

проверка ее адекватности [Текст] / Д.Ю. Усатый, В.Р. Гасияров, А.А. Радионов // Известия вузов. Электромеханика. — 2011. — №4 — С. 78-81.

3. Радионов, А.А. Использование мощных электроприводов на базе активных двунаправленных преобразователей в составе промышленной Smart Grid системы / А.А. Радионов, А.С. Маклаков, А.Д. Чернышев // Вестник ЮУрГУ. Серия «Энергетика». — 2015. — Т. 15, № 1. — С. 74-81. DOI: 10.14529/power150109

4. Выдрин, В.Н. Динамика прокатных станов [Текст]. — Свердловск: Metallurgizdat, 1960. — 256 с.

5. Гасияров, В.Р. Математическое описание главного электропривода толстолистого стана 5000 горячей прокатки [Текст] / В.Р. Гасияров, Е.А. Маклакова // Электротехника: сетевой электронный научный журнал. — 2015. — Т.2, №3. — С. 62-66.

6. Адамия, Р.Ш. Основы рационального проектирования металлургических машин [Текст] / Р.Ш. Адамия, В.М. Лобода — М.: Металлургия, 1984. — 128 с.

7. Вольдек, А.И. Электрические машины [Текст]: учебник для вузов. — Ленинград: Энергия, 1974. — 840 с

УДК 681.5

АВТОМАТИЗАЦИЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ

В.Д. Дмитриенко *, А.Ю. Заковоротный *

** Национальный технический университет "Харьковский политехнический институт", г. Харьков, Украина*

arcade@i.ua

Аннотация

Для пакета моделирования Matlab разработаны программные средства автоматизирующие аналитические преобразования геометрической теории управления в процессе линеаризации математических моделей. Получена линейная математическая модель движения дизель-поезда в форме Бруновского, которая учитывает параллельную работу четырех тяговых асинхронных двигателей.

Ключевые слова: автоматизация аналитических преобразований, геометрическая теория управления, форма Бруновского, линейная математическая модель движения дизель-поезда.

AUTOMATION ANALYTICAL TRANSFORMATIONS OF GEOMETRIC CONTROL THEORY

*V.D. Dmitrienko **, *A.Y. Zakovorotniy **

** National Technical University "Kharkov Polytechnic Institute",
Kharkov, Ukraine
arcade@i.ua*

Abstract

For simulation package Matlab developed software tools automate analytical transformations of geometric control theory in the process of linearization mathematical models. A linear mathematical model of diesel-train in the form of Brunovsky, which allows for the parallel work four asynchronous traction motors.

Keywords: automation of analytical transformations, geometric control theory, form Brunovsky, linear mathematical model of diesel-train.

Постановка проблемы и анализ литературы

Трудности анализа и синтеза нелинейных систем управления общеизвестны. Поэтому в течении десятилетий ведется поиск более мощных теоретических средств, чем существующие, для решения фундаментальных проблем теории управления. Одним из таких средств является современная геометрия, в частности, геометрический подход к теории управления на основе теории групп и дифференциальной геометрии. Успехи этого подхода привели к интенсивной разработке нового научного направления – единой геометрической теории управления [1, 2]. Существенное преимущество нового научного направления состоит не только в создании математического аппарата, позволяющего описывать системы управления в пространствах состояний более общих, чем линейные пространства, что необходимо при решении целого ряда задач управления [1, 2], но и в реальной осуществимости эквивалентных преобразований нелинейных систем к линейным. Такие преобразования открывают возможности для использования при решении задач разработки нелинейных систем управления методов и средств теории линейных систем [1, 3]. При этом линеаризация нелинейной системы выполняется не с помощью классического разложения в ряд Тейлора, а на основе использования линейной обратной связи в пространстве "вход – выход" или "вход – состояние". Теоретически линеаризация с помощью обратной связи позволяет преобразовать к линейному виду широкий класс нелинейных систем

управления [1 – 8]. Однако в этом случае необходимо выполнять трудоемкие аналитические преобразования, которые не автоматизированы ни в одном из известных пакетов моделирования и которые стали причиной разрыва между теоретическими результатами геометрической теории управления и решением практических задач синтеза систем управления [9, 10].

Цель статьи

Разработка программных средств для универсального пакета моделирования Matlab, позволяющих автоматизировать сложные аналитические преобразования, необходимые в геометрической теории управления при получении из нелинейных математических моделей объектов эквивалентных линейных моделей в форме Бруновского. Демонстрация работоспособности программного обеспечения при синтезе линейной математической модели в форме Бруновского, описывающей процесс движения дизель-поезда.

Основной раздел

В процессе разработки программного обеспечения согласно описанного в работе [10] алгоритма синтезированы функции, которые выполняют следующие действия: формируют векторные поля объектов по их моделям, проверяют условия инволютивности, вычисляют производные Ли, вычисляют преобразования переменных расширенной модели объекта в переменные в форме Бруновского, а также выполняют интегрирование системы дифференциальных уравнений. Продемонстрируем эти функции в процессе синтеза линейной математической модели дизель-поезда с четырьмя тяговыми асинхронными двигателями.

