МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Національний технічний університет
“Харківський політехнічний інститут”

В. В. Веретельник, Г. М. Тимченко, І. О. Веретельник, О. В. Веретельник

ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

Навчальний посібник
для студентів технічних університетів

Затверджено
редакційно-видавничою
радою НТУ “ХПІ”,
протокол №3 від 30.10.20

Харків
НТУ "ХПІ"
2021

УДК 517.44
О-60

Рецензенти:

Аврамов К. В., д-р техн. наук, проф., зав. відділу надійності та динамічної міцності Інституту проблем машинобудування НАН України ім. А. М. Підгорного;
Сорокін В. Ф., д-р техн. наук, проф., декан факультета «Авіаційні двигуни» Національного аерокосмічного університету ім. М.Є. Жуковського «Харківський авіаційний інститут»

Веретельник В. В.
О-60 Операційне числення: навч. посіб. / В. В. Веретельник, Г. М. Тимченко, І. О. Веретельник, О. В. Веретельник. — Харків: НТУ "ХПІ", 2021. — 81 с.

ISBN 978-617-7879-35-3

Навчальний посібник містить теоретичний матеріал з операційного числення, наведені основні теореми та формули, необхідні для розв'язання задач, а також зразки розв'язання типових задач. Надані індивідуальні варіанти типових розрахунків.

Призначено для студентів технічних університетів.

Іл. 8. Бібліогр.: 8 назв.

УДК 517.44

ISBN 978-617-7879-35-3

Вступ

В основу посібника покладено матеріали лекцій, що були прочитані на інженерно-фізичному та фізико-технічному факультетах Національного технічного університету «Харківський політехничній інститут».

Головна мета посібника — надати студентам певний мінімум теоретичного матеріалу, а також практичних навиків з основних питаннь операційного числення, допомогти студентам в їх самостійній роботі.

В основі методу операційного числення покладено інтегральне перетворення (перетворення Лапласа), яке звичайні діференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами дозволяє звести до алгебраїчних рівнянь.

Посібник складається з двох розділів. У першому з них розглянуто основні теореми операційного числення. Цей матеріал потребує знання теорії функцій комплексної змінної, але при першому знайомстві можна знехтувати доведенням теорем. В останній частині розділу значна увага приділяється методу розкладання дробів на прості дроби, що дозволяє знайти оригінали функцій без використання методів теорії функцій комплексної змінної.

У другій частині розглядається використання операційного числення до розв'язання задачі Коші для звичайних диференційних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

У кожному розділі наведено достатня кількість розв'язаних задач та прикладів, пояснюючих та закріплюючих теоретичний матеріал. Серед розв'язаних задач немало таких, які можна назвати типовими; в будь-якому випадку ознайомлення з ними дозволяє студенту при мінімальній допомозі з боку викладача оволодіти основними методами розв'язання задач даного розділу. Наприкінці кожного розділу наводиться добірка індивідуальних завдань.

Навчальний посібник з курсу «Операційне числення» призначено для студентів інженерно-фізичних, фізико-технічних та інших спеціальностей технічних университетів.

Посібник може бути використано студентами також для самостійного вивчення відповідного матеріалу.

1. Перетворення Лапласа

1.1. Поняття інтегрального перетворення

Означення 1.1. *Інтегральним* називається *перетворення*

$$F(s) = \int\limits_{A}^{B} K(s,t) f(t)\, dt. \tag{1.1}$$

Поняття *перетворення*, або *відображення* можливо розглядати як узагальнення поняття функції. Наприклад, функція $y = f(x)$ кожному числу x ставить у віповідність за певним правилом число y. Інтегральне перетворення ставить у відповідність функції $f(t)$ змінної t функцію $F(s)$ змінної s:

$$f(t) \quad \to \quad F(s).$$

Функція $F(s)$ називається *образом*, або *зображенням* функції $f(t)$.

Функція $f(t)$ називається *оригіналом*, або *прообразом* функції $F(s)$.

Ядро $K(s,t)$ — це основний елемент інтегрального перетворення, яке відрізняє одне інтегральне перетворення від іншого. Від ядра залежать основні властивості кожного інтегрального перетворення, зокрема, межі інтегрування A і B.

Ядро $K(s,t)$ є функцією двох змінних s і t, які можуть бути як дійсними, так і комплексними.

Інтеграл (1.1) залежить від змінної s як від параметра, і при певних обмеженнях на ядро і функцію $f(t)$ інтеграл можна диференціювати та інтегрувати за параметром s.

У деяких випадках образ похідної оригіналу буде пропорційний самому образу. На використанні цієї обставини базується основна ідея застосування методу інтегрального перетворення: диференціальне рівняння для оригіналу (функції $f(t)$) в результаті застосування інтегрального перетворення переходить в алгебраїчне рівняння для образу, розв'язати яке значно простіше. Розв'язок вихідного диференціального рівняння потім можливо отримати шляхом відновлення оригіналу знайденого зображення.

1.2. Перетворення Лапласа

Означення 1.2. *Перетворенням Лапласа* називається інтеграл

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt, \tag{1.2}$$

який функції $f(t)$ дійсної змінної t ставить у відповідність функцію $F(s)$ комплексної змінної $s = x + iy$.

Зауважимо, що функція $f(t)$ може приймати і комплексні значення.

Цей невласний інтеграл (1.2) називають *інтегралом Лапласа.* Він залежить від комплексної змінної $s = x + iy$ як від параметра, і не для кожного значення цього параметра інтеграл (1.2) збігається. Зауважимо, що не для кожної функції існує перетворення Лапласа.

Означення 1.3. *Оригіналом* називається будь-яка функція $f(t)$, що визначена для усіх значень дійсної змінної $-\infty < t < \infty$ і задовольняє умовам:

1) функція $f(t) \equiv 0$ при $t < 0$, причому приймається, що

$$f(0) = f(+0) = \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} f(t); \tag{1.3}$$

2) функція $f(t)$ кусково-неперервна при $t > 0$, причому на будь-якому обмеженому відрізку $[0, T]$ $(T > 0)$ функція $f(t)$ може мати не більше ніж скінченне число точок розриву, причому тільки розриви першого роду;

3) функція $f(t)$ зростає при $t \to +\infty$ не швидше показникової функції, тобто існують такі додатні числа M і σ, що

$$|f(t)| \leqslant Me^{\sigma t} \quad \text{при} \quad t > 0. \tag{1.4}$$

Точна нижня грань $\sigma_0 = \inf \sigma$ називається *показником зростання функції $f(t)$*.

Умова 2 забезпечує інтегровність підінтегральної функції, а умова 3 — збіжність інтеграла Лапласа. Очевидно, що ці умови задовольняються для більшості функцій, які описують реальні фізичні процеси (змінна t інтерпретується як час). Наприклад, усі обмежені функції задовольняють цим умовам, тому що їх показник зростання дорівнює нулю. Степеневі функції зростають повільніше показникової, тому теж задовольняють умові 3 (Справді, якщо $\sigma > 0$, то $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{t^n}{e^{\sigma t}} = 0$. Звідси випливає, що показникова функція при

$t \to \infty$ є нескінченно велика величина більшого порядку, ніж степенева функція, отже, показник зростання степеневої функції дорівнює нулю). Нарешті, показникові функції мають, за визначенням, скінченний показник зростання і це основні класи функцій, які описують фізичні процеси. Умова 1, на перший погляд, може здатися штучною, але перетворення Лапласа застосовується для розв'язання диференціальних рівнянь з початковими даними, в яких міститься інформація про процес, що вивчається, до початку спостереження. Початок процесу завжди можливо прийняти за нульову точку $t = 0$, тому умова 1 теж цілком природня.

Найпростішою функцією-оригіналом є *одинична функція Хевісайда*

$$H(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases} \tag{1.5}$$

Зауваження 1.1. Функція Хевісайда невизначена в точці $t = 0$ і це невипадково. Справа в тому, що в силу формули (1.3) неважливо, яке саме значення вона приймає на нулі.

Розглядаючи перетворення Лапласа, звичайно мають на увазі оригінали, тобто функції, що дорівнюють нулю при $t < 0$. Якщо функція $f(t)$ цій умові не задовольняє, але задовольняє умовам 2 і 3 функції-оригіналу (див. означення 1.3), то вона не є оригіналом. Таку функцію $f(t)$ можна перетворити на оригінал, якщо помножити її на одиничну функцію Хевісайда

$$H(t)f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ f(t), & 0 < t. \end{cases}$$

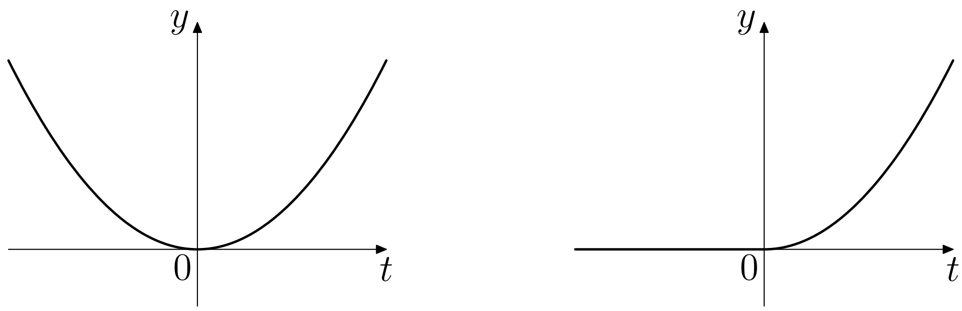
Наприклад, функція $f(t) = t^2$, яка зображена на рис. 1.1*а*, неперервна на всій числовій осі, має скінченний показник зростання $\sigma_0 = 0$. Таким чином, для степеневої функції виконуються умови 2 і 3, але t^2 не є оригіналом тому, що $t^2 \neq 0$ при $t < 0$. У той же час добуток степеневої функції на функцію Хевісайда (рис. 1.1*б*):

$$H(t)t^2 = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ t^2, & 0 < t, \end{cases}$$

вже задовольняє умові 1 і є оригіналом.

Замість функцій e^t, $\sin t$, $\cos t$ розглядають функції:

$$f_1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ e^t, & 0 < t; \end{cases} \quad f_2(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \sin t, & 0 < t; \end{cases} \quad f_3(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \cos t, & 0 < t, \end{cases}$$



а)$y = t^2$ б)$y = H(t)t^2$

Рис. 1.1. Побудова оригіналу

які є оригіналами. За допомогою одиничної функції Хевісайда ці функції можна записати у такому вигляді:

$$f_1(t) = H(t)e^t, \quad f_2(t) = H(t)\sin t, \quad f_3(t) = H(t)\cos t.$$

Проте, звичайно функцію Хевісайда не записують, хоч і мають її на увазі. Справа в тому, що при обчислюванні зображення інтегрування виконується тільки по додатній півосі $(0, +\infty)$.

Зауважимо, що так визначені функції $f_1(t)$ і $f_3(t)$ мають у точці $t = 0$ розрив першого роду, а функція $f_2(t)$ хоч і неперервна у нулі, але її графік має при $t = 0$ кутову точку.

Наведемо деякі властивості оригіналів:

1) лінійна комбінація оригіналів є оригінал;

2) якщо $f(t)$ — оригінал, то функції

$$|f(t)|, \quad tf(t), \quad t^k f(t) \quad (k > 0), \quad e^{\alpha t} f(t), \quad f(\alpha t), \quad f(t - \tau), \quad \int\limits_0^t f(\tau)\, d\tau$$

є оригіналами;

3) добуток оригіналів є оригінал.

Теорема 1.1. *Для будь-якого оригіналу $f(t)$ існує зображення*

$$F(s) = \int\limits_0^\infty f(t)e^{-st}\, dt,$$

яке визначене у півплощині $\operatorname{Re} s > \sigma_0$ комплексної площини і є в цій півплощині аналітичною функцією змінної s. Тут σ_0 — показник зростання функції $f(t)$.

Доведення. По-перше, доведемо існування образу, для цього за допомогою ознаки порівняння дослідимо на збіжність невласний інтеграл (1.2). За умовами теореми функція $f(t)$ є оригіналом, тому вона має обмежений показник зростання σ_0, тобто

$$|f(t)| \leqslant Me^{\sigma_0 t}. \tag{1.6}$$

Звернемо увагу на очевидну рівність

$$\left|e^{-st}\right| = \left|e^{-(x+iy)t}\right| = \left|e^{-xt}e^{-iyt}\right| = \left|e^{-xt}\right|\left|e^{-iyt}\right| = e^{-xt}. \tag{1.7}$$

Тоді при $\operatorname{Re} s = \operatorname{Re}(x+iy) = x > \sigma_0$ дістанемо

$$\left|\int\limits_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt\right| \leqslant \int\limits_0^\infty \left|f(t)e^{-st}\right|dt \leqslant$$
$$\leqslant M\int\limits_0^\infty e^{-xt}e^{\sigma_0 t}dt = -M\left.\frac{e^{-(x-\sigma_0)t}}{x-\sigma_0}\right|_0^\infty = \frac{M}{x-\sigma_0}. \tag{1.8}$$

Тут враховано, що $e^{-(x-\sigma_0)t}$ прямує до нуля при $t \to \infty$, тому що за умовами теореми $x = \operatorname{Re} s > \sigma_0$.

З оцінки (1.8) випливає, що невласний інтеграл (1.2) мажорується збіжним інтегралом і тому при $\operatorname{Re} s = x > \sigma_0$ він збігається *абсолютно*. Отже, *у правій півплощині* $\operatorname{Re} s > \sigma_0$ *для будь-якого оригіналу існує образ.*

Покажемо аналітичність образу. Якщо $\operatorname{Re} s \geqslant \sigma_1 > \sigma_0$, то

$$|f(t)e^{-st}| = |f(t)||e^{-st}| \leqslant Me^{\sigma_0 t}e^{-\sigma_1 t} = Me^{(\sigma_0-\sigma_1)t}.$$

Тоді маємо оцінку інтеграла

$$\left|\int\limits_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt\right| \leqslant M\int\limits_0^\infty e^{-(\sigma_1-\sigma_0)t}dt = \frac{M}{\sigma_1-\sigma_0},$$

причому права частина не залежить від s. Таким чином, за ознакою Вейєрштрасса інтеграл (1.2) збігається *рівномірно* за параметром s і його можна диференціювати.

Продиференціюємо інтеграл (1.2) за параметром s і дослідимо на збіжність отриманий невласний інтеграл:

$$\left|\frac{dF}{ds}\right| = \left|-\int_0^\infty tf(t)e^{-st}\,dt\right| \leqslant M\int_0^\infty te^{-(x-\sigma_0)t}\,dt =$$
$$= M\left\{-\left.\frac{te^{-(x-\sigma_0)t}}{x-\sigma_0}\right|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{e^{-(x-\sigma_0)t}}{x-\sigma_0}\,dt\right\} = \frac{M}{(x-\sigma_0)^2}. \quad (1.9)$$

Таким чином, інтеграл

$$\frac{dF}{ds} = -\int_0^\infty tf(t)e^{-st}\,dt \quad (1.10)$$

також збігається абсолютно при $\operatorname{Re} s > \sigma_0$.

В області $\operatorname{Re} s \geqslant \sigma_1 > \sigma_0$ інтеграл (1.10) збігається рівномірно, тому що він також мажорується збіжним інтегралом, якій не залежить від s:

$$\left|\int_0^\infty tf(t)e^{-st}\,dt\right| \leqslant M\int_0^\infty te^{-(\sigma_1-\sigma_0)t}\,dt = \frac{M}{(\sigma_1-\sigma_0)^2}.$$

Отже, *для функції $F(s)$ у будь-якій точці півплощини $\operatorname{Re} s > \sigma_0$ визначена похідна, тобто в цій півплощині $F(s)$ є аналітичною функцією та її похідні можна одержати диференціюючи підінтегральну функцію в (1.2) за параметром s.* □

Наприклад, знайдемо зображення функції $f(t) = e^{\alpha t}$, де α — будь-яке комплексне число. Будемо вважати, що показникова функція дорівнює нулю при $t < 0$. Тоді очевидно, що показникова функція є оригіналом з показником зростання $\operatorname{Re}\alpha$.

Обчислимо інтеграл Лапласа

$$\int_0^\infty e^{\alpha t}e^{-st}\,dt = \int_0^\infty e^{-(s-\alpha)t}\,dt = -\left.\frac{e^{-(s-\alpha)t}}{(s-\alpha)}\right|_0^\infty = \frac{1}{s-\alpha}. \quad (1.11)$$

Цей інтеграл збігається при $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re}\alpha$. Дійсно, тоді $e^{-(s-\alpha)t} \to 0$ при $t \to \infty$.

Звернемо увагу на те, що зображення показникової функції $F(s) = \dfrac{1}{s-\alpha}$ є аналітичною функцією у всій комплексній площині змінної s, крім точки $s = \alpha$, де вона має полюс першого порядку.

Зауваження 1.2. Інтеграл Лапласа визначає образ $F(s)$ тільки у правій півплощині $\operatorname{Re} s > \sigma_0$ і в цій півплощині $F(s)$ є функція аналітична. Можна функцію $F(s)$ аналітично продовжити вліво, за пряму $\operatorname{Re} s = \sigma_0$. Тоді, якщо у аналітичному продовженні будуть особливі точки, то всі вони будуть розташовані в лівій півплощині $\operatorname{Re} s \leqslant \sigma_0$ (рис. 1.2).

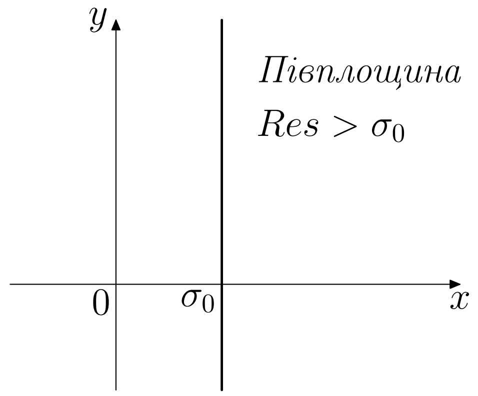


Рис. 1.2. Область визначення образу

Зауваження 1.3. З оцінкі (1.8) випливає, якщо s прямує до ∞ і $\operatorname{Re} s = x$ при цьому необмежено зростає, то

$$\lim_{\substack{s\to\infty \\ (\operatorname{Re} s\to+\infty)}} F(s) = 0. \tag{1.12}$$

1.3. Теорема обернення

Теорема 1.2. *Якщо функція $f(t)$ дійсної змінної t є оригіналом, що має показник зростання σ_0, і функція $F(s)$ є її зображенням, тоді*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} F(s)\, ds, \quad c > \sigma_0. \tag{1.13}$$

Тут інтеграл береться вздовж будь-якої прямої $x = c > \sigma_0$ і розуміється в сенсі головного значення, тобто як границя інтеграла при $b \to \infty$ вздовж відрізку $(c - ib; c + ib)$.

Інтеграл (1.13) називається *інтегралом Рімана—Мелліна*, або *формулою обернення.*

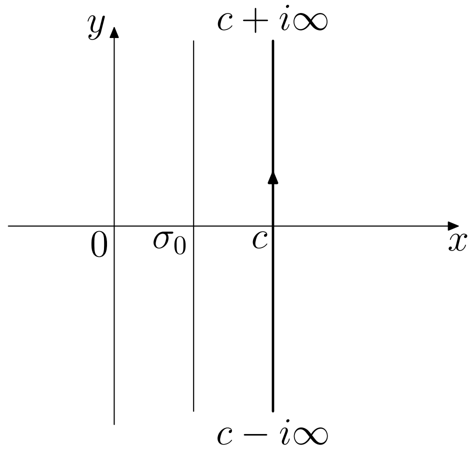


Рис. 1.3. Шлях інтегрування

Доведення. Нехай функція $f(t)$ є оригіналом і має показник зростання σ_0. Розглянемо допоміжну функцію

$$\varphi(t) = e^{-xt} f(t), \quad x > \sigma_0.$$

Функція $\varphi(t)$ за умовами теореми є кусково-гладкою, тобто може мати на будь-якому обмеженому відрізку осі t тільки скінченну кількість точок розриву першого роду і прагне до нуля при $t \to \infty$. Тому її можна зобразити інтегралом Фур'є

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dy \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau) e^{iy(t-\tau)}\, d\tau. \tag{1.14}$$

Тоді

$$e^{-xt} f(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dy \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x\tau} f(\tau) e^{iy(t-\tau)}\, d\tau = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{iyt} dy \int\limits_{0}^{\infty} f(\tau) e^{-(x+iy)\tau}\, d\tau. \tag{1.15}$$

Тут враховано, що $f(\tau) \equiv 0$ при $\tau < 0$.

