МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

«ХАРЬКОВСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ»

Методические указания

к лабораторной работе

«Вычисления корней трансцендентных уравнений»

по курсу

«Компьютерное обеспечение»

для студентов

для студентов специальностей

«Технология машиностроения», «Инструментальное производство»

дневной и заочной форм обучения

Харьков 2007

Методичні вказівки до виконання лабораторної роботи «Вирахування коренів трансцендентних рівнянь» з курсу «Ком’ютерне забезпечення» для студентів спеціальностей «Технологія машинобудування», «Інструментальне виробництво» денної та заочної форм навчання / Уклад.: О.В.Кобець. – Харків: НТУ «ХПІ», 2007. – 19 с. – Рос. мовою.

Укладач О.В. Кобець

Кафедра «Інтегровані технології машинобудування» ім. М.Ф. Семка

Задание к лабораторной работе:

1. Провести аналитическое исследование заданной функции.
2. Исследовать заданную трансцендентную функцию тремя методами: половинного деления, Ньютона и итераций (составить программы для решения уравнения соответствующими методами и получить решения). Сравнить полученные результаты и сделать выводы об оптимальном способе решения заданного уравнения.

МЕТОД ПОЛОВИННОГО ДЕЛЕНИЯ

Метод половинного деления, или метод бисекции (дихотомии), является самым простым и надежным алгоритмом нахождения корней уравнений с одним неизвестным

$$f(x)=0. \tag{1}$$

Пусть функция f(x) непрерывна на отрезке [a, Ь], на концах его принимает значения разных знаков, т.е. $f(a)*f(b) < 0$, и производная f(x) сохраняет на этом отрезке знак. Требуется найти приближенное значение корня уравнения (1), принадлежащего отрезку [a, b] с заданной точностью.

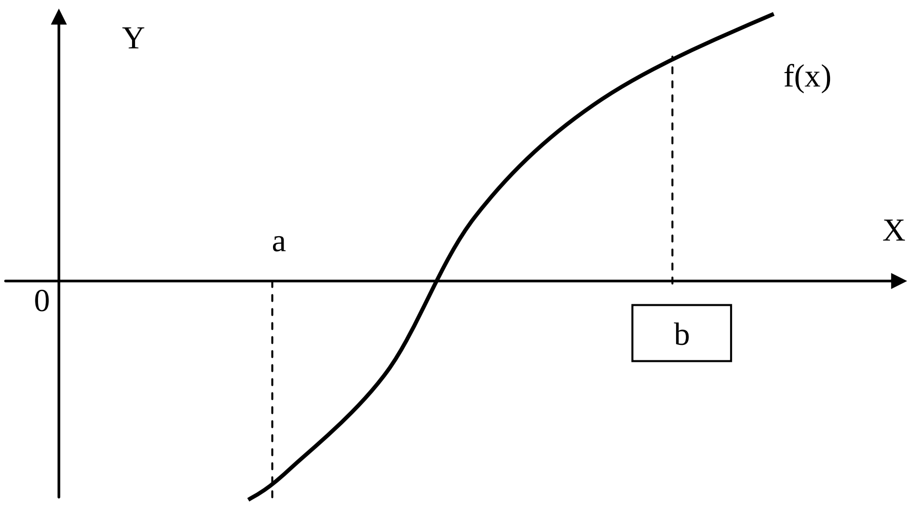

Рис. 1. График исходной функции

Идея метода половинного деления очень проста. Исходный отрезок [a, b] делится пополам и вычисляется значение функции f(x) в точке $x=(a+b)/2$.

Может случиться так, что $f((a+ b)/2)=0$, тогда корень уравнения найден ($X_0 = (a + b)/2$).

Если же $f((a+b/2)\neq 0$, то на концах одного из отрезков: [a, (a + b)/2] или [(a + b)/2, b] — функция будет принимать значения разных знаков. Анализируем только отрезок, на концах которого функция принимает ***разные*** значения.

Обозначим этот отрезок через [a_1, b_1] и заметим, что $|b_1 - a_1| = |b - a| / 2$. Та часть отрезка, на концах которого функция не меняет знака, отбрасывается. Если $|b_1 - a_1| < \varepsilon$, то любая точка из интервала (a_1,b_1) может быть принята за приближенное значение корня. Если же $|b_1 - a_1| \ge \varepsilon$, то отрезок [$a_1$, b_1] вновь делим пополам, полагая $a = a_1$, $b = b_1$. Процесс последовательного деления продолжаем до тех пор, пока не будет выполнено условие: при некотором n длина отрезка [a, b], содержащего корень, станет меньше ε. В этом случае за приближенное значение корня можно принять любую точку отрезка [a, b], обычно полагают

$$x_0 = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

Заметим, что при одном из делений точно попасть в корень почти невозможно. Во-первых, потому что, как правило, численными методами решаются сложные уравнения, корни которых не могут быть выражены конечными десятичными дробями. Во-вторых, вычисления всегда происходят с некоторыми погрешностями, поэтому «точный» корень не может быть их результатом.

