УДК 519.681

***Л.Г. РАСКИН,*** д-р. техн. наук,
***О.В. СЕРАЯ,*** канд. техн. наук,

# РЕШЕНИЕ РАСПРЕДЕЛИТЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ НАЗНАЧЕНИЯ С НЕЧЕТКИМИ ВХОДНЫМИ ДАННЫМИ

Розглянуто булеву розподілену задачу з нечіткими вхідними даними. Запропоновано просту обчислювану процедуру наближеного розв'язання задачі, яка основана на гауссовом уявлені нечітких її параметрів.

**Введение**. Формулировка многих практических задач в экономике, технике, военном деле и т.д. сводится к математической модели, характерной для так называемых распределительных задач линейного программирования. Эта модель имеет вид: найти набор $X = \{x_{ij}\}$, минимизирующий линейную форму

$$L(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \tag{1}$$

и удовлетворяющий ограничениям

$$\sum_{j=1}^{n} r_{ij} x_{ij} = a_i, \quad i = 1,2,\dots,m, \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = 1,2,\dots,n, \tag{3}$$

$$x_{ij} \ge 0, \quad i = 1,2,\dots,m, \quad j = 1,2,\dots,n. \tag{4}$$

Распределительная задача по своим свойствам близка к транспортной, что позволяет применить для ее решения обобщенный метод потенциалов [1].

Специфический частный случай возникает, если переменные $x_{ij}$, $i = 1,2,\dots,m, \quad j = 1,2,\dots,n$, - булевы. Приведем пример практической задачи, приводящей к этой схеме. Пусть в систему обработки, содержащую $m$ разноэффективных каналов поступает $n$ разнотипных заявок. Введем

$c_{ij}$ - прибыль, получаемая в результате обработки $j$-й заявки $i$-м каналом, $i = 1,2,\dots,m$, $j = 1,2,\dots,n$;

$r_{ij}$ - ресурс, расходуемый при обслуживании $j$-й заявки $i$-м каналом, $i = 1,2,\dots,m$, $j = 1,2,\dots,n$;

$a_i$ - суммарный ресурс $i$ -го канала, $i = 1,2,\dots,m$ ;

$x_{ij}$ - параметр назначения, равный $1$, если $i$ -й канал назначен для обслуживания $j$ -й заявки, и $0$ - в противном случае.

Тогда математическая модель задачи имеет вид: найти булев набор переменных $X = (x_{ij})$, минимизирующий (1) и удовлетворяющий ограничениям

$$\sum_{j=1}^{n} r_{ij} x_{ij} \le a_i , \quad i = 1,2,\dots,m, \tag{5}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1, \quad j = 1,2,\dots,n. \tag{6}$$

Эта задача достаточно сложна. Для ее решения могут быть использованы общие методы решения целочисленных задач линейного программирования: отсечения, эффективного перебора [1, 2], а также приближенные методы.

Сложность задачи еще более возрастает, если исходные данные не могут быть заданы точно и, в связи с этим, описаны нечеткими числами. Сформулируем распределительную задачу назначения в условиях нечетких входных данных.

**Постановка задачи.** Пусть параметры $c_{ij}$, $i = 1,2,\dots,m$, $j = 1,2,\dots,n$, задачи есть нечеткие числа с гауссовыми функциями принадлежности вида $\mu(c_{ij}) = exp\left\{ -\frac{(c_{ij} - m_{ij})^2}{2\sigma_{ij}^2} \right\}$. Тогда, как можно показать, целевая функция (1) будет описана нечетким числом с функцией принадлежности

$$\mu(L(x)) = exp\left\{ -\frac{(L - m_\Sigma)^2}{2D_\Sigma} \right\}, \tag{7}$$

где

$$m_\Sigma = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} m_{ij} x_{ij} , \; D_\Sigma = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}^2 x_{ij}^2 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}^2 x_{ij} . \tag{8}$$

Введем некоторый достаточно высокий уровень принадлежности $d$ для нечеткого числа $L$ с функцией принадлежности (7). Решая уравнение

$$exp\left\{ -\frac{(L - m_\Sigma)^2}{2D_\Sigma} \right\} = d ,$$

найдем левую границу интервала значений нечетких чисел $L$, уровень принадлежности которых не ниже $d$. Она, очевидно, равна

$$L(d)=m_{\Sigma}(x)-\left(\frac{2D_{\Sigma}}{\ln d}\right)^{\frac{1}{2}}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}m_{ij}x_{ij}-k\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}^{2}x_{ij}\right)^{\frac{1}{2}},k=\left(\frac{2}{\ln d}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (9)$$

Теперь естественно поставить задачу отыскания булева набора $X$, максимизирующего (9) и удовлетворяющего (5), (6). Полученная задача является комбинаторной, для ее решения могут быть использованы методы направленного перебора (типа «ветвей и границ»). Однако, как известно, эффективность этих методов быстро растет с увеличением размерности задачи. В связи с этим рассмотрим приближенную процедуру ее решения.

