

УДК 539.3

Л. В. КУРПА, д-р тех. наук, Н. А. БУДНИКОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЫНУЖДЕННЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ МНОГОСЛОЙНЫХ ЖЕСТКО ЗАЩЕМЛЕННЫХ ПЛАСТИН СО СЛОЖНОЙ ФОРМОЙ ПЛАНА

Предложен метод исследования геометрически нелинейных вынужденных колебаний многослойных пластин симметричного и несимметричного строения. Метод базируется на применении теории R-функций, что позволяет учитывать сложную геометрию пластины и различные виды граничных условий. Проведено сравнение результатов с известными в литературе. Получены новые результаты для двухслойных жестко защемленных пластин сложной формы.

Ключевые слова: теория R-функций, вариационные методы, нелинейные вынужденные колебания, многослойные пластины, сложная геометрия.

Нелинейные колебания многослойных пластин и оболочек исследовались в работах многих авторов [7–12]. Обзор литературы за последние годы выполнен, например, в публикациях [11, 13]. Одним из наиболее распространенных методов решения данного класса задач является метод конечных элементов (МКЭ) [11, 12]. В настоящей работе использован альтернативный подход, который является развитием метода, предложенного в работах [3, 4] и базирующегося на применении вариационных методов и теории R-функций (RFM) [5]. В отличие от упомянутых работ, здесь рассматриваются вынужденные колебания многослойных пластин как симметричного, так и несимметричного строения.

Постановка задачи. Рассмотрим многослойную пластину постоянной толщины $h = \sum_{i=1}^n h_i$, состоящую из n слоев, в предположении отсутствия их проскальзывания. Для описания динамического поведения пластины используем классическую теорию, основанную на гипотезах Кирхгоффа-Лява, принятых для всего пакета в целом [1]. Пусть пластина находится под действием поперечной периодической нагрузки $F(t) = P_0 \cos \Omega t$.

Система уравнений движения пластины имеет вид

$$\begin{aligned} L_{11}(C_{ij})u + L_{12}(C_{ij})v + L_{13}(K_{ij})w &= -Nl_1(w) + m_1 u_{tt}'' , \\ L_{21}(C_{ij})u + L_{22}(C_{ij})v + L_{23}(K_{ij})w &= -Nl_2(w) + m_1 v_{tt}'' , \\ L_{31}(K_{ij})u + L_{32}(K_{ij})v + L_{33}(D_{ij})w &= -Nl_3(u, v, w) + F(t) + m_1 w_{tt}'' , \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$L_{11} = C_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2C_{16} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + C_{66} \frac{\partial^2}{\partial y^2} ,$$

$$\begin{aligned}
L_{12} = L_{21} &= C_{16} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + C_{26} \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \\
L_{22} &= C_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2C_{26} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + C_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \\
L_{13} = -L_{31} &= -K_{11} \frac{\partial^3}{\partial x^3} - 3K_{16} \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} - (K_{12} + 2K_{66}) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} - K_{26} \frac{\partial^3}{\partial y^3}, \\
L_{23} = -L_{32} &= -K_{16} \frac{\partial^3}{\partial x^3} - (K_{12} + 2K_{66}) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} - 3K_{26} \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} - K_{22} \frac{\partial^3}{\partial y^3}, \\
L_{33} &= -D_{11} \frac{\partial^4}{\partial x^4} - 4D_{16} \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} - 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} - 4D_{26} \frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} - D_{22} \frac{\partial^4}{\partial y^4}, \\
Nl_1(w) &= \frac{\partial}{\partial x} N_{11}^{(N)}(w) + \frac{\partial}{\partial y} N_{12}^{(N)}(w), \quad Nl_2(w) = \frac{\partial}{\partial x} N_{12}^{(N)}(w) + \frac{\partial}{\partial y} N_{22}^{(N)}(w), \\
Nl_3(u, v, w) &= N_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y};
\end{aligned}$$

$$\left\{ N_{11}^{(N)}(w); N_{22}^{(N)}(w); N_{12}^{(N)}(w) \right\}^T = [C] \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2; \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2; \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right\}^T$$

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{26} \\ C_{16} & C_{26} & C_{66} \end{bmatrix}, \quad [K] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{16} \\ K_{12} & K_{22} & K_{26} \\ K_{16} & K_{26} & K_{66} \end{bmatrix}, \quad [D] = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix};$$

$$(C_{ij}, K_{ij}, D_{ij}) = \sum_{s=1}^n \int_{h_{s-1}}^{h_s} B_{ij}^{(s)}(1, z, z^2) dz, \quad (i, j = 11, 22, 12, 16, 26, 66) -$$

приведенные жесткостные характеристики [1]; $B_{ij}^{(s)}$ – упругие постоянные s -го слоя.