Движение дизель-поезда в режиме тяги и в режиме перехода от тяги к буксованию может быть описано следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= k_1 V ; \quad \frac{dV}{dt} = \sum_{q=1}^4 (k_2^q \mu^q (\Psi_{ur}^q i_{vs}^q - \Psi_{vr}^q i_{us}^q)) - k_3 - k_4 V - k_5 V^2 ; \\ \frac{di_{us}^q}{dt} &= \alpha^q \beta^q \Psi_{ur}^q - \gamma^q i_{us}^q + \frac{k_6 p \beta^q}{r^q} V \Psi_{vr}^q + \frac{1}{\sigma^q L_s^q} u_{us}^q, \quad q = \overline{1, 4}; \\ \frac{di_{vs}^q}{dt} &= \alpha^q \beta^q \Psi_{vr}^q - \gamma^q i_{vs}^q + \frac{k_6 p \beta^q}{r^q} V \Psi_{ur}^q + \frac{1}{\sigma^q L_s^q} u_{vs}^q, \quad q = \overline{1, 4}; \\ \frac{d\Psi_{ur}^q}{dt} &= -\alpha^q \Psi_{ur}^q - \frac{k_6 p}{r^q} V \Psi_{vr}^q + \alpha^q L_m^q i_{us}^q, \quad q = \overline{1, 4}; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\frac{d\Psi_{vr}^q}{dt} = -\alpha^q \Psi_{vr}^q - \frac{k_6 p}{r^q} V \Psi_{ur}^q + \alpha^q L_m^q i_{vs}^q, \quad q = \overline{1, 4},$$

где S – расстояние, пройденное от начала перегона; t – время; $k_1, k_2^1, k_2^2, k_2^3, k_2^4, k_3, \dots, k_6$ – постоянные коэффициенты; V – скорость движения состава; $\mu^q = pL_m^q / J^q L_r^q$; q – число двигателей; p – число пар полюсов статора у каждого двигателя; L_m^q ($q = \overline{1, 4}$) – индуктивность контура намагничивания (взаимная индуктивность); J^q ($q = \overline{1, 4}$) – приведенный момент инерции двигателя; L_r^q, L_s^q ($q = \overline{1, 4}$) – полные индуктивности, соответственно ротора и статора; Ψ_{ur}^q, Ψ_{vr}^q ($q = \overline{1, 4}$) – потокосцепления по осям u и v роторов тяговых двигателей; i_{vs}^q, i_{us}^q ($q = \overline{1, 4}$) – статорные токи двигателей по осям u и v ; $\alpha^q = 1/T_r^q$; T_r^q ($q = \overline{1, 4}$) – постоянная времени ротора q -го двигателя; $\beta^q = L_m^q / \sigma^q L_s^q L_r^q$; $\sigma^q = 1 - (L_m^q)^2 / L_s^q L_r^q$ ($q = \overline{1, 4}$) – полный коэффициент рассеяния q -го двигателя; $\gamma^q = R_r^q (L_m^q)^2 / \sigma^q L_s^q (L_r^q)^2 + R_s^q / \sigma^q L_s^q$; R_r^q, R_s^q ($q = \overline{1, 4}$) – активные сопротивления роторных и статорных обмоток двигателей; r^q ($q = \overline{1, 4}$) – радиус колеса q -го двигателя; u_{us}^q, u_{vs}^q ($q = \overline{1, 4}$) – статорные напряжения q -го двигателя по осям u и v ; $k_6 V / r^q = \omega^q$ ($q = \overline{1, 4}$); ω^q – частота вращения ротора q -го двигателя.

Обозначив $x_1 = S$; $x_2 = V$; $x_3 = \Psi_{ur}^1$; $x_4 = i_{us}^1$; $x_5 = \Psi_{vr}^1$; $x_6 = i_{vs}^1$; $x_7 = \Psi_{ur}^2$; $x_8 = i_{us}^2$; $x_9 = \Psi_{vr}^2$; $x_{10} = i_{vs}^2$; $x_{11} = \Psi_{ur}^3$; $x_{12} = i_{us}^3$; $x_{13} = \Psi_{vr}^3$; $x_{14} = i_{vs}^3$; $x_{15} = \Psi_{ur}^4$; $x_{16} = i_{us}^4$; $x_{17} = \Psi_{vr}^4$; $x_{18} = i_{vs}^4$; $a_{11} = k_1$; $a_{21} = a_{22} = k_2^1 \mu^1$; $a_{23} = a_{24} = k_2^2 \mu^2$; $a_{25} = a_{26} = k_2^3 \mu^3$; $a_{27} = a_{28} = k_2^4 \mu^4$; $a_{29} = k_3$; $a_{210} = k_4$; $a_{211} = k_5$; $a_{31} = a_{51} = -\alpha^1$; $a_{32} = a_{52} - k_6 p / r^1$; $a_{33} = a_{53} = \alpha^1 L_m^1$; $a_{41} = a_{61} = -\gamma^1$; $a_{71} = a_{91} = -\alpha^2$; $a_{72} = a_{92} = -\frac{k_6 p}{r^2}$; $a_{73} = a_{93} = \alpha^2 L_m^2$; $a_{81} = a_{101} = -\gamma^2$; $a_{111} = a_{131} = -\alpha^3$; $a_{112} = a_{132} = -k_6 p / r^3$; $a_{113} = a_{133} = \alpha^3 L_m^3$; $a_{121} = a_{141} = -\gamma^3$; $a_{151} = a_{171} = -\alpha^4$;

$$a_{152} = a_{172} = -k_6 p / r^4 ; \quad a_{153} = a_{173} = \alpha^4 L_m^4 ; \quad a_{161} = a_{181} = -\gamma^4 ; \quad U_{2q-1} = \\ = \alpha^q \beta^q \Psi_{ur}^q + \frac{k_6 p \beta^q V \Psi_{vr}^q}{r^q} + \frac{u_{us}^q}{\sigma^q L_s^q}, \quad U_{2q} = \alpha^q \beta^q \Psi_{vr}^q + \frac{k_6 p \beta^q V \Psi_{ur}^q}{r^q} + \frac{u_{vs}^q}{\sigma^q L_s^q},$$