Позначимо $s = x + iy$ і врахуємо, що внутрішній інтеграл є зображенням $F(s)$ функції $f(t)$. Тоді

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{(x+iy)t} F(s)\, dy = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{st} F(s)\, ds,$$

що і потрібно було довести. $\square$

Умови, за яких функція $F(s)$ комплексної змінної $s = x + iy$ є зображенням деякої функції дійсної змінної t, визначаються наступною теоремою, яку ми наведемо без доведення.

Теорема 1.3. *Нехай функція* $F(s)$ *комплексної змінної* $s = x+iy$ *задовольняє умовам:*

1) $F(s)$ *— функція аналітична в області* $\operatorname{Re} s > \sigma_0$*;*

2) в області $\operatorname{Re} s > \sigma_0$ *функція* $F(s)$ *рівномірно щодо* $\arg s$ *прямує до нуля при* $|s| \to \infty$*;*

3) для всіх $\operatorname{Re} s = c > \sigma_0$ *збігається інтеграл*

$$\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} |F(s)|\, dy, \quad c > \sigma_0.$$

Тоді $F(s)$ *при* $\operatorname{Re} s > \sigma_0$ *є зображенням функції*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} F(s)\, ds.$$

Зв'язок оригіналу та зображення символічно позначається таким чином:

$$f(t) \risingdotseq F(s), \quad F(s) \fallingdotseq f(t).$$

Зауваження 1.4. Оригінал $f(t)$, за означенням, дорівнює нулю при $t < 0$, а вираз для оригіналу, що надається формулою обернення (1.13), може давати значення, відмінні від нуля при $t < 0$. Тому вважається, що інтеграл Мелліна дає вираз

$$f(t)H(t),$$

де $H(t)$ — одинична функція Хевісайда, хоча звичайно її і не пишуть.

Зауваження 1.5. Під значенням $f(t)$ при $t = 0$ розуміється праве граничне значення, тобто

$$f(0) = f(+0) = \lim_{t \to +0} f(t).$$

Зауваження 1.6. Обмеження на зображення, тобто на функцію $F(s)$ комплексної змінної $s = x + iy$, повністю відповідають вимогам леми Жордана. Тому, якщо замкнути відповідним чином шлях інтегрування, для обчислення інтеграла Мелліна можна скористатися теоремою про лишки [8].

Зауваження 1.7. Інтеграл Мелліна дає оригінал $f(t)$ лише в точках її неперервності. Якщо деяка точка t_0 є точкою розриву першого роду функції $f(t)$, то формула обернення дає середнє значення на берегах розриву:

$$f(t) = \frac{1}{2}\left\{f(t_0+0) + f(t_0-0)\right\}.$$

1.4. Властивості перетворення Лапласа

Лінійність перетворення Лапласа

Теорема 1.4. *Якщо $f(t) \risingdotseq F(s)$ і $g(t) \risingdotseq G(s)$, то для будь-яких чисел A і B (дійсних або комплексних)*

$$Af(t) + Bg(t) \risingdotseq AF(s) + BG(s),$$

тобто лінійній комбінації оригіналів відповідає така ж сама лінійна комбінація образів.

Доведення. Ця властивість випливає з лінійних властивостей інтеграла

$$Af(t) + Bg(t) \risingdotseq \int\limits_0^\infty (Af(t) + Bg(t))\, e^{-st}\, dt =$$

$$= A\int\limits_0^\infty f(t)e^{-st}\, dt + B\int\limits_0^\infty g(t)e^{-st}\, dt = AF(s) + BG(s).$$

Отже, перетворення Лапласа лінійне, тобто однорідне й адитивне. □

Властивість подібності

Теорема 1.5. *Якщо $f(t) \risingdotseq F(s)$, то для будь-якого сталого $\alpha > 0$*

$$f(\alpha t) \risingdotseq \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{s}{\alpha}\right). \tag{1.16}$$

Доведення. За умовами теореми, існує образ $F(s)$ функції $f(t)$:

$$f(t) \risingdotseq F(s) = \int\limits_0^\infty f(t)e^{-st}\, dt.$$

Тоді, виконуючи підстановку $\alpha t = \tau$, одержимо

$$f(\alpha t) \risingdotseq \int\limits_0^\infty f(\alpha t) e^{-st}\, dt = \frac{1}{\alpha} \int\limits_0^\infty f(\alpha t) e^{-\frac{s}{\alpha}\alpha t}\, d(\alpha t) =$$

$$= \frac{1}{\alpha} \int\limits_0^\infty f(\tau) e^{-\frac{s}{\alpha}\tau}\, d(\tau) = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{s}{\alpha}\right).$$

□

Теорема запізнювання

Теорема 1.6. *Якщо* $f(t) \risingdotseq F(s)$, $\operatorname{Re} s > \sigma_0$ *і* a *— будь-яке додатне число, то*

$$f(t-a) \risingdotseq e^{-sa} F(s). \tag{1.17}$$

Доведення. Розглянемо зображення функції $f(t-a)$:

$$f(t-a) \risingdotseq \int\limits_0^\infty f(t-a) e^{-st}\, dt.$$

За умовами теореми $f(t)$ — оригінал. За ознакою оригіналу $f(t) \equiv 0$ при $t < 0$. Отже, $f(t-a) \equiv 0$ при $t < a$ і інтеграл від 0 до a буде дорівнювати нулю. Тоді, виконуючи заміну змінної інтегрування $\tau = t - a$, дістанемо:

$$f(t-a) \risingdotseq \int\limits_0^\infty f(t-a) e^{-st}\, dt = \int\limits_a^\infty f(t-a) e^{-st}\, dt =$$

$$= \int\limits_0^\infty f(\tau) e^{-s(\tau+a)}\, d\tau = e^{-sa} \int\limits_0^\infty f(\tau) e^{-s\tau}\, d\tau = e^{-sa} F(s).$$

□

Таким чином, *зміщення оригіналу вправо на a зводиться до множення зображення на* e^{at} *і навпаки — множення зображення на* e^{at} *зміщує графік оригіналу вправо на a*. Ця геометрична властивість зміщення у фізиці пов'язується з *запізнюванням* процесу на час a.

Теорему запізнювання зручно використовувати для знаходження зображення функцій, які на різних проміжках задаються різними аналітичними виразами (формулами).

Теорема зміщення (множення на експоненту)

Теорема 1.7. *Якщо* $f(t) \risingdotseq F(s)$, $\operatorname{Re} s > \sigma_0$, *то для будь-якого комплексного числа* a

$$e^{at} f(t) \risingdotseq F(s-a), \quad \operatorname{Re} s > \sigma_0 + \operatorname{Re} a. \tag{1.18}$$

Доведення. За умовами теореми, функція $f(t)$ є оригіналом. Тоді функція $\varphi(t) = e^{at} f(t)$ також є оригіналом. Очевидно, що показник зростання $\varphi(t)$ дорівнює $\sigma_0 + \operatorname{Re} a$, тому в області $\operatorname{Re} s > \sigma_0 + \operatorname{Re} a$ вона має зображення

$$e^{at} f(t) \risingdotseq \int_0^\infty e^{at} f(t) e^{-st}\, dt = \int_0^\infty f(t) e^{-(s-a)t}\, dt = F(s-a).$$

Отже, *зміщення зображення на a зводиться до множення оригіналу на* e^{at} *і навпаки, множення оригіналу на* e^{at} *зводиться до зміщення зображення на* a. □

Теорема зміщення дозволяє одержати зображення функцій, помножених на експоненту, якщо відомо зображення цих функцій.

Диференціювання оригіналу

Теорема 1.8. *Якщо функція* $f'(t)$ *є оригіналом і* $f(t) \risingdotseq F(s)$, $\operatorname{Re} s > \sigma_0$, *то*

$$f'(t) \risingdotseq sF(s) - f(0), \quad \operatorname{Re} s > \sigma_0, \tag{1.19}$$

тобто диференціювання оригіналу зводиться до множення образу на параметр s *і віднімання* $f(0)$.

Доведення. Розглянемо зображення похідної

$$f'(t) \risingdotseq \int_0^\infty f'(t) e^{-st}\, dt.$$

Звідси, інтегруючи частинами, отримаємо:

$$f'(t) \risingdotseq \int_0^\infty f'(t) e^{-st}\, dt = f(t) e^{-st}\Big|_0^\infty + s \int_0^\infty f(t) e^{-st}\, dt.$$

Функція $f(t)$ має скінченний показник зростання σ_0:

$$|f(t)| \leqslant Me^{\sigma_0 t}.$$

Тому при $\operatorname{Re} s > \sigma_0$ маємо

$$|f(t)e^{-st}| \leqslant Me^{(\sigma_0 - \operatorname{Re} s)t} \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty.$$

Якщо оригінал $f(t)$ у точці $t = 0$ є функцією неперервною, то $f(0) = 0$, тому що $f(t) = 0$ при $t < 0$. Якщо у точці $t = 0$ оригінал має розрив першого роду, то, за визначенням, $f(t)$ має праву границю

$$f(0) = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} f(t)$$

(ліва границя у точці $t = 0$ завжди дорівнює нулю). Таким чином,

$$f(t)e^{-st}\Big|_0^\infty = -f(0)$$

і остаточно одержимо

$$f'(t) \risingdotseq s \int\limits_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt - f(0) = sF(s) - f(0).$$

$\square$

Коли у точці $t = 0$ оригінал $f(t)$ є неперервною функцією, то $f(0) = 0$. Тоді формула (1.19) спрощується

$$f'(t) \risingdotseq sF(s)$$

і *диференціювання оригіналу зводиться до множення образу на параметр* s.

Якщо друга похідна є оригіналом, то її образ одержимо, повторно застосовуючи формулу (1.19),

$$f''(t) = (f'(t))' \risingdotseq s\,[sF(s) - f(0)] - f'(0) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0).$$

Якщо функція $f^{(n)}(t)$ *є оригіналом і* $f(t) \risingdotseq F(s)$, $\operatorname{Re} s > \sigma_0$, *то образ похідної* n*-го порядку має вигляд*

$$f^{(n)}(t) \risingdotseq s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - \ \ldots\ - f^{(n-1)}(0), \quad \operatorname{Re} s > \sigma_0. \tag{1.20}$$

Формула (1.20) доводиться за індукцією.

Зауваження 1.8. Нагадаємо, що під $f^{(k)}(0)$ розуміється права границя

$$f^{(k)}(0) = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} f^{(k)}(t).$$

Диференціювання зображення

Теорема 1.9. *Якщо* $F(s) \risingdotseq f(t)$, $\operatorname{Re} s > \sigma_0$, *то диференціювання зображення зводиться до множення оригіналу на* $(-t)$*:*

$$F'(s) \risingdotseq -tf(t). \tag{1.21}$$

Доведення. Нехай

$$f(t) \risingdotseq F(s) = \int\limits_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt.$$

Функція $F(s)$ у правій півплощині $\operatorname{Re} s > \sigma_0$ є аналітичною функцією, тому у неї існує похідна, яку можна одержати, диференціюючи за параметром s підінтегральну функцію у невласному інтегралі (1.2):

$$F'(s) = \frac{d}{ds}\int\limits_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt = \int\limits_0^\infty (-t)f(t)e^{-st}\,dt \risingdotseq -tf(t).$$

Раніше було показано (див. с. 9), що цей невласний інтеграл збігається рівномірно, до того ж він є образом функції $tf(t)$. Таким чином, *диференціювання зображення звелося до множення оригіналу на* $(-t)$. □

Звернемо увагу на те, що множення функції $f(t)$ на будь-яку степеневу функцію t^n не змінює її показник зростання. Тому похідні вищих порядків можна отримати, застосовуючи формулу (1.21) декілька разів:

$$F''(s) = \int\limits_0^\infty f(t)t^2e^{-st}\,dt \risingdotseq (-1)^2t^2f(t) = t^2f(t), \tag{1.22}$$

$$\ldots$$

$$F^{(n)}(s) = (-1)^n\int\limits_0^\infty f(t)t^ne^{-st}\,dt \risingdotseq (-1)^nt^nf(t). \tag{1.23}$$

Інтегрування оригіналу

Теорема 1.10. *Якщо* $F(s) \risingdotseq f(t)$, $\operatorname{Re} s > \sigma_0$, *то інтегрування оригіналу зводиться до ділення зображення на параметр* s

$$\int\limits_0^t f(\tau)\,d\tau \risingdotseq \frac{F(s)}{s}. \tag{1.24}$$

Доведення. Нехай $f(t)$ є оригіналом з показником зростання σ_0 і $f(t) \risingdotseq F(s)$, $\operatorname{Re} s > \sigma_0$. Розглянемо функцію

$$\varphi(t) = \int_0^t f(\tau)\, d\tau.$$

Очевидно, що $\varphi(t)$ є оригіналом, причому вона має той самий показник зростання, що і функція $f(t)$. Дійсно,

$$\left| \int_0^t f(\tau)\, d\tau \right| \leqslant \int_0^t |f(\tau)|\, d\tau < \int_0^t M e^{\sigma_0 \tau} d\tau =$$

$$= \frac{M}{\sigma_0} e^{\sigma_0 \tau} \Big|_0^t = \frac{M}{\sigma_0} \left(e^{\sigma_0 t} - 1 \right) < M_1 e^{\sigma_0 t}.$$

Позначимо зображення функції $\varphi(t)$ символом $\Phi(s)$, тобто $\varphi(t) \risingdotseq \Phi(s)$. Звернемо увагу на те, що $\varphi'(t) = f(t)$, причому $\varphi(0) = 0$. Тоді

$$f(t) = \varphi'(t) \risingdotseq s\Phi(s).$$

Звідси випливає, що $F(s) = s\Phi(s)$, або $\Phi(s) = \dfrac{F(s)}{s}$. Таким чином,

$$\int_0^t f(\tau)\, d\tau \risingdotseq \frac{F(s)}{s}.$$

□

Інтегрування зображення

Теорема 1.11. *Якщо $F(s) \fallingdotseq f(t)$, $\operatorname{Re} s > \sigma_0$ та інтеграл $\int_s^\infty F(s)\, ds$ збігається, то інтегрування зображення зводиться до ділення оригіналу на t*

$$\frac{f(t)}{t} \risingdotseq \int_s^\infty F(s)\, ds. \tag{1.25}$$

Зауваження 1.9. Невласний интеграл (1.25) розуміється в наступному сенсі:

$$\int\limits_{s}^{\infty} F(s)\,ds = \lim_{\substack{p\to\infty \\ (\operatorname{Re} s\to\infty)}} \int\limits_{s}^{p} F(s)\,ds,$$

тобто p прямує до ∞ таким чином, що дійсна частина p прямує до $+\infty$ (див. с. 10).

Доведення. Нехай

$$f(t) \risingdotseq F(s) = \int\limits_{0}^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt.$$

У півплощині $\operatorname{Re} s > \sigma_0$ невласний інтеграл $\int\limits_{0}^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt$ збігається абсолютно та рівномірно відносно s, тому його можна інтегрувати за параметром s.

Розглянемо інтеграл

$$\int\limits_{s_1}^{\infty} F(s)\,ds = \int\limits_{s_1}^{\infty} ds \int\limits_{0}^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt.$$

Тут s_1 — будь-яке комплексне число, дійсна частина якого більше показника зростання функції $f(t)$, тобто $\operatorname{Re} s_1 > \sigma_0$. Тому що внутрішній інтеграл збігається рівномірно по s, можна змінити порядок інтегрування у подвійному інтегралі та проінтегрувати за змінною s:

$$\int\limits_{s_1}^{\infty} F(s)\,ds = \int\limits_{0}^{\infty} dt f(t) \int\limits_{s_1}^{\infty} e^{-st}\,ds = \int\limits_{0}^{\infty} \frac{f(t)}{t}e^{-s_1 t}dt.$$

Звідси випливає, що функція $f(t)/t$ є оригіналом, причому $f(t)/t$ має той самий показник зростання, що і функція $f(t)$ (множення на степеневу функцію не змінює показник зростання). Таким чином,

$$\frac{f(t)}{t} \risingdotseq \int\limits_{s_1}^{\infty} F(s)\,ds, \quad \operatorname{Re} s_1 > \sigma_0.$$

□

Теорема множення

Означення 1.4. *Згорткою функцій* $f(t)$ *і* $g(t)$ називається інтеграл

$$(f(t) * g(t)) = (f * g)\,(t) = \int\limits_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau. \qquad (1.26)$$

Згортка функцій $f(t)$ і $g(t)$ є функція змінної t. Очевидно, що

$$\int\limits_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau = \int\limits_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau.$$

Справді, виконуючи заміну змінної інтегрування $\zeta = t - \tau$, одержимо

$$\int\limits_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau = \left\| \begin{array}{c} \zeta = t-\tau \\ d\zeta = -d\tau \end{array} \right\| = \int\limits_0^t f(t-\zeta)g(\zeta)\,d\zeta.$$

Теорема 1.12 (Борель). *Якщо функції* $f(t)$ *і* $g(t)$ *є оригіналами і*

$$\begin{aligned} f(t) &\risingdotseq F(s), \quad \operatorname{Re} s > \sigma_1, \\ g(t) &\risingdotseq G(s), \quad \operatorname{Re} s > \sigma_2, \end{aligned}$$

то зображення згортки функцій $f(t)$ *і* $g(t)$ *дорівнює добутку їх зображень*

$$(f(t) * g(t)) \risingdotseq F(s)G(s), \quad \operatorname{Re} s > max\left\{\sigma_1, \sigma_2\right\}. \qquad (1.27)$$

Доведення. За умовами теореми функції $f(t)$ і $g(t)$ є оригіналами, тобто мають обмежені показники зростання:

$$|f(t)| \leqslant M_1 e^{\sigma_1 t}, \quad |g(t)| \leqslant M_2 e^{\sigma_2 t}.$$

Згортка цих функцій також має обмежений показник зростання:

$$\left| \int\limits_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau \right| \leqslant M_1 M_2 \int\limits_0^t e^{\sigma_1 \tau} e^{\sigma_2 (t-\tau)}\,d\tau =$$

$$= \frac{M_1 M_2}{\sigma_1 - \sigma_2}\left(e^{\sigma_1 t} - e^{\sigma_2 t}\right) \leqslant \frac{2M_1M_2}{|\sigma_1 - \sigma_2|} e^{\sigma_0 t}, \quad \sigma_0 = \max\left\{\sigma_1, \sigma_2\right\}.$$

Неважко переконатися, що згортка задовольняє й іншим умовам існування оригіналу, тому згортка оригіналів є оригіналом.

Обчислимо зображення згортки

$$(f(t) * g(t)) \risingdotseq \int\limits_0^\infty dt e^{-st} \int\limits_0^t f(\tau) g(t-\tau)\, d\tau. \tag{1.28}$$

Цей двократний інтеграл можна розглядати як подвійний, що визначений у нескінченному секторі площини $D(0 \leqslant t < \infty, 0 \leqslant \tau \leqslant t)$ (рис. 1.4).

