligned} \mathbf{Ltheta} &:= \text{subs}(\mathbf{pg} = \mathbf{theta}(t), \\ &\quad \text{diff}(\text{subs}(\mathbf{theta}(t) = \mathbf{pg}, \mathbf{Lg}), \mathbf{pg})); \\ Ltheta &:= m_2 L_1 \cos(\theta(t)) \left(\frac{d}{dt} \theta(t) \right) L_2 \sin(\phi(t)) \left(\frac{d}{dt} \phi(t) \right) \\ &\quad - m_2 L_1 \sin(\theta(t)) \left(\frac{d}{dt} \theta(t) \right) L_2 \cos(\phi(t)) \left(\frac{d}{dt} \phi(t) \right) - m_1 g L_1 \sin(\theta(t)) \\ &\quad - m_2 g L_1 \sin(\theta(t)) \\ \mathbf{Lphi} &:= \text{subs}(\mathbf{k} = \mathbf{phi}(t), \text{diff}(\text{subs}(\mathbf{phi}(t) = \mathbf{k}, \mathbf{Lg}), \mathbf{k})); \\ Lphi &:= m_2 L_1 \sin(\theta(t)) \left(\frac{d}{dt} \theta(t) \right) L_2 \cos(\phi(t)) \left(\frac{d}{dt} \phi(t) \right) \\ &\quad - m_2 L_1 \cos(\theta(t)) \left(\frac{d}{dt} \theta(t) \right) L_2 \sin(\phi(t)) \left(\frac{d}{dt} \phi(t) \right) - m_2 g L_2 \sin(\phi(t)) \\ \mathbf{Lthetadot} &:= \text{subs}(\mathbf{td} = \text{diff}(\mathbf{theta}(t), t), \\ &\quad \text{diff}(\text{subs}(\text{diff}(\mathbf{theta}(t), t) = \mathbf{td}, \mathbf{Lg}), \mathbf{td})); \\ Lthetadot &:= m_1 L_1^2 \left(\frac{d}{dt} \theta(t) \right) + m_2 L_1^2 \left(\frac{d}{dt} \theta(t) \right) \\ &\quad + m_2 L_1 \sin(\theta(t)) L_2 \sin(\phi(t)) \left(\frac{d}{dt} \phi(t) \right) + m_2 L_1 \cos(\theta(t)) L_2 \cos(\phi(t)) \left(\frac{d}{dt} \phi(t) \right) \\ \mathbf{Lphidot} &:= \text{subs}(\mathbf{pd} = \text{diff}(\mathbf{phi}(t), t), \\ &\quad \text{diff}(\text{subs}(\text{diff}(\mathbf{phi}(t), t) = \mathbf{pd}, \mathbf{Lg}), \mathbf{pd})); \\ Lphidot &:= m_2 L_1 \sin(\theta(t)) \left(\frac{d}{dt} \theta(t) \right) L_2 \sin(\phi(t)) + m_2 L_2^2 \left(\frac{d}{dt} \phi(t) \right) \\ &\quad + m_2 L_1 \cos(\theta(t)) \left(\frac{d}{dt} \theta(t) \right) L_2 \cos(\phi(t)) \end{aligned}$$

The Euler-Lagrange equations for this system are defined as

$$\begin{aligned} \mathbf{eq1} &:= \text{diff}(\mathbf{Lthetadot}, t) = \mathbf{Ltheta}; \\ \mathbf{eq2} &:= \text{diff}(\mathbf{Lphidot}, t) = \mathbf{Lphi}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
eq1 := & m1 L1^2 \left(\frac{d^2}{dt^2} \theta(t) \right) + m2 L1^2 \left(\frac{d^2}{dt^2} \theta(t) \right) \\
& + m2 L1 \cos(\theta(t)) \left(\frac{d}{dt} \theta(t) \right) L2 \sin(\phi(t)) \left(\frac{d}{dt} \phi(t) \right) \\
& + m2 L1 \sin(\theta(t)) L2 \cos(\phi(t)) \left(\frac{d}{dt} \phi(t) \right)^2 \\
& + m2 L1 \sin(\theta(t)) L2 \sin(\phi(t)) \left(\frac{d^2}{dt^2} \phi(t) \right) \\
& - m2 L1 \sin(\theta(t)) \left(\frac{d}{dt} \theta(t) \right) L2 \cos(\phi(t)) \left(\frac{d}{dt} \phi(t) \right) \\
& - m2 L1 \cos(\theta(t)) L2 \sin(\phi(t)) \left(\frac{d}{dt} \phi(t) \right)^2 \\
& + m2 L1 \cos(\theta(t)) L2 \cos(\phi(t)) \left(\frac{d^2}{dt^2} \phi(t) \right) = \\
& m2 L1 \cos(\theta(t)) \left(\frac{d}{dt} \theta(t) \right) L2 \sin(\phi(t)) \left(\frac{d}{dt} \phi(t) \right) \\
& - m2 L1 \sin(\theta(t)) \left(\frac{d}{dt} \theta(t) \right) L2 \cos(\phi(t)) \left(\frac{d}{dt} \phi(t) \right) - m1 g L1 \sin(\theta(t)) \\
& - m2 g L1 \sin(\theta(t)) \\
eq2 := & m2 L1 \cos(\theta(t)) \left(\frac{d}{dt} \theta(t) \right)^2 L2 \sin(\phi(t)) \\
& + m2 L1 \sin(\theta(t)) \left(\frac{d^2}{dt^2} \theta(t) \right) L2 \sin(\phi(t)) \\
& + m2 L1 \sin(\theta(t)) \left(\frac{d}{dt} \theta(t) \right) L2 \cos(\phi(t)) \left(\frac{d}{dt} \phi(t) \right) + m2 L2^2 \left(\frac{d^2}{dt^2} \phi(t) \right) \\
& - m2 L1 \sin(\theta(t)) \left(\frac{d}{dt} \theta(t) \right)^2 L2 \cos(\phi(t)) \\
& + m2 L1 \cos(\theta(t)) \left(\frac{d^2}{dt^2} \theta(t) \right) L2 \cos(\phi(t)) \\
& - m2 L1 \cos(\theta(t)) \left(\frac{d}{dt} \theta(t) \right) L2 \sin(\phi(t)) \left(\frac{d}{dt} \phi(t) \right) = \\
& m2 L1 \sin(\theta(t)) \left(\frac{d}{dt} \theta(t) \right) L2 \cos(\phi(t)) \left(\frac{d}{dt} \phi(t) \right) \\
& - m2 L1 \cos(\theta(t)) \left(\frac{d}{dt} \theta(t) \right) L2 \sin(\phi(t)) \left(\frac{d}{dt} \phi(t) \right) - m2 g L2 \sin(\phi(t))
\end{aligned}$$