$q = \overline{1, 4}$, из системы уравнений (1) получим следующую модель, описывающую движение дизель-поезда по железнодорожному перегону:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11} x_2 = f_1; \\ \frac{dx_2}{dt} &= \sum_{i=0}^3 a_{2(1+2i)} x_{3+4i} x_{6+4i} - \sum_{i=0}^3 a_{2(2+2i)} x_{4+4i} x_{5+4i} - \\ &\quad - a_{29} - a_{210} x_2 - a_{211} x_2^2 = f_2; \\ \frac{dx_3}{dt} &= a_{31} x_3 + a_{32} x_2 x_5 + a_{33} x_4 = f_3; \\ \frac{dx_{2+2j}}{dt} &= a_{(2+2j)1} x_{2+2j} + U_j = f_{2+2j} + U_j, \quad j = \overline{1, 8}; \\ \frac{dx_5}{dt} &= a_{51} x_5 + a_{52} x_2 x_3 + a_{53} x_6 = f_5; \quad \frac{dx_7}{dt} = a_{71} x_7 + a_{72} x_2 x_9 + a_{73} x_8 = f_7; \\ \frac{dx_9}{dt} &= a_{91} x_9 + a_{92} x_2 x_7 + a_{93} x_{10} = f_9; \\ \frac{dx_{11}}{dt} &= a_{111} x_{11} + a_{112} x_2 x_{13} + a_{113} x_{12} = f_{11}; \\ \frac{dx_{13}}{dt} &= a_{131} x_{13} + a_{132} x_2 x_{11} + a_{133} x_{14} = f_{13}; \\ \frac{dx_{15}}{dt} &= a_{151} x_{15} + a_{152} x_2 x_{17} + a_{153} x_{16} = f_{15}; \\ \frac{dx_{17}}{dt} &= a_{171} x_{17} + a_{172} x_2 x_{15} + a_{173} x_{18} = f_{17}. \end{aligned} \tag{2}$$

С системой дифференциальных уравнений (2) связаны следующие векторные поля:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(\mathbf{x}) &= |f_1, f_2, \dots, f_{18}|^T, \\ \mathbf{Y}_1 &= |0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0|^T, \\ &\dots\dots\dots \\ \mathbf{Y}_8 &= |0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1|^T, \end{aligned}$$

которые в пакете Matlab могут быть заданы следующим образом:

```
f1 = sym('a11 * x2');
f2 = sym('a21 * x3 * x6 - a22 * x5 * x4 + a23 * x7 * x10 - a24 * x9 *
x8 + a25 * x11 * x14 - a26 * x13 * x12 + a27 * x15 * x18 - a28 * x17
* x16 - a29 - a210 * x2 - a211 * x2^2');
f3 = sym('a31 * x3 + a32 * x2 * x5 + a33 * x4');
.....
f16 = sym('a161 * x16');
f17 = sym('a171 * x17 + a172 * x2 * x15 + a173 * x18');
f18 = sym('a181 * x18');
X = [f1; f2; f3; f4; f5; f6; f7; f8; f9; f10; f11; f12; f13; f14; f15; f16;
f17; f18];
Y1 = [0; 0; 0; sym('1'); 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0];
Y2 = [0; 0; 0; 0; 0; sym('1'); 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0];
.....
Y8 = [0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; sym('1')];
x = [sym('x1') 'x2' 'x3' 'x4' 'x5' 'x6' 'x7' 'x8' 'x9' 'x10' 'x11' 'x12' 'x13'
'x14' 'x15' 'x16' 'x17' 'x18'];
```

Система уравнений (2) может быть преобразована к форме Бруновского только в случае, если инволютивны распределения $M^0 = \text{span}\{Y_1, Y_2, \dots, Y_8\}$, $M^1 = \text{span}\{Y_1, Y_2, \dots, Y_8, L_X Y_1, \dots, L_X Y_8\}$ и M^2 для этой системы [2], где $\text{span}\{Y_1, Y_2, \dots, Y_8\}$ – линейная оболочка векторов Y_1, Y_2, \dots, Y_8 , $L_X Y_k$ ($k = \overline{1, 8}$) – производные Ли вдоль векторного поля X векторных полей Y_k ($k = \overline{1, 8}$).

Для проверки возможности преобразования широкого класса нелинейных систем управления к канонической форме Бруновского была разработана функция *involutivity*(M, x), проверяющая выполнение условий инволютивности последовательности распределений, которая возвращает значение "1", если для распределения M условия инволютивности выполняются и значение "0" – если нет. Функция проверки условий инволютивности представляет собой следующую последовательность команд:

```
function involutive = involutivity(S, x)
saved_rank = rank(S); lenght = size(S, 2);
for i = 1 : (lenght - 1)
for j = (i + 1) : lenght
S = [S diffie(S(:,i), S(:,j), x)]; end end
involutive = saved_rank == rank(S); end
```

Проверка инволютивности распределения M^0 в пакете моделирования Matlab с использованием описанной выше функции осуществляется следующим образом:

```
M0 = [Y1, Y2, Y3, Y4, Y5, Y6, Y7, Y8];
involutive = involutivity(M0, x);
>> involutive = 1
```

Поскольку векторные поля Y_i ($i = \overline{1, 8}$) постоянны, то распределение M^0 – инволютивно и размерность распределения $\dim M^0 = 8$.

Проанализируем распределение M^1 , для этого сначала осуществим вычисление производных Ли векторных полей Y_k ($k = \overline{1, 8}$) вдоль векторного поля X с помощью разработанной функции $Dif_Li(X, Y, x, N)$, которая возвращает N -ю производную Ли вдоль векторного поля X векторного поля Y , по элементам вектора x . Функция вычисления производной Ли представляет собой следующую последовательность команд:

```
function U = Dif_Li(X, Y, variables, N)
U(:, 1) = sym(Y); for i = 2 : N+2
U(:, i) = diffli(X, U(:, i - 1), variables); end end
```

