МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
“ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”

М.В. Матюшенко, Г.В. Федченко

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до практичних занять та самостійної роботи з курсу

«Основи наукових досліджень»

для магістрів спеціальності
F3 «Комп’ютерні науки»

Харків 2025

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
“ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до практичних занять та самостійної роботи з курсу
«Основи наукових досліджень»
для магістрів спеціальності
F3 «Комп’ютерні науки»

Затверджено
редакційно-видавничою
радою університету
протокол № 2 від 26.06.25

Харків 2025

Методичні вказівки до практичних занять та самостійної роботи з курсу «Основи наукових досліджень»для магістрів спеціальності F3 «Комп'ютерні науки»

Уклад. М.В. Матюшенко, Г.В. Федченко, - Харків: НТУ «ХПІ», 2025- 28с.

Укладачі: М.В. Матюшенко,
Г.В. Федченко

Рецензент О.Г. Сімонова

Кафедра геометричного моделювання
та комп'ютерної графіки

ВСТУП

Ціллю методичних вказівок є супроводження розділу теорії кривих дисципліни «Основи наукових досліджень»

Вони містять необхідні теоретичні відомості по розділах диференційної геометрії, зразки рішення типових завдань, завдання для перевірки рівня засвоєння знань, націлені на структурування знань, одержуваних студентами, підвищення рівня розуміння фактів і теорем курсу диференційної геометрії і міжпредметних зв'язків, розвиток просторового уявлення

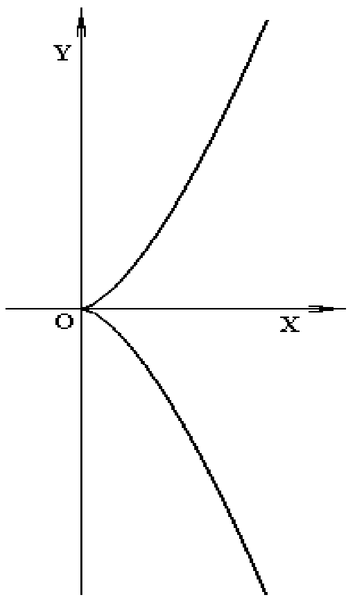
У силу специфіки досліджуваного предмета зв'язки з математичним аналізом і аналітичною геометрією залишаються дуже тісними. Завдання не тільки «тренують» вміння доводити певні факти і обчислювати характеристики геометричних об'єктів, а й знайомлять з новими для студента об'єктами і конструкціями топології і диференціальної геометрії. Деякі з них пропонується побудувати самостійно, використовуючи опис, поданий в тексті завдання.

Всі задачі, що пропонуються для самостійного рішення студентами, мають детальний опис принципів та порядку розв'язання у розділі «Приклади розв'язання типового варіанта завдання».

Приклад розв'язання типового варіанту завдання

З а д а ч а 1.1. Перевірити регулярність параметризації й знайти особливі точки кривої $x=t^2, y=t^3$.

Р о з в ' я з а н н я . Крива, задана параметрично радіус-вектором $r=r(t)$, називається регулярною (регулярно параметризованою) класу C^k, якщо вектор-функція $r(t)$ належить класу C^k, $k\geq 1$, і при цьому похідна $r'(t)$ *радіус*-вектора не обертається в нуль у жодній точці. Точка на кривої називається особою, якщо в цій точці або порушується безперервна диференційованість радіус-вектора $r(t)$, або звертається в нуль похідна $r'(t)$.



Для радіус-вектора $r(t)=(t^2, t^3)$ заданої кривої маємо $r'(t)=(2t,3t^2)$. Ми бачимо, що радіус-вектор є безперервно диференційованим. Вирішуючи рівняння $r'(t)=0$, тобто $2t=0$, $3t^2=0$, одержуємо, що $r'(t)=0$ у точці $t=0$ і тільки в цій точці. Інакше кажучи, точка $t=0$ є особливою точкою заданої кривої, а у всіх інших точках задана крива є регулярно параметризованою. Обчислюючи декартові координати знайденої особливої точки, одержуємо $r(0)=(0,0)$, тобто особливою точкою кривої буде точка O – початок координат.

В і д п о в і д ь. Задана крива є регулярно параметризована у всіх точках, крім $t=0$. Точка $t=0$ є особливою точкою параметризації.

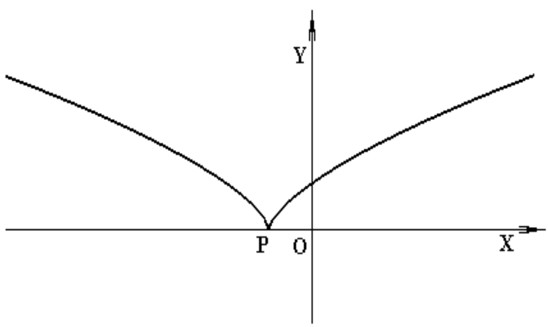
З а д а ч а 1.2. Перевірити регулярність і знайти особливі точки плоскої кривої, заданої неявно рівнянням $x^2+2x- y^3=-1$.

Р о з в ' я з а н н я. Плоска крива, задана неявно рівнянням $F(x,y)=0$, називається регулярною класу C^k, якщо функція $F(x,y)$ належить класу C^k, $k\geq 1$, і при цьому градієнт $\nabla F=(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y})$ функції $F(x,y)$ не обертається в нуль у точках кривої. Напроти, точка на кривої називається особою, якщо в цій точці або функція $F(x,y)$ не є безупинно диференціюємою, або градієнт ∇F дорівнює нулю.