Solve the equations and plot the positions of the masses.

with(plots): with(plottools):

g := 9.81: L1:=6: L2:=4: m1:=2: m2:=3:

The initial conditions defined here are fairly arbitrary.

```
ic1 := theta(0)=1.5,D(theta)(0)=3.5,
      phi(0)=1.0,D(phi)(0)=-4.0;
      ic1 := theta(0)=1.5,D(theta)(0)=3.5, phi(0)=1.0,D(phi)(0)=-4.0
ic2 := theta(0)=0.0,D(theta)(0)=0.0,
      phi(0)=1.0,D(phi)(0)=-4.0;
      ic2 := theta(0)=0.0,D(theta)(0)=0.0, phi(0)=1.0,D(phi)(0)=-4.0
ic3 := theta(0)=0.05,D(theta)(0)=0., phi(0)=0.05,D(phi)(0)=0.
      ic3 := theta(0)=0.05,D(theta)(0)=0., phi(0)=0.05,D(phi)(0)=0.
ff := dsolve({eq1,eq2,ic1},{theta(t),phi(t)},
            type=numeric,output=listprocedure);
```

```
ff := [t = (proc(t) ... end proc), phi(t) = (proc(t) ... end proc),
      d/dt phi(t) = (proc(t) ... end proc), theta(t) = (proc(t) ... end proc),
```

0.05366032069+ 5.787069938I, -0.05366032069- 5.787069938I,
7133967931+ 2.396151146I, -0.07133967931- 2.396151146I

```
Theta := subs(ff,theta(t));
Phi := subs(ff,phi(t));
Phi := proc(t) ... end proc
Phi := proc(t) ... end proc
```

Define the functions which will be used to calculate the position in the x-y plane of the two masses.

```
X1:=t->L1*cos(Theta(t));
Y1:=t->L1*sin(Theta(t));
X2:=t->L1*cos(Theta(t))+L2*cos(Phi(t));
Y2:=t->L1*sin(Theta(t))+L2*sin(Phi(t));
setoptions(scaling=constrained);
```

Define the total time to plot and the number of frames.

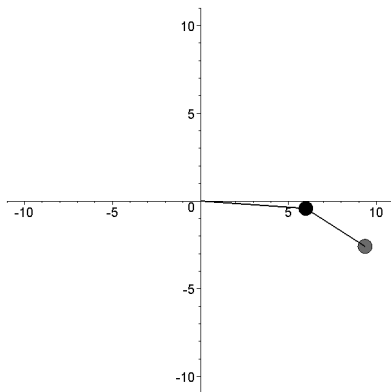
```
T := 40: N := 400:
```

```
pos1 := [seq([Y1(T/N*i),-X1(T/N*i)],i=0..N)]:
pos2 := [seq([Y2(T/N*i),-X2(T/N*i)],i=0..N)]:
rod1 := display(seq(line([0,0],pos1[i+1],
      color=black,thickness=2),i=0..N),insequence=true):
mass1 := display(seq(disk(pos1[i+1],0.4,color=black),
      i=0..N),insequence=true):
rod2 := display(seq(line(pos1[i+1],pos2[i+1],
      color=black,thickness=2),i=0..N),insequence=true):
```

```

mass2 := display(seq(disk(pos2[i+1],0.4,color=red),
    i=0..N),insequence=true):
path := display(seq(plot([seq(pos2[j],j=1..i)],
    style=line),i=1..N+1),insequence=true):
L := L1+L2+1Ж
display(mass1,mass2,rod1,rod2,path,
    view=[-L..L,-L..L]);

```



На сайті http://rds.yahoo.com/_ylt=A0geu9h4EHH1ZEAx.1XNy0A;_ylu=X3oDMTEycHVrYzg2BHNIYwNzcgRwb3MDMTAEY29sbwNhYzIEdnRpZAMEbANXUzE-/SIG=12q5bfkd7/EXP=1199202808/**http%3a//orange.math.buffalo.edu/539/variational_compound_pendulum_3.mws вдалося знайти оригінальну Maple програму розрахунку та побудови анімаційних зображень подвійного маятника. Автор програми Harald Kammerer із Німеччини. Особливість **третьої програми** полягає у специфічній організації обчислень та побудові анімаційних зображень коливань.

```

restart:
Et:=(m1*(a1*l1*thd)^2+m2*((l1*thd)^2+(a2*l2*phd)^2+
    2*l1*l2*a2*thd*phd*cos(ph-th)))/2;
Er:=(m1*k1^2*thd^2+m2*k2^2*phd^2)/2;
V:=-g*(m1*a1*l1*cos(th)+
    m2*(l1*cos(th)+a2*l2*cos(ph)));
L:=simplify(Et+Er-V);