Проверка инволютивности распределения M^1 в пакете моделирования Matlab с использованием функций Dif_Li и $involutivity$ осуществляется следующим образом:

```
C1_1 = Dif_Li(X, Y1, x, 2); M1_1 = C1_1(:, 1 : (size(C1_1, 2) - 1));
C1_2 = Dif_Li(X, Y2, x, 2); M1_2 = C1_2(:, 1 : (size(C1_2, 2) - 1));
.....
C1_8 = Dif_Li(X, Y8, x, 2); M1_8 = C1_8(:, 1 : (size(C1_8, 2) - 1));
M1=[M1_1(:,1), M1_2(:,1), M1_3(:,1), M1_4(:,1), M1_5(:,1),
M1_6(:,1), M1_7(:,1), M1_8(:,1), M1_1(:,2), M1_2(:,2), M1_3(:,2),
M1_4(:,2), M1_5(:,2), M1_6(:,2), M1_7(:,2), M1_8(:,2)];
involutive = involutivity(M1, x);
>> involutive = 0
```

Проверка условий инволютивности показывает, что распределение M^1 не является инволютивным, однако проверка всех его подраспределений $M_k^1 = \text{span}\{Y_1, Y_2, \dots, Y_8, L_X Y_k\}$, $k = \overline{1, 8}$, показывает, что они являются инволютивными:

```
M11=[M1_1(:,1), M1_2(:,1), M1_3(:,1), M1_4(:,1), M1_5(:,1),
M1_6(:,1), M1_7(:,1), M1_8(:,1), M1_1(:,2)];
```

```
involutive = involutivity(M11, x);
>>involutive = 1
```

```
.....
M18=[M1_1(:,1), M1_2(:,1), M1_3(:,1), M1_4(:,1), M1_5(:,1),
M1_6(:,1), M1_7(:,1), M1_8(:,1), M1_8(:,2)];
involutive = involutivity(M18, x);
>>involutive = 1
```

Поэтому дополнительные переменные или интеграторы можно вводить в любой канал управления. Однако введение 1, 2, ..., 6 или 7 интеграторов в любые каналы не позволяет решить проблему получения инволютивного распределения M^1 для расширенной системы. Распределение M^1 становится инволютивным только при введении одного интегратора в каждый канал объекта управления.

Для расширенной модели объекта управления введем следующие обозначения: $y_i = x_i$, $i = \overline{1, 4}$; $y_{2+3j} = U_j$, $dy_{2+3j}/dt = U_j^*$, $j = \overline{1, 8}$; $y_6 = x_5$; $y_7 = x_6$; $y_9 = x_7$; $y_{10} = x_8$; $y_{12} = x_9$; $y_{13} = x_{10}$; $y_{15} = x_{11}$; $y_{16} = x_{12}$; $y_{18} = x_{13}$; $y_{19} = x_{14}$; $y_{21} = x_{15}$; $y_{22} = x_{16}$; $y_{24} = x_{17}$; $y_{25} = x_{18}$.

В этих обозначениях расширенная модель объекта записывается таким образом:

$$\frac{dy_1}{dt} = a_{11}y_2 = \Phi_1;$$

$$\frac{dx_2}{dt} = a_{21}y_3y_7 - a_{22}y_4y_6 + a_{23}y_9y_{13} - a_{24}y_{10}y_{12} + a_{25}y_{15}y_{19} - a_{26}y_{16}y_{18} +$$

$$+ a_{27}y_{21}y_{25} - a_{28}y_{22}y_{24} - a_{29} - a_{210}y_2 - a_{211}y_2^2 = \Phi_2;$$

$$\frac{dy_3}{dt} = a_{31}y_3 + a_{32}y_2y_6 + a_{33}y_4 = \Phi_3;$$

$$\frac{dy_{1+3j}}{dt} = a_{(2+2j)1}y_{1+3j} + y_{2+3j} = \Phi_{1+3j}, \quad j = \overline{1, 8};$$

$$\frac{dy_{2+3j}}{dt} = U_j^*, \quad \Phi_{2+3j} = 0, \quad j = \overline{1, 8}; \quad \frac{dy_6}{dt} = a_{51}y_6 + a_{52}y_2y_3 + a_{53}y_7 = \Phi_6;$$

$$\frac{dy_9}{dt} = a_{71}y_9 + a_{72}y_2y_{12} + a_{73}y_{10} = \Phi_9;$$

$$\frac{dy_{12}}{dt} = a_{91}y_{12} + a_{92}y_2y_9 + a_{93}y_{13} = \Phi_{12};$$


```

M0_new=[Y1_new, Y2_new, Y3_new, Y4_new, Y5_new, Y6_new,
Y7_new, Y8_new];
involutive = involutivity(M0_new, y_new);
>> involutive = 1

```

Так как производные Ли вдоль векторного поля Y векторных полей Y_k^* ($k = \overline{1, 8}$) являются постоянными векторами, то распределение M^{1*} для расширенной системы является инволютивным.

Проверка выполнения условий инволютивности распределения $M^{2*} = \text{span}\{Y_1^*, Y_2^*, \dots, Y_8^*, L_Y Y_1^*, \dots, L_Y Y_8^*, L_Y^2 Y_1^*, L_Y^2 Y_2^*, \dots, L_Y^2 Y_8^*\}$, где $L_Y^2 Y_k$ ($k = \overline{1, 8}$) – производные Ли второго порядка, показывает, что оно не является инволютивным:

```

M2_new = [M1_1_new(:,1), M1_2_new(:,1), M1_3_new(:,1),
.....
M1_5_new(:,3), M1_6_new(:,3), M1_7_new(:,3), M1_8_new(:,3)];
involutive = involutivity(M2_new, y_new);
>> involutive = 0

```

Однако инволютивными являются всех подраспределения $M_k^{2*} = \text{span}\{Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_8, L_Y Y_1^*, L_Y Y_2^*, L_Y Y_3^*, \dots, L_Y Y_8^*, L_Y^2 Y_k^*\}$, $k = \overline{1, 8}$, распределения M^{2*} . Этого оказывается достаточно для осуществления динамической линеаризации и получения системы линейных дифференциальных уравнений в форме Бруновского. На основании теоремы о линейных эквивалентах для нелинейных аффинных систем с m управлениями [2], получим, что каноническая форма Бруновского имеет 8-м клеток, а индекс управляемости k_{\max} для данного объекта равен 8. Математическая модель объекта управления в форме Бруновского в пространстве "вход – состояние" имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{dz_i}{dt} &= z_{i+1}, \quad i = \overline{1, 26}, \quad i \neq 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26; \\ \frac{dz_{(2+3q)}}{dt} &= v_q, \quad q = \overline{1, 8}, \end{aligned} \quad (3)$$

где v_j ($j = \overline{1, 8}$) – управления.