Метод половинного деления устойчив к погрешностям округления, но сходится он медленно. При увеличении точности значительно возрастает объем вычислительной работы. Количество итераций, необходимое для достижения точности ε, можно оценить заранее. Если при каждом делении отрезок уменьшается вдвое, то после n циклов его длина будет равна $(b-a)/2^n$. Решив неравенство $(b-a)/2^n < \varepsilon$, определим минимальное число итераций:

$$n > \ln\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right) / \ln(2).$$

Блок-схема алгоритма решения уравнения по методу половинного деления приведена на рис. 2.

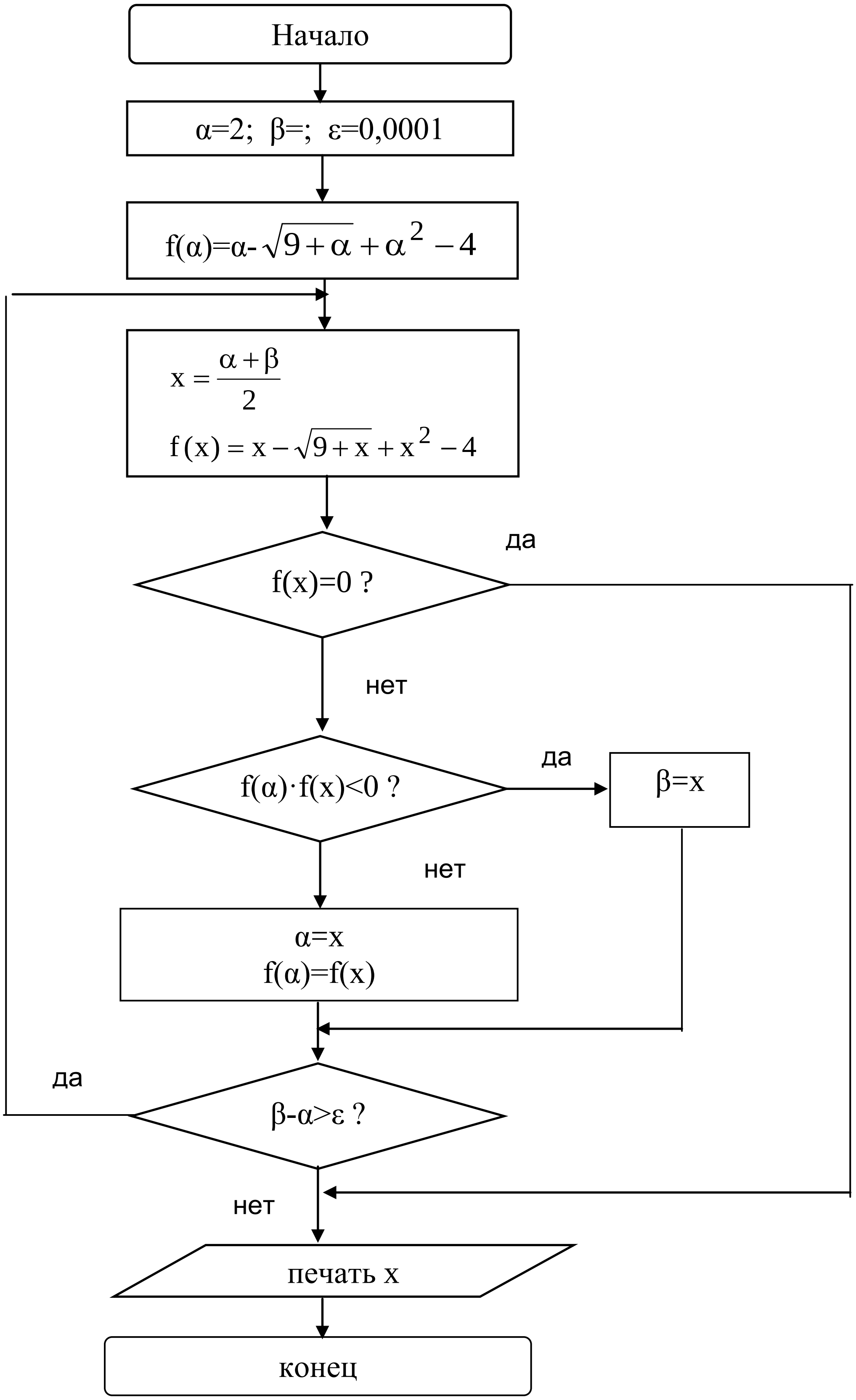

Рис. 2 Структурная схема программы решения нелинейных уравнений методом половинного деления (дихотомии)

Пример 1. Методом половинного деления найти корень уравнения

$$f(x) = x - \sqrt{9+x} + x^2 - 4 = 0$$

на отрезке [2; 3] с абсолютной погрешностью $\varepsilon=10^{-4}$.

Алгоритм нахождения корня уравнения представляет следующую последовательность действия:

1. Полагаем $\alpha=2$, $\beta=3$ и $\varepsilon=0.0001$.
2. Вычисляем $f(\alpha) = \alpha - \sqrt{9+\alpha} + \alpha^2 - 4$.
3. Вычисляем $x=(\alpha+\beta)/2$
4. И значение функции $f(x) = x - \sqrt{9+x} + x^2 - 4$ в этой точке.

