

виста. – М.: Мир, 1989. – 278 с. 4. *Жовинский А.Н.* Инженерный экспресс-анализ случайных процес сов / А. Н. Жовинский, В. Н. Жовинский. – М.: Энергия, 1979. – 112 с. 5. *Левин Б.Р.* Теоретические основы статической радиотехники / Б. Р. Левин. – М.: Советское радио, 1975. – 392 с. 6. *Вентцель Е.С.* Теория вероятностей и ее инженерные приложения: [учебное пособие для ВТУЗ] / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. – М.: Высшая школа, 2000. – 480 с.

Надійшла до редколегії 28.02.2014

УДК 519.254

Однопараметровий контроль стану динамічних промислових об'єктів за допомогою тестових статистик / Р. П. Мигущенко, О. Ю. Кропачек, М. П. Артьомов // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2014. – № 6 (1049). – С. 145 – 150. Бібліогр.: 6 назв. – ISSN 2222-0631.

Рассмотрены вопросы оценки эффективности однопараметрового контроля функционального состояния вибрационных промышленных объектов по вибрации их узлов при помощи тестовых Q -статистик. При оценке получены и исследованы характеристики измерительного вибросигнала, обеспечивающего информационную составляющую для контроля; разработан и проанализирован методический базис для оценки состояния промышленных динамических объектов по их вибрационным характеристикам; разработаны и исследованы однопараметровые модели информационного вибросигнала.

Ключевые слова: вибрационные характеристики, тестовые статистики, динамические объекты, контроль состояния.

UDC 519.254

One-parameter control of the functional state of dynamic industrial objects using Q-test statistics / R. P. Migushchenko, O. Y. Kropachek, M. P. Artemov // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2014. – № 6 (1049). – pp. 145 – 150. Bibliog.: 6 titles. – ISSN 2222-0631.

The question of evaluating the efficiency of one-parameter control of the functional state of industrial vibration objects by vibration level of their units using Q -test statistics is addressed. Characteristics of measuring vibration signal, which provides information component for monitoring, are received and investigated. A methodological basis for estimating industrial dynamic objects by their vibration characteristics is developed and analyzed. One-parameter models of information vibration signal are designed and tested.

Key words: vibration characteristics, Q-test statistics, dynamic objects, functional state control.

УДК 539.3

А.Г. НИКОЛАЕВ, д-р физ.-мат. наук, зав. каф. высшей математики
НАКУ им. М.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков;

Е.А. ТАНЧИК, ассист., НАКУ им. М.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПОРИСТОГО МАТЕРИАЛА В ОБЛАСТИ МЕЖДУ ЧЕТЫРЬМА СФЕРОИДАЛЬНЫМИ ПОРАМИ

Исследуется напряженное состояние упругого пористого материала, в котором поры моделиру-

© А. Г. Николаев, Е. А. Танчик, 2014

ются четырьмя сфероидальными полостями, центры которых расположены в вершинах квадрата. Материал находится под действием одноосного или двуосного растяжения, приложенного на бесконечности, а поры свободны от нагрузки. Поле перемещений строится при помощи обобщенного метода Фурье. Приведен численный анализ распределения напряжений на линиях, соединяющих центры пор, в зависимости от геометрических параметров задачи.

Ключевые слова: обобщенный метод Фурье, пористый материал, теоремы сложения, напряженно-деформированное состояние, сфероидальная полость.

Введение. Композиционные материалы широко применяются в авиационно-космической технике, поэтому очень актуальной задачей является изучение их прочностных характеристик. В настоящее время предлагаются разные модели напряженно-деформированного состояния пористых и композиционных материалов. В работе [1] предложен метод расчета эффективных упругих модулей зернистых композитов, основанный на модели упругого деформирования пористых материалов. Отличительная особенность метода заключается в осреднении микроскопических напряжений и деформаций не по полному, а по эффективному объему фаз. Получены расчетные зависимости эффективных объемов осреднения от упругих модулей и объемного содержания фаз. Проведено сопоставление результатов расчета с экспериментальными данными при различном сочетании упругих модулей и произвольной объемной концентрации фаз.

В работе [2] обобщены базовые подходы, применяемые в математических моделях, и общие методы решения уравнений *механики стохастических композитов*. Они могут быть сведены к *стохастическим уравнениям теории упругости* структурно неоднородного тела, к уравнениям *теории эффективных упругих модулей*, к уравнениям *теории упругих смесей* или к более общим уравнениям четвертого порядка. Решение стохастических уравнений теории упругости для произвольной области вызывает значительные математические трудности и может быть реализовано только приближенно. Построение уравнений теории эффективных упругих модулей связано с задачей определения интегральных модулей стохастически неоднородной среды, которая может быть решена методом возмущений, методом моментов или методом условных моментов. Однако, поскольку уравнения состояния не были строго обоснованы, эта теория не может использоваться для систематического моделирования композитных структур.

