**УДК 539.3**

**О.К. Морачковський, Ю.В. Ромашов**

# МЕТОД ЧИСЕЛЬНОГО АНАЛІЗУ ПРОЦЕСІВ ПОВЗУЧОСТІ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ ЕНЕРГЕТИЧНОГО ОБЛАДНАННЯ

*Розглянуто метод чисельного аналізу процесів повзучості конструктивних елементів енергетичного обладнання. Для чисельного розв'язання початково-крайових задач теорії повзучості запропоновано використання методу Бубнова – Гальоркіна.*

**Постановка проблеми.** Експлуатація найбільш відповідних конструктивних елементів енергетичного обладнання, які безпосередньо беруть участь у перетворенні енергії і визначають техніко-економічні показники, здійснюється в умовах високих температур при вагомих механічних навантаженнях. Умови експлуатації часто сприяють накопиченню деформацій повзучості та пошкоджень у матеріалі конструкцій. Аналіз процесів повзучості з метою дослідження змін у стані для кожної точки конструкції протягом часу потребує використання математичних моделей і розв'язання початково-крайових задач теорії повзучості. Їх розв'язання ускладнюється як мінімум принциповою наявністю нелінійних рівнянь стану при повзучості, що потребує розрахунків за складними алгоритмами, організація та здійснення яких часто вимагає багато часу. Актуальність проблеми методів чисельного аналізу процесів повзучості набуває особливого значення при необхідності накопичення великої кількості розрахункових даних, що необхідно, наприклад, для обґрунтування прийняття відповідних технічних рішень щодо вибору конструктивних параметрів, матеріалів, призначення строку експлуатації і т. ін.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Для чисельного аналізу повзучості конструктивних елементів енергетичного обладнання використовують різноманітні підходи до одержання розв'язків на основі спрощених і складних математичних моделей, які спрямовані на використання обчислювальних методів, насамперед методу скінченних елементів у варіаційному тлумаченні [1]. Разом із тим очевидною є обмеженість варіаційного тлумачення відповідно до нелінійних задач за наявності більш загального підходу, заснованого на методі Бубнова – Гальоркіна [2]. Цей метод не має обмежень щодо виду рівнянь задачі та вибору типу апроксимацій: глобальних за типом, що використовуються у структурному методі теорії R-функцій [3], та локальних за типом методу скінченних елементів [2]. Тому віддається перевага саме методу Бубнова – Гальоркіна як основі для чисельного аналізу процесів повзучості конструктивних елементів енергетичного обладнання.

**Метою статті** є побудова формалізованих алгоритмів одержання наближених розв'язків початково-крайових задач теорії повзучості для розрахунків на повзучість конструктивних елементів енергетичного обладнання.

**Виклад основного матеріалу.**

***1. Математична постановка задачі повзучості.*** Рівняння початково-крайової задачі теорії повзучості деформованого твердого тіла, що займає область $\Omega$, яку обмежено поверхнею $\partial\Omega$, взагалі містять кінематичні, статичні рівняння континуального середовища, рівняння стану при повзучості, а також відповідні до перелічених рівнянь крайових і початкових умов. Якщо виключити з розгляду компоненти тензора деформацій, то початково-крайова задача повзучості твердого тіла за умов прийняття відповідних припущень щодо рівнянь стану та зовнішніх умов у декартових координатах $Ox_i$ набуде такого вигляду:

$$-\frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij}+\frac{\nu}{E}\sigma_{kk}\delta_{ij}-c_{ij}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)=0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}+f_i=0, \tag{2}$$