4. Проверяем условие f(x) =0. Если это условие выполняется, то считаем *x* корнем и заканчиваем вычисления. Если условие не выполняется, то переходим к выбору отрезка, на концах которого функция *f (x)* имеет разные знаки, а именно:

5. Проверяем условие $f(\alpha) \cdot f(x)<0$. Если это условие выполняется, то полагаем $\beta=x$ и переходим к п. 6. Если условие не выполняется, то полагаем $\alpha=x$, $f(\alpha)=f(x)$ и переходим к п. 6.

6. Проверяем условие $\beta-\alpha>\varepsilon$. Если оно выполняется, то возвращаемся к процессу деления отрезков пополам, т. е. к п. 3. Если условие не выполняется, т. е. $\beta-\alpha \le \varepsilon$, то за результат принимаем значение *x* и заканчиваем вычисления.

Обозначения, использованные при переходе от блок-схемы к программе, приведены в таблице соответствия:

Математическое обозначение	α	β	ε	f(α)	f(x)
Обозначение в программе	a	b	e	y	z

Пояснения к программе.

Оператор 1 задает значения границ отрезка [a, b], на котором ищется корень, и точность, с которой корень должен быть найден.

Оператор 2 вычисляет значение функции в точке *a*.

Оператор 3 находит середину отрезка [a, b].

Оператор 4 вычисляет значение функции в этой середине (в точке x).

Оператор 5 проверяет, равно ли нулю найденное значение функции.

Оператор 6 выполняется, если значение функции в точке x не равно нулю. Он проверяет, имеют ли значения функции на границах отрезка [a, x] разные знаки, т. е. выполняется ли условие $f(\alpha)\cdot f(x)<0$.

Оператор 7 выполняется, если $f(\alpha)\cdot f(x)>0$. Это означает, что отрезок [a, x] не содержит корня. Следовательно, корень находится на отрезке [x; b]. Оператор 7 задает новое значение a=x и соответственно пересылает f(x) в f(a).

Оператор 8—безусловного перехода — позволяет обойти оператор 9, который не должен выполняться, если выполнен оператор 7.

Оператор 9 выполняется, если $f(\alpha)\cdot f(x)<0$, т. е. корень находится на отрезке [a, x]. Он пересылает значение x в b.

Таким образом, перед выполнением оператора 10 мы имеем дело с новым отрезком [a, b]. Этот отрезок в два раза меньше предыдущего и содержит искомый корень.

Оператор 10 проверяет, достигнута ли заданная точность, и в случае необходимости осуществляет возврат к оператору 3 для выполнения следующего деления интервала пополам.

Оператор 11 выводит на печать найденное значение корня,

Оператор 12 заканчивает вычисления.

Метод Ньютона.

Пусть уравнение f(x)=0 имеет один корень на отрезке [α, β], причем f '(x) и f "(x) определены, непрерывны и сохраняют постоянные знаки на отрезке [α, β].

Рассмотрение метода Ньютона начнем с его геометрического представления.

Возьмем некоторую точку X_0 отрезка *[α, β]* и проведем в точке P_0 {x_0, f(x_0)} графика функции касательную к кривой *y=f(x)* до пересечения с осью *Ox.* Абсциссу x_1 точки пересечения можно взять в качестве приближенного значения корня. Проведя касательную через новую точку P_1 {X_1, $f(x_1)$} и находя точку ее пересечения с осью *Ox,* получим второе приближение корня x_2. Аналогично определяются последующие приближения.

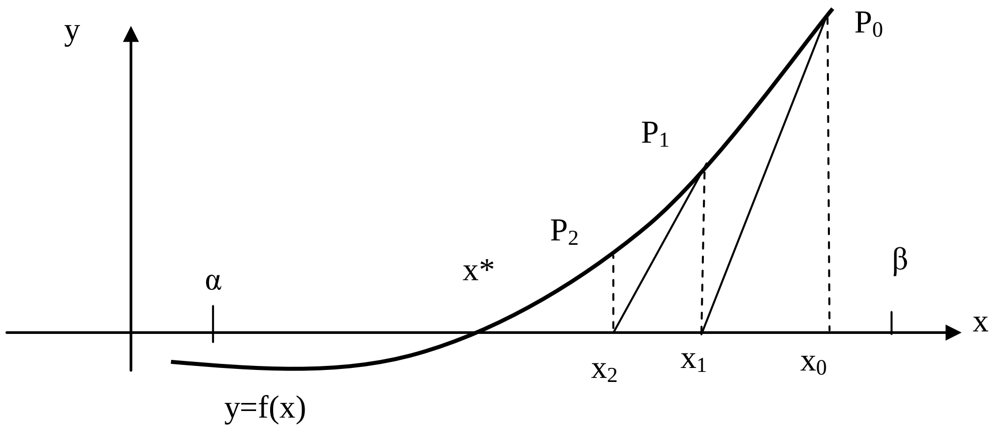

Рис. 3. График исходной функции

Выведем формулу для последовательных приближений к корню. Уравнение касательной, проходящей через точку Ро, имеет вид:

$$У=f(xo)+f'(x_0)(x—x_0).$$

Полагая y=0, находим абсциссу x_1 точки пересечения касательной с осью *Ox:*

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Следующие приближения находим соответственно по формулам:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x1)}{f'(x1)}$$