Функція $F(x,y)=x^2+2x-y^3+1$, задана в умові, є безупинно диференціюєма. Обчислюючи часткові похідні, знаходимо градієнт цієї функції: $\nabla F=(2x+2,3y^2)$. Щоб знайти особливі точки кривої, ми повинні дорівняти нулю одночасно функцію $F(x,y)$ і її градієнт ∇F. Одержуємо:

$$\begin{cases} x^2+2x-y^3+1=0, \\ 2x+2=0, \\ 3y^2=0, \end{cases}$$

Розв'язком цієї системи буде $x=-1$, $y=0$. Таким чином, точка $P(-1,0)$ є особливою точкою заданої кривої. Це єдина особлива точка кривої. У всіх інших

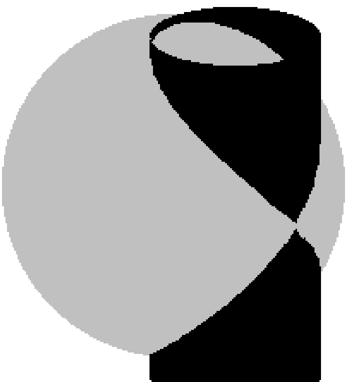


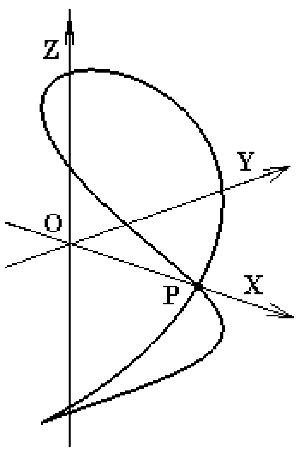
точках задана крива є регулярною.

Відповідь. Плоска крива, задана неявно рівнянням $x^2+2x-y^3=-1$. є регулярною у всіх точках, крім точки $P(-1,0)$. Точка $P(-1,0)$ є єдиною особливою точкою кривої.

Задача 1.3. Перевірити регулярність і знайти особливі точки просторової кривої, заданою неявно системою рівнянь $x^2+ y^2+z^2=4$, $(x-1)^2+y^2=1$.

Розв'язання. Просторова крива, задана неявно системою рівнянь $F(x,y,z)=0$, $H(x,y,z)=0$, називається регулярною класу C^k, якщо функції $F(x,y,z)$ і $H(x,y,z)$ належать класу C^k, $k\geq 1$, і при цьому їх градієнти $\nabla F=(\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z})$ і $\nabla H=(\frac{\partial H}{\partial x},\frac{\partial H}{\partial y},\frac{\partial H}{\partial z})$ не колінеарні в точках кривої. Напроти, точка на кривої називається особою, якщо в цій точці або хоча б одна з функцій $F(x,y,z)$ і $H(x,y,z)$ не є безупинно диференціюємою, або градієнти ∇F і ∇H колінеарні.





Задані в умові функції $F=x^2+y^2+z^{2-4}$, $H=(x-1)^2+y^{2-1}$ є безупинно диференціюємими. Обчислюючи часткові похідні, знаходимо градієнти цих функцій: $\nabla F=(2x,2y,2z)$, $\nabla H=(2(x-1),2y,0)$. Щоб знайти особливі точки кривої, ми повинні до рівнянь, що задають криву, приєднати рівняння, еквівалентне умові колінеарності векторів ∇F і ∇H:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-4=0, \\ (x-1)^2+y^2-1=0, \\ \dfrac{2(x-1)}{2x}=\dfrac{2y}{2y}=\dfrac{0}{2z}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+z^2-4=0, \\ (x-1)^2+y^2-1=0, \\ y=0,\,(x-1)z=0,\; yz=0 \end{cases}$$

Розв'язком цієї системи буде $x=2$, $y=0$, $z=0$. Таким чином, точка $P(2,0,0)$ є особливою точкою заданої кривої. У всіх інших точках задана крива є регулярною.

Відповідь. Просторова крива, задана неявно системою рівнянь $x^2+y^2+z^2=4$, $(x-1)^2+y^2=1$, є регулярною у всіх точках, крім точки $P(2,0,0)$. Точка $P(2,0,0)$ є особливою точкою кривої.

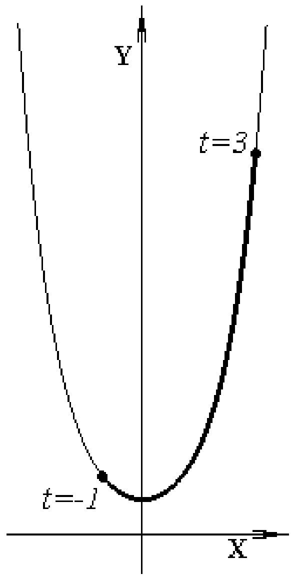
Задача 2. Знайти довжину дуги кривої $x=t$, $y=\mathrm{ch}t$ від точки $t_1=-1$ до точки $t_2=3$. Знайти натуральний параметр s заданої кривої.

Розв'язання. Для регулярної кривої, заданої параметрично радіус-вектором $r=r(t)$, довжина дуги цієї кривої від точки t_1 до точки t_2 Н обчислюється по формулі

$$L=\int_{t_1}^{t_2}\left|\frac{dr}{dt}\right|dt=\int_{t_1}^{t_2}|r'|\,dt\,.$$

Натуральний параметр s, дорівнює довжині дуги кривої, відлічуваної від точки t_0 у напрямку збільшення параметра t, визначається формулою

$$s=\int_{t_0}^{t}\left|\frac{dr}{dt}\right|dt=\int_{t_0}^{t}|r'|\,dt\,.$$



Будь-який інший натуральний параметр має вигляд $\pm s+const$.

Для радіус-вектора $r=(t,\ \text{ch}\,t)$ заданої кривої маємо $r'=(1,\ \text{sh}\,t)$. Довжина цього вектора рівна відповідно $|r'| =\sqrt{1^2+sh^2 t}$ $=\text{ch}\,t$. Оскільки $r\in C^1$ і $r'\neq 0$, те крива є регулярно параметризованої. Підставляючи $|r'|=\text{ch}\,t$ у наведені вище формули, знаходимо:

$$L=\int_{-1}^{4} ch\,t\,dt=\text{sh}4+\text{sh}1,$$

$$s=\int_{t_0}^{t} ch\,t\,dt=\text{sh}\,t-\text{sh}\,t_0,$$

В і д п о в і д ь. Довжина дуги кривої $x=t$, $y=\text{ch}t$ від точки $t_1=-1$ до точки $t_2=4$ рівна $L=\text{sh}4+\text{sh}1$. Параметр $s=\text{sh}\,t-\text{sh}\,t_0$ є натуральним.

З а д а ч а 3. Знайдіть рівняння елементів тригранника Френе кривої $x=\cos t$, $y=\sin t$, $z=t$ у точці $M(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, \pi/4)$.