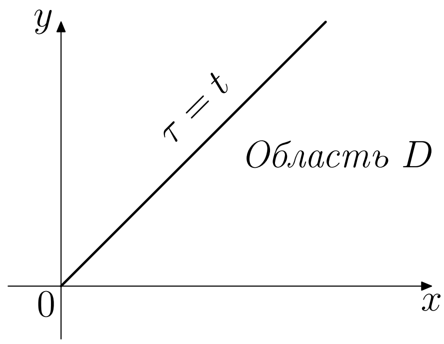


Рис. 1.4. Область інтегрування

При $\operatorname{Re} s > \sigma_0$ подвійний інтеграл (1.28) в області D збігається абсолютно, тому можна змінити порядок інтегрування

$$(f(t) * g(t)) \risingdotseq \int\limits_0^\infty d\tau f(\tau) \int\limits_\tau^\infty e^{-st} g(t-\tau)\, dt.$$

Зробимо заміну змінної інтегрування $\zeta = t - \tau$, тоді одержимо

$$(f(t) * g(t)) \risingdotseq \int\limits_0^\infty d\tau f(\tau) \int\limits_0^\infty e^{-s(\tau+\zeta)} g(\zeta)\, d\zeta =$$

$$= \int\limits_0^\infty e^{-s\tau} f(\tau) d\tau \int\limits_0^\infty e^{-s\zeta} g(\zeta) d\zeta = F(s) \cdot G(s).$$

Таким чином, *образ згортки двох функцій дорівнює добутку їх образів.* $\square$

Множення оригіналів

Теорема 1.13. *Якщо* $f(t) \risingdotseq F(s)$, $\operatorname{Re} s > \sigma_1$, $g(t) \risingdotseq G(s)$, $\operatorname{Re} s > \sigma_2$, *то добуток цих оригіналів також є оригіналом, причому*

$$f(t)g(t) \risingdotseq \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(p)G(s-p)\,dp. \tag{1.29}$$

Тут $c > \sigma_1$ *і* $\operatorname{Re} s > \sigma_2 + c$.

Доведення. Очевидно, що добуток функцій $f(t)g(t)$ задовольняє умовам існування оригіналу та його зображення обчислюється за формулою

$$f(t)g(t) \risingdotseq \int\limits_{0}^{\infty} f(t)g(t)e^{-st}dt.$$

Скористаємося для функції $f(t)$ формулою обернення (1.13)

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(p)e^{pt}dp.$$

Тут $c > \sigma_1$. Враховуючи цю рівність, одержимо подвійний інтеграл, в якому змінимо порядок інтегрування

$$f(t)g(t) \risingdotseq \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{0}^{\infty} \left(\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(p)e^{pt}dp \right) g(t)e^{-st}dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} dpF(p) \int\limits_{0}^{\infty} g(t)e^{-(s-p)t}dt.$$

Нехай $\operatorname{Re} s > \sigma_2 + c$, тоді буде виконуватися нерівність $\operatorname{Re}(s-p) > \sigma_2$, тому що $\operatorname{Re} p = c$, і внутрішній інтеграл буде дорівнювати $G(s-p)$. Отже,

$$f(t)g(t) \risingdotseq \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(p)G(s-p)dp.$$

Зауважимо, що число c можна взяти скільки завгодно близьким до σ_1. Таким чином, зображення функції $f(t)g(t)$ визначено у півплощині $\operatorname{Re} s > \sigma_0$, де $\sigma_0 = \sigma_1 + \sigma_2$.

Теорема доведена. $\square$

1.5. Зображення елементарних функцій

Одинична функція Хевісайда

Функція Хевісайда (рис. 1.5) зображує стрибок одиничної висоти на нулі

$$H(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases} \tag{1.30}$$

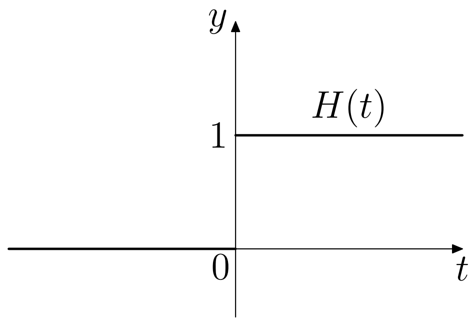


Рис. 1.5. Функція Хевісайда

Очевидно, що функція Хевісайда є оригіналом: функція $H(t)$ дорівнює нулю при $t < 0$; вона стала при $t > 0$, тобто має скінченний показник зростання $\sigma_0 = 0$; $H(t)$ неперервна скрізь, крім точки $t = 0$, де має розрив першого роду.

Знайдемо її образ

$$H(t) \risingdotseq F(s) = \int_0^\infty e^{-st} dt = \left. \frac{e^{-st}}{-s} \right|_0^\infty = \frac{1}{s}\,. \tag{1.31}$$

Тут враховано, що інтеграл (1.31) збігається при всіх $\operatorname{Re} s > 0$. Справді, якщо $s = x + iy$ і $\operatorname{Re} s = x > 0$, то

$$\left| e^{-st} \right| = \left| e^{-(x+iy)t} \right| = \left| e^{-xt} \right| \left| e^{-iyt} \right| = e^{-xt} \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty.$$

Зауваження 1.10. Інтеграл (1.31) визначає образ $F(s) = 1/s$ тільки у правій півплощині $\operatorname{Re} s > 0$, але $F(s) = 1/s$ є аналітичною функцією у всій комплексній площині змінної s, крім точки $s = 0$, де вона має простий полюс. Таким чином, функцію $F(s) = 1/s$ можна розглядати як аналітичне продовження образу функції Хевісайда у всю комплексну площину.

Відновимо оригінал за заданим образом $F(s) = 1/s$, $\operatorname{Re} s > 0$. Він визначається за формулою Мелліна (1.13)

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{1}{s}\, e^{st}\, ds, \tag{1.32}$$

де інтегрування виконується вздовж прямої $\operatorname{Re} s = c > 0$. Тому що показник зростання одиничної функції $\sigma_0 = 0$, стала c — будь-яке додатнє число.

Нехай $t > 0$. Розглянемо контур, що складається з відрізку $[c - ib, c + ib]$ прямої $\operatorname{Re} s = c > 0$ і дуги C_R кола $|s| = R$, що розміщується зліва ($\operatorname{Im} s < c$) від прямої $\operatorname{Re} s = c$ (рис. 1.6).

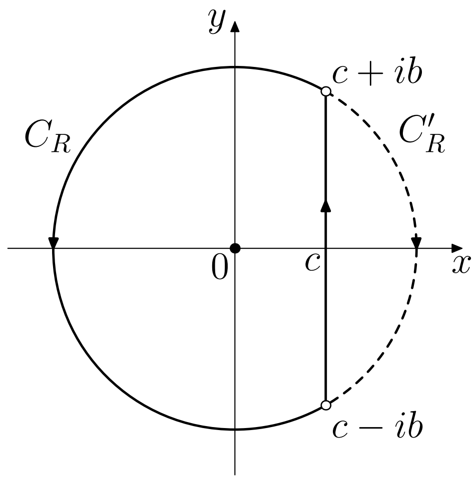


Рис. 1.6. Контур інтегрування

Всередині контуру інтегрування є тільки одна особлива точка $s = 0$, яка є полюсом першого порядку. Тоді, відповідно до теореми про лишки [8], дістанемо

$$\oint\limits_{C} \frac{1}{s}\, e^{st}\, ds = \int\limits_{C_R} \frac{1}{s}\, e^{st}\, ds + \int\limits_{c-ib}^{c+ib} \frac{1}{s}\, e^{st}\, ds = 2\pi i \operatorname{Res}\left[\frac{e^{st}}{s}, 0\right] = 2\pi i e^{0} = 2\pi i.$$

Оскільки $1/s \to 0$ рівномірно відносно $\arg s$ при $R \to \infty$, то при $t > 0$ за лемою Жордана [8] інтегралом по C_R можна знехтувати, тобто

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{C_R} \frac{1}{s}\, e^{st}\, ds = 0.$$

Тоді, переходячи до границі при $R \to \infty$, одержимо

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{1}{s} e^{st}\, ds = \frac{1}{2\pi i} \lim_{b\to\infty} \int\limits_{c-ib}^{c+ib} \frac{1}{s} e^{st}\, ds = 1.$$

Аналогічно, щоб виконувалися умови леми Жордана при $t < 0$, контур інтегрування замкнемо справа ($\operatorname{Im} s > c$) по кривій C'_R (на рис. 1.6 крива C'_R зображена пунктиром). У правій півплощині $\operatorname{Im} s > c$ підінтегральна функція особливих точок не має, тому $f(t) \equiv 0$ при $t < 0$.

Таким чином, оригіналом функції $1/s$ є функція Хевісайда

$$\frac{1}{s} \risingdotseq H(t). \tag{1.33}$$

Функція-оригінал, за означенням, дорівнює нулю при $t < 0$. Тому що одинична функція $H(t) = 1$ при $t > 0$, то для спрощення запису замість функції Хевісайда будемо писати одиницю. Тоді формула (1.33) набуває вигляду

$$1 \risingdotseq \frac{1}{s} \tag{1.34}$$

Нехай тепер одиничний стрибок відбувається в точці $t = a$ (рис. 1.7):

$$H(t-a) = \begin{cases} 1, & t > a, \\ 0, & t < a. \end{cases} \tag{1.35}$$

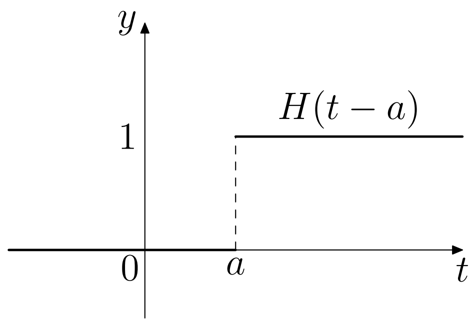


Рис. 1.7. Зміщений стрибок

Тоді за теоремою запізнювання (1.17) зображення зміщеного стрибка має вигляд:

$$H(t-a) \risingdotseq \frac{e^{-as}}{s}. \tag{1.36}$$

Імпульс одиничної амплітуди (рис. 1.8)

$$f(t)=\begin{cases}0, & t<a,\\ 1, & a<t<b,\\ 0, & t>b,\end{cases} \tag{1.37}$$

можна розглядати як різницю двох стрибків одиничної висоти

$$f(t)=H(t-a)-H(t-b)\risingdotseq\frac{e^{-as}}{s}-\frac{e^{-bs}}{s}=\frac{e^{-as}-e^{-bs}}{s}. \tag{1.38}$$

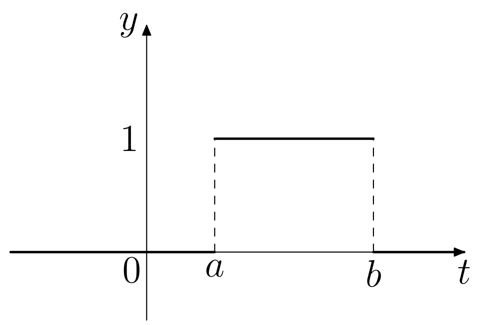


Рис. 1.8. Імпульс

Показникова функція

Розглянемо показникову функцію

$$f(t)=e^{\alpha t}, \tag{1.39}$$

де α — будь-яке комплексне число. Будемо вважати, що показникова функція дорівнює нулю при $t<0$. Тоді очевидно, що показникова функція є оригіналом з показником зростання $\operatorname{Re}\alpha$.

Враховуючи, що $1\risingdotseq\frac{1}{s}$, $\operatorname{Re}s>0$, за теоремою зміщення (1.18) одержимо

$$e^{\alpha t}\risingdotseq\frac{1}{s-\alpha}\quad\forall\operatorname{Re}s>\operatorname{Re}\alpha. \tag{1.40}$$

Якщо покласти $\alpha=0$, то знову маємо формулу (1.34).

Зауваження 1.11. Теорема 1.1 гарантує існування зображення показникової функції тільки у півплощині $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} \alpha$, але зображення

$$F(s) = \frac{1}{s - \alpha}$$

є аналітичною функцією у всій комплексній площині змінної s, крім точки $s = \alpha$, де вона має полюс першого порядку.

Тригонометричні функції

Розглянемо функції $\cos(\omega t)$ і $\sin(\omega t)$. За формулою Ейлера маємо:

$$\cos(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}, \quad \sin(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}.$$

Враховуючи лінійну властивість перетворення Лапласа і формулу (1.40), одержимо

$$\cos(\omega t) = \frac{1}{2}\left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right) \risingdotseq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s - i\omega} + \frac{1}{s + i\omega}\right) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}. \tag{1.41}$$

У формулі (1.41) два доданка: перший існує при $\operatorname{Re} s > \operatorname{Im} \omega > 0$, другий — при $\operatorname{Re} s > -\operatorname{Im} \omega > 0$. Таким чином, образ функції $\cos(\omega t)$ буде існувати при $\operatorname{Re} s > |\operatorname{Im} \omega|$ (в цьому випадку буде збігатися відповідний інтеграл Лапласа).

Для дійсних ω уявна частина дорівнює нулю ($\operatorname{Im} \omega = 0$). Отже, показник зростання $\cos(\omega t)$ в цьому випадку буде дорівнювати нулю.

Аналогічно при $\operatorname{Re} s > |\operatorname{Im} \omega|$ маємо

$$\sin(\omega t) = \frac{1}{2i}\left(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}\right) \risingdotseq \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s - i\omega} - \frac{1}{s + i\omega}\right) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}. \tag{1.42}$$

Зауважимо, що зображення функцій $\cos(\omega t)$ і $\sin(\omega t)$ є функціями, аналітичними у всій комплексній площині, крім точок $i\omega$ і $-i\omega$, які є простими полюсами.

Гіперболічні функції

Зображення гіперболічних функцій одержимо, скориставшись лінійністю перетворення Лапласа і формулою (1.40):

$$\operatorname{ch}\omega t = \frac{1}{2}\left(e^{\omega t} + e^{-\omega t}\right) \risingdotseq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-\omega} + \frac{1}{s+\omega}\right) = \frac{s}{s^2-\omega^2}, \tag{1.43}$$

$$\operatorname{sh}\omega t = \frac{1}{2}\left(e^{\omega t} - e^{-\omega t}\right) \risingdotseq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-\omega} - \frac{1}{s+\omega}\right) = \frac{\omega}{s^2-\omega^2}. \tag{1.44}$$

Степенева функція

Нехай $f(t) = t^n$, де n — ціле число, $n \neq 0$. Образ степеневої функції визначається виразом

$$t^n \risingdotseq \int\limits_0^\infty t^n e^{-st} dt.$$

Можна обчислити цей інтеграл, однак зручніше скористатися властивостями перетворення Лапласа. Нагадаємо очевидні рівності:

$$\int\limits_0^t d\tau = t, \quad \int\limits_0^t \tau\, d\tau = \frac{t^2}{2}, \quad \ldots \quad \int\limits_0^t \tau^n\, d\tau = \frac{t^{n+1}}{n+1}.$$

Тоді, враховуючи властивість інтегрування оригіналу (1.24)

$$f(t) \risingdotseq F(s) \quad \Rightarrow \quad \int\limits_0^t f(\tau)\, d\tau \risingdotseq \frac{F(s)}{s}, \quad \operatorname{Re} s > \sigma_0,$$

одержимо ланцюг рекурентних співвідношень:

$$1 \risingdotseq \frac{1}{s}, \qquad \operatorname{Re} s > 0, \tag{1.45}$$

$$t = \int\limits_0^t d\tau \risingdotseq \frac{1/s}{s} = \frac{1}{s^2}, \qquad \operatorname{Re} s > 0, \tag{1.46}$$

$$t^2 = 2\int\limits_0^t \tau\, d\tau \risingdotseq 2\,\frac{1/s}{s^2} = \frac{2}{s^3}, \qquad \operatorname{Re} s > 0, \tag{1.47}$$

$$\dots$$

$$t^n \risingdotseq \frac{n!}{s^{n+1}}, \qquad \operatorname{Re} s > 0. \tag{1.48}$$

Загальна степенева функція

Загальна степенева функція — це степенева функція з довільним показником $\alpha > 0$

$$f(t) = t^\alpha. \tag{1.49}$$

Функція t^α при $\alpha > 0$ є оригіналом з показником зростання $\sigma_0 = 0$ і тому має зображення, яке у півплощині $\operatorname{Re} s > 0$ є аналітичною функцією і визначається формулою

$$t^\alpha \risingdotseq F(s) = \int\limits_0^\infty t^\alpha e^{-st} dt. \tag{1.50}$$

Обчислимо інтеграл (1.50). Спочатку розглянемо випадок, коли змінна s дійсна, тобто $s = x > 0$. Тоді, зробивши заміну змінної інтегрування $\tau = xt$, одержимо

$$t^\alpha \risingdotseq \int\limits_0^\infty t^\alpha e^{-xt} dt = \left\| \begin{matrix} \tau = xt \\ dt = \dfrac{1}{x} d\tau \end{matrix} \right\| = \frac{1}{x^{\alpha+1}} \int\limits_0^\infty e^{-\tau} \tau^\alpha\, d\tau = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{x^{\alpha+1}}. \tag{1.51}$$

Тут використана *гамма-функція Ейлера*

$$\Gamma(\alpha) = \int\limits_0^\infty e^{-\tau} \tau^{\alpha-1}\, d\tau. \tag{1.52}$$

Оскільки функція $F(s)$, яка визначена формулою (1.50), є функцією аналітичною в області $\operatorname{Re} s > 0$ і на додатній частині дійсної осі має значення (1.51), то функція $F(s)$ є аналітичним продовженням значення (1.51) в область $\operatorname{Re} s > 0$

$$F(s) = \int\limits_0^\infty t^\alpha e^{-st} dt = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}. \tag{1.53}$$

Таким чином,

$$t^\alpha \risingdotseq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}. \tag{1.54}$$

Зауваження 1.12. Якщо $\alpha < 0$, то функція t^α має нескінченний розрив у точці $t = 0$ і не є оригіналом. Але можна показати, що для $-1 < \alpha < 0$ інтеграл Лапласа при $\operatorname{Re} s > 0$ також збігається.

Розглянемо деякі властивості гамма-функції. Проінтегруємо частинами:

$$\Gamma(\alpha+1) = \int\limits_0^\infty e^{-\tau}\tau^\alpha \, d\tau = \left\| \begin{matrix} u = \tau^\alpha & du = \alpha\tau^{\alpha-1} d\tau \\ dv = e^{-\tau} d\tau & v = -e^{-\tau} \end{matrix} \right\| =$$

$$= -\tau^{\alpha-1} e^{-\tau}\Big|_0^\infty + \alpha \int\limits_0^\infty e^{-\tau}\tau^{\alpha-1} \, d\tau = \alpha\Gamma(\alpha).$$

Таким чином, ми отримали рекурентне співвідношення

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha). \tag{1.55}$$

Звідси, якщо $\alpha = n$ ціле, тоді

$$\Gamma(n+1) = n! \tag{1.56}$$

і формула (1.54) узгоджується з виразом для образу степеневої функції цілого степеня.

Далі

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int\limits_0^\infty e^{-\tau}\tau^{-\frac{1}{2}} \, d\tau = \left\| \begin{matrix} x = \tau^2 \\ d\tau = \dfrac{2dx}{\sqrt{x}} \end{matrix} \right\| = 2\int\limits_0^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

1.6. Відновлення оригіналу

Для відновлення оригіналу можна скористатися інтегралом Рімана—Мелліна (теоремою обернення). Але можна уникнути обчислення цього інтеграла, якщо звернути увагу на те, що більшість образів є дробово-раціональні правильні функції. Тому розглянемо деякі властивості цих функцій.

Многочлен. Розклад на прості множники

Означення 1.5. *Цілою раціональною функцією* $P_n(s)$ (*алгебраїчним многочленом*) називається функція змінної s вигляду

$$P_n(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ \dots \ + a_1 s + a_0. \tag{1.57}$$

Числа $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ називаються *коефіцієнтами многочлена.*

Означення 1.6. Число z називається коренем многочлена $P_n(s)$, якщо

$$P_n(z) = 0. \tag{1.58}$$

Теорема 1.14. *Якщо число z є коренем многочлена $P_n(s)$, то*

$$P_n(s) = (s - z)\, Q_{n-1}(s), \tag{1.59}$$

де $Q_{n-1}(s)$ — многочлен степеня $(n-1)$.

Теорема 1.15 (Основна теорема алгебри)**.** *Многочлен степеня n має рівно n коренів (комплексних).*

Корені многочлена можуть бути різними. Іноді деякі корені збігаються, тому розглядають прості корені і кратні.