………………. (8)

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

Процесс вычисления приближений прекратим при выполнении условия

$$|x_n - x_{n-1}| < \sqrt{\frac{2m_1\varepsilon}{M_2}} \qquad (9)$$

где m_1—наименьшее значение $|f'(x)|$ на отрезке $[\alpha, \beta]$; M_2 — наибольшее значение $|f''(x)|$ на отрезке $[\alpha, \beta]$.

При этом условии будет выполнено неравенство $|x^* - X_n| \le \varepsilon$,

где ε~заданная предельная абсолютная погрешность корня x^*.

Заметим, что если M_2 не больше, чем на два порядка превышает $2m_1$ (т.е. $\frac{2m_1}{M_2} \ge 10^{-2}$),

т.е. неравенство (9) заведомо выполняется, если

$$|x_n - x_{n-1}| < 10^{-1}\sqrt{\varepsilon} \qquad \mathbf{(10)}$$

Например, при $\varepsilon = 10^{-6}$ в этом случае можно вместо (9) пользоваться более простым условием;

$$|x_n - x_{n-1}| < 10^{-4}.$$

Начальное приближение X_0 целесообразно выбирать так, чтобы было выполнено условие

$$f(x_0)\, f''(x_0) > 0. \qquad (11)$$

В противном случае сходимость метода Ньютона не гарантируется.

Чаще всего выбирают $x_0=\alpha$ или $x_0=\beta$, в зависимости от того, для какой из этих точек выполняется условие (11).

Метод Ньютона эффективен для решения тех уравнений f(x)=0, для которых значение модуля производной | f' *(x)* | близ корня достаточно велико, т. е- график функции f*(x) в* окрестности данного корня имеет большую крутизну.

Пример 2. Методом Ньютона найти корень уравнения

$f(x) = \sin x - x + 0{,}15 = 0$ на отрезке **[0,5; 1],** с абсолютной погрешностью $e=10^{-4}$.

Находим $f'(x) = \cos x - 1$.

Расчетная формула для уравнения по методу Ньютона имеет вид

$$x_n = x_{n-1} - \frac{\sin(x_{n-1}) - x_{n-1} + 0{,}15}{\cos(x_{n-1}) - 1},$$

где n =1, 2, 3, ...

Начальное приближение *Xo* выбираем таким образом, чтобы выполнялось условие f (Xo) • f'' (Xo) > 0. Так как $f''(x) = -\sin x < 0$ для всех $0{,}5 \le x \le 1$, то необходимо подобрать *Xo,* Для которого *f(Xo)< 0.* Очевидно, что это условие выполняется при $X_0=1$

Найдем m_1 — наименьшее значение $|f'(x)|$ на отрезке **[0,5; 1].**

f ' *(x}* == cos *x* — 1 и поэтому

m_1== |cos0,5-l |=|0,88—1 | = 0,12.

Далее находим M_2 —- наибольшее значение | f '' *(x*) | на отрезке [0,5; 1] .*f''(x)*= — sin *x* и поэтому M_2= |—sin 1| =0,84. Таким образом, условие $2m_1/M_2 \geq 10^{-2}$ выполняется и для проверки точности вычислений можно воспользоваться условием (14).

Алгоритм нахождения корня уравнения представляет следующую последовательность действий:

1. Полагаем Хо==1, ε=0,001 и *n=0*.
2. Вычисляем следующее приближениеX_{n+1}. по формуле

$$x_n = x_{n-1} - \frac{\sin(x_{n-1}) - x_{n-1} + 0{,}15}{\cos(x_{n-1}) - 1},$$

3. Вычисляем разность δ =X_{n+1} — *Xn* и увеличиваем *n* на единицу.
4. Проверяем условие |δ|>ε. Если это условие выполняется, то возвращаемся к вычислению следующего приближения по формуле, т. е. к п. 2. Если условие не выполняется, т. е. |δ|<ε. то за результат принимаем величину X_{n+1} и заканчиваем вычисления. При этом значение *n* равно числу выполненных итераций. Как и в методе итераций, переменную с индексом не вводим, приближение X_n обозначим через ***x****, а* приближение X_{n-1} — через *y.* Блок-схема алгоритма решения уравнения по методу Ньютона приведена на рис. 4.

Далее приводится программа для решения уравнения и результат ее выполнения.

Легко видеть, что алгоритмы метода итераций и метода Ньютона идентичны. Различие заключается лишь в формуле для вычисления очередного приближения. Поэтому пояснения к программе примера 1 распространяются и на программу примера 2. .

Задание к работе.

1. Проверить условие сходимости и записать расчетные формулы для нахождения корня уравнения (табл. 1) с точностью е =10^{-4} (интервал существования корня и метод численного решения для каждого варианта приведены в табл.