Заметим, что для пластин симметричного строения система (1) существенно упрощается благодаря тому, что коэффициенты $K_{ij} = 0$, и дифференциальные операторы L_{13} , L_{31} , L_{23} , L_{32} обращаются в нулевые.

Система уравнений движения (1) дополняется граничными условиями, определяемыми способом закрепления, в частности, в случае жестко защемлённой пластины следующими граничными условиями:

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad \partial w / \partial n = 0. \quad (2)$$

Начальные условия принимаются в виде

$$w|_{t=0} = w_{\max}, \quad \frac{\partial w}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0. \quad (3)$$

Метод решения задачи. Для исследования вынужденных нелинейных колебаний по аналогии с [4] прежде всего необходимо решить ли-

нейную задачу о свободных колебаниях. Применение теории R-функций позволяет это сделать для пластин практически произвольной формы. При решении нелинейной задачи будем игнорировать силами инерции в плоскости пластины. Тогда функции u , v , w можно представить в виде:

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= y_1(t) \cdot u_1^{(c)}(x, y) + y_1^2(t) \cdot u_2(x, y), \\ v(x, y, t) &= y_1(t) \cdot v_1^{(c)}(x, y) + y_1^2(t) \cdot v_2(x, y), \\ w(x, y, t) &= y_1(t) \cdot w_1^{(c)}(x, y), \end{aligned} \quad (4)$$

где $u_1^{(c)}(x, y)$, $v_1^{(c)}(x, y)$, $w_1^{(c)}(x, y)$ – собственные функции линейных колебаний пластины [3]; $u_2(x, y)$ и $v_2(x, y)$ – функции, которые являются решениями системы

$$\begin{aligned} L_{11}(C_{ij})u_2 + L_{12}(C_{ij})v_2 &= -NL_1^{(2)}(w_1^{(c)}, w_1^{(c)}), \\ L_{12}(C_{ij})u_2 + L_{22}(C_{ij})v_2 &= -NL_2^{(2)}(w_1^{(c)}, w_1^{(c)}); \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} NL_1^{(2)}(w_1^{(c)}) &= \frac{\partial w_1^{(c)}}{\partial x} \left(C_{11} \frac{\partial^2 w_1^{(c)}}{\partial x^2} + 2C_{16} \frac{\partial^2 w_1^{(c)}}{\partial x \partial y} + C_{66} \frac{\partial^2 w_1^{(c)}}{\partial y^2} \right) + \\ &+ \frac{\partial w_1^{(c)}}{\partial y} \left(C_{16} \frac{\partial^2 w_1^{(c)}}{\partial x^2} + (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2 w_1^{(c)}}{\partial x \partial y} + C_{26} \frac{\partial^2 w_1^{(c)}}{\partial y^2} \right), \\ NL_2^{(2)}(w_1^{(c)}) &= \frac{\partial w_1^{(c)}}{\partial x} \left(C_{16} \frac{\partial^2 w_1^{(c)}}{\partial x^2} + (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2 w_1^{(c)}}{\partial x \partial y} + C_{26} \frac{\partial^2 w_1^{(c)}}{\partial y^2} \right) + \\ &+ \frac{\partial w_1^{(c)}}{\partial y} \left(C_{66} \frac{\partial^2 w_1^{(c)}}{\partial x^2} + 2C_{26} \frac{\partial^2 w_1^{(c)}}{\partial x \partial y} + C_{22} \frac{\partial^2 w_1^{(c)}}{\partial y^2} \right). \end{aligned}$$