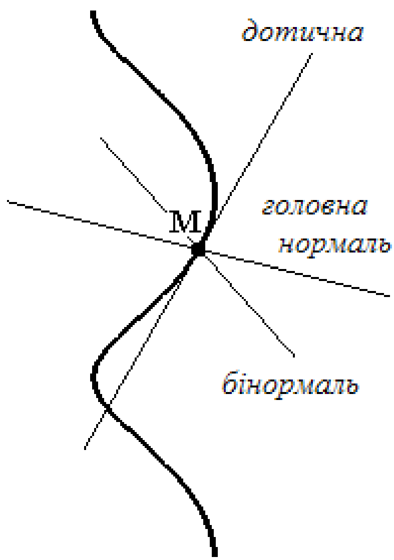
Р о з в ' я з а н н я . Для регулярної кривої, заданої параметрично радіус-вектором *r=r(t)*, елементи тригранника Френе у фіксованій точці $M(t=t_0)$ визначаються в такий спосіб. Напрямний вектор *T* дотичній прямій у точці *M* дорівнює похідній радіус-вектора: $T=r'(t_0)$. Напрямний вектор бінормалі *B* обчислюється як векторний добуток першої й другої похідних радіус-вектора: $B=[r'(t_0), r''(t_0)]$. Напрямний вектор головної нормалі *V* визначається як векторний добуток напрямних векторів дотичної і бінормалі: $V=[B,T]$. У випадку, коли $[r'(t_0), r''(t_0)]=0$, вектори $T=(T^1,T^2,T^3)$, $V=(V^1,V^2,V^3)$ і $B=(B^1,B^2,B^3)$ відмінні від нуля й утворюють позитивно орієнтований ортогональний базис у просторі. З їхньою допомогою можна стандартним образом виписати рівняння дотичної прямої, головній нормалі й бінормалі кривої у точці *M*:

$$\frac{x-x_0}{T^1}=\frac{y-y_0}{T^2}=\frac{z-z_0}{T^3},$$

$$\frac{x-x_0}{V^1}=\frac{y-y_0}{V^2}=\frac{z-z_0}{V^3},$$

$$\frac{x-x_0}{B^1}=\frac{y-y_0}{B^2}=\frac{z-z_0}{B^3}.$$

Крім того, можна виписати й рівняння трьох взаємно ортогональних площин, що також є елементами тригранника Френе заданої кривої у точці *M*: дотична площина проходить через дотичну пряму й головну нормаль ортогонально до бінормалі, нормальна площина проходить через головну нормаль і бінормаль ортогонально до дотичної прямої, спрямляюча площина проходить через дотичну пряму й бінормаль ортогонально до головної нормалі.



Відповідно, ці площини задаються наступними рівняннями:

$(x-x_0)T^1 + (y-y_0)T^2 + (z-z_0)T^3=0,$
$(x-x_0)V^1 + (y-y_0)V^2 + (z-z_0)V^3=0,$
$(x-x_0)B^1 + (y-y_0)B^2 + (z-z_0)B^3=0.$

Для заданої в задачі кривої з радіус-вектором $r=(\cos t, \sin t, t)$ точці $M(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, \pi/4)$ відповідає значення параметра $t=\pi/4$. Знайдемо першу й другу похідні радіус-вектора:

$r'=(-\sin t, \cos t, 1)$,
$r''=(-\cos t, -\sin t, 0)$,
обчислимо їхні значення в точці M и векторний добуток:
$r'(\pi/4)=(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 1)$,
$r''(\pi/4)=(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2, 0)$.
$[r'(\pi/4), r''(\pi/4)]= (\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2, 1)$.

Оскільки $r'(\pi/4)=0$, то точка M не є особою. Крім того, $[r'(\pi/4),r''(\pi/4)]=0$, а значить ми можемо однозначно визначити всі елементи тригранника Френе заданої кривої у точці M. Запишемо вектори T, V і B:

$T=(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 1)$, $B=(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2, 1)$,
$V=[B,T]=(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0)$.

Підставляючи координати цих векторів разом з координатами точки M у виписані вище рівняння, одержуємо рівняння трьох прямих і трьох площин, що утворюють тригранник Френе заданої кривої у точці M.

В і д п о в і д ь. Тригранник Френе заданої кривої у точці M складається з наступних елементів:

дотична пряма $\dfrac{x-\sqrt{2}/2}{-1}=\dfrac{y-\sqrt{2}/2}{1}=\dfrac{z-\pi/4}{\sqrt{2}}$,

головна нормаль $\dfrac{x-\sqrt{2}/2}{1}=\dfrac{y-\sqrt{2}/2}{-1}=\dfrac{z-\pi/4}{\sqrt{2}}$,

бінормаль $\dfrac{x-\sqrt{2}/2}{1}=\dfrac{y-\sqrt{2}/2}{1}=\dfrac{z-\pi/4}{0}$,

дотична площина $(x-\sqrt{2}/2)+(y-\sqrt{2}/2)=0$,

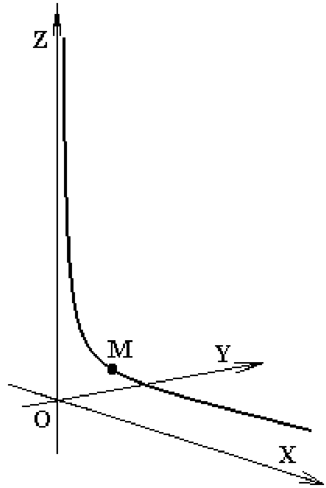
нормальна площина $-(x-\sqrt{2}/2)+(y-\sqrt{2}/2)+\sqrt{2}(z-\pi/4)=0$,

спрямляюча площина $(x-\sqrt{2}/2)-(y-\sqrt{2}/2)+\sqrt{2}(z-\pi/4)=0$.

З а д а ч а 4. Знайти кривину й кручення кривої $x=t^2$, $y=t$, $z=1/t$ у точці $M(t=1)$.