© О.К. Морачковський, Ю.В. Ромашов

$$\dot{c}_{ij} = \frac{3}{2}\frac{B\sigma_i^{n-1}}{(1-\omega)^n}\left(\sigma_{ij} - \left(\frac{1}{3}\sigma_{kk}\right)\delta_{ij}\right),$$
$$\dot{\omega} = \frac{A\sigma_i^k}{(1-\omega)^k}, \tag{3}$$

$$\sigma_{ij}n_j = p_i \; (\partial\Omega_p \subset \partial\Omega), \;\; u_i = u_i^* \; (\partial\Omega_u \subset \partial\Omega), \tag{4}$$

$$c_{ij}\big|_{t=0} = 0, \;\; \omega\big|_{t=0} = 0, \tag{5}$$

де E, ν – модуль пружності та коефіцієнт Пуассона матеріалу; $\sigma_{ij}$ – компоненти тензора напружень; $\delta_{ij}$ – символ Кронекера; $c_{ij}$ – компоненти тензора деформацій повзучості; $u_i$ – компоненти вектора переміщень; $f_i$ – компоненти вектора зовнішніх об’ємних сил; B, n – сталі закону повзучості; $\sigma_i$ – інтенсивність напружень; ω – пошкодження матеріалу; A, k – сталі закону тривалої міцності; $n_j$ – компоненти вектора зовнішньої одиничної нормалі до поверхні $\partial Щ$; $p_i$ – задані компоненти вектора поверхневих навантажень у точках поверхні $\partial Щ_p \subset \partial Щ$; $u_i^*$ – задані компоненти вектора переміщень у точках поверхні $\partial\Omega_u \subset \partial\Omega$.

***2. Загальна схема розв’язання початково-крайової задачі теорії повзучості за методом Бубнова – Гальоркіна.*** Для забезпечення автоматизації розрахунків на ЕОМ запишемо рівняння (1) – (3) у матрично-векторній формі:

$$D\dot{v} + Lv = f_{Щ}, \tag{6}$$

де $v = v(t, x)$ – вектор, компоненти якого залежать від часу t та вектора x просторових координат точок тіла і відповідають невідомим початково-крайової задачі (1) – (5) теорії повзучості; D, L – матричні оператори, $f_Щ = f_Щ(x, v)$ – вектори, побудовані відповідно до рівнянь початково-крайової задачі (1) – (3).

Обмежуючись випадком глобальних апроксимацій, апроксимації невідомих величин подамо у матрично-векторній формі:

$$v = v_0 + \Phi a, \tag{7}$$

де Φ – матриця, що містить пробні функції, які задовольняють умовам повноти та підібрані разом із вектором $v_0$ таким чином, щоб задовольняти умовам (4) за будь-якого вектора апроксимаційних коефіцієнтів $a = a(t)$ та умовам (5) при $a = a_0 = a(0)$.

Розглянемо умову ортогональності похибки рівняння (6) на наближеному розв’язку (7) та пробних функціях:

$$\int_\Omega Ц^T\left(D(\Phi\dot{a}) + Lv_0 + L(\Phi a) - f_Щ\right)d\Omega = 0. \tag{8}$$

За допомогою умови (8) одержуємо систему звичайних диференціальних рівнянь

$$M\dot{a} + Aa = b(a), \tag{9}$$

де $M = \int_\Omega \left(Ц^T DЦ\right)d\Omega$, $b(a) = \int_\Omega Ц^T\left(f_Щ(x, v_0 + \Phi a) - Lv_0\right)d\Omega$, $A = \int_\Omega \left(Ц^T LЦ\right)d\Omega$.

Представимо рівняння (9) у стандартному вигляді й запишемо задачу Коші для визначення апроксимаційних коефіцієнтів a = a(*t*) у завершеному вигляді:

$$\dot{a} = M^{-1}\cdot\left(b(a) - Aa\right),$$
$$a(0) = a_0. \tag{10}$$

Розв’язання задачі теорії повзучості за схемою (9) найбільш загальне, оскільки містить у собі практично будь-який із відомих методів як із глобальними, так із локальними апроксимаціями, в тому числі метод скінченних елементів, класичний метод Рітца. Крім того, відповідно до вигляду диференціальних рівнянь початково-крайової задачі, задаючись тим чи іншим частковим виглядом операторів у рівнянні (6), можна одержувати різноманітні спеціальні методи чисельного розв'язання початково-крайових задач повзучості.

***3. Спеціальні методи розв'язання початково-крайових задач теорії повзучості.*** Розглянемо розв'язання задачі теорії повзучості, матрично векторна форма яких має вигляд

$$\begin{pmatrix} D_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{Щ1} \\ f_{Щ2} \end{pmatrix}, \tag{11}$$

де $f_{Щ1} = f_{Щ1}(x, v_1, v_2)$, $f_{Щ2} = f_{Щ2}(x)$.