Систему (5) дополним граничными условиями (2). Решение этой задачи, как и предыдущей, выполняется с помощью вариационного метода Ритца и RFM [4]. В результате, согласно такому выбору функций $u(x, y, t)$ и $v(x, y, t)$, первые два уравнения системы (1) удовлетворяются тождественно. С учетом соотношений (4), применяя процедуру Бубнова-Галёркина к третьему уравнению системы (1), получим обыкновенное дифференциальное уравнение 2-го порядка вида

$$y''(t) + \omega_L^2 y_1(t) + y_1^2(t)\beta + y_1^3(t)\gamma = \tilde{F}(t), \quad (6)$$

где:

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{-1}{m_1 \|w_1^{(c)}\|^2} \iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial^2 M_{11}^{(NL)}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{12}^{(NL)}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{22}^{(NL)}}{\partial y^2} \right) + \right. \\ &\left. + \left(N_{11}^{(L)} \frac{\partial^2 w_1^{(c)}}{\partial x^2} + 2N_{12}^{(L)} \frac{\partial^2 w_1^{(c)}}{\partial x \partial y} + N_{22}^{(L)} \frac{\partial^2 w_1^{(c)}}{\partial y^2} \right) \right] w_1^{(c)} d\Omega, \end{aligned}$$

$$\gamma = \frac{-1}{m_1 \|w_1^{(c)}\|^2} \iint_{\Omega} \left[N_{11}^{(NL)} \frac{\partial^2 w_1^{(c)}}{\partial x^2} + 2N_{12}^{(NL)} \frac{\partial^2 w_1^{(c)}}{\partial x \partial y} + N_{22}^{(NL)} \frac{\partial^2 w_1^{(c)}}{\partial y^2} \right] w_1^{(c)} d\Omega,$$

$$\tilde{F}(t) = P_1 \cos \Omega t;$$

$$P_1 = \frac{P_0}{m_1 \|w_1^{(c)}\|^2} \iint_{\Omega} w_1^{(c)} d\Omega,$$

$$N^{(L)} = \{N_{11}^{(L)}; N_{22}^{(L)}; N_{12}^{(L)}\}^T = [C] \{\varepsilon^{(L)}\} + [K] \{\chi\},$$

$$N^{(NL)} = \{N_{11}^{(NL)}; N_{22}^{(NL)}; N_{12}^{(NL)}\}^T = [C] \{\varepsilon^{(NL)}\},$$

$$M^{(NL)} = \{M_{11}^{(NL)}; M_{22}^{(NL)}; M_{12}^{(NL)}\}^T = [K] \{\varepsilon^{(NL)}\},$$

$$\{\varepsilon^{(L)}\} = \{\varepsilon_{11}^{(L)}; \varepsilon_{22}^{(L)}; \varepsilon_{12}^{(L)}\}^T = \left\{ \frac{\partial u_1^{(c)}}{\partial x}; \frac{\partial v_1^{(c)}}{\partial y}; \left(\frac{\partial u_1^{(c)}}{\partial y} + \frac{\partial v_1^{(c)}}{\partial x} \right) \right\}^T,$$

$$\begin{aligned} \{\varepsilon^{(NL)}\} &= \{\varepsilon_{11}^{(NL)}; \varepsilon_{22}^{(NL)}; \varepsilon_{12}^{(NL)}\}^T = \\ &= \left\{ \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_1^{(c)}}{\partial x} \right)^2; \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_1^{(c)}}{\partial y} \right)^2; \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial w_1^{(c)}}{\partial x} \frac{\partial w_1^{(c)}}{\partial y} \right\}^T \end{aligned}$$

$$\{\chi\} = \{\chi_{11}; \chi_{22}; \chi_{12}\}^T = \left\{ -\frac{\partial^2 w_1^{(c)}}{\partial x^2}; -\frac{\partial^2 w_1^{(c)}}{\partial y^2}; -2 \frac{\partial^2 w_1^{(c)}}{\partial x \partial y} \right\}^T.$$

Для пластин симметричного строения $\beta \equiv 0$.