Р о з в ' я з а н н я. Для регулярної кривої, заданої параметрично радіус-вектором $r=r(t)$, кривина k обчислюється по формулі

$$k=\frac{|[r',r'']|}{|r'|^3}.$$



Якщо кривина не дорівнює нулю, то кручення κ обчислюється по наступній формулі:

$$\kappa=\frac{(r',r'',r''')}{|[r',r'']|^2}.$$

У загальному випадку кривина й кручення залежать від t. Точки на кривої, де кривина звертається в нуль, називаються точками перегину. Точки на кривої, де Кручення звертається в нуль, називаються точками уплощення кривої.

Щоб обчислити кривину й Кручення кривої, заданої параметрично радіус-вектором $r=(t^2, t, 1/t)$, у точці $M(t=1)$, знайдемо спочатку першу, другу й третю похідні радіус-вектора:

$r'=(2t, 1, -1/t^2)$, $r''=(2, 0, 2/t^3)$, $r'''=(0, 0, -6/t^4)$.

Обчислимо значення похідних у точці $M(t=1)$:

$r'(1)=(2, 1, -1)$, $r''(1)=(2, 0, 2)$, $r'''(1)=(0, 0, -6)$.

Оскільки $r'(1)\neq 0$, точка $M(t=1)$ не є особою. Далі, знайдемо векторний й змішаний добутки, використовувані у формулах для k і κ:

$[r'(1), r''(1)] = (2,-6,-2)$,

$(r'(1), r''(1), r'''(1)) =12$.

Крім того, знаходимо:

$| r'(1) | =\sqrt{6}$, $| [r'(1), r''(1)] | = 2\sqrt{11}$.

Підставляючи у формули для кривини й кручення, знаходимо:

$$k(1)=\frac{2\sqrt{11}}{6\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{11}}{3\sqrt{6}}, \quad \kappa(1)=\frac{12}{44}=\frac{3}{11}.$$

В і д п о в і д ь. Кривина й кручення кривої $x=t^2$, $y=t$, $z=1/t$ у точці $M(t=1)$ рівні відповідно $k=\sqrt{11}\,/3\sqrt{6}$ і $\kappa=3/11$.

З а д а ч а 5. Знайти плоску криву, задану натуральним рівнянням $k=4$.

Р о з в ' я з а н н я. Натуральне рівняння плоскої кривої являє собою вираження для кривини кривої k у вигляді функції від натурального параметра - довжини дуги s, або, у загальному випадку, рівняння зв'язку $F(s,k)=0$ між довжиною дуги s і кривиною k. Також, замість кривини k у натуральному рівнянні може використовуватися радіус кривини $R=1/k$.

Щоб знайти параметричне завдання плоскої кривої $x=x(s)$, $y=y(s)$, представленої натуральним рівнянням $k=k(s)$, використовується кут α між віссю OX і поточним дотичним вектором кривої $r'=(x's,\ y's)$. За допомогою кута α дотичний вектор τ записується в наступному виді:

$$r'=(x's, y's) = (\cos\alpha, \sin\alpha).$$

У свою чергу, кут α пов'язаний із кривиною k наступним співвідношенням:

$$\alpha's = k.$$

Щоб знайти параметризацію кривої $x=x(s)$, $y=y(s)$, спочатку слід знайти кут α як функцію від s:

$$\alpha(s) = \int k\, ds + \alpha_0.$$

Підставляючи знайдену функцію $\alpha(s)$ у формули для $x's$ і $y's$, а потім інтегруючи отримані вираження, знаходимо шукані функції:

$$x(s) = \int \cos\alpha(s)\, ds + x_0, \quad y(s) = \int \sin\alpha(s)\, ds + y_0.$$

Сваволя у виборі констант інтегрування α_0, x_0 і y_0 відповідає тому, що крива визначається своїм натуральним рівнянням однозначно з точністю до повороту й паралельного переносу в площині.

У ряді випадків, замість натурального рівняння кривої розглядається рівняння $k=k(\alpha)>0$ або $R=R(\alpha)>0$. У цій ситуації за параметр на кривої зручніше прийняти не довжину дуги s, а кут α. Оскільки $s'\alpha\ =1/\ k=R$, те радіус-вектор кривої $r(\alpha)=(x(\alpha),y(\alpha))$ визначається наступними формулами:

$$x(\alpha) = \int \cos\alpha\, R(\alpha)\, d\alpha + x_0, \quad y(s) = \int \sin\alpha\, R(\alpha)\, d\alpha + y_0.$$

Для знаходження плоскої кривої, заданої в задачі натуральним рівнянням $k=4$, можна застосувати обидва методи. У першому випадку одержуємо

$\alpha(s) = \int 4\,ds + \alpha_0 = 4s + \alpha_0,$

і далі

$x(s) = \int \cos(4s+\alpha_0)ds + x_0 = \frac{1}{4}\sin(4s+\alpha_0) + x_0,$

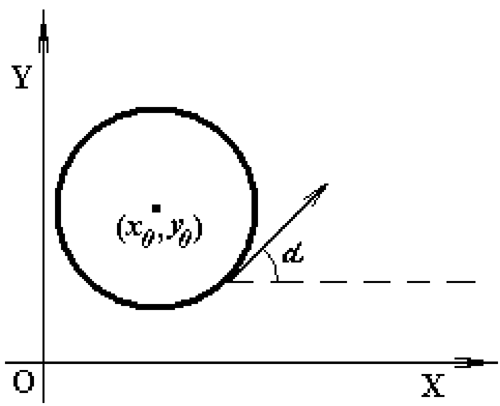
$y(s) = \int \sin(4s+\alpha_0)\,ds + y_0 = -\frac{1}{4}\cos(4s+\alpha_0) + y_0.$

Таким чином, одержали окружність радіуса $\frac{1}{4}$ із центром у точці (x_0, y_0), параметризовану довжиною дуги s.

У другому випадку знаходимо

$x(\alpha) = \int \cos\alpha \frac{1}{4}\,d\alpha + x_0 = \frac{1}{4}\sin\alpha + x_0,$

$y(\alpha) = \int \sin\alpha \frac{1}{4}\,d\alpha + y_0 = -\frac{1}{4}\cos\alpha + y_0.$



Знову одержали окружність радіуса $\frac{1}{4}$ із центром у точці (x_0, y_0), але вже параметризовану кутом α, відлічуваним від осі OX за годинниковою стрілкою.

В і д п о в і д ь. Плоска крива, задана натуральним рівнянням $k=4$, являє собою окружність радіуса $\frac{1}{4}$ з довільним центром.