```

$$Et := \frac{m1 a1^2 l1^2 thd^2}{2} + \frac{1}{2} m2 (l1^2 thd^2 + a2^2 l2^2 phd^2 + 2 l1 l2 a2 thd phd \cos(ph - th))$$

$$V := \frac{-g(m1 a1 l1 l1 \cos(th) + m2 l1 l1 \cos(th) + a2 l2 \cos(ph))}{m1 a1 l1^2 thd + m2 l1^2 thd + m2 a2 l2^2 phd + m2 l1 l2 a2 thd phd \cos(ph - th)} + \frac{m1 k1^2 thd^2}{2} + \frac{m2 k2^2 phd^2}{2} + g m1 a1 l1 \cos(th) + g m2 l1 \cos(th) + g m2 a2 l2 \cos(ph)$$

$$dfdy1 := \text{subs}(th=th(t), ph=ph(t), thd=thd(t), phd=phd(t), \text{diff}(L, th));$$

$$dfdy2 := \text{subs}(th=th(t), ph=ph(t), thd=thd(t), phd=phd(t), \text{diff}(L, ph));$$

$$dfdy1d := \text{subs}(th=th(t), ph=ph(t), thd=thd(t), phd=phd(t), \text{diff}(L, thd));$$

$$dfdy2d := \text{subs}(th=th(t), ph=ph(t), thd=thd(t), phd=phd(t), \text{diff}(L, phd));$$

$$dfdy1 := m2 l1 l2 a2 thd(t) phd(t) \sin(ph(t) - th(t)) - g m1 a1 l1 \sin(th(t)) - g m2 l1 \sin(th(t))$$

$$dfdy2 := -m2 l1 l2 a2 thd(t) phd(t) \sin(ph(t) - th(t)) - g m2 a2 l2 \sin(ph(t))$$

$$dfdy1d := m1 a1 l1^2 thd(t) + m2 l1^2 thd(t) + m2 l1 l2 a2 phd(t) \cos(ph(t) - th(t)) + m1 k1^2 thd(t)$$

$$dfdy2d := m2 a2 l2^2 phd(t) + m2 l1 l2 a2 thd(t) \cos(ph(t) - th(t)) + m2 k2^2 phd(t)$$

$$ELeqn1 := \text{subs}(phd(t)=\text{diff}(ph(t), t), thd(t)=\text{diff}(th(t), t), dfdy1=\text{diff}(dfdy1d, t));$$

$$ELeqn2 := \text{subs}(phd(t)=\text{diff}(ph(t), t), thd(t)=\text{diff}(th(t), t), dfdy2=\text{diff}(dfdy2d, t));$$

$$ELeqn1 := m2 l1 l2 a2 \left(\frac{d}{dt} th(t) \right) \left(\frac{d}{dt} ph(t) \right) \sin(ph(t) - th(t)) - g m1 a1 l1 \sin(th(t))$$

$$- g m2 l1 \sin(th(t)) = m1 a1 l1^2 \left(\frac{d^2}{dt^2} th(t) \right) + m2 l1^2 \left(\frac{d^2}{dt^2} th(t) \right)$$

$$+ m2 l1 l2 a2 \left(\frac{d^2}{dt^2} ph(t) \right) \cos(ph(t) - th(t))$$

$$- m2 l1 l2 a2 \left(\frac{d}{dt} ph(t) \right) \sin(ph(t) - th(t)) \left(\left(\frac{d}{dt} ph(t) \right) - \left(\frac{d}{dt} th(t) \right) \right)$$

$$+ m1 k1^2 \left(\frac{d^2}{dt^2} th(t) \right)$$

$$ELeqn2 := -m2 l1 l2 a2 \left(\frac{d}{dt} th(t) \right) \left(\frac{d}{dt} ph(t) \right) \sin(ph(t) - th(t)) - g m2 a2 l2 \sin(ph(t))$$

$$= m2 a2 l2^2 \left(\frac{d^2}{dt^2} ph(t) \right) + m2 l1 l2 a2 \left(\frac{d^2}{dt^2} th(t) \right) \cos(ph(t) - th(t))$$

$$- m2 l1 l2 a2 \left(\frac{d}{dt} th(t) \right) \sin(ph(t) - th(t)) \left(\left(\frac{d}{dt} ph(t) \right) - \left(\frac{d}{dt} th(t) \right) \right)$$

$$+ m2 k2^2 \left(\frac{d^2}{dt^2} ph(t) \right)$$

```

#LINEARIZATION OF SINE AND COSINE AT th=0, ph=0:
id:=x->x:
one:=x->1:
EL1:=eval(subs(cos=one,sin=id,ELeqn1));
EL2:=eval(subs(cos=one,sin=id,ELeqn2));

```

```
EL1 :=
```

$$\begin{aligned}
& m_2 l_1 l_2 a_2 \left(\frac{d}{dt} \text{th}(t) \right) \left(\frac{d}{dt} \text{ph}(t) \right) (\text{ph}(t) - \text{th}(t)) - g m_1 a_1 l_1 \text{th}(t) - g m_2 l_1 \text{th}(t) = \\
& m_1 a_1^2 l_1^2 \left(\frac{d^2}{dt^2} \text{th}(t) \right) + m_2 l_1^2 \left(\frac{d^2}{dt^2} \text{th}(t) \right) + m_2 l_1 l_2 a_2 \left(\frac{d^2}{dt^2} \text{ph}(t) \right) \\
& - m_2 l_1 l_2 a_2 \left(\frac{d}{dt} \text{th}(t) \right) (\text{ph}(t) - \text{th}(t)) \left(\left(\frac{d}{dt} \text{ph}(t) \right) - \left(\frac{d}{dt} \text{th}(t) \right) \right) \\
& + m_2 k_2^2 \left(\frac{d^2}{dt^2} \text{ph}(t) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
EL2 := & -m_2 l_1 l_2 a_2 \left(\frac{d}{dt} \text{th}(t) \right) \left(\frac{d}{dt} \text{ph}(t) \right) (\text{ph}(t) - \text{th}(t)) - g m_2 a_2 l_2 \text{ph}(t) = \\
& m_2 a_2^2 l_2^2 \left(\frac{d^2}{dt^2} \text{ph}(t) \right) + m_2 l_1 l_2 a_2 \left(\frac{d^2}{dt^2} \text{th}(t) \right) \\
& - m_2 l_1 l_2 a_2 \left(\frac{d}{dt} \text{th}(t) \right) (\text{ph}(t) - \text{th}(t)) \left(\left(\frac{d}{dt} \text{ph}(t) \right) - \left(\frac{d}{dt} \text{th}(t) \right) \right) \\
& + m_2 k_2^2 \left(\frac{d^2}{dt^2} \text{ph}(t) \right)
\end{aligned}$$

```

EL1:=expand(subs(diff(ph(t),t,t)=phtt,
diff(ph(t),t)=pht, diff(th(t),t,t)=thtt,
diff(th(t),t)=tht, ph(t)=ph,th(t)=th, EL1) );
EL2:=expand(subs(diff(ph(t),t,t)=phtt,
diff(ph(t),t)=pht, diff(th(t),t,t)=thtt,
diff(th(t),t)=tht, ph(t)=ph,th(t)=th, EL2) );