Для решения уравнения (6) с начальными условиями (3) используем метод Бубнова-Галёркина. Тогда для зависимости отношения Ω/ω_L от амплитуды $A = w_{\max}/h$ колебаний пластины при действии поперечной периодической нагрузки $\tilde{F}(t) = P_1 \cos \Omega t$, имеет место формула [2]

$$\left(\frac{\Omega}{\omega_L} \right)^2 = 1 + \frac{8}{3\pi} \beta A + \frac{3}{4} \gamma A^2 \pm \frac{P_1}{A}. \quad (7)$$

В случае свободных колебаний пластины (при отсутствии нагрузки) отношение ω_{NL}/ω_L определяется с помощью формулы

$$\left(\frac{\omega_{NL}}{\omega_L} \right)^2 = 1 + \frac{8}{3\pi} \beta A + \frac{3}{4} \gamma A^2. \quad (8)$$

Численные результаты. Разработанный подход был программно реализован в рамках системы POLE-RL [5] и протестирован на многочисленных примерах для прямоугольных многослойных пластин с различными

способами укладки слоев. Расхождение результатов с известными [6, 7] не превосходит 5%. Для иллюстрации данного подхода рассмотрим двухслойную жестко защемленную пластину ($a/b = 1$, $a/h = 1$), представленную на рис. 1. Механические свойства материалов приведены в табл. 1.

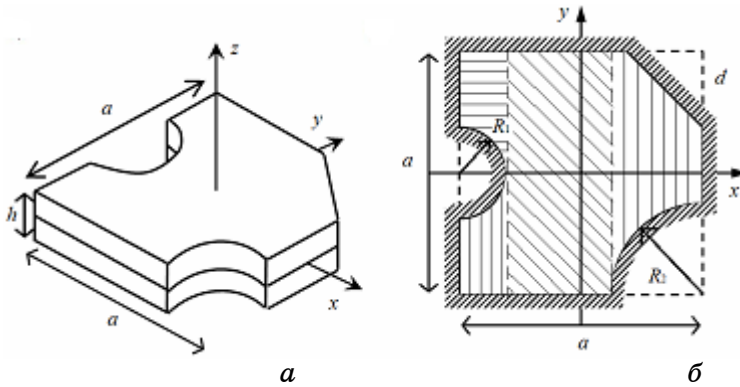


Рис.1

Структура решения принималась в виде

$$u = \omega Q_1, \quad w = \omega^2 Q_3, \quad v = \omega Q_2, \quad (9)$$

где $\omega(x, y) = 0$ – нормализованное уравнение границы области; Q_1 , Q_2 , Q_3 – неопределенные компоненты структуры решения [3]. В данном случае функция $\omega(x, y)$ может быть представлена в виде

$$\omega = (f_1 \wedge_0 f_2) \wedge_0 (f_3 \wedge_0 f_4 \wedge_0 f_5).$$

Символом \wedge_0 обозначена R-

конъюнкция [5]. Для функций f_i имеем:

$f_1 = \{\sigma_1 = ((a/2)^2 - x^2)/a \geq 0\}$ – вертикальная полоса между прямыми $x = \pm a/2$;

$f_2 = \{\sigma_2 = ((a/2)^2 - y^2)/a \geq 0\}$ – горизонтальная полоса между прямыми $y = \pm a/2$;

$f_3 = \{\sigma_3 = (a - d - x - y)/\sqrt{2} \geq 0\}$ – полуплоскость, лежащая ниже прямой $x + y - a + d = 0$;

$f_4 = \left\{ \sigma_4 = \frac{1}{2R_1} \left(\left(x + \frac{a}{2} \right)^2 + y^2 - R_1^2 \right) \geq 0 \right\}$ – внешняя часть окружности с

центром в точке $(-a/2; 0)$ и радиусом R_1 ;

$$f_5 = \left\{ \sigma_5 = \frac{1}{2R_2} \left(\left(x - \frac{a}{2} \right)^2 + \left(y + \frac{a}{2} \right)^2 - R_2^2 \right) \geq 0 \right\} - \text{внешняя часть окружно-}$$

сти с центром в точке $(a/2; -a/2)$ и радиусом R_2 .

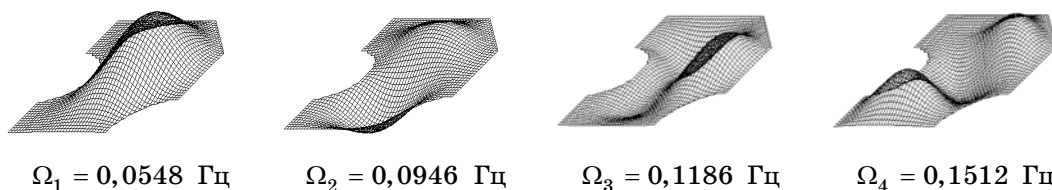
Для аппроксимации неопределенных компонент структур решения выберем степенные полиномы в виде:

$$1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2y, xy^2, y^3 \dots \quad (10)$$

Вычислительный эксперимент показал, что сходимость собственных частот до 3-го знака наблюдается при 36 координатных функциях для u и v , что соответствует сохранению членов ряда (10) до 7 степени, и 45 координатных функциях для w , что соответствует сохранению членов этого ряда до 8 степени. Для вычисления интегралов матрицы Ритца исходная область была разбита на 4 подобласти (рис. 1,б), в каждой из которых были использованы 8-точечные квадратурные формулы Гаусса.