Поскольку модель объекта в форме Бруновского имеет 8-м клеток, то необходимо определить 8-м функций $T_j(y)$ ($j = \overline{1, 8}$), преобразующих переменные расширенной модели объекта управления в переменные модели в форме Бруновского:

$$z_1 = T_1(\mathbf{y}); z_{3+k} = T_l(\mathbf{y}), l = (3+k)/3, k = 3, 6, 9, \dots, 21.$$

Методика определения этих функций известна [2, 10, 11]. В данном случае они являются однокомпонентными составляющими вектора $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_{26})$. Из этих функций путем последовательного дифференцирования вдоль соответствующего векторного поля $\mathbf{Y}^* = \mathbf{Y} + U_1 \mathbf{Y}_1^* + U_2 \mathbf{Y}_2^* + \dots + U_8 \mathbf{Y}_8^*$ можно получить выражения для определения соответственно z_2, z_3, z_4, z_5 (из функции $T_1(\mathbf{y})$), z_7, z_8 (из функции $T_2(\mathbf{y})$), z_{10}, z_{11} (из функции $T_3(\mathbf{y})$), z_{13}, z_{14} (из функции $T_4(\mathbf{y})$), z_{16}, z_{17} (из функции $T_5(\mathbf{y})$), z_{19}, z_{20} (из функции $T_6(\mathbf{y})$), z_{22}, z_{23} (из функции $T_7(\mathbf{y})$), z_{25}, z_{26} (из функции $T_8(\mathbf{y})$). В качестве примера рассмотрим получение зависимостей для определения z_2, z_3, z_4, z_5 с помощью функции $T_1(\mathbf{y})$.

Для вычисления функций перехода от переменных расширенной нелинейной модели объекта управления к переменным модели в форме Бруновского применялась специально разработанная для этого функция *brunovsky*(X, Y, T, x, N), которая дифференцируя функцию T вдоль векторных полей X и Y , по элементам вектора x , возвращает для каждой клетки формы Бруновского массив из N выражений связывающих переменные в линейной и нелинейной моделях, а также новое управление для соответствующей клетки линейной модели в форме Бруновского. Функция *brunovsky* представляет собой следующую последовательность команд:

```
function [Z, V] = brunovsky(X, Y, T, x, N)
Z(1, 1) = T;
for i = 2 : N
Z(i, 1) = diffvec(Z(i-1, 1), x, 1) * X; end
V = diffvec (Z(N, 1), x, 1) * X; end
```

Для исследуемого объекта управления имеем: $T_1(\mathbf{y}) = y_1$, поэтому $z_1 = y_1$.

```
T1 = [sym('y1')];
[Z1_2_3_4_5, V1] = brunovsky(Y_new, [Y1_new], T1, y_new, 5);
Z1_2_3_4_5 = simple(Z1_2_3_4_5)
```

Дифференцируя функцию $T_1(\mathbf{y})$ вдоль векторного поля \mathbf{Y}^* и учитывая, что z_2, z_3, z_4 и их производные не зависят от управлений, получим функции перехода к канонической форме Бруновского:

$$\begin{aligned}
z_2 &= \frac{dz_1}{dt} = \mathbf{L}_{\mathbf{Y}^*} T_1(\mathbf{y}) = \mathbf{L}_{\mathbf{Y}} T_1(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{20} \frac{\partial T_1(\mathbf{y})}{\partial y_i} \varphi_i = a_{11} y_2; \\
z_3 &= \frac{dz_2}{dt} = \mathbf{L}_{\mathbf{Y}^*} (\mathbf{L}_{\mathbf{Y}} T_1(\mathbf{y})) = \mathbf{L}_{\mathbf{Y}} (a_{11} y_2) = \sum_{i=1}^{20} \frac{\partial (\mathbf{L}_{\mathbf{Y}} T_1(\mathbf{y}))}{\partial y_i} \varphi_i = a_{11} \Phi_2 = \\
&= a_{11} (a_{21} y_3 y_7 - a_{22} y_6 y_4 + a_{23} y_9 y_{13} - a_{24} y_{12} y_{10} + a_{25} y_{15} y_{19} - a_{26} y_{18} y_{16} + \\
&\quad + a_{27} y_{21} y_{25} - a_{28} y_{24} y_{22} - a_{29} - a_{210} y_2 - a_{211} y_2^2); \\
z_4 &= \frac{dz_3}{dt} = \mathbf{L}_{\mathbf{Y}^*} (\mathbf{L}_{\mathbf{Y}}^2 T_1(\mathbf{y})) = \mathbf{L}_{\mathbf{Y}} (a_{11} \Phi_2) = \sum_{i=1}^{20} \frac{\partial (\mathbf{L}_{\mathbf{Y}} (a_{11} \Phi_2))}{\partial y_i} \varphi_i = \\
&= a_{11} [(a_{210} + 2a_{211} y_2) \Phi_2 + a_{11} a_{25} y_{19} \Phi_{15} - a_{11} a_{26} y_{16} \Phi_{18} + a_{11} a_{27} y_{25} \Phi_{21} - \\
&\quad - a_{11} a_{28} y_{22} \Phi_{24} - a_{11} a_{21} y_7 \Phi_3 + a_{11} a_{23} y_{13} \Phi_9 - a_{11} a_{22} y_4 \Phi_6 - a_{11} a_{24} y_{10} \Phi_{12} - \\
&\quad - a_{11} a_{26} y_{18} \Phi_{16} + a_{11} a_{25} y_{15} \Phi_{19} - a_{11} a_{28} y_{24} \Phi_{22} + a_{11} a_{27} y_{21} \Phi_{25} - \\
&\quad - a_{11} a_{24} y_{12} \Phi_{10} + a_{11} a_{23} y_9 \Phi_{13} - a_{11} a_{22} y_6 \Phi_4 + a_{11} a_{21} y_3 \Phi_7]; \\
z_5 &= \frac{dz_4}{dt} = \mathbf{L}_{\mathbf{Y}^*} (\mathbf{L}_{\mathbf{Y}}^3 T_1(\mathbf{y})) = \sum_{i=1}^{10} \frac{\partial (\mathbf{L}_{\mathbf{Y}^*} (\mathbf{L}_{\mathbf{Y}}^3 T_1(\mathbf{y})))}{\partial y_i} \varphi_i.
\end{aligned}$$