Означення 1.7. Число z називається *простим* коренем многочлена $P_n(s)$, якщо

$$P_n(s) = (s - z)\, Q_{n-1}(s), \quad Q_{n-1}(z) \neq 0. \tag{1.60}$$

Означення 1.8. Число z називається *кратним* коренем многочлена $P_n(s)$ *кратності k*, якщо

$$P_n(s) = (s - z)^k\, Q_{n-k}(s), \quad Q_{n-k}(z) \neq 0. \tag{1.61}$$

Таким чином, якшо усі корені різні, то це прості корені, їх кратність дорівнює одиниці; а якщо деякі корені збігаються, то ці корені кратні, їх кратність більше одиниці. Наприклад, многочлен

$$P_2(s) = s^2 - 2s + 1 = (s-1)^2$$

має два кореня $s_1 = s_2 = 1$, які збігаються. Тобто корінь $s = 1$ — це кратний корінь, його кратність дорівнює двом.

Теорема 1.16. *Якщо число z є коренем многочлена $P_n(s)$ кратності k, то*

$$P_n(z) = P_n'(z) = P_n''(z) = \ldots = P_n^{(k-1)}(z) = 0, \quad P_n^{(k)}(z) \neq 0. \tag{1.62}$$

Таким чином, за основною теоремою алгебри маємо, що кожен многочлен степеня n має рівно n *комплексних коренів*. Якщо комплексне число z є коренем многочлена кратності k, то многочлен містить множник

$$(x-z)^k.$$

Можна довести, що *кожен многочлен розкладається на прості множники* вигляду

$$P_n(s) = a_n (s-z_1)^{k_1} (s-z_2)^{k_2} \ldots (s-z_r)^{k_r}, \tag{1.63}$$

де $z_1, z_2, \ldots, z_r$ — комплексні корені многочлена кратності $k_1, k_2, \ldots, k_r$ відповідно, причому сума всіх показників дорівнює степені многочлена n.

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_r = n.$$

Многочлен з *дійсними коефіцієнтами* може мати як комплексні, так і дійсні корені. Але дійсних коренів може не мати зовсім — основна теорема цього не гарантує. Наприклад, квадратний тричлен у випадку від'ємного дискримінанта дійсних коренів не має.

Якщо многочлен з дійсними коефіцієнтами має комплексні корені, то ці корені попарно комплексно-спряжені. Наприклад, нехай комплексне число

$$z = \alpha + i\beta$$

є корінь многочлена $P_n(s)$ кратності k. Тоді спряжене число

$$\bar{z} = \alpha - i\beta$$

буде також коренем многочлена $P_n(s)$ тієї ж самої кратності k.

Дійсно, за означенням кореня маємо тотожність:

$$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 \equiv 0.$$

Нагадаємо, що коефіцієнти $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ — дійсні числа.

Тоді

$$P_n(z) = P_n(\alpha + i\beta) = a_n \alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \ldots + a_1 \alpha + a_0 + \\ + i\left(a_n \beta^n + a_{n-1}\beta^{n-1} + \ldots + a_1 \beta + a_0\right) \equiv 0.$$

Звідси випливає, що дійсна і уявна частини цієї тотожності окремо дорівнюють нулю:

$$a_n \alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \ldots + a_1 \alpha + a_0 \equiv 0,$$
$$a_n \beta^n + a_{n-1}\beta^{n-1} + \ldots + a_1 \beta + a_0 \equiv 0.$$

Враховуючи ці тотожності, маємо

$$P_n(\bar{z}) = P_n(\alpha - i\beta) = a_n \alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \ldots + a_1 \alpha + a_0 - \\ - i\left(a_n \beta^n + a_{n-1}\beta^{n-1} + \ldots + a_1 \beta + a_0\right) \equiv 0,$$

тобто спряжене число $\bar{z}$ також є коренем многочлена $P_n(s)$.

Тому що комплексне число z є коренем многочлена $P_n(s)$ кратності k, многочлен містить множник $(s - z)^k$. Але тоді $P_n(s)$ буде також містити множник $(s - \bar{z})^k$. Таким чином, кратність кореня $\bar{z}$ також буде k. Що і потрібно було довести.

Наведемо очевидні рівності:

$$z + \bar{z} = \alpha + i\beta + \alpha - i\beta = 2\alpha, \quad z\bar{z} = (\alpha + i\beta)(\alpha - i\beta) = \alpha^2 + \beta^2,$$

з яких випливає

$$(s - z)(s - \bar{z}) = s^2 - 2\alpha s + \left(\alpha^2 + \beta^2\right) = s^2 + ps + q,$$

де позначено $p = -2\alpha$, $q = \alpha^2 + \beta^2$ (дійсні числа).

Отже, добуток двох комплексно-спряжених множників $s - z$ і $s - \bar{z}$, які відповідають парі комплексно-спряжених коренів z і $\bar{z}$, дорівнює дійсному множнику $s^2 + ps + q$.

Враховуємо ці рівності. Нехай многочлен $P_n(s)$ з дійсними коефіцієнтами має дійсні корені $z_1, z_2, \ldots, z_r$ кратності $k_1, k_2, \ldots, k_r$ відповідно, а також комплексно-спряжені пари комплексних коренів ζ_1, $\overline{\zeta_1}$, ζ_2, $\overline{\zeta_2}$, $\ldots$, ζ_l, $\overline{\zeta_l}$ кратності $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_l$. Тому що комплексно-спряжені пари коренів у розкладанні (1.63) утворюють квадратний тричлен з дійсними коефіцієнтами, розкладання (1.63) приймає такий вигляд:

$$P_n(s) = a_n (s - z_1)^{k_1} (s - z_2)^{k_2} \ldots \left(s^2 + p_1 s + q_1\right)^{\varkappa_1} \ldots \left(s^2 + p_l s + q_l\right)^{\varkappa_l}, \tag{1.64}$$

де z_1, z_2, $\ldots$, p_l, q_l — дійсні числа.

Приклад 1.1. Розглянемо многочлен

$$P_3(s) = s^3 - 1.$$

За відомою формулою скороченого множення маємо

$$s^3 - 1 = (s - 1)\left(s^2 + s + 1\right), \tag{1.65}$$

причому дискримінант квадратного тричлена $s^2 + s + 1$ від'ємний.

Це розкладання типу (1.64). Звідси випливає, що многочлен $s^3 - 1$ має один дійсний корінь

$$s_1 = 1$$

і два комплексних кореня:

$$s_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{-\frac{3}{4}} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Корені s_2 і s_3 комплексно-спряжені: $s_2 = \overline{s_3}$. Звернемо увагу на те, що

$$(s - s_2)(s - s_3) = \left(s + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(s + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = s^2 + s + 1.$$

Крім розкладання (1.65) можна побудувати друге розкладання многочлена $s^3 - 1$ (див. (1.63)):

$$s^3 - 1 = (s - 1)\left(s + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(s + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

яке містить комплексні числа. Зауважимо, що в розкладі (1.65) комплексні числа відсутні.

Дробово-раціональна функція

Означення 1.9. Відношення двох алгебраїчних многочленів називається *дробово-раціональною функцією*

$$\frac{P_n(s)}{Q_m(s)} = \frac{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \, \dots + a_1 s + a_0}{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \, \dots + b_1 s + b_0}. \tag{1.66}$$

Якщо степінь чисельника n менший за степінь знаменника m, тобто $n < m$, то алгебраїчний дріб називається *правильним*; коли $n \geqslant m$, дріб називається *неправильним*.

Розглянемо знаменник правильного раціонального дробу (1.66)

$$Q_m(s) = b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \, \dots + b_1 s + b_0.$$

Його можна розкласти на множники, що відповідають дійсним кореням і парам комплексно-спряженних коренів (1.64):

$$Q_m(s) = b_m \left(s - z_1\right)^{k_1} \left(s - z_2\right)^{k_2} \, \dots \, \left(s^2 + p_1 s + q_1\right)^{\varkappa_1} \dots \left(s^2 + p_l s + q_l\right)^{\varkappa_l}. \tag{1.67}$$

Можна довести, що кожен правильний алгебраїчний дріб можна зобразити у вигляді суми простих алгебраїчних дробів:

$$\begin{aligned}
\frac{P_n(s)}{Q_m(s)} = {} & \frac{A_1^1}{s - z_1} + \frac{A_2^1}{\left(s - z_1\right)^2} + \, \dots + \frac{A_{k_1}^1}{\left(s - z_1\right)^{k_1}} + \\
& + \frac{A_1^2}{s - z_2} + \frac{A_2^2}{\left(s - z_2\right)^2} + \, \dots + \frac{A_{k_2}^2}{\left(s - z_2\right)^{k_2}} + \\
& + \dots + \\
& + \frac{M_1^1 x + N_1^1}{s^2 + p_1 s + q_1} + \frac{M_2^1 x + N_2^1}{\left(s^2 + p_1 s + q_1\right)^2} + \, \dots + \frac{M_{\varkappa_1}^1 s + N_{\varkappa_1}^1}{\left(s^2 + p_1 s + q_1\right)^{\varkappa_1}} + \\
& + \dots + \\
& + \frac{M_1^l x + N_1^l}{s^2 + p_l s + q_l} + \frac{M_2^l x + N_2^l}{\left(s^2 + p_l s + q_l\right)^2} + \, \dots + \frac{M_{\varkappa_l}^l s + N_{\varkappa_l}^l}{\left(s^2 + p_l s + q_l\right)^{\varkappa_l}}.
\end{aligned} \tag{1.68}$$

Тут A_1^1, A_2^1, $\dots$ $A_{k_1}^1$, $\dots M_{\varkappa_l}^l$, $N_{\varkappa_l}^l$ — невизначені коефіцієнти.

Звернемо увагу на те, що номер кореня, як дійсного, так і комплексного, позначено верхнім індексом.

Звичайно для находження невизначених коефіцієнтів користуються такою процедурою: у правій частині прості дроби зводять до спільного знаменника. Спільним знаменником усіх простих дробів буде знаменник вихідного дробу Q_m. Далі відкидаючи зліва і справа знаменники, дістають рівність двох многочленів $(m-1)$ степеня відносно змінної s. Тому що, два многочлена тотожно рівні, коли коефіцієнти при однакових степенях s рівні між собою, то порівнюючи в утвореній тотожності коефіцієнти при однакових степенях s, отримують алгебраїчну систему, з якої визначають невідомі коефіцієнти.

Розглянемо деякі випадки.

1. *Корені знаменника — прості дійсні числа* $z_1,\ z_2,\ \dots z_n$.

В цьому випадку знаменник вихідного дробу можна уявити таким чином

$$Q_m(s) = b_m\,(s-z_1)\,(s-z_2)\,\dots\,(s-z_n)\,, \tag{1.69}$$

і розкладання алгебраїчного дробу (1.66) має такий вигляд:

$$\frac{P_n(s)}{Q_m(s)} = \frac{A_1^1}{s-z_1} + \frac{A_1^2}{s-z_2} + \ldots + \frac{A_1^n}{s-z_n}. \tag{1.70}$$

Приклад 1.2. Розкласти на прості дроби алгебраїчний дріб

$$\frac{P_1(s)}{Q_2(s)} = \frac{s+2}{s^2+2s-8}. \tag{1.71}$$

Розв'язання. Тому що степінь чисельника $(n=1)$ менший за степінь знаменника $(m=2)$, то дріб (1.71) правильний. Корені знаменника дробу прості дійсні числа:

$$s_1 = -4, \quad s_2 = 2.$$

Розкладемо знаменник дробу на прості множники (див. (1.69)):

$$s^2+2s-8 = (s+4)\,(s-2)\,. \tag{1.72}$$

Тоді за формулою (1.70) уявимо розкладання вихідного дробу (1.71) на прості дроби у такому вигляді:

$$\frac{s+2}{s^2+2s-8} = \frac{s+2}{(s+4)\,(s-2)} = \frac{A}{s+4} + \frac{B}{s-2}. \tag{1.73}$$

Приведемо дроби правої частини до спільного знаменника (спільним знаменником правої частини буде знаменник вихідного дробу (1.72)) та порівняємо чисельники дробів обох частин:

$$s+2 = A\,(s-2) + B\,(s+4)\,. \tag{1.74}$$

Розкриємо дужки та запишемо многочлен у правій частині за спадаючими степенями s:

$$s+2 = (A+B)\,s - 2A + 4B.$$

Порівнюючи коефіцієнти при однакових степенях s у правій і левій частинах, одержимо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{array}{c|rcrcl} s & A & + & B & = & 1, \\ s^0 & -2A & + & 4B & = & 2, \end{array}$$

розв'язавши яку, знайдемо ці коефіцієнти:

$$A = \frac{1}{3}, \quad B = \frac{2}{3}. \tag{1.75}$$

Тоді вихідну функцію (1.71) можна записати через прості дроби так:

$$\frac{s+2}{s^2+2s-8} = \frac{\frac{1}{3}}{s+4} + \frac{\frac{2}{3}}{s-2}. \tag{1.76}$$

$\square$

Розглянутий приклад має небагато обчислювань, тому що було тільки два невизначених коефіцієнти. Але для обчислювання невизначених коефіцієнтів потрібно було прості дроби зводити до спільного знаменника, будувати систему лінійних рівняннь і розв'язувати її. Коли невизначених коефіцієнтів більше, то і роботи значно більше. Звернемо увагу на те, що можна обчислити коефіцієнти простіше.

Рівність (1.74) можна розглядати як тотожність, тобто як рівність, що виконується при будь-якому довільниму s. Якщо надати s певні значення (стільки, скільки невизначених коефіцієнтів), то можна одержати лінійну систему для знаходження цих коефіцієнтів. Зручно надавати s значення, які є коренями знаменника вихідного дробу. Наприклад, нехай

$$s = s_1 = -4.$$

Підставимо це значення в (1.74). Тоді маємо:

$$\begin{aligned} (s+2)\big|_{s=-4} &= \left(A(s-2) + B(s+4)\right)\big|_{s=-4}, \\ -4+2 &= A(-4-2), \\ -2 &= -6A, \\ A &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Аналогічно, підставляючи замість s значення $s_2 = 2$ в (1.74), одержимо:

$$\begin{aligned} \left.(s+2)\right|_{s=2} &= \left.(A(s-2)+B(s+4))\right|_{s=2}, \\ 2+2 &= B(2+4), \\ 4 &= 6B, \\ B &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Знайдені тут коефіцієнти A і B збігаються з (1.75).

Є і інший метод знаходження невизначених коефіцієнтів. Можна розглядати як тотожність рівність (1.73):

$$\frac{s+2}{(s+4)\,(s-2)} = \frac{A}{s+4} + \frac{B}{s-2}. \tag{1.77}$$

Якщо помножити (1.77) на $(s+4)$ і підставити замість s значення $s_1 = -4$, одержимо

$$\begin{aligned} \left.\frac{s+2}{s-2}\right|_{s=-4} &= \left.\left(A + \frac{B\,(s+4)}{s-2}\right)\right|_{s=-4}, \\ \frac{-4+2}{-4-2} &= A, \\ \frac{-2}{-6} &= A, \\ A &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Аналогічно, помножимо (1.77) на $(s-2)$ і підставимо замість s значення $s_2 = 2$, тоді знайдемо

$$\begin{aligned} \left.\frac{s+2}{(s+4)}\right|_{s=2} &= \left.\left(\frac{A\,(s-2)}{s+4} + B\right)\right|_{s=2}, \\ \frac{2+2}{2+4} &= B, \\ \frac{4}{6} &= B, \\ B &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Маємо тіж самі результати, але обчислювання тут простіше.

Приклад 1.3. Розкласти алгебраїчний дріб на прості дроби

$$\frac{P_2(s)}{Q_3(s)} = \frac{s^2+s-3}{(s-1)\,(s+3)\,(s-5)}. \tag{1.78}$$

Розв'язання. Цей дріб є правильний. Знаменник вже розкладено на прості множники:

$$(s-1)(s+3)(s-5).$$

Тому заданий дріб набирає вигляду:

$$\frac{s^2+x-3}{(s-1)(s+3)(s-5)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+3} + \frac{C}{s-5}. \tag{1.79}$$

Далі, послідовно помножуючи рівність (1.79) на множники $(s-1)$, $(s+3)$ і $(s-5)$ та підставляючи замість s відповідні значення $s=1$, $s=-3$ і $s=5$, одержимо:

$$\begin{aligned}
A &= \left.\frac{s^2+s-3}{(s+3)(s-5)}\right|_{s=1} = \frac{1+1-3}{(1+3)(1-5)} = \frac{-1}{4(-4)} = \frac{1}{16},\\
B &= \left.\frac{s^2+s-3}{(s-1)(s-5)}\right|_{s=-3} = \frac{9-3-3}{(-3-1)(-3-5)} = \frac{3}{(-4)(-8)} = \frac{3}{32},\\
C &= \left.\frac{s^2+s-3}{(s-1)(s+3)}\right|_{s=5} = \frac{25+5-3}{(5-1)(5+3)} = \frac{27}{4\cdot 8} = \frac{27}{32}.
\end{aligned}$$

Таким чином, маємо

$$\frac{P_2(s)}{Q_3(s)} = \frac{s^2+s-3}{(s-1)(s+3)(s-5)} = \frac{\frac{1}{16}}{s-1} + \frac{\frac{3}{32}}{s+3} + \frac{\frac{27}{32}}{s-5}.$$

□

2. *Корені знаменника — дійсні числа, але деякі корені кратні.*

Нехай число z — корінь знаменника $Q_m(s)$ кратності k. В цьому випадку знаменник містить множник $(s-z)^k$. В курсі алгебри доведено, що в розкладанні алгебраїчного дробу $\dfrac{P_n(s)}{Q_n(s)}$ цьому множнику відповідає така сума з k простих дробів:

$$\frac{A_1}{s-z} + \frac{A_2}{(s-z)^2} + \ldots + \frac{A_k}{(s-z)^k}. \tag{1.80}$$

Приклад 1.4. Розкласти на прості дроби алгебраїчний дріб:

$$\frac{P_1(s)}{Q_3(s)} = \frac{2s-3}{(s-1)(s-2)^2}. \tag{1.81}$$

Розв'язання. Цей дріб є правильним. Знаменник вже розкладено на прості множники. Звернемо увагу на те, що корінь знаменника $s = 1$ простий, а корінь $s = 2$ — двократний. Тому дріб (1.81) через прості дроби можна записати так:

$$\frac{2s-3}{(s-1)(s-2)^2} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{(s-2)^2}. \tag{1.82}$$

Таким чином, в розкладанні (1.82) множнику $(s-2)^2$ відповідають два доданка

$$\frac{B}{s-2} + \frac{C}{(s-2)^2}.$$

Можна, як і в попередніх прикладах, для визначення коефіцієнтів привести праву частину (1.82) до спільного знаменника, прирівняти коефіцієнти при однакових степенях s і розв'язати відповідну лінійну систему. Зробимо інакше. Послідовно помножимо (1.82) на множники $(s-1)$, $(s-2)^2$ і підставимо замість s відповідні значення $s = 1$, $s = 2$, тоді одержимо:

$$A = \left.\frac{2s-3}{(s-2)^2}\right|_{s=1} = \frac{2-3}{(1-2)^2} = \frac{-1}{1} = -1,$$
$$C = \left.\frac{2s-3}{s-1}\right|_{s=2} = \frac{2\cdot 2-3}{2-1} = \frac{1}{1} = 1.$$

Останній коефіцієнт B знайдемо таким чином. Підставимо в (1.82) знайдені коефіцієнти $A = -1$ і $C = 1$:

$$\frac{2s-3}{(s-1)(s-2)^2} = \frac{-1}{s-1} + \frac{B}{s-2} + \frac{1}{(s-2)^2}. \tag{1.83}$$

Помножимо цю рівність на $(s-2)$ і надамо s значення $s = 2$. Тоді маємо

$$B = \left.\left(\frac{2s-3}{(s-1)(s-2)} + \frac{s-2}{s-1} - \frac{1}{s-2}\right)\right|_{s=2} =$$
$$= \left.\frac{2s-3+(s-2)^2-s+1}{(s-1)(s-2)}\right|_{s=2} = \left.\frac{s-2+(s-2)^2}{(s-1)(s-2)}\right|_{s=2} =$$
$$= \left.\frac{s-1}{s-1}\right|_{s=2} = 1.$$