З а д а ч а 6. Знайдіть рівняння еволюти еліпса $x=2\cos t$, $y=\sin t$.

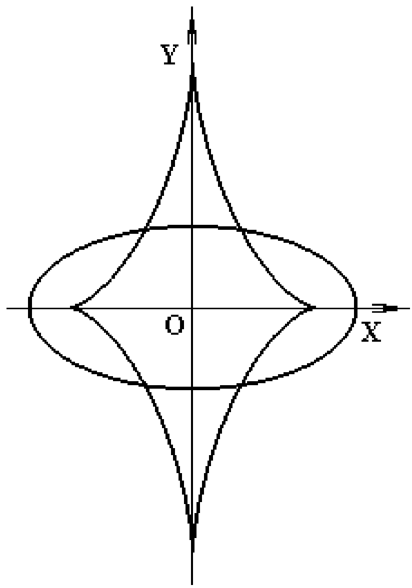
Р о з в ' я з а н н я. Еволютою регулярної плоскої кривої γ називається множина центрів кривини кривої γ. Якщо крива γ задана параметрично радіус-вектором $r=r(t)$, то її еволюта описується радіус-вектором

$$r^* = r + \frac{1}{k}\nu,$$

де k – кривина, а ν – напрямний одиничний вектор головної нормалі кривої γ. У координатній формі, якщо $r(t)=(x(t),y(t))$, то $r^*(t)=(x^*(t),y^*(t))$, де

$$x^* = x - y'\,\frac{(x')^2+(y')^2}{x'y''-x''y'},$$

$$y^* = y + x'\,\frac{(x')^2+(y')^2}{x'y''-x''y'}.$$



Знайдемо эволюту заданого еліпса $x=2\cos t$, $y=\sin t$. Обчислюємо перші й другі похідні координат радіус-вектора еліпса:

$$x' = -2\sin t, \qquad y' = \cos t,$$

$x'' = -2\cos t$, $y'' = -\sin t$,

і підставляємо їх у наведені вище формули. Одержуємо:

$$x^* = 2\cos t - \cos t \, \frac{4\sin^2 t + \cos^2 t}{2\sin^2 t + 2\cos^2 t} = \frac{3}{2}\cos^3 t,$$

$$y^* = \sin t - 2\sin t \, \frac{4\sin^2 t + \cos^2 t}{2\sin^2 t + 2\cos^2 t} = 3\sin^3 t.$$

В і д п о в і д ь. Еволютою еліпса $x=2\cos t$, $y=\sin t$ є астроїда $x=\frac{3}{2}\cos^3 t$, $y=-3\sin^3 t$.

Варіанти завдань

Варіант 1

1. Перевірте регулярність параметризації й знайдіть особливі точки плоскої кривої $x=(t+2)^2/(t+1)$, $y=(t-2)^2/(t-1)$.

2. Знайдіть довжину дуги кривої $x=4\cos t^{1/3}$, $y=4\sin t^{1/3}$, $z=t^{1/3}$, що лежить між площинами $z=1$ і $z=2$. Знайдіть натуральний параметр s на цій кривої.

3. Знайдіть рівняння елементів тригранника Френе просторової кривої $x-y^2=0$, $x^{2-z}=0$ у точці $M(1,1,1)$.

4. Знайдіть кривину й кручення просторової кривої $x^3+y=0$, $x^2+z-2=0$ у точці $M(-1,1,1)$. чи є ці значення кривини й кручення максимальними або мінімальними?

5. Знайдіть натуральне рівняння кривої $x=\ln(\operatorname{ctg} t/2) - \cos t$, $y=\sin t$.

6. Знайдіть рівняння еволюти параболи $y = 1/2\, x^2$.

Варіант 2

1. Перевірте регулярність параметризації й знайдіть особливі точки кривої $x=5\sin t$, $y=3\sin^2 t+2\sin 2t$.

2. Знайдіть довжину дуги кривої $x=a(2\cos t + \cos 2t)$, $y=a(2\sin t +\sin 2t)$, що лежить між точками $t_1=0$ і $t_2=2\pi$. Знайдіть натуральний параметр s.

3. Знайдіть рівняння елементів тригранника Френе кривої $x = \sin t$, $y=t$, $z=\cos t+t$ у точці $M(0,0,1)$.

4. Знайдіть кривину й кручення кривої $x=a \operatorname{ch} t$, $y=a \operatorname{sh} t$, $z=at$ у точці $t=\ln 2$. Знайти максимальні й мінімальні значення кривини й кручення.

5. Знайдіть натуральне рівняння кривої $x=t-\sin t$, $y=1-\cos t$.

6. Знайдіть рівняння еволюти кривої $y=\sin x$.

Варіант 3

1. Перевірте регулярність параметризації й знайдіть особливі точки кривої $x=2\sin t$, $y=2\cos^2 t\,/(2+\cos t)$.

2. Знайдіть довжину дуги кривої $x=t$, $y=\sqrt{2}\ \ln t$, $z=1/t$, що лежить між точками $t=1$ і $t=4$. Знайти натуральний параметр s на цій кривій.

3. Знайдіть рівняння елементів тригранника Френе кривої $x=\cos t+t$, $y=\sin t$, $z=t$ у точці $M(1+2\pi,\ 0,\ 2\pi)$.

4. Знайдіть кривину й кручення кривої $x=b\ \mathrm{tg}\ t$, $y=b\cos t$, $z=b\sin t$ у точці $M(t=\pi/4)$. У яких точках кривина й кручення досягають максимального й мінімального значення?

5. Знайдіть натуральне рівняння кривої $x=\cos t+t\sin t$, $y=\sin t-t\cos t$.

6. Знайдіть рівняння еволюти гіперболи $x=a\ \mathrm{ch}\ t$, $y=b\ \mathrm{sh}\ t$.

Варіант 4

1. Перевірте регулярність параметризації й знайдіть особливі точки кривої $x=t^2$, $y=t^4+t^5$, $z=t^6+t^7$.

2. Знайдіть довжину дуги кривої $y=\mathrm{tg}\ 2x^3$, що лежить між точками з ординатами $y_1=-1$ і $y_2=1$. Знайти натуральний параметр s на цій кривій.