Как легко убедиться, для всех вариантов, использующих метод итераций, выполняется условие $q \leq 0{,}5$, для вариантов, использующих метод Ньютона, выполняется условие $2m_1/M_2 \geq 10^{-2}$. Поэтому для проверки достижения заданной точности можно пользоваться соотношениями $|x_n - x_{n-1}| < 10^{-4}$.

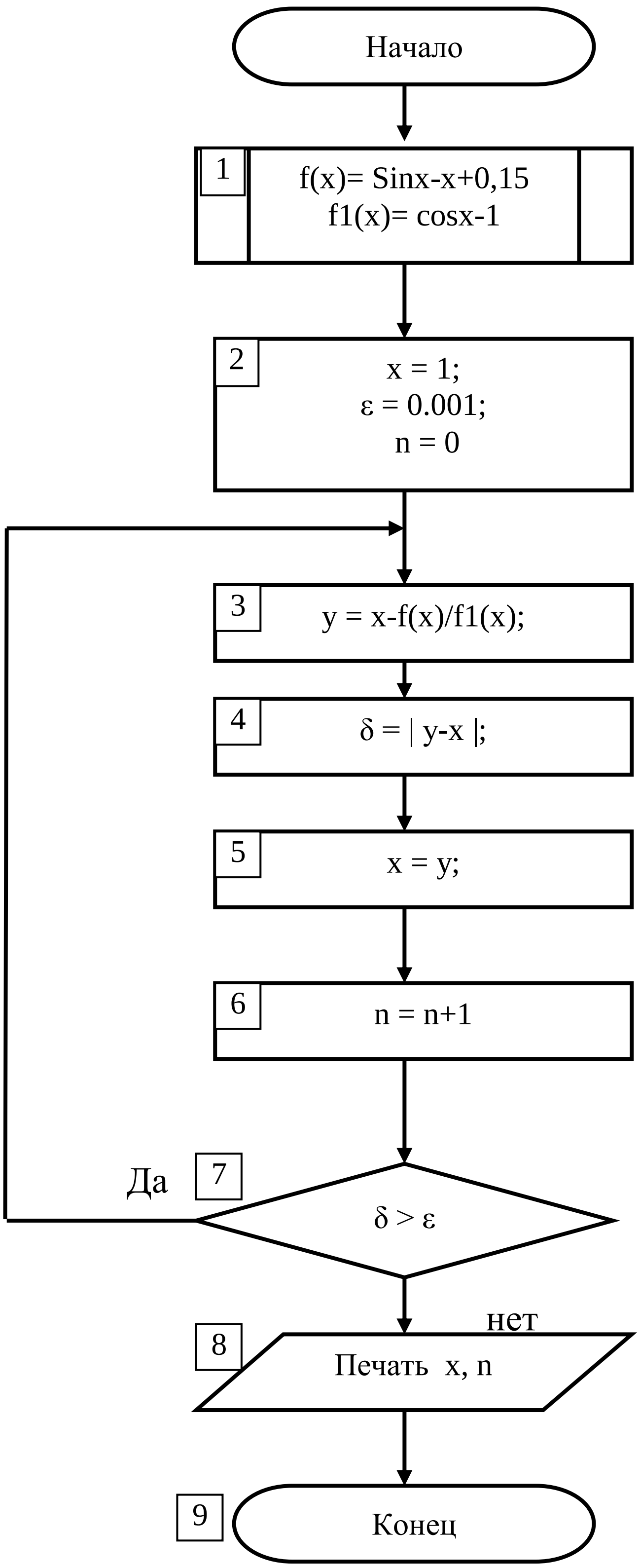

Рис. 4. Блок-схема алгоритма решения уравнения методом Ньютона

Метод итераций.

В практических вычислениях довольно часто приходится решать уравнения вида:

$$f(x) = 0 \qquad (1)$$

где функция $f(x)$ определена и непрерывна на некотором конечном или бесконечном интервале $a < x < b$.

Если функция представляет собой многочлен, то уравнение (1) называют алгебраическим, если же в функцию $f(x)$ входят элементарные (тригонометрические, логарифмические, показательные и т. п.) функции, то такое уравнение называют трансцендентным.

Всякое значение x*, обращающее функцию $f(x)$ в нуль, т. е. такое, что

$$f(x^*) \equiv 0,$$

называется корнем уравнения (1), а способ нахождения этого значения x^* и есть решение уравнения (1).

Приведем исходное уравнение к виду итерационного уравнения. Для этого уравнение (1) представим в форме:

$$x = \varphi(x) \qquad (2)$$

что всегда можно сделать и притом многими способами. Например, можно выделить из уравнения (1) ***x***, остальное перенести в правую часть (это и будет $\varphi(x)$). Или умножить левую и правую части (1) на произвольную константу λ и прибавить к левой и правой частям x, т. е. представить (1) в виде

$$x=x+\lambda\cdot f(x).$$

При этом $\varphi(x)=x+\lambda\cdot f(x)$.