Таким чином, шукане розкладання приймає вигляд:

$$\frac{2s-3}{(s-1)(s-2)^2} = \frac{-1}{s-1} + \frac{1}{s-2} + \frac{1}{(s-2)^2}. \tag{1.84}$$

$\square$

3. *Корені знаменника — комплексні числа.*

Нехай комплексне число ζ є коренем знаменника $Q_m(s)$ алгебраїчного дробу $\dfrac{P_n(s)}{Q_n(s)}$ кратності $\varkappa$. Тому що коефіцієнти цього дробу дійсні числа, то знаменник також має комплексно-спряжений корінь $\overline{\zeta}$. Тоді знаменник містить множник

$$\left(s^2+ps+q\right)^{\varkappa}$$

з дійсними коефіцієнтами p і q. Цьому множнику в розкладу дробу $\dfrac{P_n(s)}{Q_n(s)}$ відповідає така сума $\varkappa$ простих дробів (1.68):

$$\frac{M_1s+N_1}{s^2+ps+q}+\frac{M_2s+N_2}{\left(s^2+ps+q\right)^2}+\ldots+\frac{M_{\varkappa}s+N_{\varkappa}}{\left(s^2+ps+q\right)^{\varkappa}}.$$

Приклад 1.5. Розглянемо дріб: $\dfrac{P_0(s)}{Q_3(s)}=\dfrac{1}{s^3-1}.$

У прикладі 1.1 одержано розкладання знаменника ціого дробу на прості множники (1.65):

$$s^3-1=(s-1)(s^2+s+1).$$

Тому за формулою (1.68) вихідний дріб уявимо у вигляді:

$$\frac{1}{s^3-1}=\frac{A}{s-1}+\frac{Ms+N}{s^2+s+1}.$$

Звідси, приводячи праву частину до спільного знаменника, одержимо тотожність

$$1=A(s^2+s+1)+(Ms+N)(s-1). \tag{1.85}$$

В (1.85) надамо s значення $s=1$. Тоді одержимо

$$1=A(1+1+1), \quad \Rightarrow \quad A=\frac{1}{3}.$$

Підставимо в (1.85) знайдене значення $A=\dfrac{1}{3}$ та приведемо подібні:

$$-\frac{1}{3}s^2-\frac{1}{3}s+\frac{2}{3}=Ms^2+\left(-M+N\right)s-N.$$

Звідси, прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях s, одержимо систему лінійних рівнянь:

$$\begin{array}{c|rcrcr} s^2 & M & & & = & -1/3, \\ s & -M & + & N & = & -1/3, \\ s^0 & & - & N & = & 2/3. \end{array}$$

Розв'язавши цю систему, знайдемо коефіцієнти M і N:

$$M = -\frac{1}{3}, \quad N = -\frac{2}{3}. \tag{1.86}$$

Таким чином, маємо:

$$\frac{1}{s^3-1} = \frac{1}{3}\frac{1}{s-1} - \frac{1}{3}\frac{s-2}{s^2+s+1}.$$

Відновлення оригіналу за відомим зображенням

Якщо дане зображення є правильна дробово-раціональна функція вигляду

$$F(s) = \frac{P_n(s)}{Q_m(s)},$$

то для знаходження оригіналу за певним зображенням цей дріб розкладають на прості дроби і знаходять оригінали цих простих дробів. Під простими дробами розуміють чотири типи дробів:

$$1.\ \frac{A}{s-a}, \qquad 2.\ \frac{A}{(s-a)^k}, \qquad 3.\ \frac{Ms+N}{s^2+ps+q}, \qquad 4.\ \frac{Ms+N}{(s^2+ps+q)^m},$$

де A, M, N, a, p, q — дійсні числа, причому вважається, що дискримінант знаменників дробів 3 і 4 від'ємний:

$$p^2 - 4q < 0,$$

тобто тричлен $s^2 + ps + q$ не має дійсних коренів.

1. Перший дріб є зображенням показникової функції. Таким чином, за формулою (1.40) маємо

$$\frac{A}{s-a} \risingdotseq Ae^{at}. \tag{1.87}$$

2. Оскільки образ степеневої функції зображується простим дробом (1.48)

$$t^n \risingdotseq \frac{n!}{s^{n+1}},$$

то за теоремою зміщення (1.18) звідси випливає

$$\frac{A}{(s-a)^k} \risingdotseq \frac{A}{(k-1)!}\, t^{k-1} e^{at}. \tag{1.88}$$

3. Розглянемо третій дріб

$$\frac{Ms+N}{s^2+ps+q}. \tag{1.89}$$

Нагадаємо зручні формули:

$$\frac{s}{s^2+\omega^2} \risingdotseq \cos\left(\omega t\right), \quad \frac{\omega}{s^2+\omega^2} \risingdotseq \sin\left(\omega t\right). \tag{1.90}$$

Знаменник третього дробу — квадратний тричлен. Виділимо в знаменнику повний квадрат:

$$s^2+ps+q = \left(s+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2.$$

Звернемо увагу на те, що дискримінант знаменника від'ємний, тому

$$q - \left(\frac{p}{2}\right)^2 > 0.$$

Позначимо

$$\omega^2 = q - \left(\frac{p}{2}\right)^2.$$

Тоді маємо

$$s^2+ps+q = \left(s+\frac{p}{2}\right)^2 + \omega^2.$$

Поділимо дріб (1.89) на дві частини:

$$\frac{Ms+N}{s^2+ps+q} = \frac{Ms+N}{\left(s+\frac{p}{2}\right)^2+\omega^2} = \frac{M\left(s+\frac{p}{2}\right)+N-M\frac{p}{2}}{\left(s+\frac{p}{2}\right)^2+\omega^2} =$$

$$= \frac{M\left(s+\frac{p}{2}\right)}{\left(s+\frac{p}{2}\right)^2+\omega^2} + \frac{N-M\frac{p}{2}}{\left(s+\frac{p}{2}\right)^2+\omega^2}.$$

Звідси за формулами (1.90) та теоремою зміщення одержимо:

$$\frac{M\left(s+\dfrac{p}{2}\right)}{\left(s+\dfrac{p}{2}\right)^2+\omega^2} \risingdotseq Me^{-\frac{p}{2}t}\cos\left(\omega t\right),$$

$$\frac{N-M\dfrac{p}{2}}{\left(s+\dfrac{p}{2}\right)^2+\omega^2} = \frac{N-M\dfrac{p}{2}}{\omega}\,\frac{\omega}{\left(s+\dfrac{p}{2}\right)^2+\omega^2} \risingdotseq \frac{N-M\dfrac{p}{2}}{\omega}\,e^{-\frac{p}{2}t}\sin\left(\omega t\right).$$

Таким чином, маємо остаточний результат:

$$\frac{Ms+N}{s^2+ps+q} \risingdotseq Me^{-\frac{p}{2}t}\cos\left(\omega t\right)+\frac{N-M\dfrac{p}{2}}{\omega}\,e^{-\frac{p}{2}t}\sin\left(\omega t\right). \tag{1.91}$$

Зауваження 1.13. Іноді зручно не виділяти в знаменнику повний квадрат, а розкласти знаменник на прості множники з комплексними коренями. Тоді корисними будуть формули Ейлера:

$$\sin\alpha = \frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i}, \quad \cos\alpha = \frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2}. \tag{1.92}$$

Приклад 1.6. Знайти оригінал функції

$$F(s) = \frac{1}{s^2+4s+13}.$$

Виділимо в знаменнику повний квадрат

$$s^2+4s+13 = (s+2)^2-4+13 = (s+2)^2+9.$$

За формулою для зображення функції $\sin t$ та теоремою зміщення одержимо:

$$F(s) = \frac{1}{s^2+4s+13} = \frac{1}{(s+2)^2+9} = \frac{1}{3}\,\frac{3}{(s+2)^2+9} \risingdotseq \frac{1}{3}\,e^{-2t}\sin 3t.$$

Інший спосіб. Знайдемо корені знаменника:

$$s_{1,2} = -2\pm\sqrt{4-13} = -2\pm i\sqrt{9} = -2\pm 3i.$$

Тоді маємо

$$\frac{1}{s^2+4s+5} = \frac{1}{(s-(-2+3i))\,(s-(-2-3i))} = \frac{A}{s-(-2+3i)}+\frac{B}{s-(-2-3i)}.$$

Звідси випливає

$$A = \left.\frac{1}{s-(-2-3i)}\right|_{s=-2+3i} = \frac{1}{6i}, \quad B = \left.\frac{1}{s-(-2+3i)}\right|_{s=-2-3i} = \frac{1}{-6i}.$$

Скористаємось формулою зображення для показникової функції та теоремою зміщення. Тоді одержимо оригінал вихідного дробу:

$$\frac{1}{s^2+4s+5} = \frac{1}{6i}\left(\frac{1}{s-(-2+3i)} - \frac{1}{s-(-2-3i)}\right) \risingdotseq$$
$$\fallingdotseq \frac{1}{6i}\left(e^{(-2+3i)t} - e^{(-2-3i)t}\right) = \frac{1}{3}\,e^{-2t}\,\frac{e^{3it}-e^{-3it}}{2i} = \frac{1}{3}\,e^{-2t}\sin 3t.$$

Тут була використана формула Ейлера (1.92).

4. В цьому випадку немає простої формули для оригіналу. Іноді зручно цей дріб уявити у вигляді суми дробів 1 і 2, з комплексними значеннями коренів.

Приклад 1.7. Знайти оригінал функції

$$F(s) = \frac{1}{(s^2+1)^2}. \tag{1.93}$$

Зображення (1.93) вже простий дріб типу 4. Цю задачу розв'яжемо різними способами.

1. Розкладемо дріб (1.93) на прості дроби, враховуючи комплексні корені:

$$\frac{1}{(s^2+1)^2} = \frac{1}{(s+i)^2(s-i)^2} = \frac{A_1}{s+i} + \frac{A_2}{(s+i)^2} + \frac{A_3}{s-i} + \frac{A_4}{(s-i)^2}. \tag{1.94}$$

Помножимо цю рівність на $(s+i)^2$ та надамо s значення $s=-i$. Тоді знайдемо коефіцієнт A_2:

$$A_2 = \left.\frac{1}{(s-i)^2}\right|_{s=-i} = \frac{1}{(-2i)^2} = -\frac{1}{4}.$$

Аналогічно одержимо

$$A_4 = \left.\frac{1}{(s+i)^2}\right|_{s=i} = \frac{1}{(2i)^2} = -\frac{1}{4}.$$

Підставимо знайдені коефіцієнти A_2 і A_4 в формулу (1.94):

$$\frac{1}{(s+i)^2(s-i)^2} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{(s+i)^2} + \frac{1}{(s-i)^2}\right) = \frac{A_1}{s+i} + \frac{A_3}{s-i},$$

або

$$\frac{1}{2}\frac{(s+i)(s-i)}{(s+i)^2(s-i)^2}=\frac{1}{2}\frac{1}{(s+i)(s-i)}=\frac{A_1}{s+i}+\frac{A_3}{s-i}. \tag{1.95}$$

Звідси випливає

$$A_1=\frac{1}{2}\left.\frac{1}{s-i}\right|_{s=-i}=-\frac{1}{4i},\quad A_3=\frac{1}{2}\left.\frac{1}{s+i}\right|_{s=i}=\frac{1}{4i}.$$

Тоді маємо

$$\frac{1}{(s^2+1)^2}=-\frac{1}{4}\left(-\frac{i}{s+i}+\frac{1}{(s+i)^2}+\frac{i}{s-i}+\frac{1}{(s-i)^2}\right)\risingdotseq$$

$$\risingdotseq-\frac{1}{4}\left(-ie^{-it}+te^{-it}+ie^{it}+te^{it}\right)=\frac{1}{2}(\sin t-t\cos t).$$

2. Розглянемо вихідний дріб (1.93) як добуток

$$\frac{1}{(s^2+1)^2}=\frac{1}{s^2+1}\,\frac{1}{s^2+1}.$$

Тому що

$$\frac{1}{s^2+1}\risingdotseq\sin t,$$

за теоремою Бореля (1.27) одержимо, що шуканий оригінал є згортка (1.26) оригіналів множників (тобто синусів):

$$\frac{1}{s^2+1}\,\frac{1}{s^2+1}\risingdotseq\int\limits_0^t\sin(t-\tau)\sin\tau\,d\tau. \tag{1.96}$$

Нагадаємо, що

$$\sin(t-\tau)\sin\tau=\frac{1}{2}\left(\cos(t-2\tau)-\cos t\right).$$

Тоді

$$\int\limits_0^t\sin(t-\tau)\sin\tau\,d\tau=\frac{1}{2}\left(\int\limits_0^t\cos(t-2\tau)\,d\tau-\cos t\int\limits_0^t d\tau\right)=\frac{1}{2}(\sin t-t\cos t).$$

Таким чином, маємо

$$\frac{1}{(s^2+1)^2}\risingdotseq\frac{1}{2}(\sin t-t\cos t).$$

3. Розглянемо вихідний дріб (1.93)

$$\frac{1}{\left(s^2+1\right)^2}$$

і звернемо увагу на таку табличну формулу:

$$\frac{1}{s^2+1} \risingdotseq \sin t.$$

Продиференціюємо ліву частину цієї формули:

$$\frac{d}{ds}\frac{1}{s^2+1} = -\frac{2s}{\left(s^2+1\right)^2}. \tag{1.97}$$

Звідси за правилом диференціювання зображення маємо:

$$\frac{d}{ds}\frac{1}{s^2+1} \risingdotseq -t\sin t.$$

Крім того, з (1.97) випливає, що

$$\frac{1}{\left(s^2+1\right)^2} = -\frac{1}{2s}\frac{d}{ds}\frac{1}{s^2+1} = -\frac{1}{2}\frac{\frac{d}{ds}\frac{1}{s^2+1}}{s}.$$

Звернемо увагу, що ділення певної функції на s відповідає інтегруванню її оригіналу. Тоді за теоремою інтегрування оригіналу маємо:

$$\frac{1}{\left(s^2+1\right)^2} = -\frac{1}{2}\frac{\frac{d}{ds}\frac{1}{s^2+1}}{s} \risingdotseq \frac{1}{2}\int\limits_0^t \tau\sin\tau\,d\tau = \frac{1}{2}\left(\sin t - t\cos t\right). \tag{1.98}$$

Завдання до розділу 1

Завдання 1.

Відновити оригінал за образом.

1.1.1. $F(s) = \dfrac{s^2+1}{s^2\left(s-1\right)^2}$.

1.1.2. $F(s) = \dfrac{s+2}{(s+1)(s-2)(s^2+4)}$.

1.1.3. $F(s) = \dfrac{s^2 + 2s - 1}{s^3(s+3)}$.

1.1.4. $F(s) = \dfrac{s}{(s-1)^3(s+2)}$.

1.1.5. $F(s) = \dfrac{3s^2}{(s-1)^2(s^2+s+1)}$.

1.1.6. $F(s) = \dfrac{1}{(s-1)(s^2+2)^2}$.

1.1.7. $F(s) = \dfrac{s^2+s-1}{(s-1)\left(s^2-s+1\right)}$.

1.1.8. $F(s) = \dfrac{1}{s^2(s+5)(s-2)}$.

1.1.9. $F(s) = \dfrac{1}{(s^2+1)(s-1)^2}$.

1.1.10. $F(s) = \dfrac{1}{(s^2-1)(s-1)^2}$.

1.1.11. $F(s) = \dfrac{1}{s(s+1)(s^2+4)}$.

1.1.12. $F(s) = \dfrac{4s-3}{s^2(s^2+1)}$.

1.1.13. $F(s) = \dfrac{s^3}{(s^2-3^2)(s^2-2^2)}$.

1.1.14. $F(s) = \dfrac{s^2}{(s^2-4)^2}$.

1.1.15. $F(s) = \dfrac{1}{(s^4-1)^2}$.

1.1.16. $F(s) = \dfrac{1}{(s^2+1)^2(s^2-4)}$.

1.1.17. $F(s) = \dfrac{s}{s^4-5s^2+4}$.

1.1.18. $F(s) = \dfrac{s^2+1}{s^2(s^2-1)}$.

1.1.19. $F(s) = \dfrac{2s-1}{s^2(s^2+1)}$.

1.1.20. $F(s) = \dfrac{s+1}{(s+2)(s^2+s-2)}$.

1.1.21. $F(s) = \dfrac{s+4}{s(s^2+4s+5)}$.

1.1.22. $F(s) = \dfrac{s}{(s^2+1)(s^2-2)}$.

1.1.23. $F(s) = \dfrac{3s-2}{(s-1)(s^2-6s+10)}$.

1.1.24. $F(s) = \dfrac{2s+1}{s^3(s^2-4)}$.

1.1.25. $F(s) = \dfrac{3s^2}{(s^3-1)(s+3)^2}$.

2. Операційне числення

Операційне числення застосовується для розв'язання задачі Коші для звичайних лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами, а також для систем таких рівнянь. У основі операційного числення лежить застосування методу інтегрального перетворення Лапласа. В результаті використання перетворення Лапласа вихідна задача зводиться до алгебраїчного рівняння для образу розв'язку вихідного диференціального рівняння; далі розв'язується це алгебраїчне рівняння та за знайденим образом відновлюється оригінал. Розглянемо цей метод на прикладах.

2.1. Диференціальне рівняння першого порядку

Розглянемо задачу Коші для диференціального рівняння першого порядку зі сталими дійсними коефіцієнтами a_0, a_1:

$$a_1 y'(t) + a_0 y(t) = f(t), \tag{2.1}$$

$$y(0) = y_0. \tag{2.2}$$

Припустимо, що розв'язок цієї задачі $y(t)$ і права частина рівняння (2.1) $f(t)$ є оригіналами, тобто для них існують образи:

$$Y(s) = \int\limits_0^\infty e^{-st} y(t)\,dt, \quad F(s) = \int\limits_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt. \tag{2.3}$$

Зауважимо, що в реальних задачах це припущення задовольняється.

Застосуємо інтегральне перетворення Лапласа до диференціального рівняння (2.1). Тоді одержимо алгебраїчне рівняння відносно образу $Y(s)$ розв'язка задачі (2.1), (2.2):

$$a_1(sY(s) - y_0) + a_0 Y(s) = F(s). \tag{2.4}$$

Тут ми скористалися властивостю лінійності перетворення Лапласа, виразом для образу похідної (див. с. 16) і врахували початкову умову (2.2).

Звернемо увагу на те, що рівняння (2.4) — це алгебраїчне рівняння. Розв'язавши це рівняння, дістанемо

$$Y(s) = \frac{F(s)}{a_1 s + a_0} + \frac{a_1 y_0}{a_1 s + a_0}. \tag{2.5}$$

Образ розв'язку (2.5) складається з двох частин: перша з них містить образ $F(s)$ правої частини диференціального рівняння $f(t)$, а друга частина — початкові дані y_0. Отже, оригінал першої частини є розв'язком неоднорідного рівняння з однорідними початковими умовами, а оригінал другої частини являє розв'язок однорідного рівняння, яке задовольняє початковим умовам. Ці факти є наслідком лінійності вихідної задачі Коші.

Розв'язок вихідної задачі за знайденим образом $Y(s)$ можна відновити за допомогою інтеграла Рімана—Мелліна

$$y(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c-i\infty}^{c+\infty} e^{st} Y(s)\, ds.$$

Тут положення контуру інтегрування (стала c) визначається показником зростання функції $y(t)$ — контур поміщається праворуч від усіх особливих точок функції $Y(s)$.