В статьях [3 - 5] методами теории аналитических функций решаются некоторые осесимметричные задачи теории упругости для системы сферических и сфероидальных полостей и включений.

В статье [6] предложена структурная модель зернистого эластомерного композита, позволившая связать его деформационное и прочностное поведение с размерами частиц дисперсной фазы, то есть учесть масштабный фактор прочности. На основе теоретических исследований напряженно-деформированного состояния вокруг двух жестких сферических включений в упругой несжимаемой матрице установлены зависимости математического ожидания разрывного усилия от физико-механических характеристик свя-

зующего, размеров частиц и расстояния между ними. В результате предложен новый вероятностный критерий появления микроразрушения в композитной структуре в виде отслоений матрицы от частиц. С его помощью проведены модельные исследования процессов развития внутренней поврежденности в композитной системе в зависимости от степени наполнения и величины включений. Построены соответствующие кривые растяжения, определены предельные разрывные макронапряжения и макродеформации.

В работах [7, 8] методом обобщенных аналитических функций построены решения осесимметричных задач для шара со сферической полостью и пространства с двумя сферическими полостями.

В работе [9] методами теории гармонических функций исследовано напряженное состояние в упругом пространстве с двумя осесимметрично расположенными сферическими включениями.

В работе [10] введена локальная осесимметричная модель пористого материала, в которой напряженное состояние определяется равномерным давлением, создаваемым внутри пор. В работе [11] разработана локальная математическая модель напряженно-деформированного состояния зернистого композиционного материала, основанная на *обобщенном методе Фурье*. Численная реализация модели позволила получить характер распределения локальных напряжений в области их концентрации. Проведено сравнение результатов с решением *методом конечных элементов*.

Данная работа посвящена определению напряженно-деформированного состояния пористого материала. Исследуется влияние геометрии и расположения пор на характер распределения напряжений на линиях, соединяющих их центры. Поры моделируются четырьмя вытянутыми сфероидальными полостями, центры которых расположены в вершинах квадрата в упругом пространстве, находящемся под действием одноосного или двuosного растяжения.

Постановка задачи. Рассматривается упругое пространство Ω с четырьмя непересекающимися сфероидальными полостями, центры которых находятся в вершинах O_j квадрата со стороной a (рис. 1).

Будем использовать одинаково ориентированные цилиндрические (ρ_j, φ_j, z_j) и *вытянутые сфероидальные системы координат* $(\xi_j, \eta_j, \varphi_j)$, начала которых отнесены к центрам пор $O_j, j = 1 \div 4$. Будем считать, что на бесконечности приложены постоянные растягивающие усилия $\sigma_z^\infty = T, \tau_{\rho z}^\infty = \tau_{\varphi z}^\infty = 0$ (одноосное растяжение) или $\sigma_\rho^\infty = T, \tau_{\rho\varphi}^\infty = \tau_{\rho z}^\infty = 0$ (двuosное растяжение), а границы полостей свободны от усилий.

Уравнения поверхностей полостей Γ_j в цилиндрических координатах имеют вид:

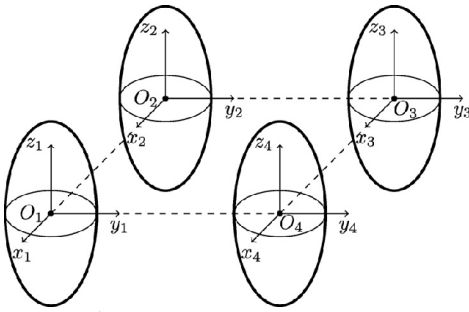


Рис. 1 – Геометрия расположения пор.

задачи для уравнения Ламе:

$$\nabla^2 \mathbf{U} + \frac{1}{1-2\sigma} \nabla \operatorname{div} \mathbf{U} = 0, \quad (2)$$

в упругом пространстве Ω ищется в виде суперпозиции линейно независимых внешних частных решений уравнения Ламе:

$$\mathbf{U} = \tilde{\mathbf{U}} + \mathbf{U}_0, \quad (3)$$

$$\tilde{\mathbf{U}} = \sum_{j=1}^4 \sum_{n=0}^3 \sum_{m=-n-1}^{\infty} \sum_{s=-n-1}^{n+1} A_{s,n,m}^{(j)} \mathbf{U}_{s,n,m}^{+(5)}(\xi_j, \eta_j, \varphi_j), \quad (4)$$

где \mathbf{U} - в общем случае функция перемещений, σ - коэффициент Пуассона. Перемещение \mathbf{U}_0 соответствует напряженно-деформированному состоянию на бесконечности (для одноосного и двухосного растяжения упругого пространства):

$$\mathbf{U}_0 = -\frac{1}{2} \frac{T\sigma\rho}{G(\sigma+1)} \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{2} \frac{Tz}{G(\sigma+1)} \mathbf{e}_z, \quad (5)$$

$$\mathbf{U}_0 = -\frac{1}{2} \frac{T(\sigma-1)\rho}{G(\sigma+1)} \mathbf{e}_\rho - \frac{1}{2} \frac{T\sigma z}{G(\sigma+1)} \mathbf{e}_z, \quad (6)$$

где T - усилие на бесконечности, G - модуль сдвига, $(\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z)$ - орты цилиндрической системы координат.