Рівняння (11) відповідають вигляду (6), якщо прийняти:

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} D_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix},\ f_{Щ} = \begin{pmatrix} f_{Щ1} \\ f_{Щ2} \end{pmatrix}, \tag{12}$$

Відповідно до виразів (12) апроксимації невідомих матимуть вигляд:

$$\begin{aligned} v_1 &= v_{1(0)} + \Phi_1 a_1, \\ v_2 &= v_{2(0)} + \Phi_2 a_2. \end{aligned} \tag{13}$$

Апроксимації (13) відповідають вигляду (7), якщо прийняти

$$v_0 = \begin{pmatrix} v_{1(0)} \\ v_{2(0)} \end{pmatrix},\ \Phi = \begin{pmatrix} \Phi_1 & 0 \\ 0 & \Phi_2 \end{pmatrix},\ a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix},\ a_0 = \begin{pmatrix} a_{1(0)} \\ a_{2(0)} \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Підставивши вирази (12), (14) в умову (8), одержимо:

$$\begin{pmatrix} M_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{a}_1 \\ \dot{a}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1(a_1, a_2) \\ b_2 \end{pmatrix}, \tag{15}$$

де $M_{11} = \int\limits_{\Omega} Ц_1^T D_{11} Ц_1 d\Omega$, $A_{21} = \int\limits_{Щ} Ц_2^T L_{21} Ц_1 dЩ$, $A_{22} = \int\limits_{Щ} Ц_2^T L_{22} Ц_2 dЩ$,

$b_1(a_1, a_2) = \int\limits_{\Omega} Ц_1^T f_{\Omega 1}\left(x, v_{1(0)} + \Phi_1 a_1, v_{2(0)} + \Phi_2 a_2\right) dЩ$, $b_2 = \int\limits_{\Omega} Ц_2^T f_{\Omega 2} d\Omega - \int\limits_{\Omega} \Phi_2^T L_{21} v_{1(0)} d\Omega - \int\limits_{\Omega} Ц_2^T L_{22} v_{2(0)} d\Omega$.

Задача Коші (15) відповідає вигляду (9) за умов:

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} b_1(a_1, a_2) \\ b_2 \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Як видно із співвідношень (16), матриця M є сингулярною:

$$\det M = \begin{vmatrix} M_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0. \tag{17}$$

Це є наслідком специфічного вигляду операторів з (12) і не дозволяє звести рівняння (15) до стандартного вигляду за схемою (10). З іншого боку, рівняння (15) можна подати у вигляді двох рівнянь:

$$\begin{aligned} M_{11}\dot{a}_1 &= b_1(a_1, a_2), \\ A_{21}a_1 + A_{22}a_2 &= b_2. \end{aligned} \tag{18}$$

За допомогою другого рівняння (18) виразимо частину невідомих:

$$a_2 = A_{22}^{-1}\left(b_2 - A_{21}a_1\right). \tag{19}$$

Ураховуючи співвідношення (19) у першому рівнянні (18), одержимо таке:

$$M_{11}\dot{a}_1 = b_1\left(a_1, A_{22}^{-1}\left(b_2 - A_{21}a_1\right)\right). \tag{20}$$

Далі запишемо систему звичайних диференціальних рівнянь (20) у стандартному вигляді та отримаємо задачу Коші для визначення апроксимаційних коефіцієнтів $a_1 = a_1(t)$ у завершеному вигляді:

$$\begin{aligned} \dot{a}_1 &= M_{11}^{-1} \cdot b_1\left(a_1, A_{22}^{-1}\left(b_2 - A_{21}a_1\right)\right), \\ a_1(0) &= a_{1(0)}. \end{aligned} \tag{21}$$

Визначення невідомих $a_1 = a_1(t)$ шляхом розв'язання задачі Коші (21) дозволить за допомогою співвідношення (19) отримати інші невідомі, а саме вектор $a_2$.