Зауважимо, що обчислювати цей інтеграл немає потреби: для отримання розв'язку можна скористатися властивостями перетворення Лапласа, таблицею оригіналів та їх зображень. Другий доданок $1/(a_1 s + a_0)$ є в таблиці відповідності — це показникова функція:

$$\frac{1}{s-\alpha} \risingdotseq e^{\alpha t} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{a_1 s + a_0} = \frac{1}{a_1} \frac{1}{s + \dfrac{a_0}{a_1}} \risingdotseq \frac{1}{a_1} e^{-\frac{a_0}{a_1} t}.$$

Перший доданок — це добуток двох образів $F(s)$ і $1/(a_1 s + a_0)$. Отже, за теоремою множення оригінал першого доданка дорівнює згортці оригіналів цих функцій. Враховуючи, що $F(s) \risingdotseq f(t)$, дістанемо розв'язок вихідної задачі Коші:

$$y(t) = \frac{1}{a_1} \int\limits_0^t f(\tau) e^{-\frac{a_0}{a_1}(t-\tau)}\, d\tau + y_0 e^{-\frac{a_0}{a_1} t}. \tag{2.6}$$

Зауваження 2.1. Ми одержали не загальний розв'язок, а частинний, який задовольняє початковим умовам.

Зауваження 2.2. Внесок від неоднорідної частини рівняння є інтегралом, який можна розглядати як суму відгуків на дії, що відбулися в різні часи від початку процесу до моменту спостереження, усереднених з деякою *"ваговою" функцією.* Цю "вагову" функцію називають *функцією впливу.* В даному випадку функція впливу дорівнює $e^{-\frac{a_0}{a_1}t}$.

Зауваження 2.3. Розв'язок $y(t)$ було одержано без попереднього знаходження зображення $F(s)$ (див. формулу (2.6)). Тому немає необхідності обчислювати образ $F(s)$ неоднорідної частини $f(t)$ диференціального рівняння: досить лише знати, що він існує. Але іноді можна уникнути обчислення інтеграла (згортки), якщо звернути увагу на факт, що зображення більшості функцій — це дробово-раціональні функції. Тому добуток дробово-раціональних функцій $F(s)/(a_1 s+a_0)$ можна уявити як скінченну суму простих дробів, що є в таблиці відповідності.

Приклад 2.1. Знайти розв'язок диференціального рівняння

$$y' + 2y = \sin t, \tag{2.7}$$

який задовольняє початкову умову

$$y(0) = 0. \tag{2.8}$$

Розв'язання. Нехай

$$y(t) \risingdotseq Y(s), \quad f(t) \risingdotseq F(s).$$

Тоді одержимо алгебраїчне рівняння для образу розв'язку

$$sY(s) + 2Y(s) = F(s). \tag{2.9}$$

Тут враховано, що початкова умова (2.8) однорідна.

Звідси випливає

$$Y(s) = \frac{F(s)}{s+2}.$$

Тоді, тому що

$$\frac{1}{s+2} \risingdotseq e^{-2t},$$

за формулою множення маємо розв'язок вихідної задачі:

$$y(t) = (e^{-2t} * \sin t) = \int\limits_0^t \sin\tau\, e^{-2(t-\tau)}\, d\tau = \frac{1}{5}\, e^{-2t} - \frac{1}{5}\cos t + \frac{2}{5}\sin t. \tag{2.10}$$

Тут було виконано інтегрування частинами.

Зауваження 2.4. В цьому прикладі можливо уникнути обчислювання інтеграла згортки. Тому що зображення правої частини є функція раціональна

$$f(t) = \sin t \risingdotseq \frac{1}{s^2+1},$$

маємо правильний дріб

$$Y(s) = \frac{F(s)}{s+2} = \frac{1}{(s+2)\,(s^2+1)},$$

який розкладемо на суму простих дробів. Ці дроби приведемо до спільного знаменника

$$\frac{1}{(s+2)\,(s^2+1)} = \frac{A}{s+2} + \frac{Bs+C}{s^2+1} = \frac{A\left(s^2+1\right) + (Bs+C)\,(s+2)}{(s+2)\,(s^2+1)}.$$

Тут A, B і C — невизначені коефіцієнти.

Порівняємо чисельники правої і лівої частин

$$1 = A\left(s^2+1\right) + (Bs+C)\,(s+2)$$

і порівняємо коефіцієнти при однакових степенях s. Тоді одержимо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{array}{c|ccccccc} s^2 & A & + & B & & & = & 0, \\ s & & & 2B & + & C & = & 0, \\ s^0 & A & & & + & 2C & = & 1, \end{array}$$

розв'язавши яку, знайдемо ці коефіцієнти:

$$A = \frac{1}{5}, \quad B = -\frac{1}{5}, \quad C = \frac{2}{5}.$$

Таким чином, маємо відповідь, що збігається з (2.10):

$$Y(s) = \frac{1}{5}\,\frac{1}{s+2} - \frac{1}{5}\,\frac{s}{s^2+1} + \frac{2}{5}\,\frac{1}{s^2+1} \risingdotseq$$
$$\risingdotseq y(t) = \frac{1}{5}\,e^{-2t} - \frac{1}{5}\cos t + \frac{2}{5}\sin t.$$

□

2.2. Диференціальне рівняння другого порядку

Розглянемо задачу Коші для диференціального лінійного рівняння другого порядку:

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = f(t), \tag{2.11}$$

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1. \tag{2.12}$$

Коефіцієнти a_0, a_1 — дійсні числа, що задані.

Застосуємо інтегральне перетворення Лапласа до диференціального рівняння

$$\int\limits_0^\infty \left(y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t)\right) e^{-st} dt = \int\limits_0^\infty f(t) e^{-st} dt.$$

Внаслідок лінійності перетворення Лапласа маємо

$$\int\limits_0^\infty y''(t) e^{-st} dt + a_1 \int\limits_0^\infty y'(t) e^{-st} dt + a_0 \int\limits_0^\infty y(t) e^{-st} dt = \int\limits_0^\infty f(t) e^{-st} dt.$$

Скористаємося виразами для образів функцій та їх похідних

$$y(t) \risingdotseq Y(s) = \int\limits_0^\infty e^{-st} y(t)\, dt, \quad f(t) \risingdotseq F(s) = \int\limits_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt, \tag{2.13}$$

$$y'(t) \risingdotseq sY(s) - y(0), \quad y''(t) \risingdotseq s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0), \tag{2.14}$$

і врахуємо початкові дані (2.12). Тоді одержимо алгебраїчне рівняння

$$s^2 Y(s) - sy_0 - y_1 + a_1(sY(s) - y_0) + a_2 Y(s) = F(s). \tag{2.15}$$

Зауваження 2.5. Насправді немає необхідності записувати інтеграл Лапласа і виконувати всі ці викладки. Достатньо *в диференціальному рівнянні (2.11) замінити функції $f(t)$ і $y(t)$ символами їх образів $F(s)$ і $Y(s)$ відповідно, а також скористатися виразами для образів похідних, підставити початкові дані (2.12).*

Розв'язавши алгебраїчне рівняння (2.15), одержимо

$$Y(s) = \frac{F(s)}{s^2 + a_1 s + a_0} + \frac{y_1}{s^2 + a_1 s + a_0} + \frac{(s + a_1)y_0}{s^2 + a_1 s + a_0}. \tag{2.16}$$

Структура образу відповідає структурі розв'язку лінійного диференціального рівняння і складається з двох частин:

1) розв'язок однорідного диференціального рівняння, що задовольняє початковим умовам (останні два доданка);

2) розв'язок неоднорідного диференціального рівняння з нульовими початковими даними (перший доданок).

Звернемо увагу на те, що в знаменнику знаходиться характеристичне рівняння диференціального рівняння. Таким чином, особливі точки образу розв'язку — це полюси, які відповідають кореням характеристичного рівняння. Оскільки дане диференціальне рівняння другого порядку, то і характеристичне рівняння другого порядку і воно має два корені. Можливі різні випадки.

1. Характеристичне рівняння має два різні дійсні корені s_1 і s_2. Тоді

$$s^2 + a_1 s + a_0 = (s - s_1)(s - s_2).$$

Розкладаючи дріб на прості дроби, одержимо

$$\frac{1}{s^2 + a_1 s + a_0} = \frac{1}{(s - s_1)(s - s_2)} = \frac{A}{s - s_1} + \frac{B}{s - s_2} = \\ = \frac{A(s - s_2) + B(s - s_1)}{(s - s_1)(s - s_2)}.$$

Звідси, прирівнюючи чисельники і порівнюючи коефіцієнти при однакових степенях s, знайдемо

$$A = -B = \frac{1}{s_1 - s_2}.$$

Тоді

$$\frac{1}{s^2 + a_1 s + a_0} = \frac{1}{(s_1 - s_2)} \left(\frac{1}{s - s_1} - \frac{1}{s - s_2} \right). \tag{2.17}$$

Аналогічно

$$\frac{s + a_1}{s^2 + a_1 s + a_0} = \frac{s + a_1}{(s - s_1)(s - s_2)} = \frac{A}{s - s_1} + \frac{B}{s - s_2} = \\ = \frac{1}{(s_1 - s_2)} \left(\frac{s_1 + a_1}{s - s_1} - \frac{s_2 + a_1}{s - s_2} \right). \tag{2.18}$$

Тут

$$A=\frac{s_1+a_1}{s_1-s_2},\quad B=-\frac{s_2+a_1}{s_1-s_2}.$$

Враховуючи, що

$$\frac{1}{s-\alpha}\risingdotseq e^{\alpha t},$$

одержимо розв'язок однорідного лінійного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами, що задовольняє початковим умовам (2.12):

$$\begin{aligned}
&\frac{y_1}{s^2+a_1s+a_0}+\frac{(s+a_1)y_0}{s^2+a_1s+a_0}=\\
&\quad=\frac{1}{(s_1-s_2)}\left(\frac{1}{s-s_1}-\frac{1}{s-s_2}\right)y_1+\frac{1}{(s_1-s_2)}\left(\frac{s_1+a_1}{s-s_1}-\frac{s_2+a_1}{s-s_2}\right)y_0=\\
&\qquad=\frac{y_1+y_0(s_1+a_1)}{(s_1-s_2)}\frac{1}{s-s_1}-\frac{y_1+y_0(s_2+a_1)}{(s_1-s_2)}\frac{1}{s-s_2}\risingdotseq\\
&\qquad\qquad\risingdotseq C_1e^{s_1t}+C_2e^{s_2t},
\end{aligned}$$

де

$$C_1=\frac{y_1+y_0(s_1+a_1)}{(s_1-s_2)},\quad C_2=-\frac{y_1+y_0(s_2+a_1)}{(s_1-s_2)}.$$

Розв'язком неоднорідного рівняння з нульовими початковими даними є згортка:

$$\begin{aligned}
\frac{F(s)}{(s-s_1)(s-s_2)}&=\frac{1}{(s_1-s_2)}\left(\frac{F(s)}{s-s_1}-\frac{F(s)}{s-s_2}\right)\risingdotseq\\
&\risingdotseq\frac{1}{(s_1-s_2)}\int\limits_0^t f(\tau)\left(e^{s_1(t-\tau)}-e^{s_2(t-\tau)}\right)d\tau.
\end{aligned}$$

Таким чином, розв'язок вихідної задачі має вигляд:

$$y(t)=\frac{1}{(s_1-s_2)}\int\limits_0^t f(\tau)\left(e^{s_1(t-\tau)}-e^{s_2(t-\tau)}\right)d\tau+C_1e^{s_1t}+C_2e^{s_2t},\tag{2.19}$$

де

$$C_1=\frac{y_1+y_0(s_1+a_1)}{(s_1-s_2)},\quad C_2=-\frac{y_1+y_0(s_2+a_1)}{(s_1-s_2)}.\tag{2.20}$$

2. Характеристичне рівняння має кратні дійсні корені $s_1=s_2=s_0$. Тоді

$$s^2+a_1s+a_0=(s-s_0)^2.$$

Оскільки
$$\frac{d}{ds}\frac{1}{s-s_0}=-\frac{1}{(s-s_0)^2} \quad \text{і} \quad \frac{1}{s-s_0}\risingdotseq e^{s_0 t},$$
тоді за правилом диференціювання образу одержимо:
$$\frac{1}{(s-s_0)^2}=-\frac{d}{ds}\frac{1}{s-s_0}\risingdotseq te^{s_0 t}.$$
Отже,
$$\frac{y_1}{s^2+a_1 s+a_0}=\frac{y_1}{(s-s_0)^2}\risingdotseq y_1 te^{s_0 t}.$$
Далі:
$$\begin{aligned}\frac{s+a_1}{(s-s_0)^2}y_0 &= \left(\frac{s}{(s-s_0)^2}+\frac{a_1}{(s-s_0)^2}\right)y_0 = \\ &= \left(\frac{s-s_0+s_0}{(s-s_0)^2}+\frac{a_1}{(s-s_0)^2}\right)y_0 = \\ &= \frac{y_0}{s-s_0}+(s_0+a_1)\frac{y_0}{(s-s_0)^2}\risingdotseq \\ &\risingdotseq y_0 e^{s_0 t}+(s_0+a_1)\,te^{s_0 t}y_0.\end{aligned}$$

Таким чином, розв'язок однорідного рівняння, яке задовольняє початковим умовам, має вигляд:
$$y_0 e^{s_0 t}+[y_1+(s_0+a_1)\,y_0]\,te^{s_0 t}.$$

І нарешті, щоб побудувати розв'язок неоднорідного рівняння з нульовими початковими даними, треба додати внесок від неоднорідності, тобто обчислити згортку:
$$\frac{F(s)}{(s-s_0)^2}\risingdotseq\int\limits_0^t f(\tau)(t-\tau)e^{s_0(t-\tau)}d\tau.$$

Отже, якщо корені характеристичного рівняння кратні, то розв'язок диференціального рівняння другого порядку має вигляд:
$$y(t)=\int\limits_0^t f(\tau)(t-\tau)e^{s_0(t-\tau)}d\tau+y_0 e^{s_0 t}+[y_1+(s_0+a_1)\,y_0]\,te^{s_0 t}. \tag{2.21}$$

3. Характеристичне рівняння має два різні комплексні корені s_1 і s_2.

Оскільки коефіцієнти диференціального рівняння — дійсні числа, тоді:

1) корені характеристичного рівняння s_1 і s_2 є комплексно-спряжені, тобто $s_1 = \overline{s_2}$;

2) розв'язок у вигляді (2.19) має комплексну форму;

3) розв'язок диференціального рівняння є дійсною функцією.

Таким чином, потрібно перетворити розв'язок (2.19) до дійсної форми. Це можна зробити за допомогою формули Ейлера. Але можна одержати дійсну форму розв'язку безпосередньо, якщо перетворити вираз (2.16). Нагадаємо очевидну тотожність:

$$s^2 + a_1 s + a_0 = \left(s + \frac{a_1}{2}\right)^2 + a_0 - \left(\frac{a_1}{2}\right)^2. \tag{2.22}$$

Тому що дискримінант характеристичного рівняння від'ємний (комплексні корені), маємо

$$a_0 - \left(\frac{a_1}{2}\right)^2 > 0.$$

Позначимо

$$\delta = \frac{a_1}{2}, \quad \omega^2 = a_0 - \left(\frac{a_1}{2}\right)^2. \tag{2.23}$$

Тоді

$$s^2 + a_1 s + a_0 = s^2 + 2\delta s + \delta^2 + \omega^2 = (s + \delta)^2 + \omega^2. \tag{2.24}$$

За формулами відповідности:

$$\frac{1}{s^2 + \omega^2} \risingdotseq \frac{1}{\omega} \sin \omega t, \quad \frac{s}{s^2 + \omega^2} \risingdotseq \frac{1}{\omega} \cos \omega t,$$

і за теоремою зміщення одержимо:

$$\frac{1}{s^2 + a_1 s + a_0} = \frac{1}{(s + \delta)^2 + \omega^2} \risingdotseq \frac{1}{\omega} e^{-\delta t} \sin \omega t, \tag{2.25}$$

$$\frac{s + a_1}{s^2 + a_1 s + a_0} = \frac{s + 2\delta}{(s + \delta)^2 + \omega^2} = \frac{s + \delta}{(s + \delta)^2 + \omega^2} + \frac{\delta}{\omega} \frac{\omega}{(s + \delta)^2 + \omega^2} \risingdotseq$$
$$\risingdotseq e^{-\delta t} \cos \omega t + \frac{\delta}{\omega} e^{-\delta t} \sin \omega t \tag{2.26}$$

Додавши внесок від неоднорідності диференціального рівняння (першого доданка формули (2.16)), остаточно отримаємо розв'язок вихідної задачі Коші (2.11), (2.12)

$$y(t) = \frac{1}{\omega} \int\limits_0^t f(\tau) e^{-\delta(t-\tau)} \sin\omega(t-\tau)\, d\tau + y_0 e^{-\delta t} \cos\omega t + \frac{y_1 + y_0\delta}{\omega}\, e^{-\delta t} \sin\omega t. \tag{2.27}$$

Приклад 2.2. Розв'язати задачу Коші

$$y'' - 5y' + 6y = e^t, \tag{2.28}$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0. \tag{2.29}$$

Розв'язання. За таблицею відповідности знайдемо образ правої частини диференціального рівняння:

$$e^t \risingdotseq \frac{1}{s-1}.$$

Припустимо, що розв'язок рівняння $y(t)$ є оригінал, тобто

$$y(t) \risingdotseq Y(s),$$

тоді за формулами диференціювання оригіналу, враховуючи початкові умови, маємо

$$y(t)' \risingdotseq sY(s) - y(0) = sY(s), \tag{2.30}$$

$$y(t)'' \risingdotseq s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2Y(s). \tag{2.31}$$

Складаємо зображаюче рівняння

$$s^2Y(s) - 5sY(s) + 6Y(s) = \frac{1}{s-1}, \quad \text{або} \quad Y(s)\left(s^2 - 5s + 6\right) = \frac{1}{s-1}. \tag{2.32}$$

Звідси одержимо образ $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{1}{(s-1)\left(s^2 - 5s + 6\right)}. \tag{2.33}$$

Звернемо увагу на те, що характеристичне рівняння $s^2 - 5s + 6 = 0$ має два різні дійсні кореня $s = 2$ і $s = 3$. Тоді

$$s^2 - 5s + 6 = (s-2)(s-3).$$

Таким чином,

$$Y(s)=\frac{1}{(s-1)\,(s-2)\,(s-3)}. \tag{2.34}$$

Цей дріб через прості дроби можна записати так:

$$\frac{1}{(s-1)\,(s-2)\,(s-3)}=\frac{A}{s-1}+\frac{B}{s-2}+\frac{C}{s-3}. \tag{2.35}$$

Звичайно для находження невизначених коефіцієнтів A, B і C користуються такою процедурою: прості дроби зводять до спільного знаменника. Далі відкидаючи зліва і справа знаменники, дістають рівність двох многочленів і, прирівнюючи в утвореній тотожності коефіцієнти при однакових степенях s, отримають алгебраїчну систему, з якої визначають невідомі коефіцієнти.

Є інший спосіб. Помноживши обидві частини (2.35) на $(s-1)$, дістаємо таку рівність:

$$\frac{s-1}{(s-1)\,(s-2)\,(s-3)}=\frac{1}{(s-2)\,(s-3)}=A+\frac{B\,(s-1)}{s-2}+\frac{C\,(s-1)}{s-3}$$

Нехай $s=1$, тоді одержимо

$$A=\frac{1}{2}.$$

Аналогічно можна знайти і останні коефіцієнти

$$B=-1,\quad C=\frac{1}{2}.$$

Таким чином, маємо:

$$Y(s)=\frac{1/2}{s-1}-\frac{1}{s-2}+\frac{1/2}{s-3}. \tag{2.36}$$

Цьому образу відповідає такий оригінал — розв'язок вихідної задачі:

$$y(t)=\frac{1}{2}e^{t}-e^{2t}+\frac{1}{2}e^{3t}. \tag{2.37}$$

□

Приклад 2.3. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння

$$y''+4y'+4y=te^{-2t}, \tag{2.38}$$

який задовольняє початковим умовам:

$$y(0)=1,\quad y'(0)=2. \tag{2.39}$$

Розв'язання. Нехай $y(t) \risingdotseq Y(s)$. Тоді, враховуючи початкові умови, маємо

$$y(t)' \risingdotseq sY(s) - y(0) = sY(s) - 1, \tag{2.40}$$

$$y(t)'' \risingdotseq s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2Y(s) - s - 2. \tag{2.41}$$

За таблицею зображень знайдемо образ правої частини диференціального рівняння

$$t\,e^{-2t} \risingdotseq \frac{1}{(s+2)^2}. \tag{2.42}$$

Таким чином, зображаюче рівняння має вигляд

$$s^2Y(s) - s - 2 + 4\,(sY(s) - 1) + 4Y(s) = \frac{1}{(s+2)^2}. \tag{2.43}$$

Звідси випливає

$$\left(s^2 + 4s + 4\right) Y(s) - (s - 2) = \frac{1}{(s+2)^2}. \tag{2.44}$$

Враховуючи тотожність

$$\left(s^2 + 4s + 4\right) = (s+2)^2\,,$$

одержимо зображення у вигляді

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{(s+2)^4} + \frac{s-2}{(s+2)^2} = \frac{1}{(s+2)^4} + \frac{s+2-2-2}{(s+2)^2} = \\ &= \frac{1}{(s+2)^4} + \frac{s+2}{(s+2)^2} + \frac{-4}{(s+2)^2} = \frac{1}{(s+2)^4} - \frac{4}{(s+2)^2} + \frac{1}{s+2}. \end{aligned} \tag{2.45}$$

Звернемо увагу на те, що тут вже врахована права частина рівняння te^{-2t}.