В табл. 2 приведены линейные частоты и формы колебаний рассматриваемой пластины ($0^\circ/90^\circ$), изготовленной из Graphite/эроху.

Таблица 2



В табл. 3 представлены результаты проведенных исследований о влиянии материала и способа укладки слоев на значения отношения ω_{NL}/ω_L при различных значениях вырезов: А) $d = R_1 = R_2 = 0$ (квадратный план); В) $d = R_1 = R_2 = 0,01a$ (маленькие вырезы); С) $d = 0,3a$, $R_1 = 0,2a$, $R_2 = 0,3a$ (большие вырезы).

Таблица 3

Материал	$\frac{w_{\max}}{h}$	(45°/-45°)			(0°/90°)		
		А	В	С	А	В	С
Glass/ эроху	0,5	1,0496	1,0495	1,0462	1,0536	1,0509	1,0577
	1,0	1,1861	1,1858	1,1749	1,2004	1,1947	1,2034
	1,5	1,3839	1,3834	1,3630	1,4113	1,4031	1,4100
	2,0	1,6208	1,6200	1,5895	1,6623	1,6519	1,6549
Boron/ эроху	0,5	1,0734	1,0735	1,0666	1,0907	1,0838	1,0966
	1,0	1,2683	1,2688	1,2477	1,3261	1,3133	1,3151
	1,5	1,5392	1,5401	1,5025	1,6453	1,6281	1,6065
	2,0	1,8531	1,8544	1,7998	2,0086	1,9880	1,9382
Graphite/ эроху	0,5	1,1079	1,1083	1,0957	1,1386	1,1291	1,1460
	1,0	1,3822	1,3833	1,3456	1,4785	1,4615	1,4573
	1,5	1,7460	1,7479	1,6823	1,9152	1,8930	1,8524
	2,0	2,1545	2,1573	2,0638	2,3965	2,3701	2,2883

На рис. 2 представлены амплитудно-частотные зависимости для свободных и вынужденных колебаний двухслойных ортогонально армированных пластин (0/90, вариант С): а) изотропный материал; б) glass-эроху;