3. Знайдіть рівняння елементів тригранника Френе кривої $x=\cos t+t$, $y=\sin t$, $z=\mathrm{e}t$ у точці $M(1,0,1)$.

4. Доведіть, що в довільній точці кривої $x^{2\text{-}3}y=0$, $2xy-9z=0$ її кривина дорівнює крученню.

5. Знайдіть натуральне рівняння кривої $x=2\cos t+\cos 2t$, $y=2\sin t+\sin 2t$.

6. Знайдіть рівняння еволюти кривої $y=\ln x$.

Варіант 5

1. Перевірте регулярність параметризації й знайдіть особливі точки кривої $x=3t^2/(1+t^5)$, $y=5t^3/(1+t^5)$.

2. Знайдіть довжину дуги кривої $y=1/3x\sqrt{x} - \sqrt{x}$, що лежить між точками $x_1=9$ і $x_2=81$. Знайти натуральний параметр s на цій кривій.

3. Знайдіть рівняння елементів тригранника Френе кривої $x=t^{4/4}$, $y=t^{3/3}$, $z=t^{2/2}$ у її довільній точці $M(t=t_0)$.

4. Знайдіть кривину й кручення кривої $x = a\cos^2 t$, $y = a \sin t \cos t$, $z = at$ у точці $M(a,0,0)$. чи є ці значення кривини й кручення максимальними або мінімальними?

5. Знайдіть натуральне рівняння кривої $y = a \operatorname{ch} (x/a)$.

6. Знайдіть рівняння еволюти кривої y=ех.

Варіант 6

1. Перевірте регулярність параметризації й знайдіть особливі точки кривої $x=t^2$, $y=15t^4+8t^5$, $z=t^2$.

2. Знайдіть довжину дуги кривої $x=a \ln(\operatorname{ctg} t/2)-\cos t$, $y=a\sin t$, що лежить між точками $t_1=0$, $t_2=b$. Знайти натуральний параметр s на цій кривій.

3. Знайдіть рівняння елементів тригранника Френе кривої $x=t-\cos t$, $y=1-\sin t$, $z=4\sin(t/2)+2$ у точці $M(-1,1,2)$.

4. Знайдіть кривину й кручення кривої $x=3t$, $y=3t^2$, $z=3t^3$ у точці $M(t=1)$. У яких точках кривина й кручення досягають максимального й мінімального значення?

5. Знайдіть натуральне рівняння кривої $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$.

6. Знайдіть рівняння еволюти кардіоїди, заданої в полярних координатах r, φ на площині рівнянням $r = a(1+\cos \varphi)$.

Варіант 7

1. Перевірте регулярність параметризації й знайдіть особливі точки кривої $x=2t^{5-5}t^2$, $y=2t^{3-3}t^2$.

2. Знайдіть довжину дуги кривої $x=24t^3$, $y=18t^{2-9}t^4$, що лежить між точками $t_1=-a$ і $t_2=a>0$. Знайдіть натуральний параметр s на цій кривій.

3. Знайдіть рівняння елементів тригранника Френе кривої $x=\sin t$, $y=\cos t$, $z=\mathrm{tg}\, t$ у точці $t=\pi/4$.

4. Знайдіть кривину й кручення кривої $x=e^{t}$, $y=e^{-t}$, $z=t\sqrt{2}$ у точці $M(1,1,0)$. чи є ці значення кривини й кручення максимальними або мінімальними?

5. Знайдіть параметричне рівняння плоскої кривої з натуральним рівнянням $k=a/s$, a - константа.

6. Знайдіть рівняння еволюти циклоїди $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$.

Варіант 8

1. Перевірте регулярність параметризації й знайдіть особливі точки кривої $x=3(t^{2-3})$, $y=t(t^{2-3})$.

2. Знайдіть довжину частини кривої $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$, що лежить між площинами $z=\pi/4b$ і $z=7\pi/2b$. Знайдіть натуральний параметр s на кривій.

3. Знайдіть рівняння елементів тригранника Френе кривої $x=5t^3$, $y=2t^2+3t^4$, $z=t^2$ у точці $M(5,5,1)$.

4. Знайдіть кривину й кручення кривої $x=2at$, $y=a(t^4+1)$, $z=at^2$ у точці $M(t=0)$. У яких точках кривина й кручення досягають максимального й мінімального значення?

5. Знайдіть параметричне рівняння плоскої кривої, якщо її натуральне рівняння $k=as$, a - константа.

6. Знайдіть рівняння еволюти астроїди $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$.

Варіант 9

1. Знайдіть особливі точки неявно заданої кривої $(xy)^2=(y+1)^2(4-y^2)$.

2. Знайдіть довжину замкненої кривої, заданої в полярних координатах r, φ на площині рівнянням $r=2\cos\varphi$. Знайдіть натуральний параметр s на цій кривій.

3. Знайдіть рівняння елементів тригранника Френе кривої $x=t^2$, $y= t^{3-20}$, $z=t$ у точці $M(4,-12,2)$.

4. Знайдіть кривину й кручення кривої $x^{2-3}y=0$, $2xy-9z=0$ у точці $M(0,0,0)$. чи є ці значення кривини й кручення максимальними або мінімальними?

5. Знайдіть параметричне рівняння плоскої кривої, якщо її натуральне рівняння $R=a+s^2/a$, де R - радіус кривини кривої, a - константа.

6. Знайдіть рівняння еволюти ланцюгової лінії $y= a \operatorname{ch} (x/a)$.

Варіант 10

1. Знайдіть особливі точки неявно заданої кривої $xy^2=(x-1)^2$.

2. Знайдіть довжину дуги кривої $y=x\sqrt{x}$, що лежить між точками $x_1=0$ і $x_2=5$. Знайдіть натуральний параметр s на цій кривій.

3. Знайдіть рівняння елементів тригранника Френе просторової кривої $x^2+y^{2-z2-1}=0$, $x^{2-y2-z2-1}=0$ у точці $M(1,0,0)$.

4. У яких точках кручення й кривина кривої $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $z=4a\cos t/2$ досягають максимального й мінімального значення?

5. Нехай R - радіус кривини плоскої кривої γ, α - кут між постійним вектором і поточним дотичним вектором кривої γ. Знайдіть параметричне рівняння кривої γ, якщо $R = 1/ \sin^3\alpha$.