```

$$\begin{aligned}
EL1 := & m_2 l_1 l_2 a_2 \text{tht pht ph} - m_2 l_1 l_2 a_2 \text{tht pht th} - g m_1 a_1 l_1 \text{th} - g m_2 l_1 \text{th} = \\
& m_1 a_1^2 l_1^2 \text{thtt} + m_2 l_1^2 \text{thtt} + m_2 l_1 l_2 a_2 \text{phtt} - m_2 l_1 l_2 a_2 \text{pht}^2 \text{ph} \\
& + m_2 l_1 l_2 a_2 \text{tht pht ph} + m_2 l_1 l_2 a_2 \text{pht}^2 \text{th} - m_2 l_1 l_2 a_2 \text{tht pht th} + m_1 k_1^2 \text{thtt} \\
EL2 := & -m_2 l_1 l_2 a_2 \text{tht pht ph} + m_2 l_1 l_2 a_2 \text{tht pht th} - g m_2 a_2 l_2 \text{ph} = m_2 a_2^2 l_2^2 \text{phtt} \\
& + m_2 l_1 l_2 a_2 \text{thtt} - m_2 l_1 l_2 a_2 \text{tht pht ph} + m_2 l_1 l_2 a_2 \text{tht}^2 \text{ph} \\
& + m_2 l_1 l_2 a_2 \text{tht pht th} - m_2 l_1 l_2 a_2 \text{tht}^2 \text{th} + m_2 k_2^2 \text{phtt}
\end{aligned}$$

```

EL1:=rhs(EL1)-lhs(EL1);
EL2:=rhs(EL2)-lhs(EL2);

```

$$EL1 := m1 a1^2 l1^2 thtt + m2 l1^2 thtt + m2 l1 l2 a2 phtt - m2 l1 l2 a2 pht^2 ph \\ + m2 l1 l2 a2 pht^2 th + m1 k1^2 thtt + g m1 a1 l1 th + g m2 l1 th$$

$$EL2 := m2 a2^2 l2^2 phtt + m2 l1 l2 a2 thtt + m2 l1 l2 a2 tht^2 ph - m2 l1 l2 a2 tht^2 th \\ + m2 k2^2 phtt + g m2 a2 l2 ph$$

#LINEARIZING EL1 and EL2 in th, ph, and derivatives:

zap:=x->subs(ph=0,ph=0,th=0,th=0,thtt=0,ph=0,x);

EL1linear:=zap(coeff(EL1,thtt))*thtt + \\ zap(coeff(EL1,phtt))*phtt +zap(coeff(EL1,th))*th + \\ zap(coeff(EL1,ph))*ph + zap(EL1);

EL2linear:=zap(coeff(EL2,thtt))*thtt + \\ zap(coeff(EL2,phtt))*phtt+zap(coeff(EL2,th))*th+ \\ zap(coeff(EL2,ph))*ph+zap(EL2);

zap := x → subs(ph = 0, ph = 0, th = 0, th = 0, thtt = 0, ph = 0, x)

EL1linear :=

$$(m1 a1^2 l1^2 + m2 l1^2 + m1 k1^2) thtt + m2 l1 l2 a2 phtt + (g m1 a1 l1 + g m2 l1) th$$

$$\{c_1 = 0.05530135874, c_2 = -0.003734858006, d_1 = 0.06344835473, c_2 = 0.05751281746\}$$

solve({EL1linear,EL2linear},{thtt,phtt});

assign(%);

$$\{phtt = -\frac{l2 a2 g (-l1^2 m1 a1 th - l1^2 m2 th + m2 l1^2 ph + m1 a1^2 l1^2 ph + m1 k1^2 ph)}{m1 a1^2 l1^2 a2^2 l2^2 + m1 a1^2 l1^2 k2^2 + m2 l1^2 k2^2 + m1 k1^2 a2^2 l2^2 + m1 k1^2 k2^2}, \\ thtt = \\ -\frac{g l1 (a2^2 l2^2 m1 a1 th + a2^2 l2^2 m2 th - a2^2 l2^2 m2 ph + k2^2 m1 a1 th + k2^2 m2 th)}{m1 a1^2 l1^2 a2^2 l2^2 + m1 a1^2 l1^2 k2^2 + m2 l1^2 k2^2 + m1 k1^2 a2^2 l2^2 + m1 k1^2 k2^2} \\ \}$$

A:=[[coeff(thtt,th),coeff(thtt,ph)],

[coeff(phtt,th),coeff(phtt,ph)]];

