Г.Є. Максимук
Херсонський національний технічний університет
*Науковий керівник **Г.Я. Тулученко**, доктор технічних наук, професор, професор кафедри вищої математики і математичного моделювання*

ВИКОРИСТАННЯ МОЖЛИВОСТЕЙ ПАКЕТУ INTEGRATIONTOOLS СКМ MAPLE: НЕСТАНДАРТНІ ЗАМІНИ ЗМІННИХ

Постановка проблеми. Розповсюдженим методом обчислення інтегралів є метод заміни змінних. Випадки застосування стандартних замін з успіхом розпізнаються ядром математичного процесора Maple, проте цікавими є задачі, які для свого розв'язання потребують застосування нестандартних підстановок або застосування стандартних підстановок у непритаманних їм випадках використання.

Окремий інтерес представляє порівняння можливостей СКМ Maple та Mathematica – двох визнаних світових лідерів.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Для проведення тестування можливостей пакету IntegrationTools СКМ Maple використаємо задачу обчислення визначеного інтеграла, яка входила до складу завдань математичного змагання імені Уільяма Лоуелла Патнема у 2005 році [1].

Для вказаної задачі відомі шість різних способів її розв'язання, які запропоновані учасниками змагання. Також відзначається [1], що СКМ Mathematica успішно справляється з обраним для тестування прикладом.

Формулювання цілей публікації. Дослідити ефективність використання пакету IntegrationTools СКМ Maple при обчисленні інтегралів підвищеної складності.

Основний матеріал. У результаті обчислення інтеграла [1]:

$$\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x^2+1}dx, \tag{1}$$

за допомогою команди **int** відповідь отримуємо у вигляді, що застосовує спеціальну функцію **dilog** та спеціальну константу **Catalan**, а також містить комплексні значення (рис. 1).

Найбільш очевидною для розв'язання інтеграла (1) є заміна [1] $x = \mathrm{tg}t$, яка приводить до виразу:

$$\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x^2+1}dx = \frac{\pi}{8}\ln 2 + \int_0^{\pi/4} \ln\left(\cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right)\right)dt - \int_0^{\pi/4} \ln(\cos t)\,dt.$$

Очевидно, що графіки функцій $\cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right)$ та $\cos t$ симетричні відносно прямої $t=\frac{\pi}{8}$, тому

$$\int_0^{\pi/4}\ln\left(\cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right)\right)dt=\int_0^{\pi/4}\ln\left(\cos t\right)dt.$$

Отже, інтеграл (1) остаточно дорівнює

$$I_1=\int_0^1\frac{\ln\left(x+1\right)}{x^2+1}dx=\frac{\pi}{8}\ln 2.$$

Особливістю наведеного розв'язання є те, що здійснення заміна дозволяє розкласти підінтегральну функцію на суму трьох функцій, дві з яких є симетричними відносно прямої, яка є серединним перпендикуляром проміжку інтегрування. Не здійснюючи саме інтегрування цих двох функцій, вдається показати, що інтеграли від них мають рівні значення.

Інтеграл (1) був також обчислений за допомогою on line сервісу СКМ Maxima [2]. У цьому випадку значення інтеграла також отримується з включенням спеціальних функцій від комплексних аргументів. Виконати спрощення за допомогою функцій **simp** та **radcan** не вдається.

Менш очевидною, але ефективною, для інтеграла (1) є заміна

$$x=\frac{1-u}{1+u}.$$

Застосування цієї заміни в пакеті IntegrationTools приводить до рівняння відносно шуканого інтеграла, для розв'язання якого потрібно виконати додаткове програмування.

Висновки і перспективи подальших досліджень. Показано, що пакет IntegrationTools СКМ Maple орієнтований на стандартне застосування методів інтегрування, зокрема, методу заміни змінної. Задачі олімпіадного рівня здебільшого потребують інтерактивного розв'язання і додаткового програмування.

Література

1. The Putnam Archive. URL: https://kskedlaya.org/putnam-archive/
2. Сайт СКМ Maxima. URL: http://maxima.cesga.es/index.php?c=n30inhj2rhbblhbskvo2v&n=22