**Основные результаты.** Предлагаемая процедура является итерационной, на каждом шаге которой осуществляется улучшение плана, полученного к текущей итерации. Пусть проделано $k$ итераций решения задачи и получен некоторый план $X^{(k)}=(x_{ij}^{(k)})$. Сформируем новый план $X^{(k+1)}=(x_{ij}^{(k+1)})$ по правилу

$$X^{(k+1)}=\begin{cases}x_{ij}^{(k)}, i\neq i_0, i\neq i_1, j\neq j_0,\\ x_{ij}^{(k)}+1, i=i_0, j=j_0,\\ x_{ij}^{(k)}-1, i=i_1, j=j_0.\end{cases} \quad (10)$$

Ясно, что план $X^{(k+1)}$ может быть реализован только в том случае, если $x_{i_0j_0}^{(k)}=0$, $x_{i_1j_0}^{(k)}=1$.

Рассчитаем приращение целевой функции (9), получаемое при переходе от плана $X^{(k)}=(x_{ij}^{(k)})$ к плану $X^{(k+1)}=(x_{ij}^{(k+1)})$. Оно, очевидно, равно

$$\Delta_{i_0,i_1,j_0}=m_{i_0,j_0}-m_{i_1,j_0}-k\left[\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}^{2}x_{ij}^{(k)}+\sigma_{i_0,j_0}^{2}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}^{2}x_{ij}^{(k)}\right)^{\frac{1}{2}}\right]+$$

$$+k\left[\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}^{2}x_{ij}^{(k)}+\sigma_{i_1,j_0}^{2}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}^{2}x_{ij}^{(k)}\right)^{\frac{1}{2}}\right]=$$

$$=m_{i_0,j_0}-m_{i_1,j_0}+k\left[\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}^{2}x_{ij}^{(k)}+\sigma_{i_1,j_0}^{2}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}^{2}x_{ij}^{(k)}+\sigma_{i_0,j_0}^{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]. \quad (11)$$

Теперь, с учетом (10), решение задачи реализуется следующим образом в два этапа. На первом этапе последовательно решается $n$ независимых задач максимизации (9) при ограничениях (6), начиная с плана $x_{ij}^{(0)} = 0$, $i = 1,2,\ldots,m$, $j = 1,2,\ldots,n$. При этом для каждого $j^*$ искомый наилучший план определяется набором, задаваемым формулой

$$x_{ij^*} = \begin{cases} 1, i = i^*, \\ 0, i \neq i^*, \end{cases}, \quad i^* = arg \max_i \left( m_{ij^*} - k\sigma_{ij^*} \right).$$

В результате решения этих $n$ задач получаем план $X^{(1)} = ( x_{ij}^{(1)} )$, причем в каждом столбце матрицы назначений, соответствующей этому плану, содержится ровно одна единица. Первый этап завершен.

Теперь проверяются ограничения (5). Если все они выполняются, решение задачи получено. В противном случае осуществляется переход ко второму этапу.

На втором этапе выделим номера строк, для которых ограничение (5) не выполняется, разбив множество $E = \{1,2,\ldots,m\}$ на два подмножества $E^+ = \left\{ i : i = 1,2,\ldots,m, \sum_{j=1}^{n} r_{ij} x_{ij}^{(1)} - a_i > 0 \right\}$ и $E^{(0)} = E \setminus E^+$. Теперь для каждого $j$ отыскивается наилучший вариант перемещения назначения из строки, принадлежащей подмножеству $E^+$ в строку из подмножества $E^{(0)}$. Наилучший вариант перемещения определяется соотношением

$$(i_0, i_1, j_0)^* = \underset{i_0, i_1, j_0}{arg\, min} \Delta_{i_0, i_1, j_0}, \ i_0 \in E^{(0)}, \ i_1 \in E^+, \ j = 1,2,\ldots,n.$$

Процедура завершается, если на очередной итерации окажется, что все $\Delta_{i_0, i_1, j_0} \geq 0$, $i_0 \in E^{(0)}$, $i_1 \in E^+$, $j = 1,2,\ldots,n$.

Описанная процедура конечна и чрезвычайно проста, что обеспечивает возможность ее реализации в задачах высокой размерности.

**Выводы.** Предложена простая вычислительная процедура решения распределительной задачи назначения для случая, когда параметры целевой функции задачи определены, как гауссовы нечеткие числа. При этом получено аналитическое описание функции принадлежности нечеткого значения целевой функции, предложен естественный критерий оптимальности решения и описана процедура отыскания решения.

**Список литературы:** . *Юдин Д.Б., Гольштейн Е.Г.* Задачи линейного программирования транспортного типа. – М.: Наука, 1969. – 346с. 2 *Вагнер Г.* Основы исследования операций. В 3-х томах: Пер. с англ. –М.:МИР, 1972. 3.*Саати Т.* Целочисленные методы оптимизации и связанные с ними экстремальные проблемы: Пер. с англ. – М.: МИР, 1973. – 298с.

*Поступила в редколегію 1.03.06*