Выберем на отрезке [α, β] произвольную точку x_0 — нулевое приближение, и примем в качестве следующего приближения

$x_1=\varphi(x_0)$,

далее

$x_2=\varphi(x_1)$,

и вообще пусть X_n получается из X_{n-1} по формуле

$$\boldsymbol{X_n = \varphi(X_{n-1})} \qquad (3)$$

Этот процесс последовательного вычисления чисел X_n $(n = 1, 2, 3,...)$ по формуле (3) называется **методом итераций**.

Геометрическая интерпретация метода итераций представлена на рис. 5

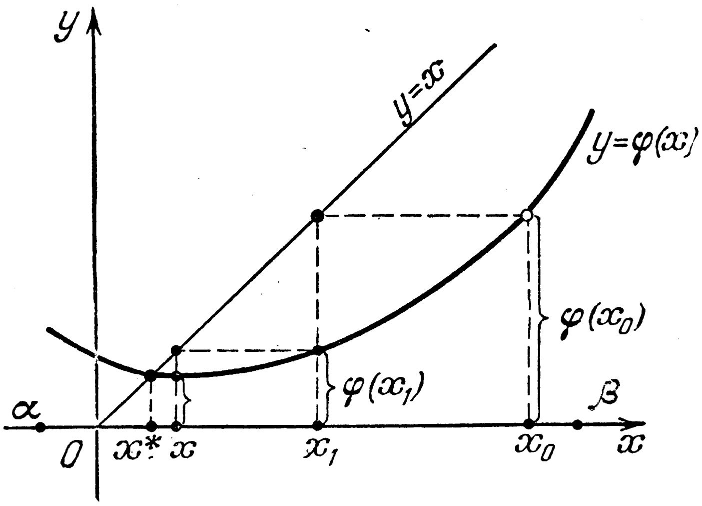

Рис. 5. График исходной функции

Если на отрезке [α, β], содержащем корень X=X^* уравнения (2), а также его последовательные приближения $x_0, X_1, \ldots, X_n, \ldots$ вычисляемые по методу итераций, выполнено условие

$$|\varphi'(x)| < q < 1, \qquad (4)$$

то процесс итераций сходится, т. е. увеличивая n, можно получить приб-лижение, сколь угодно мало отличающееся от истинного значения корня x^*.

Процесс итераций следует продолжать до тех пор, пока для двух последовательных приближений x_{n-i} и x_n не будет обеспечено выполнение неравенства

$$\left|x_n - x_{n-1}\right| \leq \frac{1-q}{q} \cdot \varepsilon; \qquad (5)$$

при этом всегда будет выполнено неравенство

$$|x^*-x_n| \leq \varepsilon,$$

где ε -заданная предельная абсолютная погрешность корня x^*.

Если $q \leq 0{,}5$, то $\frac{1-q}{q} \geq 1$ и вместо (5) можно пользоваться более простым соотношением

$$|x_n-x_{n-1}| \leq \varepsilon, \qquad (6)$$

при выполнении которого также будет обеспечена заданная точность определения корня x*.

При практическом нахождении корней по методу итераций нужно при переходе от уравнения (1) к уравнению (2) стремиться представить $\varphi(x)$ так, чтобы производная $\varphi'(x)$ по абсолютной величине была возможно меньше 1. В этом случае корень будет всегда найден и чем меньше величина q, тем меньшее число итераций для этого потребуется.

Для приведения уравнения (1) к виду (2) может быть применен достаточно общий прием, обеспечивающий выполнение неравенства (4).

Пусть

$$0 < m_1 \leq f'(x) \leq M_1 \qquad (7)$$

при $\alpha \leq x \leq \beta$, где m_1 — наименьшее значение производной $f'(x)$, а M_1 — наибольшее значение производной $f'(x)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$.

Если производная $f'(x)$ отрицательна, то вместо уравнения $f'(x) = 0$ рассматриваем уравнение $-f'(x) = 0$.

Заменим уравнение (1) эквивалентным ему уравнением

$$x = x - \lambda f(x) \quad (\lambda > 0).$$

Подберем параметр λ таким, чтобы выполнялось неравенство $0 \leq \varphi'(x) = 1 - \lambda f'(x) \leq q < 1$ при $\alpha \leq x \leq \beta$.

Учитывая условие (7), можно выбрать

$$\lambda = 1/M_1$$

и $q = 1 - m_1/M_1$ при этом условие сходимости метода итераций будет выполнено.

Пример 3. Методом итераций найти корень уравнения

$$\boldsymbol{f(x) = \arcsin(2x + 1) - X^2},$$

расположенный на отрезке [- 0,5; 0], с абсолютной погрешностью $\varepsilon = 10^4$. Определить также число итераций, необходимое для нахождения корня.

Уравнение преобразуем следующим образом:

$\arcsin(2x + 1) = x^2$

$\sin(\arcsin(2x + 1)) = \sin x^2$.