Аналогичным образом задавшись значениями функций $T_2(\mathbf{y}) = y_6 = z_6$, $T_3(\mathbf{y}) = y_9 = z_9$, $T_4(\mathbf{y}) = y_{12} = z_{12}$, $T_5(\mathbf{y}) = y_{15} = z_{15}$, $T_6(\mathbf{y}) = y_{18} = z_{18}$, $T_7(\mathbf{y}) = y_{21} = z_{21}$, $T_8(\mathbf{y}) = y_{24} = z_{24}$, с помощью разработанной программы могут быть получены соотношения для определения остальных переменных модели в форме Бруновского:

$$\begin{aligned}
z_7 &= \frac{dz_6}{dt} = \mathbf{L}_{\mathbf{Y}^*} T_2(\mathbf{y}) = \mathbf{L}_{\mathbf{Y}} T_2(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{20} \frac{\partial T_2(\mathbf{y})}{\partial y_i} \varphi_i = a_{51} y_6 + a_{53} y_7 + a_{52} y_2 y_3; \\
z_8 &= \frac{dz_7}{dt} = \mathbf{L}_{\mathbf{Y}^*} (\mathbf{L}_{\mathbf{Y}} T_2(\mathbf{y})) = \mathbf{L}_{\mathbf{Y}} (a_{51} y_6 + a_{53} y_7 + a_{52} y_2 y_3) = \\
&= \sum_{i=1}^{20} \frac{\partial (a_{51} y_6 + a_{53} y_7 + a_{52} y_2 y_3)}{\partial y_i} \varphi_i = a_{51} \Phi_6 + a_{53} \Phi_7 - a_{52} y_3 \Phi_2 + a_{52} y_2 \Phi_3; \\
z_{10} &= \frac{dz_9}{dt} = \mathbf{L}_{\mathbf{Y}^*} T_3(\mathbf{y}) = \mathbf{L}_{\mathbf{Y}} T_3(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{20} \frac{\partial T_3(\mathbf{y})}{\partial y_i} \varphi_i = \\
&= a_{71} y_9 + a_{73} y_{10} + a_{72} y_2 y_{12}; \\
z_{11} &= \frac{dz_{10}}{dt} = \mathbf{L}_{\mathbf{Y}^*} (\mathbf{L}_{\mathbf{Y}} T_3(\mathbf{y})) = \sum_{i=1}^{20} \frac{\partial (a_{71} y_9 + a_{73} y_{10} + a_{72} y_2 y_{12})}{\partial y_i} \varphi_i = \\
&= a_{71} \Phi_9 + a_{73} \Phi_{10} - a_{72} y_{12} \Phi_2 + a_{72} y_2 \Phi_{12};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_{13} &= \frac{dz_{12}}{dt} = \mathbf{L}_{\mathbf{Y}^*} T_4(\mathbf{y}) = \mathbf{L}_{\mathbf{Y}} T_4(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{20} \frac{\partial T_4(\mathbf{y})}{\partial y_i} \Phi_i = \\
&= a_{91}y_{12} + a_{93}y_{13} + a_{92}y_2y_{19}; \\
z_{14} &= \frac{dz_{13}}{dt} = \mathbf{L}_{\mathbf{Y}^*} (\mathbf{L}_{\mathbf{Y}} T_4(\mathbf{y})) = \sum_{i=1}^{20} \frac{\partial (a_{91}y_{12} + a_{93}y_{13} + a_{92}y_2y_{19})}{\partial y_i} \Phi_i = \\
&= a_{91}\Phi_{12} + a_{93}\Phi_{13} - a_{92}y_9\Phi_2 + a_{92}y_2\Phi_9; \\
z_{16} &= \frac{dz_{15}}{dt} = \mathbf{L}_{\mathbf{Y}^*} T_5(\mathbf{y}) = \mathbf{L}_{\mathbf{Y}} T_5(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{20} \frac{\partial T_5(\mathbf{y})}{\partial y_i} \Phi_i = \\
&= a_{111}y_{15} + a_{113}y_{16} + a_{112}y_2y_{18}; \\
z_{17} &= \frac{dz_{16}}{dt} = \mathbf{L}_{\mathbf{Y}^*} (\mathbf{L}_{\mathbf{Y}} T_5(\mathbf{y})) = \sum_{i=1}^{20} \frac{\partial (a_{111}y_{15} + a_{113}y_{16} + a_{112}y_2y_{18})}{\partial y_i} \Phi_i = \\
&= a_{111}\Phi_{15} + a_{113}\Phi_{16} - a_{112}y_{18}\Phi_2 + a_{112}y_2\Phi_{18}; \\
z_{19} &= \frac{dz_{18}}{dt} = \mathbf{L}_{\mathbf{Y}^*} T_6(\mathbf{y}) = \mathbf{L}_{\mathbf{Y}} T_6(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{20} \frac{\partial T_6(\mathbf{y})}{\partial y_i} \Phi_i = \\
&= a_{131}y_{18} + a_{133}y_{19} + a_{132}y_2y_{15}; \\
z_{20} &= \frac{dz_{19}}{dt} = \mathbf{L}_{\mathbf{Y}^*} (\mathbf{L}_{\mathbf{Y}} T_6(\mathbf{y})) = \sum_{i=1}^{20} \frac{\partial (a_{131}y_{18} + a_{133}y_{19} + a_{132}y_2y_{15})}{\partial y_i} \Phi_i = \\
&= a_{131}\Phi_{18} + a_{133}\Phi_{19} - a_{132}y_{15}\Phi_2 + a_{132}y_2\Phi_{15}; \\
z_{22} &= \frac{dz_{21}}{dt} = \mathbf{L}_{\mathbf{Y}^*} T_7(\mathbf{y}) = \mathbf{L}_{\mathbf{Y}} T_7(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{20} \frac{\partial T_7(\mathbf{y})}{\partial y_i} \Phi_i = \\
&= a_{151}y_{21} + a_{153}y_{22} + a_{152}y_2y_{24}; \\
z_{23} &= \frac{dz_{22}}{dt} = \mathbf{L}_{\mathbf{Y}^*} (\mathbf{L}_{\mathbf{Y}} T_7(\mathbf{y})) = \sum_{i=1}^{20} \frac{\partial (a_{151}y_{21} + a_{153}y_{22} + a_{152}y_2y_{24})}{\partial y_i} \Phi_i = \\
&= a_{151}\Phi_{21} + a_{153}\Phi_{22} - a_{152}y_{24}\Phi_2 + a_{152}y_2\Phi_{24}; \\
z_{25} &= \frac{dz_{24}}{dt} = \mathbf{L}_{\mathbf{Y}^*} T_8(\mathbf{y}) = \mathbf{L}_{\mathbf{Y}} T_8(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{20} \frac{\partial T_8(\mathbf{y})}{\partial y_i} \Phi_i = \\
&= a_{171}y_{24} + a_{173}y_{25} + a_{172}y_2y_{21}; \\
z_{26} &= \frac{dz_{25}}{dt} = \mathbf{L}_{\mathbf{Y}^*} (\mathbf{L}_{\mathbf{Y}} T_8(\mathbf{y})) = \sum_{i=1}^{20} \frac{\partial (a_{171}y_{24} + a_{173}y_{25} + a_{172}y_2y_{21})}{\partial y_i} \Phi_i = \\
&= a_{171}\Phi_{24} + a_{173}\Phi_{25} - a_{172}y_{21}\Phi_2 + a_{172}y_2\Phi_{21};
\end{aligned}$$