Введем следующий набор линейно независимых частных решений уравнения Ламе для вытянутого сфероида [12]:

$$\mathbf{U}_{s,n,m}^{\pm(5)} = \frac{c}{2n+1} \mathbf{D}_s \left[u_{n-1,m}^{\pm(5)} - u_{n+1,m}^{\pm(5)} \right], \quad s=1,3, \quad (7)$$

$$\mathbf{U}_{2,n,m}^{\pm(5)} = \mathbf{D}_2 u_{n,m}^{\pm(5)} - cq_0^2 \mathbf{D}_1 u_{n\pm 1,m}^{\pm(5)}, \quad (8)$$

где $\mathbf{D}_1 = \nabla$, $\mathbf{D}_2 = z\nabla - \chi \mathbf{e}_z$, $\mathbf{D}_3 = i[\nabla \times \mathbf{e}_z]$ (здесь i - мнимая единица), $\chi = 3 - 4\sigma$, $q = ch\xi$, $q_0 = ch\xi_0$, $u_{n,m}^{\pm(5)}$ - полный набор частных решений уравнения Лапласа в вытянутых сфероидальных координатах.

В развернутой координатной форме формулы (7) – (8) имеют вид:

$$\Gamma_j : \frac{z^2}{d_{1j}^2} + \frac{\rho_j^2}{d_{2j}^2} = 1, \quad (1)$$

где d_{1j} и d_{2j} - большая и малая полуоси сфероидов соответственно. В сфероидальных координатах уравнения поверхностей полостей имеют простой вид $\xi = \xi_{0j}$.

Общее решение краевой за-

$$\mathbf{U}_{1,n,m}^{\pm(5)} = u_{n,m-1}^{\pm(5)} \mathbf{e}_{-1} - u_{n,m+1}^{\pm(5)} \mathbf{e}_1 - u_{n,m}^{\pm(5)} \mathbf{e}_0, \quad (9)$$

$$\mathbf{U}_{3,n,m}^{\pm(5)} = -u_{n,m-1}^{\pm(5)} \mathbf{e}_{-1} - u_{n,m+1}^{\pm(5)} \mathbf{e}_1, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{2,n,m}^{\pm(5)} = & qu_{1,n,m-1}^{\pm(5)} \mathbf{e}_{-1} - qu_{1,n,m+1}^{\pm(5)} \mathbf{e}_1 - \\ & - \left[qu_{1,n,m}^{\pm(5)} + \chi u_{n,m}^{\pm(5)} \right] \mathbf{e}_0 + c \left(q^2 - q_0^2 \right) \nabla u_{n\pm 1,m}^{\pm(5)}, \end{aligned} \quad (11)$$

где $u_{n,m}^{\pm(5)} = u_{n,m}^{\pm} S_n^m$, $u_{n,m}^+ = Q_n^{-m}(q)$, $u_{n,m}^- = P_n^{-m}(q)$, $u_{1,n,m}^{\pm(5)} = u_{1,n,m}^{\pm} S_n^m$, $u_{1,n,m}^+ = (n+m+1)Q_{n+1}^{-m}(q)$, $u_{1,n,m}^- = -(n-m)P_{n-1}^{-m}(q)$, $S_n^m = P_n^m(\cos \eta) e^{im\varphi}$, P_n^m и Q_n^m - присоединенные функции Лежандра первого и второго рода соответственно. Базис $(\mathbf{e}_{-1}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_0)$ связан с ортами цилиндрической системы координат следующим образом:

$$\left\{ \mathbf{e}_{-1} = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_\rho + i\mathbf{e}_\varphi) e^{i\varphi}, \mathbf{e}_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_\rho - i\mathbf{e}_\varphi) e^{-i\varphi}, \mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_z. \right. \quad (12)$$

Вектор напряжений на площадке с нормалью \mathbf{n} имеет вид:

$$\mathbf{FU} = 2G \left[\frac{\sigma}{1-2\sigma} \mathbf{n} \operatorname{div} \mathbf{U} + \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{n}} + \frac{1}{2} (\mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{U}) \right]. \quad (13)$$