Знайденому образу відповідає оригінал, тобто розв'язок вихідної задачі:

$$y(t) = \frac{t^3}{3!}e^{-2t} - 4te^{-2t} + e^{-2t}. \tag{2.46}$$

$\square$

Приклад 2.4. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' - 2y' + 2y = \sin t, \tag{2.47}$$

який задовольняє початковим умовам:

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1. \tag{2.48}$$

Розв'язання. Зображаюче рівняння має такий вигляд:

$$s^2Y(s) - 1 + 2sY(s) + 2Y(s) = \frac{1}{s^2+1}. \tag{2.49}$$

Тут ми вже врахували початкові умови.

Розв'язавши це рівняння, одержимо

$$Y(s) = \frac{1}{(s^2+1)\,(s^2-2s+2)} + \frac{1}{s^2-2s+2}.$$

Розглянемо другий доданок. Звернемо увагу на те, що дискримінант рівняння

$$s^2 - 2s + 2 = 0$$

від'ємний. Тому виділимо повний квадрат:

$$s^2 - 2s + 2 = s^2 - 2s + 1 + 1 = (s-1)^2 + 1.$$

Тоді маємо

$$\frac{1}{s^2-2s+2} = \frac{1}{(s-1)^2+1} \risingdotseq e^t \sin t. \tag{2.50}$$

Оригінал, відповідний першому доданку, можна обчислити за допомогою згортки:

$$\frac{1}{(s^2+1)\,(s^2-2s+2)} \risingdotseq \int\limits_0^t \sin\tau\, e^{(t-\tau)} \sin(t-\tau)\, d\tau$$

Однак, можна уникнути обчислення цього інтеграла згортки, тому що перший доданок є дробово-раціональною функцією, причому цей дріб правильний. Розкладемо цей дріб на прості дроби.

Знайдемо корені знаменника:

$$s_1 = i, \quad s_2 = -i, \quad s_3 = 1+i, \quad s_4 = 1-i.$$

Знаменник дробу можна розкласти на прості множники:

$$\left(s^2+1\right)\left(s^2-2s+2\right) = (s-s_1)\,(s-s_2)\,(s-s_3)\,(s-s_4)\,.$$

Тоді перший доданок набирає вигляду

$$\frac{1}{(s^2+1)\,(s^2-2s+2)} = \frac{A}{s-s_1} + \frac{B}{s-s_2} + \frac{C}{s-s_3} + \frac{D}{s-s_4}. \tag{2.51}$$

Помножимо обидві частини цієї рівності на $(s-s_1)=(s-i)$ і надамо s значення $s_1=i$. Тоді одержимо

$$A=\left.\frac{s-i}{(s^2+1)(s^2-2s+2)}\right|_{s=s_1}=\left.\frac{1}{(s+i)(s^2-2s+2)}\right|_{s=s_1}=$$
$$=\frac{1}{(s_1+i)(s_1^2-2s_1+2)}=\frac{1}{(i+i)(i^2-2i+2)}=\frac{1}{2i(1-2i)}. \quad (2.52)$$

Якщо помножити (2.51) на $(s-s_2)$ і підставити значення $s=s_2=-i$, одержимо коефіцієнт B.

$$B=\left.\frac{s+i}{(s^2+1)(s^2-2s+2)}\right|_{s=s_2}=\left.\frac{1}{(s-i)(s^2-2s+2)}\right|_{s=s_2}=$$
$$=\frac{1}{(s_2-i)(s_2^2-2s_2+2)}=\frac{1}{(-i-i)((-i)^2-2(-i)+2)}=\frac{1}{-2i(1+2i)}. \quad (2.53)$$

Аналогічно обчислюються і інші коефіцієнти:

$$C=\frac{1}{2i(1+2i)},\quad D=\frac{1}{-2i(1-2i)}. \quad (2.54)$$

Отже, маємо:

$$\frac{1}{(s^2+1)(s^2-2s+2)}=\frac{\frac{1}{2i(1-2i)}}{s-i}+\frac{\frac{1}{-2i(1+2i)}}{s+i}+\frac{\frac{1}{2i(1+2i)}}{s-1-i}+\frac{\frac{1}{-2i(1-2i)}}{s-1+i}. \quad (2.55)$$

Цьому зображенню відповідає оригінал

$$\frac{1}{(s^2+1)(s^2-2s+2)}\risingdotseq$$
$$\fallingdotseq\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{1-2i}e^{it}-\frac{1}{1+2i}e^{-it}+\frac{1}{1+2i}e^{(1+i)t}-\frac{1}{1-2i}e^{(1-i)t}\right)=$$
$$=\frac{1}{2i}\frac{(1+2i)e^{it}-(1-2i)e^{-it}+(1-2i)e^{(1+i)t}-(1+2i)e^{(1-i)t}}{(1-2i)(1+2i)}=$$
$$=\frac{1}{2i}\frac{e^{it}-e^{-it}+2i\left(e^{it}+e^{-it}\right)+e^t\left(e^{it}-e^{-it}-2i\left(e^{it}-e^{-it}\right)\right)}{5}=$$
$$=\frac{1}{5}\left(\sin t+2\cos t+e^t(\sin t-2\cos t)\right).$$

Таким чином, розв'язок вихідної задачі набирає вигляду

$$y(t) = \frac{2}{5}\left(1 - e^t\right)\cos t + \frac{1}{5}\left(1 + 6e^t\right)\sin t. \tag{2.56}$$

□

2.3. Диференціального рівняння n-го порядку

Задача Коші для диференціального лінійного рівняння зі сталими коефіцієнтами має вигляд:

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \ \ldots + a_0 y(t) = f(t), \tag{2.57}$$

$$y(0) = y_0, \ \ldots, y^{(n-1)}(0) = y_{n-1}. \tag{2.58}$$

Будемо розглядати так зване «зведене» рівняння:

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \ \ldots + a_0 y(t) = f(t),$$

тобто диференціальне рівняння, коефіцієнт якого при вищій похідній дорівнює одиниці, тобто $a_n = 1$. Що значно спрощує обчислення.

Припустимо, що розв'язок цієї задачі $y(t)$ і права частина рівняння $f(t)$ є оригіналами, тобто для них існують образи:

$$y(t) \fallingdotseq Ys, \quad f(t) \fallingdotseq F(s). \tag{2.59}$$

Застосуємо до рівняння (2.57) перетворення Лапласа. За властивістю лінійності та правилом диференціювання

$$y^{(n)}(t) \fallingdotseq s^n Y(s) - s^{n-1} y(0) - \ \ldots - y^{(n-1)}(0),$$

враховуючи початкові умови (2.58), від диференціального рівняння (2.57) перейдемо до алгебраїчного рівняння

$$\begin{aligned}
&s^n Y(s) - s^{n-1} y_0 - s^{n-2} y_1 - \ \ldots - s y_{n-2} - y_{n-1} + \\
&+ a_{n-1}\left(s^{n-1} Y(s) - s^{n-2} y_0 - s^{n-3} y_1 - \ \ldots - y_{n-2}\right) + \\
&+ \ldots + \\
&+ a_1 \left(sY(s) - y(0)\right) + \\
&+ a_0 Y(s) = F(s).
\end{aligned} \tag{2.60}$$

Звідси маємо

$$Y(s) = \frac{F(s) + L(s)}{P(s)}, \tag{2.61}$$

де

$$P(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0 \tag{2.62}$$

характеристичний многочлен диференціального рівняння (2.57), $L(s)$ — многочлен степеня не більше $(n-1)$, коефіцієнти якого залежать від початкових значень $y_0, y_1, \ldots, y_{n-2}, y_{n-1}$. Таким чином, якщо за образом (2.61) відновити оригінал, одержимо розв'язок вихідної задачі.

Оскільки вихідна задача (2.57), (2.58) лінійна, то можна окремо розглядати розв'язання неоднорідного рівняння з нульовими початковими умовами і розв'язання однорідного рівняння з початковими умовами (2.58). Такий підхід більш наочний.

Розглянемо першу задачу. Нехай функція $f(t)$ відрізняється від нуля, а усі початкові значення дорівнюють нулю:

$$f(t) \neq 0, \quad y_0 = y_1 = \ldots = y_{n-2} = y_{n-1} = 0. \tag{2.63}$$

Тоді $L(s) = 0$ і з (2.61) випливає

$$Y(s) = \frac{F(s)}{P(s)}. \tag{2.64}$$

Якщо знайти оригінал $g(t) \risingdotseq G(s)$ функції

$$G(s) = \frac{1}{P(s)}, \tag{2.65}$$

то розв'язок вихідної задачі — це згортка оригіналів $(g(t) * f(t))$.

Оригінал $g(t)$ знайдемо, розкладаючи дріб $1/P(s)$ на прості дроби. Як і у випадку диференціального рівняння другого порядку корені характеристичного рівняння або усі різні, або деякі корені кратні. Ці випадки слід відрізняти.

1. Характеристичне рівняння має різні корені $s_1, s_2, \ldots, s_n$. Тоді

$$P(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0 = (s - s_1)(s - s_2) \ldots (s - s_n), \tag{2.66}$$

і функцію $G(s)$ можна уявити у вигляді

$$G(s) = \frac{1}{P(s)} = \frac{A_1}{s - s_1} + \frac{A_2}{s - s_2} + \ldots + \frac{A_n}{s - s_n}. \tag{2.67}$$

Тут $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — невизначені коефіцієнти, які потрібно знайти.

Помножимо рівність (2.67) на $(s - s_1)$ і перейдемо до границі при $s \to s_1$. Тоді кожен доданок у правій частині (2.67), крім першого, містить множник, що прямує до нуля. Таким чином, маємо

$$\lim_{s \to s_1} \frac{s - s_1}{P(s)} = A_1. \tag{2.68}$$

Якщо обчислити цю границю за правилом Лопіталя, то одержимо

$$\lim_{s \to s_1} \frac{s - s_1}{P(s)} = \lim_{s \to s_1} \frac{(s - s_1)'}{P'(s)} = \frac{1}{P'(s_1)}.$$

Звідси випливає, що

$$A_1 = \frac{1}{P'(s_1)}. \tag{2.69}$$

Аналогічно знайдемо інші коефіцієнти:

$$A_k = \frac{1}{P'(s_k)}, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.70}$$

Таким чином, маємо

$$G(s) = \frac{1}{P(s)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{P'(s_k)} \frac{1}{s - s_k}. \tag{2.71}$$

Зображенню $G(s)$ відповідає оригінал

$$g(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{P'(s_k)} e^{s_k t} \tag{2.72}$$

і розв'язок диференціального рівняння (2.57), що задовольняє однорідним початковим умовам (2.63), має вигляд згортки

$$y(t) = \left(f(t) * g(t)\right). \tag{2.73}$$

2. Деякі корені характеристичного рівняння кратні.

Нехай характеристичний многочлен $P(s)$ диференціального рівняння має корені s_1, s_2, …, s_m відповідно кратності k_1, k_2, …, k_m. Тоді многочлен $P(s)$ розкладається на такі прості множники

$$P(s) = s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0 = (s - s_1)^{k_1} (s - s_2)^{k_2} \ldots (s - s_m)^{k_m} \tag{2.74}$$

і функцію $G(s)$ можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} G(s) = \frac{1}{P(s)} = \frac{A_1^1}{s-s_1} + \frac{A_2^1}{(s-s_1)^2} + \ldots + \frac{A_{k_1}^1}{(s-s_1)^{k_1}} + \\ + \frac{A_1^2}{s-s_2} + \frac{A_2^2}{(s-s_2)^2} + \ldots + \frac{A_{k_2}^2}{(s-s_2)^{k_2}} + \\ + \ldots + \\ + \frac{A_1^m}{s-s_m} + \frac{A_2^m}{(s-s_m)^2} + \ldots + \frac{A_{k_m}^m}{(s-s_m)^{k_m}}. \end{aligned} \tag{2.75}$$

Отже кожному множнику $(s-s_1)^{k_1}$ відповідатиме така сума з k_1 простих дробів:

$$\frac{A_1^1}{s-s_1} + \frac{A_2^1}{(s-s_1)^2} + \ldots + \frac{A_{k_1}^1}{(s-s_1)^{k_1}}.$$

Тут числа A_1^1, A_2^1, ... та інші — невизначені коефіцієнти. Звернемо увагу на те, що верхні індекси позначають номер кореня.

Зображенню (2.75) відповідає оригінал

$$\begin{aligned} g(t) = e^{s_1 t}\left(A_1^1 + A_2^1\frac{t}{1!} + \ldots + A_{k_1}^1\frac{t^{k_1}}{(k_1-1)!}\right) + \\ + e^{s_2 t}\left(A_1^2 + A_2^2\frac{t}{1!} + \ldots + A_{k_2}^2\frac{t^{k_2}}{(k_2-1)!}\right) + \\ + \ldots + \\ + e^{s_m t}\left(A_1^m + A_2^m\frac{t}{1!} + \ldots + A_{k_m}^m\frac{t^{k_m}}{(k_m-1)!}\right). \end{aligned} \tag{2.76}$$

У розкладанні (2.75) є невідомі коефіцієнти A_1^1, A_2^1, ...

Для визначення коефіцієнта $A_{k_1}^1$ помножимо рівність (2.75) на $(s-s_1)^{k_1}$ і перейдемо до границі при $s \to s_1$. Тоді одержимо

$$\lim_{s \to s_1} \frac{(s-s_1)^{k_1}}{P(s)} = A_{k_1}^1. \tag{2.77}$$

Якщо підставити знайдений коефіцієнт $A_{k_1}^1$ у рівність (2.75), перенести цей доданок в ліву частину рівності, то можна визначити коефіцієнт $A_{k_1-1}^1$ і т.і.

Розглянемо другу задачу: однорідне диференціальне рівняння з довільними початковими умовами:

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_0 y(t) = 0, \tag{2.78}$$
$$y(0) = y_0, \ \ldots, \ y^{(n-1)}(0) = y_{n-1}. \tag{2.79}$$

Тому що $f(t) = 0$, маємо $F(s) = 0$. Тоді, переходячи до зображень, одержимо

$$\begin{aligned} &s^n Y(s) - s^{n-1}y_0 - s^{n-2}y_1 - \ldots - sy_{n-2} - y_{n-1} + \\ &+ a_{n-1}\left(s^{n-1}Y(s) - s^{n-2}y_0 - s^{n-3}y_1 - \ldots - y_{n-2}\right) + \\ &+ \ldots + \\ &+ a_1\left(sY(s) - y(0)\right) + \\ &+ a_0 Y(s) = 0. \end{aligned} \tag{2.80}$$

Розв'язок цього алгебраїчного рівняння залежить від початкових умов:

$$\begin{aligned} Y(s) = y_0\, &\frac{s^{n-1} + a_{n-1}s^{n-2} + \ldots + a_2 s + a_1}{P(s)} + \\ &+ y_1\, \frac{s^{n-2} + a_{n-1}s^{n-3} + \ldots + a_2}{P(s)} + \\ &+ \ldots + \\ &+ y_{n-2}\, \frac{s + a_{n-1}}{P(s)} + \\ &+ y_{n-1}\, \frac{1}{P(s)}. \end{aligned} \tag{2.81}$$

Тут

$$P(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0 \tag{2.82}$$

— характеристичний многочлен диференціального рівняння (2.78).

Розв'язок (2.81) складається з дробово-раціональних функцій. Тому що степінь чисельника кожної функції менший за степінь знаменника, то кожну таку функцію можна зобразити у вигляді суми простих алгебраїчних дробів. Оригінал для алгебраїчного дробу можна знайти за допомогою таблиці відповідності.

Можна скористатися наступним засобом. Розглянемо допоміжну задачу. Нехай початкові умови мають вигляд:

$$y(0) = y'(0) = \ldots = y^{(n-2)}(0) = 0, \quad y^{(n-1)}(0) = 1. \tag{2.83}$$

Тоді маємо такий розв'язок алгебраїчного рівняння (2.80):

$$Y(s) = \frac{1}{P(s)} = G(s).$$

Його оригінал — розв'язок диференціального рівняння (2.78):

$$y(t) = g(t) \risingdotseq G(s).$$

Таким чином, функція $g(t)$ задовольняє однорідному диференціальному рівнянню

$$g^{(n)}(t) + a_{n-1}g^{(n-1)}(t) + \ldots + a_0 g(t) = 0 \tag{2.84}$$

і наступним початковим умовам

$$g(0) = g'(0) = \ldots = g^{(n-2)}(0) = 0, \quad g^{(n-1)}(0) = 1. \tag{2.85}$$

Тоді, за правилом диференціювання оригіналу, одержимо:

$$\begin{aligned}
&g(t) \risingdotseq G(s) = \frac{1}{P(s)},\\
&g'(t) \risingdotseq sG(s) = \frac{s}{P(s)},\\
&\ldots,\\
&g^{(n-1)}(t) \risingdotseq s^{n-1}G(s) = \frac{s^{n-1}}{P(s)},\\
&g^{(n)}(t) \risingdotseq s^{n}G(s) - 1 = \frac{s^{n}}{P(s)} - 1.
\end{aligned}$$

Звідси, враховуючи (2.81), випливає розв'язок вихідної задачі (2.78),(2.79)

$$\begin{aligned}
y(t) = y_0 &\Big(g^{(n-1)}(t) + a_{n-1}g^{(n-2)}(t) + \ldots + a_2 g'(t) + a_1 g(t)\Big) + \\
&+ y_1 \Big(g^{(n-2)}(t) + a_{n-1}g^{(n-3)}(t) + \ldots + a_2 g(t)\Big) + \\
&+ \ldots + \\
&+ y_{n-2}\, \Big(g'(t) + a_{n-1}g(t)\Big) + \\
&+ y_{n-1}\, g(t).
\end{aligned} \tag{2.86}$$

2.4. Системи лінійних диференціальних рівнянь

Операційне числення можна використовувати для розв'язання систем лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами таким самим чином, як і для звичайних лінійних диференціальних рівнянь, тільки замість одного алгебраїчного рівняння одержимо систему лінійних алгебраїчних рівнянь.

Приклад 2.5. Розв'язати систему лінійних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x' = 4x - 5y + 4t - 1, \\ y' = \ x - 2y + t \end{cases}$$

при початкових умовах $x(0) = 0$, $y(0) = 0$.

Припустимо, що розв'язок цієї системи є оригінал:

$$x(t) \fallingdotseq X(s), \quad y(t) \fallingdotseq Y(s).$$

Тоді за теоремою диференціювання оригіналу маємо:

$$x' \fallingdotseq sX - x(0) = sX, \quad y' \fallingdotseq sY - y(0) = sY.$$

Зауважимо, що тут вже враховано початкові умови. Таким чином, одержимо систему зображаючих рівнянь:

$$\begin{cases} sX - 4X + 5Y = \dfrac{4}{s^2} - \dfrac{1}{s}, \\ sY - X + 2Y = \dfrac{1}{s^2}, \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} (s-4)X + 5Y = \dfrac{4}{s^2} - \dfrac{1}{s}, \\ -X + (s+2)Y = \dfrac{1}{s^2}. \end{cases}$$

Розв'яжемо цю алгебраїчну систему відносно невідомих зображень $X(s)$ і $Y(s)$

$$X(s) = -\frac{1}{s^2}, \quad Y(s) = 0$$

і відновимо оригінали. Тоді одержимо розв'язок вихідної задачі:

$$x(t) = -t, \quad y(t) = 0.$$

Приклад 2.6. Розв'язати систему лінійних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x' = 2x + 8y + 1, \\ y' = 3x + 4y \end{cases}$$

при початкових умовах $x(0) = 2$, $y(0) = 1$.