На рис. 1 и 2 приведены процессы, полученные с помощью математических моделей (2) и (3). На рис. 1 с помощью переменных x_1 (модель (2)) и z_1 (модель (3)) показано изменение во времени пройденного дизель-поездом расстояния при разгоне состава до 60 км/ч на ровном участке железнодорожного пути. Как следует из рисунка $x_1 \equiv z_1$. На рис. 2 показаны изменения скорости дизель-поезда, полученные с помощью модели (2), переменная x_2 , и модели (3), переменная z_2 . как видно из рисунка $x_2 \equiv z_2$. Таким образом, линейная математическая модель в форме Бруновского (3) эквивалентна исходной нелинейной модели объекта (2).

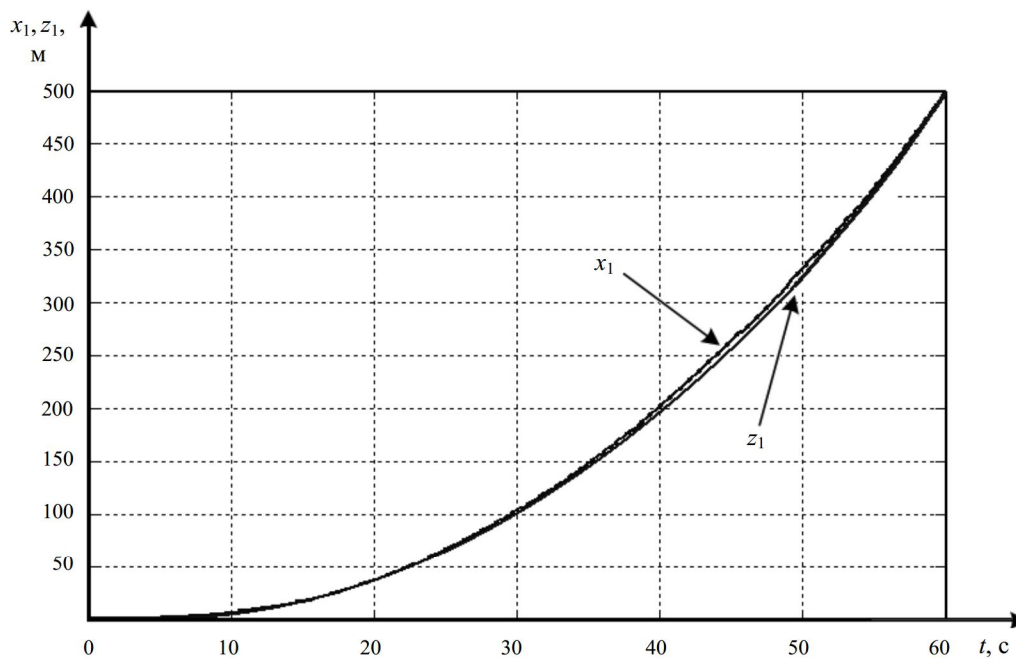


Рис. 1. Поведение переменных x_1 и z_1 во времени.