$2x + 1 = \sin x^2$

Это уравнение может быть легко преобразовано к виду

$x = \varphi(x)$,

где $\varphi(x) = 0{,}5(\mathrm{Sin}x^2 - 1)$

Находим $\varphi'(x) = x \cos x^2$. Очевидно, $|\varphi'(x)| = |x \cos x^2| \leq 0{,}5$ для всех — $-0{,}5 < x < 0$. Поэтому $q = 0{,}5$, и процесс итераций сходится.

За начальное приближение можно принять любую точку отрезка [- 0,5; O], например, $Xo = -0{,}4$.

Алгоритм нахождения корня уравнения представляет следующую последовательность действий:

1. Полагаем $x_0 = -0.4$; $\varepsilon = 0.0001$ и $n = 0$,

2. Вычисляем следующее приближение x_{n+1} формуле

$$x_{n+1} = 0{,}5(\mathrm{Sin}\,x_n^2 - 1)$$

3. Вычисляем разность δ = $x_{n+1} - x_n$ и увеличиваем величину *n* на единицу.

4. Проверяем условие | δ | > ε. Если это условие выполняется, то возвращаемся к вычислению следующего приближения x_{n+1} по формуле $x_{n+1} = 0{,}5(\mathrm{Sin}\,x_n^2 - 1)$, т. е. к п. 2. Если условие не выполняется, т. е. | δ | ≤ ε, то результатом считаем величину x_{n+1} и заканчиваем вычисления. При этом значение *n* будет равно числу выполненных итераций.

При составлении блок-схемы и программы вводить переменную с индексом x_n нет необходимости, поскольку результатом будет одно число (корень уравнения), а все последовательные приближения в конечном счете не нужны. Кроме того, для каждого значения индекса *n* для x_n отводится свое место в памяти вычислительной машины, а это приводит к неразумному использованию памяти. На каждом этапе вычислений необходимо помнить лишь два соседних приближения, поэтому Приближение x_n обозначим через *x*, а приближение x_{n+1} через *y*. По окончании каждой итерации будем полагать $x = y$.

Блок-схема алгоритма решения уравнения методом итераций с учетом этих обозначений приведена на рис. 6.

Пояснения к программе.

Оператор 1 Задает рассматриваемую функцию, которая описана при помощи оператора-функции.

Оператор 2 задает начальное приближение корня *x,* точность вычисления корня ε и число выполненных итераций *n* (n = 0 — не выполнено ни одной итерации).

Оператор 3 вычисляет следующее приближение корня.

Оператор 4 вычисляет разность между последующим и предыдущим приближениями и вычисляет модуль этой разности

Оператор 5 пересылает значение последующего приближения *y* в предыдущее (подготовка к выполнению следующей итерации).

Оператор 6 увеличивает номер итерации на 1.

Оператор 7 осуществляет проверку точности. Если заданная точность не достигнута (δ – ε > 0), осуществляется возврат в начало цикла к оператору 2, где будет вычислено следующее приближение. При достижении точности (δ < ε)— переход к оператору 7.

Оператор 8 выводит на печать найденное значение корня и число выполненных итераций.

Оператор 9 определяет конец вычислений.