#simplify(A[1,2]-A[2,1]);

$$A := \left[\left[-\frac{g l1 (a2^2 l2^2 m1 a1 + m2 a2^2 l2^2 + k2^2 m1 a1 + m2 k2^2)}{m1 a1^2 l1^2 a2^2 l2^2 + m1 a1^2 l1^2 k2^2 + m2 l1^2 k2^2 + m1 k1^2 a2^2 l2^2 + m1 k1^2 k2^2}, \right. \right. \\ \left. \frac{g l1 m2 a2^2 l2^2}{m1 a1^2 l1^2 a2^2 l2^2 + m1 a1^2 l1^2 k2^2 + m2 l1^2 k2^2 + m1 k1^2 a2^2 l2^2 + m1 k1^2 k2^2} \right] \left[\right. \\ \left. -\frac{l2 a2 g (-l1^2 m1 a1 - m2 l1^2)}{m1 a1^2 l1^2 a2^2 l2^2 + m1 a1^2 l1^2 k2^2 + m2 l1^2 k2^2 + m1 k1^2 a2^2 l2^2 + m1 k1^2 k2^2}, \right. \\ \left. -\frac{l2 a2 g (m1 a1^2 l1^2 + m2 l1^2 + m1 k1^2)}{m1 a1^2 l1^2 a2^2 l2^2 + m1 a1^2 l1^2 k2^2 + m2 l1^2 k2^2 + m1 k1^2 a2^2 l2^2 + m1 k1^2 k2^2} \right] \right]$$

XAMPLE:

L1:=0.3*m: L2:=0.35*m: M1:=L1*rho/m: M2:=L2*rho/m:

```

E_t:=subs(g=10*m,m1=M1,m2=M2,l1=L1,l2=L2,a1=1/2,
a2=1/2,k1=L1/sqrt(12),k2=L2/sqrt(12),Et);
E_r:=subs(g=10*m,m1=M1,m2=M2,l1=L1,l2=L2,a1=1/2,
a2=1/2,k1=L1/sqrt(12),k2=L2/sqrt(12),Er);
A1:=subs(g=10*m,m1=M1,m2=M2,l1=L1,l2=L2,a1=1/2,
a2=1/2,k1=L1/sqrt(12),k2=L2/sqrt(12),A);
eigendata:=linalg[eigenvects](A1);
evalf(%);
eigenvalues:=[evalf(linalg[eigenvals](A1))];
neg:=x->-x;
freqs:=map(sqrt@neg,eigenvalues);
freq_to_period:=x->evalf(2*Pi/x);
periods:=map(freq_to_period,freqs);
E_t := 0.003375000000p m2 thd2 + 0.1750000000p
(0.09 m2 thd2 + 0.03062500000m2 phd2 + 0.1050000000m2 thd phd cos(ph - th))
E_r := 0.001125000000p m2 thd2 + 0.001786458333p m2 phd2
A1 := [[-88.88888886 46.66666668], [114.2857143 -102.8571429]]
eigendata := [-22.51014130 1, {[0.5751281746 0.8180633122]}],
[-169.2358904 1, {[ -0.5530135874 0.9521353625]}]
[-22.51014130 1, {[0.5751281746 0.8180633122]}],
[-169.2358904 1, {[ -0.5530135874 0.9521353625]}]
eigenvalues := [-22.51014131 -169.2358905]
freqs := [4.744485358 13.00906955]
periods := [1.324313352 0.4829849885]

#EXTRACT THE EIGENDATA AND CONSTRUCT THE SOLUTION
m:=1: N:=2:
for i from 1 to N do
lambda[i]:=evalf(eigendata[i][1]);
v[i]:=convert(evalf(op(eigendata[i][3])),list);
sol[i]:=expand((c[i]*cos(sqrt(-lambda[i])*t)
+d[i]*sin(sqrt(-lambda[i])*t))*v[i]);
od: unassign('i'):
gensol:=unapply(sol[1]+sol[2],t);
gensold:=unapply(diff(gensol(t),t),t);

gensol := t → [-0.5530135874c2 cos(13.00906954t)
- 0.5530135874d2 sin(13.00906954t) + 0.5751281746c1 cos(4.744485357t)
+ 0.5751281746d1 sin(4.744485357t), 0.9521353625c2 cos(13.00906954t)
+ 0.9521353625d2 sin(13.00906954t) + 0.8180633122c1 cos(4.744485357t)
+ 0.8180633122d1 sin(4.744485357t)]

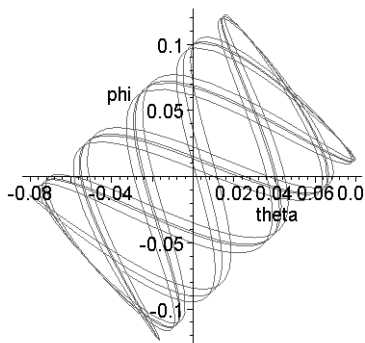
```

```

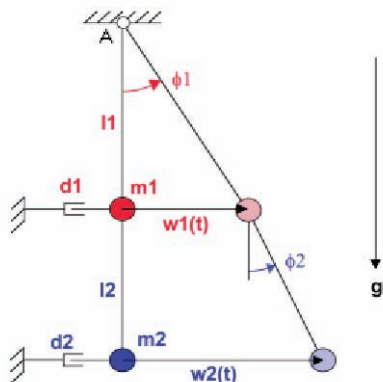
gensold := t → [7.194192215c2 sin(13.00906954t) – 7.194192215d2 cos(13.00906954t)
    – 2.728687203c1 sin(4.744485357t) + 2.728687203d1 cos(4.744485357t),
    –12.38639514c2 sin(13.00906954t) + 12.38639514d2 cos(13.00906954t)
    – 3.881289406c1 sin(4.744485357t) + 3.881289406d1 cos(4.744485357t)]

th0:=0; ph0:=0.1; thd0:=.2; phd0:=.2;
ics:={gensol(0)[1]=th0,
      gensol(0)[2]=ph0,
      gensold(0)[1]=thd0,
      gensold(0)[2]=phd0};
solve(ics, {c[1],c[2],d[1],d[2]});
assign(%);
plot( [gensol(t)[1],gensol(t)[2],t=0..10],
      labels=["theta","phi"]);
snapshot:=(th,ph)->plots[display](plottools[line](
    [0,0],[L1*sin(th),-L1*cos(th)],
    color=red,thickness=2),
    plottools[line](
    [L1*sin(th),-L1*cos(th)],
    [L1*sin(th)+L2*sin(ph),
    -L1*cos(th)-L2*cos(ph)],
    color=blue,thickness=2 )):
dt:=0.04:
plots[display](
seq(snapshot(gensol(i*dt)[1],gensol(i*dt)[2]),
    i=1..150) ,insequence=true,
    axes=none,scaling=constrained);
unassign('c[1]','c[2]','d[1]','d[2]'):
ics := {-0.5530135874c2 + 0.5751281746c1 = 0, 0.9521353625c2 + 0.8180633122c1 = 0.1,
    -7.194192215d2 + 2.728687203d1 = 0.2, 12.38639514d2 + 3.881289406d1 = 0.2}
{c1 = 0.05530135874d2 - 0.003734858006d1 = 0.06344835473c2 = 0.05751281746}