Применяя к формулам (9) – (11) оператор (13) на площадке с нормалью $\mathbf{n} = \mathbf{e}_\xi$ получим:

$$\mathbf{FU}_{1,n,m}^{\pm(5)} = 2G \frac{h}{c} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} u_{n,m-1}^{\pm(5)} \mathbf{e}_{-1} - \frac{\partial}{\partial \xi} u_{n,m+1}^{\pm(5)} \mathbf{e}_1 - \frac{\partial}{\partial \xi} u_{n,m}^{\pm(5)} \mathbf{e}_0 \right], \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{FU}_{2,n,m}^{\pm(5)} = & 2G \frac{h}{c} \left\{ \left[q^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \left(q^{-1} u_{1,n,m-1}^{\pm(5)} \right) - 2\sigma u_{2,n,m}^{\pm(5)} \right] \mathbf{e}_{-1} - \right. \\ & - \left[q^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \left(q^{-1} u_{1,n,m+1}^{\pm(5)} \right) - 2\sigma u_{3,n,m}^{\pm(5)} \right] \mathbf{e}_1 - \\ & \left. - \left[q^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \left(q^{-1} u_{1,n,m}^{\pm(5)} \right) + (1-2\sigma) \frac{\partial}{\partial \xi} u_{n,m}^{\pm(5)} \right] \mathbf{e}_0 \right\}, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{FU}_{3,n,m}^{\pm(5)} = & 2G \frac{h}{c} \left[- \left(\frac{\partial}{\partial \xi} u_{n,m-1}^{\pm(5)} - \frac{1}{2} u_{2,n,m}^{\pm(5)} \right) \mathbf{e}_{-1} - \right. \\ & \left. - \left(\frac{\partial}{\partial \xi} u_{n,m+1}^{\pm(5)} - \frac{1}{2} u_{3,n,m}^{\pm(5)} \right) \mathbf{e}_1 + \frac{m}{2} \frac{q}{q} u_{n,m}^{\pm(5)} \mathbf{e}_0 \right], \end{aligned} \quad (16)$$

где $u_{2,n,m}^{\pm(5)} = \omega^- Q_n^{-m}(q) S_n^{m-1}$, $u_{3,n,m}^{\pm(5)} = Q_n^{-m}(q) S_n^{m+1}$, $u_{3,n,m}^{-5} = P_n^{-m}(q) S_n^{m+1}$, $u_{2,n,m}^{-5} = \omega^- P_n^{-m}(q) S_n^{m-1}$, $\omega^- = (n+m)(n-m+1)$, $h = (q^2 - p^2)^{-1/2}$, $\bar{q} = sh\xi$.

Теоремы сложения. Теоремы сложения связывают базисные решения уравнения Ламе в системах координат, совмещенных с центрами пары сфе-

роидов. Справедливы следующие теоремы сложения [12]:

$$\mathbf{U}_{s,n,m}^{+(5)}(\xi_j, \eta_j, \varphi_j) = \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k-1}^{k+1} T_{s,n,m}^{t,k,l,j,\alpha} \mathbf{U}_{t,k,l}^{-(5)}(\xi_\alpha, \eta_\alpha, \varphi_\alpha), \quad (17)$$

где $i, j = 1, 2, i \neq j$.

$$T_{s,n,m}^{t,k,l,j,\alpha} = \left\{ \delta_{st} - \delta_{t1} \delta_{s2} \left[q_{j0}^2 \left(c_j \frac{\partial}{\partial c_j} - n - 1 \right) + q_{\alpha 0}^2 \left(c_\alpha \frac{\partial}{\partial c_\alpha} - k \right) + z_{j\alpha} \frac{\partial}{\partial z_{j\alpha}} \right] \right\} f_{1,n,m,j,\alpha}^{\pm(55)k,l}, \quad (18)$$

$$f_{1,n,m,j,\alpha}^{+(55)k,l} = \pi \left(k + \frac{1}{2} \right) \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \beta_{pk} \left(\frac{c_\alpha}{2} \right)^p \times \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^{m-l} \beta_{rk} \left(\frac{c_j}{2} \right)^{r+1} u_{r+p,m-l}^{+(4)}(r_{j\alpha}, \theta_{j\alpha}, \varphi_{j\alpha}), \quad (19)$$

$$f_{1,n,m,j,\alpha}^{-(55)k,l} = \pi \left(k + \frac{1}{2} \right) \frac{c_\alpha}{c_j} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \beta_{pm} \left(\frac{c_\alpha}{2} \right)^p \times \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^{m-l} \beta_{rk} \left(\frac{c_j}{2} \right)^{r+1} u_{r+p,m-l}^{+(4)}(r_{j\alpha}, \theta_{j\alpha}, \varphi_{j\alpha}), \quad (20)$$

$$\beta_{kj} = \varepsilon_{kj} \left[\Gamma \left(\frac{k-j}{2} + 1 \right) \Gamma \left(\frac{k+j}{2} + \frac{3}{2} \right) \right]^{-1}, \quad (21)$$

δ_{kj} - дельта-символ Кронекера, Γ - гамма-функция Эйлера; $\varepsilon_{kj} = 1$, если k и j одной четности, и $\varepsilon_{kj} = 0$ в противном случае; (r, θ, φ) - сферические координаты; $u_{n,m}^{+(4)} = (n-m)! r^{-n-1} P_n^m(\cos \theta) e^{im\varphi}$ - внешнее базисное частное решение уравнения Лапласа для сферы.