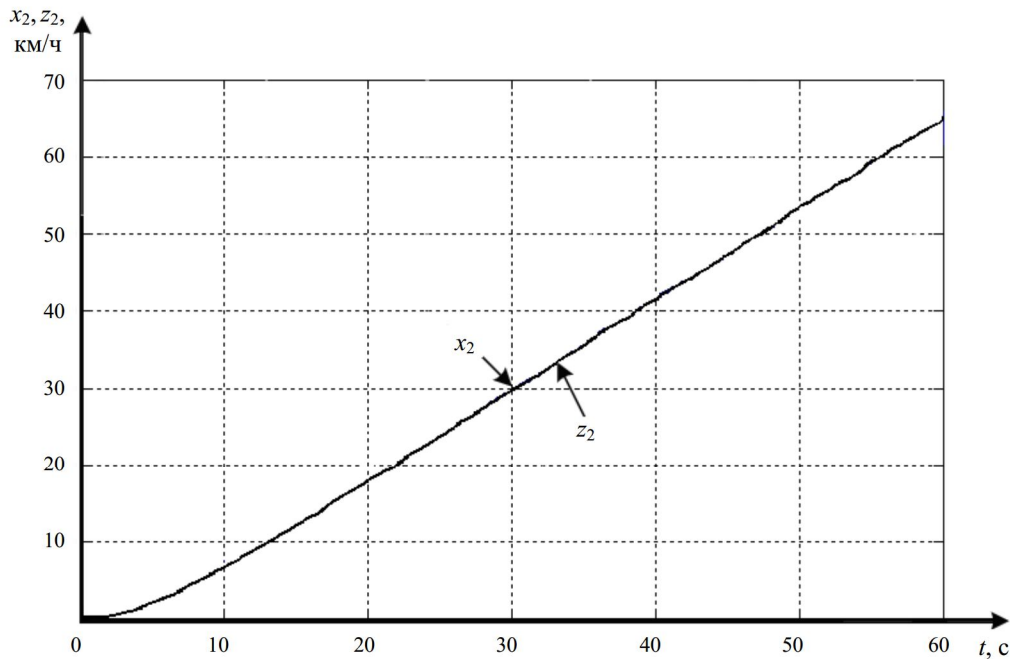


Рис. 2. Поведение переменных x_2 и z_2 во времени.

Выводы

Для универсального пакета моделирования Matlab разработано программное обеспечение, позволяющее автоматизировать сложные аналитические преобразования в геометрической теории управления при получении из нелинейных математических моделей объектов управления эквивалентных линейных моделей в форме Бруновского. С помощью разработанного программного обеспечения получена линейная математическая модель движения дизель-поезда в канонической форме Бруновского, которая учитывает параллельную работу четырёх тяговых асинхронных двигателей.

Список литературы

1. Методы классической и современной теории автоматического управления: Учебник в 5-и томах. Т. 5: Методы современной теории управления / Под ред. **К.А. Пупкова, Н.Д. Егунова**. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 784 с.
2. **Краснощёченко, В.И.** Нелинейные системы: геометрический метод анализа и синтеза / В.И. Краснощёченко, А.П. Грищенко. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 2005. – 520 с.
3. **Ким, Д.П.** Теория автоматического управления. Т.1. Линейные системы / Д.П. Ким. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 285 с.
4. **Ким, Д.П.** Теория автоматического управления. Т.2. Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы: Учебное пособие / Д.П. Ким. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 464 с.

5. **Kim, D.P.** Automatic Control. Theory Nonlinear and Multivariable System / D.P. Kim. – Seol: Harnol, 2000. – 558 p.

6. **Marino, R.** Nonlinear Control Design / R. Marino, P. Tomei. – Prentice Hall Europe, 1995. – 396 p.

7. **Краснощёченко, В.И.** Синтез регуляторов для нелинейных систем, приводимых к канонической форме Бруновского / В.И. Краснощёченко // Труды МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 1997. – № 569. – С. 28 – 33.

8. **Краснощёченко, В.И.** О линейных эквивалентах нелинейных систем / В.И. Краснощёченко // Труды МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 1999. – № 575. – С. 39 – 45.

9. **Дмитриенко, В.Д.** Линеаризация математической модели привода методами дифференциальной геометрии / В.Д. Дмитриенко, А.Ю. Заковоротный // Вісник НТУ "ХПІ". – Харків: НТУ "ХПІ". – 2007. – № 19. – С. 64-77.

10. **Дмитриенко, В.Д.** Моделирование и оптимизация процессов управления движением дизель-поездов / В.Д. Дмитриенко, А.Ю. Заковоротный. – Х.: Изд. центр "НТМТ", 2013. – 248 с.

11. **Дмитриенко, В.Д.** Программное преобразование нелинейных систем управления к эквивалентным линейным в канонической форме Бруновского / В.Д. Дмитриенко, А.Ю. Заковоротный // Энергетические и электротехнические системы: междунар. сб. науч. трудов. Вып. 1. – Магнитогорск: Магнитогорск. гос. техн. ун-та, 2014. – С. 19-32.

УДК 519.81

ПОИСКОВЫЙ МЕТОД СИНТЕЗА ЗАКОНА УПРАВЛЕНИЯ УПРУГИМ МОМЕНТОМ ЭЛЕКТРОПРИВОДА ПОСТОЯННОГО ТОКА

О.А. Кузнецова

Тульский государственный университет, Россия,

г. Тула

o.a.kuznetsova@mail.ru

Аннотация

В статье рассмотрен $ЛП_{\tau}$ поисковый метод синтеза оптимального закона управления упругим моментом. Этот метод применяют для решения прикладных задач оптимизации и синтеза управления различных систем электропривода с упругими связями.

Ключевые слова: электропривод, оптимальное управление, закон, $ЛП_{\tau}$ поиск