```



На сайті www.math.uncc.edu/~droyster/courses/fall01/classnotes/FinalLecture/doublependulum.mws було знайдено Maple – програму, яка є найбільш вдалою для моделювання рухів подвійного маятника. Автор програми також Harald Kammerer із Німеччини. Особливість четвертої програми полягає у відмінностях обчислень із застосуванням матричної алгебри. Крім того, в цій програмі цікавим є анімаційне зображення коливань, де коливання маятника спричиняє кумедна істота.



The calculation is valid for small displacements, so that $\sin(x)=x$ and $\cos(x)=1$.

```
restart: with(linalg):with(plots):
with(plottools):with(linalg):
# Description of the Mechanical Modell
m1:=10.:l1:=1.:d1:=1.:
m2:=10.:l2:=1.:d2:=1.5:
```

```

G1:=m1*9.81:
G2:=m2*9.81:
# Initial Conditions
w10:=0: w20:=0: wp10:=0: wp20:=1:
# System Matrices Substitution of the derivations
wp1(t) := diff(w1(t),t):
wp2(t) := diff(w2(t),t):
wpp1(t) := diff(wp1(t),t):
wpp2(t) := diff(wp2(t),t):
# System of Equations of Motion
# the momentum around point A. Note: G*sin(phi)=G*phi; G*cos(phi)=G.
eq1:=m1*wpp1(t)+d1*wp1(t)=collect(expand(-(G1+G2)*
    w1(t)/l1+G2*(w2(t)-w1(t))/l2),{w1(t),w2(t)});
eq1 := 10.  $\left(\frac{d^2}{dt^2} w1(t)\right) + 1. \left(\frac{d}{dt} w1(t)\right) = -294.3000000w1(t) + 98.10000000w2(t)$ 
eq2:=m2*wpp2(t)+d2*wp2(t)=collect(expand(-G2*
    (w2(t)-w1(t))/l2),{w1(t),w2(t)});
eq2 := 10.  $\left(\frac{d^2}{dt^2} w2(t)\right) + 1.5 \left(\frac{d}{dt} w2(t)\right) = -98.10000000w2(t) + 98.10000000w1(t)$ 
# Mass-, Damping- Stiffness- and System Matrices
MM:=matrix(2,2,[m1,0,0,m2]);
MM :=  $\begin{bmatrix} 10. & 0 \\ 0 & 10. \end{bmatrix}$ 
DM:=matrix(2,2,[d1,0,0,d2]);
DM :=  $\begin{bmatrix} 1. & 0 \\ 0 & 1.5 \end{bmatrix}$ 
k11:=-coeff(rhs(eq1),w1(t)):
k12:=-coeff(rhs(eq1),w2(t)):
k21:=-coeff(rhs(eq2),w1(t)):
k22:=-coeff(rhs(eq2),w2(t)):
KM:=matrix(2,2,[k11,k12,k21,k22]);
KM :=  $\begin{bmatrix} 294.3000000 & -98.10000000 \\ -98.10000000 & 98.10000000 \end{bmatrix}$ 
# System Matrix
# Transform the 2 homogen equation of motion of degree 2 into
4 differential equation of degree 1
smd11:=matrix(2,2,[0,0,0,0]):
smd12:=matrix(2,2,[1,0,0,1]):
smd21:=-multiply(inverse(MM),KM):

```

```

smd22:=-multiply(inverse(MM),DM):
SMD:=matrix(4,4):
SMD:=copyinto(smd11,SMD,1,1):
SMD:=copyinto(smd12,SMD,1,3):
SMD:=copyinto(smd21,SMD,3,1):
SMD:=copyinto(smd22,SMD,3,3):
SMD := 
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -29.43000000 & 9.810000000 & -0.1000000000 & -0. \\ 9.810000000 & -9.810000000 & -0. & -0.1500000000 \end{bmatrix}$$

# Eigenvalues and Eigenmodes Solve the Eigenvalue Problem
ewd:=eigenvals(SMD);
ewd := -0.05366032069+ 5.787069938I, -0.05366032069- 5.787069938I,
-0.07133967931+ 2.396151146I, -0.07133967931- 2.396151146I
# Eigenfrequency and Damping of the Eigenmodes
# Eigenfrequency: imaginary part of the eigenvalue divided by 2 Pi.
f01:=evalf(Im(ewd[1])/2/Pi):
f02:=evalf(Im(ewd[2])/2/Pi):
f03:=evalf(Im(ewd[3])/2/Pi):
f04:=evalf(Im(ewd[4])/2/Pi):
o1:=sqrt(Im(ewd[1])**2+Re(ewd[1])**2):
o2:=sqrt(Im(ewd[2])**2+Re(ewd[2])**2):
o3:=sqrt(Im(ewd[3])**2+Re(ewd[3])**2):
o4:=sqrt(Im(ewd[4])**2+Re(ewd[4])**2):
D1:=-Re(ewd[1])/o1:D2:=-Re(ewd[2])/o2:
D3:=-Re(ewd[3])/o3:D4:=-Re(ewd[4])/o4:
# Sort according the Eigenvalues
o:=[o1,o2,o3,o4]:
f0:=[f01,f02,f03,f04]:
DL:=[D1,D2,D3,D4]:
lstsr:=sort([o[1],o[2],o[3],o[4]]):
for i from 1 by 1 to 4 do
for j from 1 by 1 to 4 do
if (lstsr[i]=o[j]) then
num[i]:=j:
if (i>1 and num[i]<>num[i-1]) then j:=4 fi:
fi: od: od:

```

```

for i from 1 by 1 to 4 do
f0 | i:=f0[num[i]];
DL | i:=DL[num[i]];
o | i:=o[num[i]];
od:

# View the Eigenvalues Numerical
# with positiv and negativ sign but the same amount belong together
f01; DL1;
                                -0.3813592992    0.02975942581
f02; DL2;
                                0.3813592992    0.02975942581
f03; DL3;
                                0.9210407864    0.009272052109
f04; DL4;
                                -0.9210407864    0.009272052109

# Eigenmodes, Transformation Matrix
#The eigenvectors arranged in form of a matrix yields
#the transformation matrix T to calculate the Motion in main coordinates
ev:=eigenvects(SMD):
unassign('i','j');
T:=matrix(4,4):
for i from 1 by 1 to 4 do
for j from 1 by 1 to 4 do
T[j,i]:=ev[i][3][1][j];
od;
ewk[i]:=ev[i][1]:
od:

# Transform System Matrixs into Main Coordinates
AS:=multiply(inverse(T),multiply(SMD,T)):
for i from 1 by 1 to 4 do
for j from 1 by 1 to 4 do
if (i<>j) then AS[i,j]:=0 fi:
if (i<>j) then AS[i,j]:=0 fi:
od: od:

# Transform the Initial Conditions into Main Coordinates
# Vector of initial conditions
w0:=vector(4,[w10,w20,wp10,wp20]);
                                w0:=[0,0,0,1]
z0:=multiply(inverse(T),w0);
z0:=[-0.2495754937+ 0.4939540919I, 0.007465756829- 0.1772692972I,
0.007465756881+ 0.1772692971I, -0.2495754937- 0.4939540919I]

```

```

AB1:=z1(0)=z0[1];  AB2:=z2(0)=z0[2];
AB3:=z3(0)=z0[3];  AB4:=z4(0)=z0[4];
      AB4 := z4(0) = -0.2495754937- 0.4939540919I
      AB4 := z4(0) = -0.2495754937- 0.4939540919I
      AB4 := z4(0) = -0.2495754937- 0.4939540919I
      AB4 := z4(0) = -0.2495754937- 0.4939540919I

```

```
# Main coordinates and derivations
```

```

Z:=matrix(4,1,[z1(t),z2(t),z3(t),z4(t)]):
Zp:=matrix(4,1,[diff(z1(t),t),diff(z2(t),t),
diff(z3(t),t),diff(z4(t),t)]);

```

$$Z_p := \begin{bmatrix} \frac{d}{dt} z_1(t) \\ \frac{d}{dt} z_2(t) \\ \frac{d}{dt} z_3(t) \\ \frac{d}{dt} z_4(t) \end{bmatrix}$$

```
# Equation of Motion in Main Coordinates
```

```
BGL:=Zp=AS&*Z;
```

$$BGL := Z_p = AS \&* Z$$

```
# separated equations
```

```
bg11:=lhs(evalm(BGL))[1,1]=rhs(evalm(BGL))[1,1];
```

$$bgl4 := \frac{d}{dt} z_4(t) = (-0.07133967912 + 2.396151147I) z_4(t)$$

```
bg12:=lhs(evalm(BGL))[2,1]=rhs(evalm(BGL))[2,1];
```

$$bgl4 := \frac{d}{dt} z_4(t) = (-0.07133967912 + 2.396151147I) z_4(t)$$

```
bg13:=lhs(evalm(BGL))[3,1]=rhs(evalm(BGL))[3,1];
```

$$bgl4 := \frac{d}{dt} z_4(t) = (-0.07133967912 + 2.396151147I) z_4(t)$$

```
bg14:=lhs(evalm(BGL))[4,1]=rhs(evalm(BGL))[4,1];
```

$$bgl4 := \frac{d}{dt} z_4(t) = (-0.07133967912 + 2.396151147I) z_4(t)$$

```
# Solution
```

```
lsg:=dsolve({bg11,bg12,bg13,bg14,AB1,AB2,AB3,AB4},
{z1(t),z2(t),z3(t),z4(t)}):
```

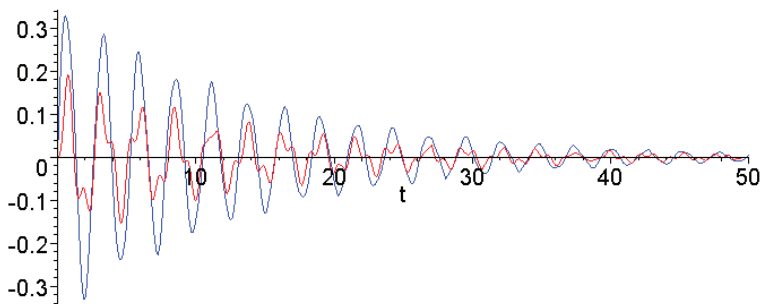
```
assign(lsg);
```

```
# ansformation in Real Coordinates
```

```

ZL:=matrix(4,1,[combine(expand(evalf(z1(t)))),
                      combine(expand(evalf(z2(t)))),
                      combine(expand(evalf(z3(t)))),
                      combine(expand(evalf(z4(t))))]):
YL:=multiply(T,ZL):
#Displacements
w1(t):=simplify(expand(YL[1,1])):
w2(t):=simplify(expand(YL[2,1])):
#Velocities
v1(t):=simplify(expand(YL[3,1])):
v2(t):=simplify(expand(YL[4,1])):
#Graphical View of the Time History
Number of time steps
ndt:=100:
Timestep
dt:=0.5:
#Displacements
P1:=plot(Re(w1(t)),t=0..ndt*dt,color=red):
P2:=plot(Re(w2(t)),t=0..ndt*dt,color=blue):
display({P1,P2});