Разрешающая система уравнений. Относительно перемещения $\tilde{\mathbf{U}}$ получаем краевую задачу для уравнения (2) с граничными условиями $\mathbf{F}\tilde{\mathbf{U}}|_{\Gamma_i} = -\mathbf{F}\mathbf{U}_0|_{\Gamma_i}$. Применяя оператор (13) к формулам (5) – (6), на площадке с нормалью $\mathbf{n} = \mathbf{e}_\xi$ для одноосного и двухосного растяжения получим соответственно:

$$\mathbf{F}\mathbf{U}_0 = Th \operatorname{sh} \xi \cos \eta \mathbf{e}_z, \quad (22)$$

$$\mathbf{F}\mathbf{U}_0 = Th \operatorname{ch} \xi \sin \eta \mathbf{e}_\rho. \quad (23)$$

Используя теоремы сложения (17) – (18), представим вектор перемещения $\tilde{\mathbf{U}}$ в системе координат с началом в точке O_j :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{U}} = & \sum_{s=1}^3 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n-1}^{n+1} A_{s,n,m}^{(j)} \mathbf{U}_{s,n,m}^{+(5)}(\xi_j, \eta_j, \varphi_j) + \\ & + \mathbf{U}_{s,n,m}^{-(5)}(\xi_j, \eta_j, \varphi_j) \sum_{\alpha \neq j} \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k-1}^{k+1} A_{t,k,l}^{(\alpha)} T_{s,n,m}^{t,k,l,\alpha,j}. \end{aligned} \quad (24)$$

После удовлетворения граничных условий задача сводится к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов $A_{s,n,m}^{(j)}$:

$$\sum_{s=1}^3 A_{s,n,m}^{(j)} F_{s,n,m}^{+(r)}(\xi_{j0}) + F_{s,n,m}^{-(r)}(\xi_{j0}) \sum_{\alpha \neq j} \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k-1}^{k+1} A_{t,k,l}^{(\alpha)} T_{s,n,m}^{t,k,l,\alpha,j} + F_{0,n,m}^{(r)} = 0, \quad (25)$$

$$r = -1, 0, 1; \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad m = -n - 1 \div n + 1,$$

где $F_{0,n,m}^{(0)} = \frac{Td_{2j}}{2G} \delta_{n1} \delta_{m0}$, $F_{0,n,m}^{(-1)} = F_{0,n,m}^{(1)} = 0$ для одноосного растяжения и

$$F_{0,n,m}^{(0)} = 0, \quad F_{0,n,m}^{(-1)} = \frac{Td_{1i}}{G} \delta_{n1} \delta_{m0}, \quad F_{0,n,m}^{(1)} = -\frac{Td_{1i}}{2G} \delta_{n1} \delta_{m0}$$

для двуосного растяжения,

$$F_{1,n,m}^{\pm(-1)} = \frac{\partial}{\partial \xi} u_{n,m-1}^{\pm}, \quad F_{1,n,m}^{\pm(1)} = -\frac{\partial}{\partial \xi} u_{n,m+1}^{\pm}, \quad F_{1,n,m}^{\pm(0)} = -\frac{\partial}{\partial \xi} u_{n,m}^{\pm},$$

$$F_{2,n,m}^{\pm(-1)} = q^2 \frac{\partial}{\partial \xi} (q^{-1} u_{1,n,m-1}^{\pm}) - 2\sigma u_{2,n,m}^{\pm}, \quad F_{2,n,m}^{\pm(1)} = -q^2 \frac{\partial}{\partial \xi} (q^{-1} u_{1,n,m+1}^{\pm}) + 2\sigma u_{3,n,m}^{\pm},$$

$$F_{2,n,m}^{\pm(0)} = -q^2 \frac{\partial}{\partial \xi} (q^{-1} u_{1,n,m}^{\pm}) + (2\sigma - 1) \frac{\partial}{\partial \xi} u_{n,m}^{\pm}.$$

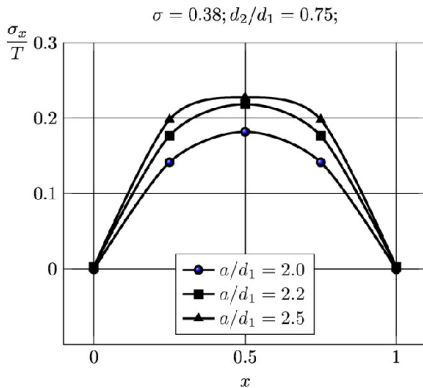


Рис. 2 – Напряжения σ_x/T на линии, соединяющей центры полостей, в зависимости от расстояния между полостями при одноосном растяжении.