***4. Зв'язок спеціальних методів з методом продовження розв'язків за параметром.*** У [4] для розв'язання нелінійних задач розглянуто метод продовження розв'язків за параметром. У більшості сучасних досліджень розв'язання початково-крайових задач теорії повзучості розглядається на основі саме методу продовження розв'язків за параметром. При цьому суттєво спираються на можливість параметризації напружено-деформованого стану тіла за накопиченими деформаціями повзучості, яка є наслідком відповідного вигляду рівнянь початково-крайової задачі теорії повзучості. Цікаво, що сукупність співвідношень (19) та (21) фактично містить у собі ідею продовження розв'язків за параметром. Дійсно, запишемо друге рівняння (11) у вигляді сім'ї рівнянь, які залежать від параметра $v_1$:

$$L_{22} v_2 = f_{Ц2} - L_{21} v_1 . \tag{22}$$

Узявши до уваги друге співвідношення (13), розглянемо умову ортогональності похибки рівняння (22):

$$\int_\Omega Ц_2^T \left( L_{22}\left( v_{2(0)} + \Phi_2 a_2 \right) + L_{21} v_1 - f_{Ц2} \right) d\Omega = 0 . \tag{23}$$

За допомогою співвідношення (23) одержимо

$$a_2 = A_{22}^{-1} \left( \int_\Omega Ц_2^T \left( f_{Ц2} - L_{22} v_{2(0)} - L_{21} v_1 \right) d\Omega \right). \tag{24}$$

Урахуємо співвідношення (24) у першому рівнянні (11):

$$D_{11} \dot{v}_1 = f_{Ц1}\left( x, v_1, v_{2(0)} + Ц_2 A_{22}^{-1} \left( \int_\Omega Ц_2^T \left( f_{Ц2} - L_{22} v_{2(0)} - L_{21} v_1 \right) d\Omega \right) \right). \tag{25}$$

Зважаючи на перше співвідношення (13), розглянемо умову ортогональності похибки рівняння (25):

$$\int_\Omega \Phi_1^T \left( D_{11} \Phi_1 \dot{a}_1 - f_{Ц1}\left( x, v_{1(0)} + \Phi_1 a_1, v_{2(0)} + Ц_2 A_{22}^{-1} \left( b_2 - A_{21} a_1 \right) \right) \right) d\Omega = 0 . \tag{26}$$

Як видно, співвідношення (26) відповідає рівнянню (20), тобто розглянуті спеціальні методи розв'язання початково-крайових задачі теорії повзучості у вигляді (19), (21) повністю ідентичні методу продовження розв'язків за параметром. Класичний метод продовження за параметром передбачає апріорний вибір параметрів для продовження розв'язків та відповідного формулювання початково-крайових задач. Співвідношення (19), (21) природно випливають із відповідності вигляду операторів початково-крайової задачі теорії повзучості, що становить інтерес з точки зору автоматизації розрахункового аналізу процесів повзучості.

***5. Матрично-векторна форма запису класу початково-крайових задач теорії повзучості.*** Спеціальні методи розв'язання задач теорії повзучості актуальні, оскільки вигляду (11) відповідає широкий клас початково-крайових задач теорії повзучості. Наприклад, рівняння (1) – (3) відповідної початково-крайової задачі теорії повзучості набувають вигляду (11), якщо прийняти:

$$\begin{aligned} v_1^T &= \left( c_{11}, c_{22}, c_{33}, c_{12}, c_{13}, c_{23}, \omega \right), \\ v_2^T &= \left( \sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}, u_1, u_2, u_3 \right), \end{aligned} \tag{27}$$

$$D_{11}=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&1\end{pmatrix};\ \mathrm{f}_{\Omega 1}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\frac{B\sigma_i^{n-1}}{(1-\omega)^n}\left(\frac{2}{3}\sigma_{11}-\frac{1}{3}\sigma_{22}-\frac{1}{3}\sigma_{33}\right)\\ \frac{3}{2}\frac{B\sigma_i^{n-1}}{(1-\omega)^n}\left(\frac{2}{3}\sigma_{22}-\frac{1}{3}\sigma_{11}-\frac{1}{3}\sigma_{33}\right)\\ \frac{3}{2}\frac{B\sigma_i^{n-1}}{(1-\omega)^n}\left(\frac{2}{3}\sigma_{22}-\frac{1}{3}\sigma_{11}-\frac{1}{3}\sigma_{22}\right)\\ \frac{3}{2}\frac{B\sigma_i^{n-1}}{(1-\omega)^n}\sigma_{12}\\ \frac{3}{2}\frac{B\sigma_i^{n-1}}{(1-\omega)^n}\sigma_{13}\\ \frac{3}{2}\frac{B\sigma_i^{n-1}}{(1-\omega)^n}\sigma_{23}\\ \frac{A\sigma_i^k}{(1-\omega)^k}\end{pmatrix}, \tag{28}$$