```



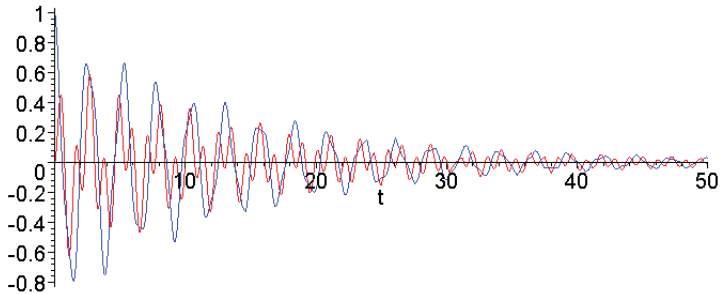
#

Velocities

```

PV1:=plot(Re(v1(t)),t=0..ndt*dt,color=red):
PV2:=plot(Re(v2(t)),t=0..ndt*dt,color=blue):
display({PV1,PV2});

```

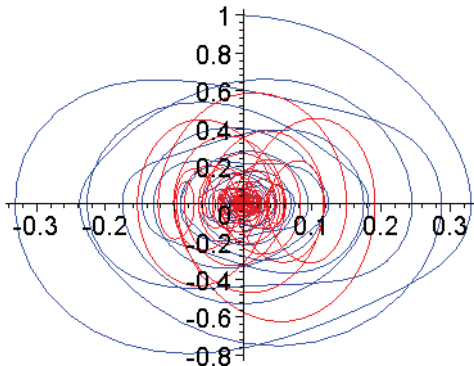


Phase Curve

```

PPh1:=plot([Re(w1(t)),Re(v1(t)),t=0..ndt*dt],
           color=red):
PPh2:=plot([Re(w2(t)),Re(v2(t)),t=0..ndt*dt],
           color=blue):
display({PPh1,PPh2});

```



Animation

```

FIX1:=curve([-0.2,0],[-0.05,0],thickness=2):
FIX2:=circle([0,0],0.05,color=black):
FIX3:=curve([0.05,0],[0.2,0],thickness=2):
FIX:=display([FIX1,FIX2,FIX3]):
MAN01:=circle([-0.2,-(11+12)+0.05],0.05,
              color=black,thickness=2):
MAN02:=curve([-0.2,-(11+12)],[-0.2,-(11+12)-0.15]],
              color=black,thickness=2):
MAN03:=curve([-0.2,-(11+12)-0.05],[-0.25,-(11+12)]],
              color=black,thickness=2):
MAN04:=curve([-0.2,-(11+12)-0.05],[-0.15,-(11+12)]],

```

```

        color=black,thickness=2):
MAN05:=curve([[ -0.2,-(11+12)-0.15],[ -0.25,-(11+12)-
0.3]], color=black,thickness=2):
MAN06:=curve([[ -0.2,-(11+12)-0.15],[ -0.15,-(11+12)-
0.3]],color=black,thickness=2):
MAN0:=display([MAN01,MAN02,MAN03,MAN04,MAN05,MAN06]):

MAN11:=circle([ -0.2,-(11+12)+0.05],0.05,color=black):
MAN12:=curve([[ -0.2,-(11+12)],[ -0.2,-(11+12)-0.15]],
color=black,thickness=2):
MAN13:=curve([[ -0.2,-(11+12)-0.05],[ -0.25,-(11+12)]],
color=black,thickness=2):
MAN14:=curve([[ -0.2,-(11+12)-0.05],[ -0.1,-(11+12)]],
color=black,thickness=2):
MAN15:=curve([[ -0.2,-(11+12)-0.15],[ -0.25,-(11+12)-
0.3]],color=black,thickness=2):
MAN16:=curve([[ -0.2,-(11+12)-0.15],[ -0.15,-(11+12)-
0.3]],color=black,thickness=2):
MAN1:=display([MAN11,MAN12,MAN13,MAN14,MAN15,MAN16]):

MAN21:=circle([ -0.3,-(11+12)],0.05,color=black):
MAN22:=curve([[ -0.3,-(11+12)-0.05],[ -0.3,-(11+12)-
0.20]],color=black,thickness=2):
MAN23:=curve([[ -0.3,-(11+12)-0.10],[ -0.35,-(11+12)-
0.05]],color=black,thickness=2):
MAN24:=curve([[ -0.3,-(11+12)-0.10],[ -0.25,-(11+12)-
0.05]],color=black,thickness=2):
MAN25:=curve([[ -0.3,-(11+12)-0.20],[ -0.25,-(11+12)-
0.15]],color=black,thickness=2):
MAN26:=curve([[ -0.3,-(11+12)-0.20],[ -0.25,-(11+12)-
0.18]],color=black,thickness=2):
MAN2:=display([MAN21,MAN22,MAN23,MAN24,MAN25,MAN26]):

MAN[0]:=MAN0:
MAN[1]:=MAN1:
MAN[2]:=MAN1:

for i from 3 by 1 to ndt-1 do
MAN[i]:=MAN2:
od:

MAN[ndt]:=MAN0:
for i from 0 by 1 to ndt do

```

```

x1:=evalf(Re(subs(t=i*dt,w1(t)))):
x2:=evalf(Re(subs(t=i*dt,w2(t)))):
PLI[i]:=curve([[0,0],[x1,-l1],[x2,-(l1+l2)]]):
MASS1[i]:=disk([x1,-l1], 0.1, color=red):
MASS2[i]:=disk([x2,-(l1+l2)], 0.1, color=blue):
ANIM[i]:=display({PLI[i],MASS1[i],
                  MASS2[i],FIX,MAN[i]});
od:
display([seq(ANIM[i],i=0..ndt)],insequence=true,
scaling=constrained,axes=none,
title=`Double Pendulum`);

```

Double Pendulum