Вважаючи, що розв'язок цієї системи є оригінал, за правилом диференціювання оригіналу маємо:

$$x' \risingdotseq sX - x(0) = sX - 2, \quad y' \risingdotseq sY - y(0) = sY - 1. \tag{2.87}$$

Перейдемо до зображень, тобто підставимо в систему замість невідомих функцій x і y їх зображення X, Y та скористаємось формулами (2.87):

$$\begin{cases} sX - 2 = 2X + 8Y + \dfrac{1}{s}, \\ sY - 1 = 3X + 4Y, \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} (s-2)X - 8Y = 2 - \dfrac{1}{s}, \\ -3X + (s-4)Y = 1. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю алгебраїчну систему, одержимо:

$$X(s) = \frac{2s^2 + s - 4}{s\,(s+2)\,(s-8)}, \quad Y(s) = \frac{s^2 - 8s - 3}{s\,(s+2)\,(s-8)}.$$

Зауважимо, що одержані зображення є правильні алгебраїчні дроби та їх можна розкласти на прості дроби.

$$X(s) = \frac{2s^2 + s - 4}{s\,(s+2)\,(s-8)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s-8},$$

де

$$A = \left.\frac{2s^2 + s - 4}{(s+2)\,(s-8)}\right|_{s=0} = \frac{-4}{2(-8)} = \frac{1}{4},$$
$$B = \left.\frac{2s^2 + s - 4}{s\,(s-8)}\right|_{s=-2} = \frac{2(-2)^2 + (-2) - 4}{(-2)(-2-8)} = \frac{8-6}{20} = \frac{1}{10},$$
$$C = \left.\frac{2s^2 + s - 4}{s\,(s+2)}\right|_{s=8} = \frac{2 \cdot (8)^2 + 8 - 4}{8(8+2)} = \frac{128+4}{80} = \frac{33}{20}.$$

Аналогічно

$$Y(s) = \frac{s^2 - 8s - 3}{s\,(s+2)\,(s-8)} = \frac{D}{s} + \frac{E}{s+2} + \frac{F}{s-8},$$

$$D = \left.\frac{s^2 - 8s - 3}{(s+2)\,(s-8)}\right|_{s=0} = \frac{-3}{2(-8)} = \frac{3}{16},$$

$$E = \left.\frac{s^2 - 8s - 3}{s\,(s-8)}\right|_{s=-2} = \frac{(-2)^2 - 8(-2) - 3}{(-2)(-2-8)} = \frac{4 + 16 - 3}{20} = \frac{17}{20},$$

$$F = \left.\frac{s^2 - 8s - 3}{s\,(s+2)}\right|_{s=8} = \frac{8^2 - 8 \cdot 8 - 3}{8(8+2} = \frac{64 - 64 - 3}{80} = -\frac{3}{80}.$$

Звідси випливає відповідь задачі:

$$x(t) = \frac{1}{4} + \frac{1}{10}e^{-2t} + \frac{33}{20}e^{8t}, \quad y(t) = \frac{3}{16} + \frac{17}{20}e^{-2t} - \frac{3}{80}e^{8t}. \tag{2.88}$$

Завдання до розділу 2

Завдання 1.

Розв'язати задачу Коші.

2.1.1. $x' + x = e^{-t}, \quad x(0) = 1.$

2.1.2. $x^{'} + 2x = \sin t, \quad x(0) = 0.$

2.1.3. $x'' + x^{'} = 1, \quad x(0) = 0, x^{'}(0) = 1.$

2.1.4. $x'' + 3x^{'} = e^{t}, \quad x(0) = 0, x^{'}(0) = 1.$

2.1.5. $x'' - 2x^{'} = e^{2t}, \quad x(0) = x^{'}(0) = 0.$

2.1.6. $x'' + 2x^{'} - 3x = e^{-t}, \quad x(0) = 0, x^{'}(0) = 1.$

2.1.7. $x'' + 2x^{'} = t \sin t, \quad x(0) = x^{'}(0) = 0.$

2.1.8. $x'' + 2x^{'} + x = \sin t, \quad x(0) = 0, x^{'}(0) = -1.$

2.1.9. $x'' - 2x^{'} + 1 = e^{t}, \quad x(0) = 0, x^{'}(0) = 1.$

2.1.10. $x'' - 2x^{'} + 2x = 1, \quad x(0) = x^{'}(0) = 0.$

2.1.11. $x'' + x^{'} = \cos t, \quad x(0) = 2, x^{'}(0) = 0.$

2.1.12. $x'' + 2x^{'} + x = t^{2}, \quad x(0) = 1, x^{'}(0) = 0.$

2.1.13. $x'' + x^{'} = cost, \quad x(0) = -1, x^{'}(0) = 1.$

2.1.14. $x'' + 2x^{'} + 5x = 3, \quad x(0) = 1, x^{'}(0) = 0.$

2.1.15. $x'' + 2x^{'} + 2x = 1, \quad x(0) = x^{'}(0) = 0.$

2.1.16. $x'' + 4x = t, \quad x(0) = 1, x^{'}(0) = 0.$

2.1.17. $x'' - 2x^{'} + 5x = 1 - t, \quad x(0) = x^{'}(0) = 0.$

2.1.18. $x'' + x^{'} = \cos t, \quad x(0) = 2, x^{'}(0) = 0.$

2.1.19. $x'' - x' = te^t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

2.1.20. $x'' + 2x' + x = t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

2.1.21.$x'' - x' + x = e^{-t}, \quad x(0) = 0, x'(0) = 1.$

2.1.22. $x'' - x' = \sin t, \quad x(0) = -1, x'(0) = 0.$

2.1.23. $x'' + x' = 2\sin t, \quad x(0) = 1, x'(0) = -1.$

2.1.24. $x'' - 2x' + x = t - \sin t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

2.1.25. $x'' - 3x' + 2x = e^t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

Завдання 2.

Розв'язати задачу Коші.

2.2.1. $x''' - x'' = \sin t, \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = 0.$

2.2.2. $x''' + x' = t, \quad x(0) = 0, x'(0) = -1, x''(0) = 0.$

2.2.3. $x''' + 2x'' + 5x' = 0, \quad x(0) = -1, x'(0) = 2, x''(0) = 0.$

2.2.4. $x''' + x'' = \sin t, \quad x(0) = 0 = x'(0) = 1, x''(0) = 0.$

2.2.5. $x''' + x'' = t, \quad x(0) = -3, x'(0) = 1, x''(0) = 0.$

2.2.6. $x^{(4)} - x'' = \cos t, \quad x(0) = 0, x'(0) = -1, x''(0) = x'''(0) = 0.$

2.2.7. $x''' + x = 0, \quad x(0) = 0, x'(0) = -1, x''(0) = 2.$

2.2.8. $x''' + x'' = \cos t, \quad x(0) = -2, x'(0) = x''(0) = 0.$

2.2.9. $x''' + x' = e^t, \quad x(0) = x''(0) = 0, x'(0) = 2.$

2.2.10. $x^{(4)} - x'' = 1, \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = x'''(0) = 0.$

2.2.11. $x''' + x' = \cos t, \quad x(0) = 0, x'(0) = -2, x''(0) = 0.$

2.2.12. $x''' + x = e^t, \quad x(0) = 0, x'(0) = 2, x''(0) = 0.$

2.2.13. $x''' - 2x'' + x' = 4, \quad x(0) = 1, x^{'}(0) = 2, x''(0) = -2.$

2.2.14. $x^{(4)} + 2x'' + x = t\sin t, \quad x(0) = 1, x^{'}(0) = 2, x''(0) = -2.$

2.2.15. $x''' + x^{'} = e^{2t}, \quad x(0) = x^{'}(0) = x''(0) = 0.$

2.2.16. $x^{(4)} + x''' = \cos t, \quad x(0) = x^{'}(0) = x''(0) = 0, x'''(0) = 1.$

2.2.17. $x''' + x'' - 4x = 0, \quad x(0) = x^{'}(0) = 0, x''(0) = 2.$

2.2.18. $x''' + 3x'' + 3x' + x = 1, \quad x(0) = x^{'}(0) = x''(0) = 0.$

2.2.19. $x''' - x'' = e^{t}, \quad x(0) = 1, x^{'}(0) = x''(0) = 0.$

2.2.20. $x^{(4)} - x = \operatorname{sh} t, \quad x(0) = x^{'}(0) = x''(0) = 0, x'''(0) = 1.$

2.2.21. $x''' + x = \dfrac{1}{2}t^2e^{-t}, \quad x(0) = x^{'}(0) = x''(0) = 0.$

2.2.22. $x^{(4)} - 5x'' + 10x' - 6x = 0, \quad x(0) = 1, x^{'}(0) = 0, x''(0) = 6, x'''(0) = -14.$

2.2.23. $x''' + 6x'' + 11x^{'} + 6x = 1 + t + t^2, \quad x(0) = x^{'}(0) = x''(0) = 0.$

2.2.24. $x''' - 2x'' + x' = 4, \quad x(0) = 1, x^{'}(0) = 2, x''(0) = -2.$

2.2.25. $x''' + x'' = t, \quad x(0) = -3, x^{'}(0) = 1, x''(0) = 0.$

Завдання 3.

Розв'язати систему диференціальних рівнянь.

2.3.1. $\begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = 2x + y + 1; \end{cases} \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 5.$

2.3.2. $\begin{cases} x' = x + 4y + 1, \\ y' = 2x + 3y + 2; \end{cases} \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 2.$

2.3.3. $\begin{cases} x' = 5x + 4y + 1, \\ y' = -2x + 11y; \end{cases} \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 2.$

2.3.4. $\begin{cases} x' = 5x - 4y, \\ y' = 2x + 11y + 2; \end{cases}$ $x(0) = 1, \quad y(0) = 1.$

2.3.5. $\begin{cases} x' = 3x + y + 5, \\ y' = x + 3y - 1; \end{cases}$ $x(0) = 0, \quad y(0) = 1.$

2.3.6. $\begin{cases} x' = x - 2y + 2, \\ y' = 3x + 6y + 2; \end{cases}$ $x(0) = 1, \quad y(0) = 1.$

2.3.7. $\begin{cases} x' = 5x + y + 1, \\ y' = -3x + 9y; \end{cases}$ $x(0) = 0, \quad y(0) = 2.$

2.3.8. $\begin{cases} x' = x + 6y + 1, \\ y' = -2x + 9y; \end{cases}$ $x(0) = 0, \quad y(0) = 1.$

2.3.9. $\begin{cases} x' = x - 3y + 1, \\ y' = x + 5y; \end{cases}$ $x(0) = 1, \quad y(0) = 0.$

2.3.10. $\begin{cases} x' = 2x - 3y, \\ y' = -2x + y + 1; \end{cases}$ $x(0) = 0, \quad y(0) = 5.$

2.3.11. $\begin{cases} x' = x + 3y + 3, \\ y' = x - y + 1; \end{cases}$ $x(0) = 2, \quad y(0) = 0.$

2.3.12. $\begin{cases} x' = x + 4y + 1, \\ y' = 2x + 3y; \end{cases}$ $x(0) = 0, \quad y(0) = 1.$

2.3.13. $\begin{cases} x' = 7x - 5y, \\ y' = -4x + 4y + 3; \end{cases}$ $x(0) = -1, \quad y(0) = 0.$

2.3.14. $\begin{cases} x' = 5x + 4y + 1, \\ y' = 2x + 3y; \end{cases}$ $x(0) = 2, \quad y(0) = 1.$

2.3.15. $\begin{cases} x' = x + 5y + 2, \\ y' = 7x + 3y; \end{cases}$ $x(0) = 0, \quad y(0) = 1.$

2.3.16. $\begin{cases} x' = 2x + 8y, \\ y' = x + 4y + 1; \end{cases}$ $x(0) = 1, \quad y(0) = 0.$

2.3.17. $\begin{cases} x' = -2x + y + 2, \\ y' = 3x; \end{cases}$ $x(0) = 0, \quad y(0) = 1.$

2.3.18. $\begin{cases} x' = 2x + 6y, \\ y' = 2x - 2y + 1; \end{cases}$ $x(0) = 1, \quad y(0) = 0.$

2.3.19. $\begin{cases} x' = 3x + y, \\ y' = 8x + y + 1; \end{cases}$ $x(0) = 2, \quad y(0) = 0.$

2.3.20. $\begin{cases} x' = x - 3y + 2, \\ y' = -2x + 6y + 1; \end{cases}$ $x(0) = 0, \quad y(0) = 1.$

2.3.21. $\begin{cases} x' = 3x + 4y, \\ y' = -x - 2y + 1; \end{cases}$ $x(0) = 2, \quad y(0) = 0.$

2.3.22. $\begin{cases} x' = -2x - 2y, \\ y' = -3x - y + 1; \end{cases}$ $x(0) = 1, \quad y(0) = 0.$

2.3.23. $\begin{cases} x' = -x + 3y + 2, \\ y' = x + y + 1; \end{cases}$ $x(0) = 0, \quad y(0) = 1.$

2.3.24. $\begin{cases} x' = 4x + 6y + 2, \\ y' = 4x + 2y; \end{cases}$ $x(0) = 0, \quad y(0) = 1.$

2.3.25. $\begin{cases} x' = -2x + 6y + 1, \\ y' = 2x + 2y; \end{cases}$ $x(0) = 0, \quad y(0) = 1.$

Додаток

Таблиця 1. Властивості перетворення Лапласа

№	Оригінал $f(t)$	Зображення $F(s)$
1	$Af(t) + Bg(t)$	$AF(s) + BG(s)$
2	$f(\alpha t)$	$\dfrac{1}{\alpha}F\left(\dfrac{s}{\alpha}\right)$
3	$f(t-a)$	$e^{-sa}F(s)$
4	$e^{at}f(t)$	$F(s-a)$
5	$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$
6	$f^{(n)}(t)$	$s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - \ \ldots\ - f^{(n-1)}(0)$
7	$-tf(t)$	$F'(s)$
8	$(-1)^n t^n f(t)$	$F^{(n)}(s)$
9	$\int\limits_0^t f(\tau)\,d\tau$	$\dfrac{F(s)}{s}$
10	$\dfrac{f(t)}{t}$	$\int\limits_s^\infty F(s)\,ds$
11	$\int\limits_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau$	$F(s)G(s)$
12	$f(t)g(t)$	$\dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(p)G(s-p)\,dp$

Таблиця 2. Відповідність оригіналів і зображенням

№	Оригінал $f(t)$	Зображення $F(s)$
1	1	$\dfrac{1}{s}$
2	$e^{\alpha t}$	$\dfrac{1}{s-\alpha}$
3	$\cos\omega t$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$
4	$\sin\omega t$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$
5	$\operatorname{ch}\omega t$	$\dfrac{s}{s^2-\omega^2}$
6	$\operatorname{sh}\omega t$	$\dfrac{\omega}{s^2-\omega^2}$
7	$e^{\alpha t}\cos\omega t$	$\dfrac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\omega^2}$
8	$e^{\alpha t}\sin\omega t$	$\dfrac{\omega}{(s-\alpha)^2+\omega^2}$
9	$e^{\alpha t}\operatorname{ch}\omega t$	$\dfrac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2-\omega^2}$
10	$e^{\alpha t}\operatorname{sh}\omega t$	$\dfrac{\omega}{(s-\alpha)^2-\omega^2}$
11	t	$\dfrac{1}{s^2}$
12	$t^n \quad (n$ – ціле$)$	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$
13	$t^\alpha \quad (\alpha>-1)$	$\dfrac{\Gamma(a+1)}{s^{\alpha+1}}$

Продовження табл. 2

№	Оригінал $f(t)$	Зображення $F(s)$
14	$te^{\alpha t}$	$\dfrac{1}{(s-\alpha)^2}$
15	$t^n e^{\alpha t}$	$\dfrac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}}$
16	$t\cos\omega t$	$\dfrac{s^2-\omega^2}{\left(s^2+\omega^2\right)^2}$
17	$t\sin\omega t$	$\dfrac{2s\omega}{\left(s^2+\omega^2\right)^2}$
18	$t\,\mathrm{ch}\,\omega t$	$\dfrac{s^2-\omega^2}{\left(s^2-\omega^2\right)^2}$
19	$t\,\mathrm{sh}\,\omega t$	$\dfrac{2s\omega}{\left(s^2-\omega^2\right)^2}$

Список літератури

1. Свешников Г. С. Теория функций комплексного переменного/ Г. С. Свешников, А. Н. Тихонов. — М.: Наука, 1967. — 304 с.

2. Лаврентьев М. А. Методы теории функций комплексного переменного/ М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. — М.: Наука, 1973. — 736 с.

3. Араманович И. Г. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости/ И. Г. Араманович, Г. Л. Лунц, Л. Э. Эльсцгольц. — М.: Наука, 1968. — 273 с.

4. Краснов М. Л. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости/ М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко. — М.: Наука, 1971. — 256 с.

5. Дёч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования/ Г. Дёч. — М: Наука, 1971. — 288 с.

6. Мартыненко В. С. Операционное исчисление/ В. С. Мартыненко. — Киев: Изд-во Киев. ун-та, 1965. — 188 с.

7. Чудесенко В. Ф. Сборник заданий по специальным курсам высшей математики. (Типовые расчеты): учеб. пособие/ В. Ф. Чудесенко . — М. : Высш. шк., 1983. - 110 с.

8. Веретельник В. В. Теорія функцій комплексної змінної: навч. посіб. / В. В. Веретельник, Г. М. Тимченко. — Х: НТУ «ХПІ», 2012. — 208 с.

Зміст

Вступ **3**

1 Перетворення Лапласа **4**

1.1. Поняття інтегрального перетворення . . . 4
1.2. Перетворення Лапласа . . . 5
1.3. Теорема обернення . . . 10
1.4. Властивості перетворення Лапласа . . . 13
1.5. Зображення елементарних функцій . . . 23
1.6. Відновлення оригіналу . . . 31
Завдання до розділу 1 . . . 47

2 Операційне числення **49**

2.1. Диференціальне рівняння першого порядку . . . 49
2.2. Диференціальне рівняння другого порядку . . . 53
2.3. Диференціального рівняння n-го порядку . . . 63
2.4. Системи лінійних диференціальних рівнянь . . . 69
Завдання до розділу 2 . . . 72
Додаток . . . 77

Список літератури **80**

Навчальне видання

ВЕРЕТЕЛЬНИК Віктор Володимирович
ТИМЧЕНКО Галина Миколаївна
ВЕРЕТЕЛЬНИК Ірина Олександрівна
ВЕРЕТЕЛЬНИК Олег Вікторович

ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

Навчальний посібник
для студентів технічних університетів

Відповідальний за випуск проф. Л. В. Курпа
Роботу до видання рекомендував Г. В. Руднєва
Редактор О. І. Шпільова

План 2020 р., поз. 92

Підп. до друку 19.03.2021. Формат 60 х 84 1/16. Папір офсетний.
Друк – ризографія. Гарнітура Times New Roman Ум. друк. арк. 5.
Наклад 10 прим. Зам № 2115240. . Ціна договірна.

Видавничий центр НТУ "ХПІ"
Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 5478 від 21.08.2017 р.
61002, Харків, вул. Кирпичова, 21.

Видавец ТОВ «ПЛАНЕТА-ПРІНТ»
вул. Багалія, 16, м. Харьків, 61002,
свідотство суб'єкта видавничої справи ДК №4568 від 17.06.13.

виготавлювач ФЛ-П Черняк Л.О.
61002, м. Харьків, вул. Багалія, 16
Свідотство №24800000000079553, від 16.05.2007 р.