6. Знайдіть рівняння еволюти спирали Архімеда, заданої в полярних координатах r, φ на площині рівнянням $r=a\varphi$.

Варіант 11

1. Знайдіть особливі точки неявно заданої кривої $(x/3 + 3)x^{2-9}y^2=0$.

2. Знайдіть довжину кривої $x=5\cos^3 t$, $y=5\sin^3 t$. Знайдіть натуральний параметр s на цій кривій.

3. Знайдіть рівняння елементів тригранника Френе неявно заданої кривої $x^2+y^{2-2}=0,\ x^2+y^2+z^2=3$, у тій її точці, де дотична пряма коллинеарна вектору ($1,-1,\ 0$).

4. Знайдіть кривину й Кручення кривої $x=a\sin t$, $y=a\cos t$, $z=h(t)$ у точці $M(t=t_0)$. Підберіть функцію $h(t)$ так, щоб крива була плоскою.

5. Нехай R - радіус кривини плоскої кривої γ, α - кут між постійним вектором і поточним дотичним вектором кривої γ. Знайдіть параметричне рівняння кривої γ, якщо $R = 1/\cos^3\alpha$.

6. Знайдіть рівняння еволюти еліпса $x=a\cos t$, $y=b\sin t$.

Варіант 12

1. Знайдіть особливі точки неявно заданої кривої $(a-x)y^2=x^3$.

2. Знайдіть довжину дуги кривої $x=\sin 2t$, $y=1-\cos 2t$, укладеної між точками $t_1=-\pi/4$ і $t_2=5\pi/2$. Знайдіть натуральний параметр s на цій кривій.

3. Знайдіть рівняння елементів тригранника Френе кривої $x=1-\cos 2t$, $y=2t-\sin 2t$, $z=4\cos t$ у точці перетину кривої із площиною $x=0$.

4. Доведіть, що радіус кривини конічної спіралі $x=aek\varphi\cos\varphi$, $y=aek\varphi\sin\varphi$, $z=bek\varphi$ пропорційний відстані точки спирали до осі OZ. Знайдіть кручення кривої.

5. Нехай R - радіус кривини плоскої кривої γ, α - кут між постійним вектором і поточним дотичним вектором кривої γ. Знайдіть параметричне рівняння кривої γ, якщо $R = b\cos\alpha$.

6. Доведіть, що еволюта астроїди $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ – це астроїда, удвічі більше вихідної й повернена на кут $\pi/4$ навколо початку координат.

Варіант 13

1. З'ясувати, при якому значенні константи v крива $x=2\cos t\sqrt{v-\sin^2 t}$, $y=2\sin t\sqrt{v-\sin^2 t}$ має особливі точки.

2. Знайдіть довжину кривої $r=2(1+\cos\varphi)$, що лежить між точками $\varphi_1=0$ і $\varphi_2=2\pi$. Знайдіть натуральний параметр s на цій кривій.

3. Знайдіть рівняння елементів тригранника Френе кривої $x=\sin t \cos t$, $y=\sin^2 t$, $z=\cos t$ у такій точці M кривої, що нормальна площина кривої в точці M проходить через початок координат $O(0,0,0)$.

4. На кривій $x=at$, $y=a\sin t$, $z=a\sin 3t$ знайти точки з нульовою кривиною й точки з нульовим крученням. У яких точках кривина й кручення досягають максимального й мінімального значення?

5. Знайдіть натуральне рівняння плоскої кривої, заданої в полярних координатах r, φ рівнянням $r=a\, e^{b\varphi}$.

6. Знайти еволюту астроїди $x=3\cos^3 t$, $y=3\sin^3 t$.

Варіант 14

1. Перевірте регулярність параметризації й знайдіть особливі точки кривої $x=t^{2-2}t+1$, $y=t-1$.

2. Знайдіть довжину дуги кривої $x = \cos + t\sin t$, $y = \sin t - t\cos t$, що лежить між точками $t_1=-1$ і $t_2=4$. Знайдіть натуральний параметр s на цій кривій.

3. Знайдіть рівняння елементів тригранника Френе кривої $x=2\cos t+t$, $y=2\sin t$, $z=4\cos^2 t$ у точці $M(2,0,4)$.

4. Доведіть, що кривина кривої $x=3t-t^3$, $y=t^3+3t$, $z=3t^2+5$ рівна її крученню.

5. Знайдіть параметричне рівняння плоскої кривої, якщо її натуральне рівняння $s^2+9R^2=16a^2$, де R - радіус кривини кривої, a - константа.

6. Знайдіть рівняння еволюти спіралі Архімеда $r=a\varphi$.

Варіант 15

1. Перевірте регулярність параметризації й знайдіть особливі точки кривої $x=\cos t$, $y=\cos 2t$, $z=\cos 4t$.

2. Знайдіть довжину дуги кривої $x=t$, $y=2\ln t$, $z=1/t$, що лежить між площинами $z=1$ і $z=1/10$. Знайдіть натуральний параметр s на цій кривій.

3. Знайдіть рівняння елементів тригранника Френе кривої $x=t$, $y=t^2$, $z=t^3$ у такій точці M кривої, що дотична площина кривої в точці M проходить через точку $P(2, -1/3, 6)$.

4. Доведіть, що в кривої $x^2=3y$, $2xy=9z$ відношення кривини до кручення постійне.

5. Знайдіть натуральне рівняння кривої, заданої в полярних координатах r, φ на площині рівнянням $r=a(1+\cos\varphi)$.

6. Знайдіть рівняння евольвенти параболи $y^2=2px$.

Варіант 16

1. Перевірте регулярність параметризації й знайдіть особливі точки кривої $x=\cos t$, $y=\cos 2t$, $z=\cos 3t$.

2. Знайдіть довжину дуги кривої $x=4\cos t^3$, $y=4\sin t^3$, $z=t^3$, що лежить між площинами $z=0$ і $z=8$. Знайдіть натуральний параметр s на цій кривій.

3. Знайдіть рівняння елементів тригранника Френе кривої $x=\sin^2 t+\cos t$, $y=1/2\sin 2t$, $z=\cos t$ у точці $M(1,0,0)$.