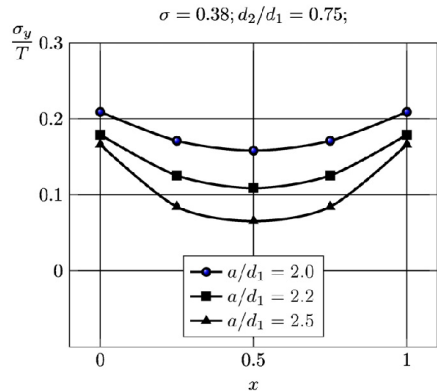


Рис. 3 – Напряжения σ_y/T на линии, соединяющей центры полостей, в зависимости от расстояния между полостями при одноосном растяжении.

Оператор системы уравнений (25) является фредгольмовым при условии пересечения граничных поверхностей.

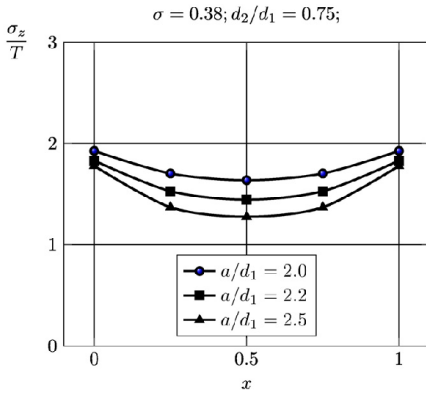


Рис. 4 – Напряжения σ_z/T на линии, соединяющей центры полостей, в зависимости от расстояния между полостями при одноосном растяжении.

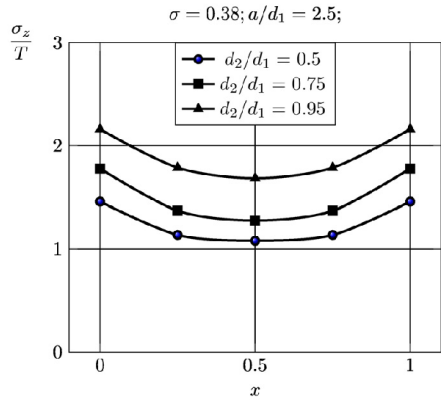


Рис. 5 – Напряжения σ_z/T на линии, соединяющей центры полостей, в зависимости от соотношения полуосей сфероидов при одноосном растяжении.

Анализ результатов. Разрешающая система решалась численно *методом редукции*. При численной реализации задачи рассмотрен материал с коэффициентом Пуассона $\sigma = 0.38$. На рисунках 2 – 4 представлены графики напряжений σ_x/T , σ_y/T и σ_z/T на линии, соединяющей центры соседних

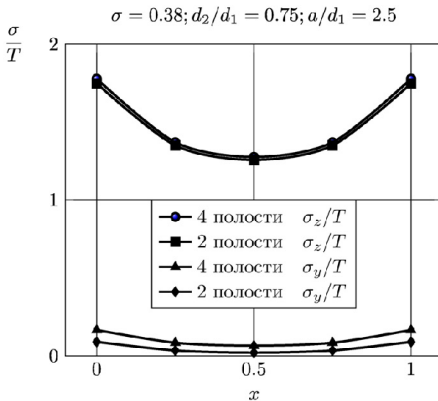


Рис. 6 – Сравнение результатов расчета для двух и четырех полостей при одноосном растяжении.

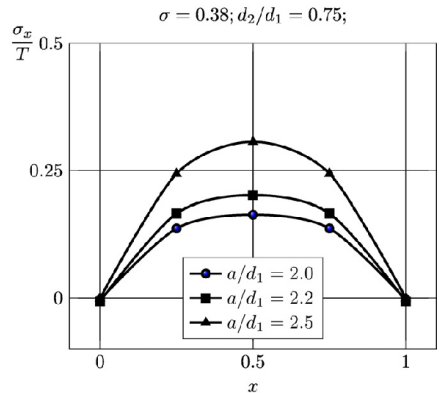


Рис. 7 – Напряжения σ_x/T на линии, соединяющей центры полостей, в зависимости от расстояния между полостями при двуосном растяжении.