$$\mathrm{L}_{21}=\begin{pmatrix}-1&0&0&0&0&0&0\\0&-1&0&0&0&0&0\\0&0&-1&0&0&0&0\\0&0&0&-1&0&0&0\\0&0&0&0&-1&0&0\\0&0&0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\mathrm{L}_{22}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\mathrm{E}}&\frac{\nu}{\mathrm{E}}&\frac{\nu}{\mathrm{E}}&0&0&0&\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}_1}&0&0\\ \frac{\nu}{\mathrm{E}}&-\frac{1}{\mathrm{E}}&\frac{\nu}{\mathrm{E}}&0&0&0&0&\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}_2}&0\\ \frac{\nu}{\mathrm{E}}&\frac{\nu}{\mathrm{E}}&-\frac{1}{\mathrm{E}}&0&0&0&0&0&\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}_3}\\ 0&0&0&-\frac{1+\nu}{\mathrm{E}}&0&0&\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}_2}&\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}_1}&0\\ 0&0&0&0&-\frac{1+\nu}{\mathrm{E}}&0&\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}_3}&0&\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}_1}\\ 0&0&0&0&0&-\frac{1+\nu}{\mathrm{E}}&0&\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}_3}&\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}_2}\\ \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}_1}&0&0&\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}_2}&\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}_3}&0&0&0&0\\ 0&\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}_2}&0&\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}_1}&0&\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}_3}&0&0&0\\ 0&0&\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}_3}&0&\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}_1}&\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}_2}&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\mathrm{f}_{\Omega 2}^{T}=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0&-f_1&-f_2&-f_3\end{pmatrix}. \tag{29}$$

За умов наявності співвідношень (27) – (29), які визначають конкретний вигляд операторів рівняння (11), розв’язання початково-крайової задачі теорії повзучості (1) – (5) можна одержати за допомогою співвідношень (19), (21), що не становить труднощів принципового характеру, оскільки у зазначених співвідношеннях використовуються матрично-векторні операції, які природно пристосовані до обчислень на ЕОМ. Разом із тим практична реалізація, пов'язана зі створенням відповідного програмного забезпечення, потребує певної кількості часу, що зумовлено загальною складністю задачі.

## Висновки

Результати теоретичних досліджень, наведені у статті, свідчать про переваги методу Бубнова – Гальоркіна для чисельного аналізу процесів повзучості конструктивних елементів енергетичного обладнання за рахунок інваріантості методу щодо виду рівнянь початково-крайової задачі. Установлено, що широкий клас просторових задач теорії повзучості має спеціальний вигляд операторів диференціальних рівнянь, який потребує продовження розв'язків за параметрами. Можна рекомендувати продовжити дослідження і розглянути задачі повзучості тонкостінних конструкцій, які порівняно із задачами для просторових тіл зводяться до дещо іншого формулювання вихідної початково-крайової задачі.

## Список використаних джерел

1. Ползучесть элементов машиностроительных конструкций / А.Н. Подгорный, В.В. Бортовой, П.П. Гонтаровский и др. – К.: Наук. думка, 1984. – 262 с.
2. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина: Пер. с англ. – М.: Мир, 1988. – 352 с.
3. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. – К.: Наук. думка, 1982. – 566 с.
4. Григолюк Э.М., Шалашилин В.М. Проблемы нелинейного деформирования: метод продолжения решения по параметру в механике твердого деформируемого тела. – М.: Наука, 1988. – 230 с.

*Стаття надійшла до редакції 10.05.2007 р.*