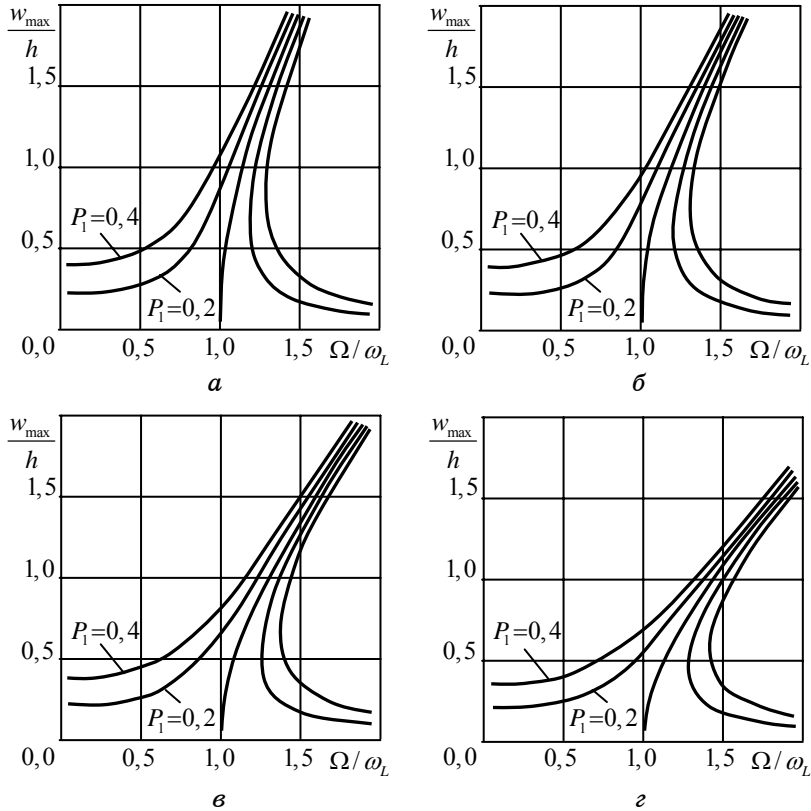


Рис.2

в) boron-эроху; г) graphite-эроху. Анализ результатов, представленных в табл. 3 и на рис. 2 показывает, что в случае жестко заземленной пластины характер поведения скелетных и резонансных кривых такой же, как и для квадратных пластин.

РЕЗЮМЕ. Запропоновано метод дослідження геометрично нелінійних вимушених коливань багат шарових пластин симетричної та несиметричної структури. Метод базується на застосуванні теорії R-функцій, що дозволяє враховувати складну геометрію пластини та різні види граничних умов. Проведено порівняння результатів з відомими та отримані нові результати для двошарових жорстко закріплених пластин складної форми.

Ключові слова: теорія R-функцій, варіаційні методи, нелінійні вимушені коливання, багат шарові пластини, складна геометрія

SUMMARY. A method for studying the geometrically nonlinear forced vibrations of multilayered plates with symmetrical and antisymmetrical structures is proposed. The method is based on the R-functions theory, which allows to consider the complex geometry of the plates and various types of boundary conditions. A comparison of the results with well-known in the literature is completed and new results for two-layered fully clamped plates with complex shape are obtained.

Key words: R-functions theory, variational methods, nonlinear forced vibrations, laminated plates, complex geometry

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек. – М.: Наука, 1974. – 446 с.
2. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. – М.: Наука, 1972. – 432 с.
3. Курпа Л. В. Метод R-функций для решения линейных задач изгиба и колебаний пластин и пологих оболочек. – Харьков: НТУ “ХПИ”, 2009. – 408 с.
4. Курпа Л. В., Тимченко Г. Н. Исследование нелинейных колебаний композитных пластин с помощью теории R-функций // Проблемы прочности. – 2007. – №5. – С. 101–112.
5. Рвачев В. Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. – К.: Наук. думка, 1982. – 552 с.
6. Kadiri M. El, Benamar R. Improvement of the semi-analytical method, based on Hamilton's principle and spectral analysis, for determination of the geometrically non-linear response of thin straight structures. Part III: steady state periodic forced response of rectangular plates // Journ. Sound Vibration. – 2003. – Vol. 264, Issue 1. – P. 1–35.
7. Manoj T., Ayappan M., Krishnan K. S., Nageswara Rao B. Nonlinear Vibration Analysis of Thin Laminated Rectangular Plates on Elastic Foundations // Z. Angew. Math. Mech. – 2000. – Vol. 80, Issue 3. – P. 183–192.
8. Nageswara Rao. Application of hybrid Galerkin method to non-linear free vibrations of laminated thin plates // Journ. Sound Vibration – 1992 – Vol. 154, Issue 3. – P. 573–576.
9. Singh A. V. Linear and Geometrically nonlinear vibrations of fiber reinforced laminated plates and shells // Computers and Structures. – 2000. – Vol. 76. – P. 277–285.
10. Singh Gajbir, Raju K. Kanaka, Venkateswara Rao G., Iyengar N. G. R. Non-linear vibrations of simply supported rectangular cross-ply plates // Journ. Sound Vibration. – 1990. – Vol. 142, Issue 2. – P. 213–226.
11. Singha M. K., Daripa R. Nonlinear vibration and dynamic stability analysis of composite plates // Journ. Sound Vibration. – 2009. – Vol. 328. – P. 541–554.
12. Singha M. K., Daripa R. Nonlinear vibration of symmetrically laminated composite skew plates by finite element method // Int. Journ. Non-Linear Mechanics. – 2007. – Vol. 42. – P. 1144–1152.
13. Zhang Y. X., Yang C. H. Recent developments in finite element analysis for laminated composite plates // Composite Structures. – 2009. – Vol. 88. – P. 147–157.

Национальный технический университет «ХПИ», г. Харьков

Поступила 27.01.2012