полостей и расположенной параллельно оси Ox , в зависимости от относи-

тельного расстояния между полостями при одноосном растяжении пространства. Напряжения σ_y/T и σ_z/T растут с приближением полостей друг к другу, напротив, напряжения σ_x/T - убывают.

На рис. 5 представлен график напряжений σ_z/T на линии, соединяющей центры соседних полостей, в зависимости от соотношения полуосей сфероидов при одноосном растяжении. Максимальные напряжения наблю-

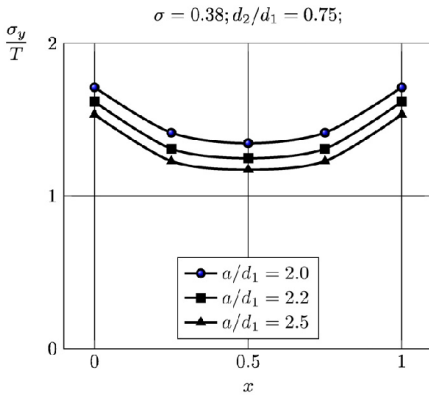


Рис. 8 – Напряжения σ_y/T на линии, соединяющей центры полостей, в зависимости от расстояния между полостями при двuosном растяжении.

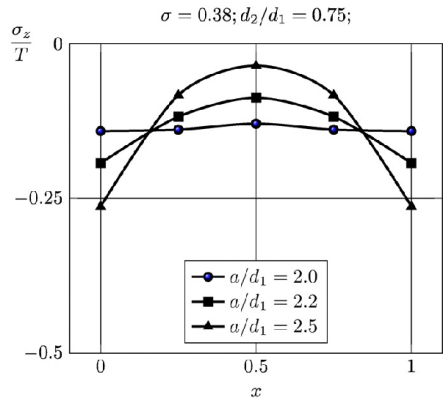


Рис. 9 – Напряжения σ_z/T на линии, соединяющей центры полостей, в зависимости от расстояния между полостями при двuosном растяжении.

даются на границах полостей, и они растут при увеличении d_2/d_1 .

На рис. 6 приведен график сравнения результатов расчета для двух и четырех полостей для напряжений σ_y/T и σ_z/T . Наблюдается незначительное отличие результатов в этих случаях для расчетной геометрической конфигурации.

На рис. 7 – 9 приведены графики напряжений σ_x/T , σ_y/T и σ_z/T на линии, соединяющей центры соседних полостей, расположенной параллельно оси Ox , в зависимости от относительного расстояния между полостями при двuosном растяжении пространства. Определяющими являются напряжения σ_y/T .

Выводы. В работе исследовано напряженно-деформированное состояние пористого материала. В отличие от известных работ в этой области рассмотренная задача обладает неосесимметричной и существенно многосвязной геометрией. Исследования показали высокую эффективность предложенного аналитико-численного метода. Достоверность полученных результатов подтверждается их сравнением с результатами решения аналогичной задачи в случае двух сфероидальных полостей. Выявлены особенности в

распределении напряжений на линии, соединяющей центры соседних полостей при одноосном и двуосном растяжении упругого материала.

Список литературы: 1. Федотов А. Ф. Приложение модели деформирования пористых материалов к расчёту эффективных упругих модулей зернистых композитов // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2011. – Т. 17. – С. 3 – 18. 2. Khoroshun L. P. Mathematical models and methods of the mechanics of stochastic composites // International Applied Mechanics. – 2000. – V. 36, No 10. – P. 1284 – 1316. 3. Вольперт В. С., Олегин В. С. Осесимметричное напряжённое состояние пространства, содержащего систему сферических полостей или включений // Новосиб. ин-т инж. ж.-д. транспорта. - 1977. – 19 с. - Деп. в ВИНТИ. №3266 - 77. 4. Олегин И. П. Осесимметричное напряжённое состояние в трансверсально-изотропной упругой среде с двумя жесткими эллипсоидальными включениями // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2002. - Т. V, № 1(9). – С. 127 - 132. 5. Олегин И. П. Решение пространственной задачи теории упругости для трансверсально-изотропного тела, содержащего периодическую систему эллипсоидальных полостей // Сибирский журнал индустриальной математики. – 1999. - Т. II, № 1. – С. 117 - 122. 6. Гаршин О. К., Комар Л. А. Прогнозирование прочности эластомерных зернистых композитов в зависимости от размеров частиц наполнителя // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2003. - Т. 9, № 3. – С. 278 – 286. 7. Капишевский А. А., Копытская Н. П., Ломонос Л. Н. Осесимметричное напряжённое состояние шара с неконцентрической шаровой полостью // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1980. - №9. – С. 50 - 55. 8. Ломонос Л. Н., Первая основная задача об осесимметричном напряжённом состоянии пространства с двумя сферическими полостями // Мат. физика и нелинейная механика. – 1990. - №13. – С. 51 - 56. 9. Tsuchida E. On the axisymmetric problem of elasticity theory for an infinite elastic solid containing two spherical inclusions / E. Tsuchida, I. Nakahara, M. Kodama // Bull. JSME. – 1980. – V. 23, №181. – С. 1072 - 1080. 10. Николаев А. Г., Танчик Е. А. Математическая модель напряженно-деформированного состояния пористого материала // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н. Е. Жуковского «ХАИ». – 2009. - Т. 2 (58). – С. 48 - 58. 11. Николаев А. Г., Танчик Е. А. Локальная математическая модель зернистого композиционного материала // Вестн. Харьк. Нац. ун-та им. В. Н. Каразина. Сер. Математика, прикладная математика и механика. - 2010. - Т. 922. – С. 4 - 19. 12. Николаев А. Г. Теоремы сложения решений уравнения Ламе. - Х.: Харьк. авиац. ин-т, 1993. – 109 с. - Деп. в ГНТБ Украины 21.06.93, № 1178 - Ук 93.