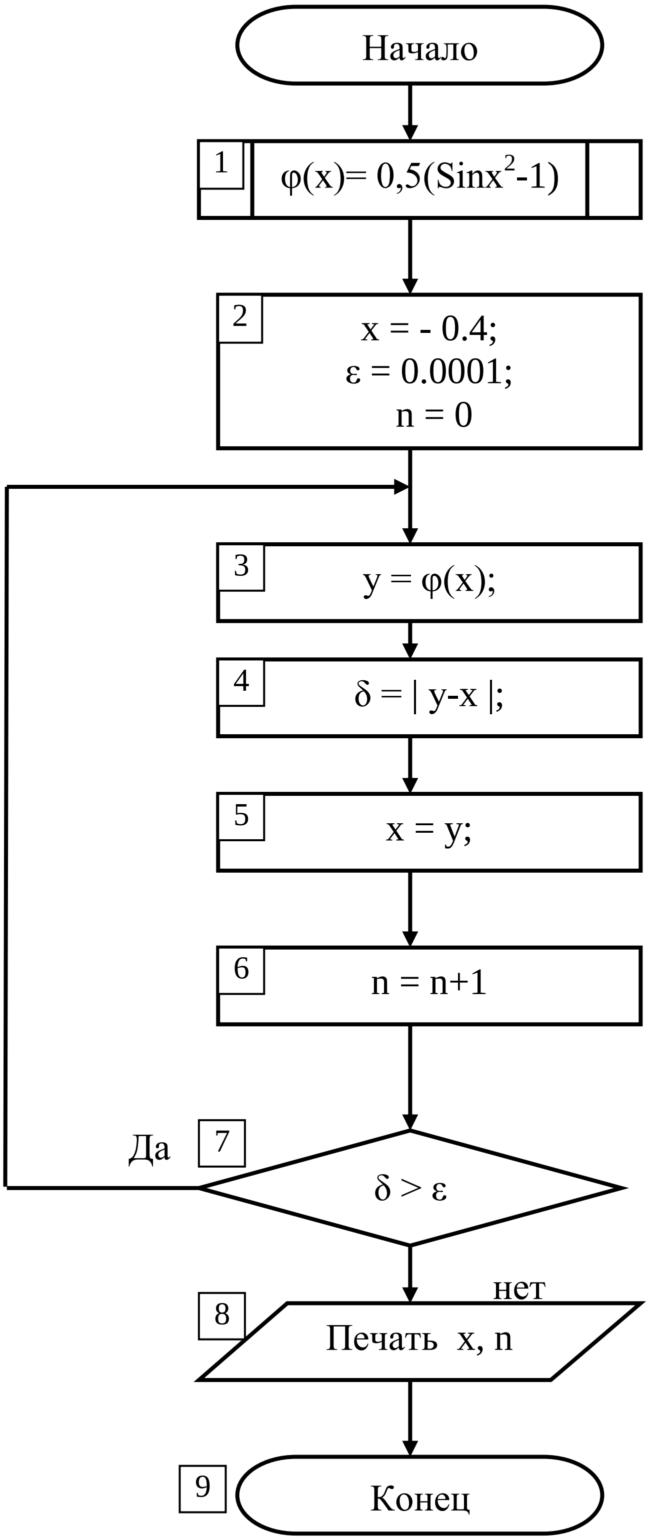

Рис. 6. Блок-схема алгоритма решения уравнения методом итераций

СРАВНЕНИЕ МЕТОДОВ

Мы рассмотрели 3 численных метода решения трансцендентных уравнений.

Некоторые понятия темы:

Уравнение $f(x)=0$ называется трансцендентным, если оно содержит трансцендентные функции переменной X: логарифмическую, показательную, тригонометрическую или их комбинации.

Рассматриваем класс непрерывных функций.

С геометрической точки зрения корни уравнения представляют собой точки пересечения кривой $f(x)$ с осью OX в прямоугольной системе координат.

В общем случае трансцендентное уравнение аналитически не разрешено, т.е. для нахождения его корней не существует формул, как, например, для квадратного алгебраического уравнения. Поэтому рассматриваем ряд численных методов, позволяющих с заданной точностью вычислить корни уравнения.

Решение уравнения сводится к поиску его корней, т.е. значений X, обращающих уравнение в тождество.

При этом приходится решать две задачи:

1) отделение корней, т. е. отыскание достаточно малых областей, в каждой из которых заключен один и только один корень уравнения;

2) вычисление корней с заданной точностью.

На первом этапе отделение корней осуществляется двумя способами:

1. – подбором, т.е. задание значений X и определение интервала [a,b] на концах которого функция принимает значения разных знаков $f(a)*f(b)<0$, что говорит о том, что внутри интервала имеется хотя бы один корень уравнения $f(x)=0$.
2. – построение графика функции и обнаружение точек пересечения с ось OX.

Мы воспользовались вторым способом определения интервала.

Для вычисления корней трансцендентных уравнений мы рассмотрели метод итераций, Ньютона и дихотомии. Достаточно распространен еще метод хорд и модификации этих методов.

Наиболее универсальным является метод дихотомии. Он требует лишь непрерывности f(x) на интервале [a,b] и выполнение условия $f(a)*f(b)<0$. Если эти условия выполнены, то метод гарантирует сходимость к корню X* уравнения $f(x)=0$ с заданной точность ξ.

Скорость сходимости метода –1/2, погрешность вычисления корня $x^*-x_n \leq (b-a)/2^n$.

Менее универсальным методом уточнения корней уравнения $f(x)=0$ является метод итерации. Он требует представления уравнения в виде $x=\varphi(x)$, тождественного уравнению $f(x)=0$. Достаточное условие сходимости : если функция $\varphi(x)$ определена и дифференцируема на [a,b] и все ее значения $\varphi(x)\epsilon[a,b]$, то процесс итерации сходится к корню x* независимо от начального приближения $x\epsilon[a,b]$, в том случае, когда выполняется условие $\boldsymbol{|\varphi'(x)| \leq q<1}$, где за q можно принять наименьшее значение $|\varphi'(x)|$ на [a,b]. Погрешность вычисления корня $|x^*-x_n| \leq q/(1-q)(x_n-x_{n-1})/$ Скорость сходимости определяется величиной q. Чем меньше значение q, тем она выше. В том случае, когда $q=1/2$, скорость сходимости метода итераций и метода половинного деления одинакова.

Достоинством метода итерации по сравнению с методом дихотомии является более высокая скорость сходимости при $q \leq 1/2$.

По сравнению с изложенными методами уточнения корней $f(x)=0$ наиболее высокой сходимостью обладает метод Ньютона, предъявляющий более высокие требования к свойствам функции f(x). Достаточные условия определяются следующей теоремой: если функция f(x) непрерывна на [a,b], выполняется условие $f(a)*f(b)<0$. причем $f'(x)$ и $f''(x)$ отличны от нуля и сохраняют определенные знаки при $a \leq x \leq b$, то для любого $x\epsilon[a,b]$, удовлетворяющего условию $f(x)*f''(x)>0$, методом Ньютона можно вычислить корень x* с любой степенью точности.