4. Знайдіть кривину й кручення кривої $x = a\cos t^2$, $y = a\sin t^2$, $z=bt^2$ у точці $M(t=\pi/3)$. У яких точках кривина й кручення досягають максимального й мінімального значення?

5. Знайдіть параметричне рівняння плоскої кривої, якщо її натуральне рівняння $R^2=2as$, де R - радіус кривини кривої, a - константа.

6. Знайдіть рівняння евольвенти кола $x=R\cos\varphi+x_0$, $y=R\sin\varphi+y_0$.

Варіант 17

1. Перевірте регулярність параметризації й знайдіть особливі точки кривої $x=2t\cos t$, $y=2t\sin t$, $z=4t$.

2. Знайдіть довжину замкненої кривої $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $z = a\cos 2t$. Знайдіть натуральний параметр s на цій кривій.

3. Знайдіть рівняння елементів тригранника Френе кривої $x=t$, $y=t^2+t$, $z=\mathrm{e}t$ у точці $M(0,0,1)$.

4. Знайдіть кривину й кручення кривої $x=2t$, $y=\ln t$, $z=t^2$ у точці $M(t=1)$. У яких точках кривина й кручення досягають максимального й мінімального значення?

5. Знайдіть параметричне рівняння плоскої кривої, якщо її натуральне рівняння $R^2+1=\mathrm{e}^{-2s}$, де R - радіус кривини кривої, a - константа.

6. Знайдіть рівняння евольвенти параболи $y^2=2px$.

Варіант 18

1. Перевірте регулярність і знайдіть особливі точки кривої, заданої в полярних координатах $r,\ \varphi$ на площині рівнянням $r=2(2+\cos\varphi)$.

2. Знайдіть довжину однієї частини кривої $x=\cos t$, $y=\sin t$, $z=bt$, що лежить між площинами $x+y=0$ і $x-y=0$. Знайдіть натуральний параметр s.

3. Знайдіть рівняння елементів тригранника Френе кривої $x=2t$, $y=t^4+1$, $z=t^2$ у такій точці M, де нормальна площина кривої ортогональна прямій $x-1=y/2=z+2$.

4. Знайдіть, при яких умовах у кривої $x=at$, $y=bt^2$, $z=ct^3$ відношення кривини до кручення постійне.

5. Нехай R - радіус кривини плоскої кривої γ, α - кут між постійним вектором і поточним дотичним вектором кривої γ. Знайдіть параметричне рівняння кривої γ, якщо $R=be^{m\alpha}$.

6. Знайдіть рівняння евольвенти кола $x=R\cos\varphi$, $y=R\sin\varphi$.

Варіант 19

1. Перевірте регулярність і знайдіть особливі точки кривої, заданої в полярних координатах рівнянням $r=3(2+\cos(\varphi/2))$

2. Знайдіть довжину кривої $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$, $z=\cos 2t$. Знайдіть натуральний параметр s на цій кривій.

3. Знайдіть рівняння елементів тригранника Френе кривої $x=2\cos 2t$, $y=3t$, $z=2\sin 2t$ у такій точці M кривої, що дотична пряма до кривої в точці M перетинає площина $y=0$ у точці $P(\sqrt{2}\ (1+\pi/4),0,\ \sqrt{2}\ (1-\pi/4))$.

4. Доведіть, що радіус кривини кривої $y^2=2px-qx^2$ у довільній її точці M пропорційний відрізку нормалі, що лежить між точкою M и віссю OX.

5. Знайдіть натуральне рівняння кривої, заданої в полярних координатах рівнянням $r=a(1+\cos\varphi)$.

6. Знайдіть довжину відрізка еволюти параболи $y^2 = 4px$, що лежить між особливою точкою еволюти і її довільною точкою.

Варіант 20

1. Перевірте регулярність і знайдіть особливі точки плоскої кривої, заданої в полярних координатах r, φ рівнянням $r = r_0 e^{\varphi}$.

2. Знайдіть довжину дуги кривої $x^{3-3}ya^2=0$, $z-a/2=0$, що лежить між площинами $y=a/3$ і $y=9a$. Знайдіть натуральний параметр s на цій кривої.

3. Знайдіть рівняння елементів тригранника Френе кривої $x=2/t$, $y=\ln t$, $z=-t^2$ у такій точці M кривої, що бінормаль кривої в точці M паралельна площини $x-y+8z+2=0$.

4. На кривої $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=t^{3-9}t$ знайти точки з нульовою кривиною й точки з нульовим крученням. У яких точках кривина й кручення досягають максимального й мінімального значення?

5. Знайдіть параметричне рівняння плоскої кривої, якщо її натуральне рівняння $R^2/a^2+1=e^{-2(s/a)}$, де R - радіус кривини кривої, a - константа.

6. Знайдіть довжину еволюти еліпса, півосі якого рівні a, b.

Список рекомендованої літератури

1. Диференціальна геометрія: Навчальний посібник /І.М. Курбатова. Одеса: Одес. нац. ун-т ім. І. І. Мечникова, 2020. – 66 с.
2. Classical Mechanics and Geometry by Si Li, Tsinghua University, 2023.- 158 pages
3. Electromagnetism and Geometry by Si Li, Tsinghua University, 2023.- 153 pages
4. Current Developments in Mathematics by Denis Auroux, , International Press of Boston, Inc., 2021.-186 pages

Навчальне видання

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

Для практичних занять та самостійної роботи магістрів
спеціальності F3 «Комп'ютерні науки»

Укладачі: МАТЮШЕНКО Микола Васильович

ФЕДЧЕНКО Ганна Валеріївна

Відповідальний за випуск Шоман О.В.

Роботу рекомендувала до видання Шоман О.В.

В авторській редакції

План 2025 р., поз.

Підп. до друку 2025 р. Формат 60x84 1/16. Папір офісний.
RISO- друк. Гарнітура Таймс. Ум. друк. арк. Обл.-вид. арк. 1,4.
Наклад прим. Зам. № Ціна договірна.

Видавничий центр НТУ " ХПІ ".
Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 116 від 10.07. 2000 р.
61002, Харків, вул. Кирпичова, 21

Друкарня НТУ " ХПІ ", 61002, Харків, вул. Кирпичова, 21