Поступила в редколлегию 27.02.2014

УДК 539.3

Напряжённое состояние пористого материала в области между четырьмя сфероидальными порами / А. Г. Николаев, Е. А. Танчик // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2014. – №6 (1049). – С. 150 – 160. Бібліогр.: 12 назв. – ISSN 2222-0631.

Досліджується напружений стан пружного пористого матеріалу, в якому пори моделюються чотирма сфероїдальними порожнинами, центри яких розташовані у вершинах квадрата. Матеріал знаходиться під дією одноосного або двоосного розтягування, прикладеного на нескінченності, а пори вільні від навантаження. Поле переміщень будується за допомогою узагальненого методу Фур'є. Наведено чисельний аналіз розподілу напружень на лініях, що з'єднують центри пор, залежно від геометричних параметрів задачі.

Ключові слова: узагальнений метод Фур'є, пористий матеріал, напружено-деформований стан, сфероїдальна порожнина, теореми додавання.

UDC 539.3

Stress state of porous material in the domain between four spheroidal pores / A. G. Nikolaev, E. A. Tanchik // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2014. – №6 (1049). – pp. 150 – 160. Bibliog.: 12 titles. – ISSN 2222-0631.

Stress state of elastic porous material in which pores are modelled by four spheroidal cavities

whose centers are located in the corners of a square is investigated. The material is subjected to uniaxial or biaxial tension applied at the infinity, and the pores are free from load. Displacement field is constructed using the generalized Fourier method. The numerical analysis of the stress distribution on the lines connecting the centers of pores depending on the geometric parameters of the problem is carried out.

Key words: generalized Fourier method, porous material, the stress-strain state, spheroidal cavity, addition theorems.

УДК 534.1

В.П. ОЛЬШАНСКИЙ, д-р. физ.-мат. наук, проф., ХНТУСХ, Харьков;
С.В. ОЛЬШАНСКИЙ, канд. физ.-мат. наук, доц., НТУ «ХПИ»

ВБК – ПРИБЛИЖЕНИЕ В РАСЧЁТАХ КОЛЕБАНИЙ ОСЦИЛЛЯТОРА ЛИНЕЙНО-ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ С СУХИМ ТРЕНИЕМ

Методом ВБК построены приближённые формулы для вычисления амплитуд затухающих колебаний осциллятора линейно-переменной массы с сухим трением. Проведено сравнение результатов, полученных без учёта реактивной силы с помощью предложенных формул и путём численного интегрирования исходного дифференциального уравнения движения. Подтверждена состоятельность ВБК – метода в рассматриваемом классе задач.

Ключевые слова: осциллятор, линейно-переменная масса, сухое трение, ВБК – метод.

Введение. В технике часто используют механизмы со звеньями, масса или жёсткость которых изменяется в процессе работы механизма. Динамическому расчёту таких механизмов посвящены монографии [1], [2], в которых рассматривали варианты монотонного (непериодического) изменения параметров звеньев во времени. Это направление исследований получило мощное развитие в общей теории механических колебаний [3], [4], [5], [6]. В этих публикациях разрабатывали и использовали различные, в первую очередь асимптотические, методы аналитического решения дифференциальных уравнений движения с переменными коэффициентами. В дополнение к ним, здесь предлагается для расчёта колебаний осциллятора переменных параметров использовать *ВБК-метод* [7], который давно распространён в физических исследованиях [8]. В механике этим методом решены различные задачи в [9], [10].

Целью данной статьи является вывод и апробация приближённых формул для расчёта амплитуд затухающих колебаний системы с одной степенью свободы при действии силы сухого трения.

Средством достижения цели выбран ВБК – метод. Аналогично [1], далее различаем варианты силы трения с постоянной амплитудой и с амплитудой, пропорциональной массе осциллятора.