

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

Г. А. Кучук, А. М. Філоненко

Алгебра програмування

Методичні вказівки до практичних занять

Затверджено
редакційно-видавничою
радою університету НТУ «ХПІ»,
протокол № 1 від 15.02.2024

Харків – 2024

УДК 004.7:519.8

К 95

Рецензент:

Олександр СЕРКОВ, доктор технічних наук, професор,
професор кафедри «Системи інформації ім. В.О. Кравця»,
Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут».

Автори:

Георгій Кучук, професор, доктор технічних наук
Алевтина Філоненко, доцент, кандидат технічних наук

К 95 **Кучук Г. А.** Алгебра програмування. методичні вказівки до практичних занять / Г. А. Кучук, А. М. Філоненко. – Харків \: НТУ «ХПІ», 2024. – 60 с.

В методичних вказівках до практичних занять розглядаються практичні питання використання методів алгебри програмування у комп'ютерних системах і мережах. Матеріал методичних вказівок спрямований на формування практичних знань та навичок, які необхідні в галузі математичного, апаратного та програмного забезпечення комп'ютерів та засновані на математичних методах алгебри програмування, з метою застосування цих знань для розробки алгоритмічного та програмного забезпечення апаратних та програмних засобів підтримки функціонування комп'ютерних систем та мереж.

Методичні вказівки до практичних занять призначені для інформаційно-методичного забезпечення практичних занять та самостійної підготовки у процесі вивчення курсу «Алгебра програмування» студентами всіх форм навчання.

Для студентів спеціальності 123 – «Комп'ютерна інженерія»

Бібліогр. 47 назв.

© Кучук Г. А., Філоненко А. М., 2024

ЗМІСТ

Вступ	5
Заняття 1-2. Подільність цілих чисел	6
1.1 Прості и складені числа	6
1.2 Ділення з остачею	9
1.3 Завдання за темою 1	13
Заняття 3-4. Найбільший спільний дільник та найменше спільне кратне	16
2.1 Найбільший спільний дільник натуральних чисел	16
2.2 Алгоритм Евкліда	18
2.3 Функція Ейлера	21
2.4 Найменше спільне кратне натуральних чисел	23
2.5 Завдання за темою 2	26
Заняття 5-6. Окремі питання подільності цілих чисел	31
3.1 Факторизація цілих чисел	31
3.2 Ознаки подільності	32
3.3 Нормалізація дійсного числа	36
3.4. Математична індукція	37
3.5 Завдання за темою 3	40
Заняття 7-8. Рівність за модулем	46
4.1 Визначення рівності за модулем	46
4.2 Властивості рівності за модулем	47

4.3 Класи лишків	51
4.4 Властивості класів лишків	52
4.5 Завдання за темою 4	53
Список рекомендованої літератури	56

Вступ

Методичні вказівки до практичних занять призначені для інформаційно-методичного забезпечення практичних занять та самостійної роботи, що проводяться в процесі вивчення курсу «Алгебра програмування» за освітньою програмою – «Сучасне програмування, мобільні пристрої та комп'ютерні ігри» для студентів спеціальності 123 – «Комп'ютерна інженерія» всіх форм навчання.

В методичних вказівках до практичних занять розглядаються основні положення теорії чисел, які можна застосовувати у прикладних завданнях комп'ютерних систем та мереж. Матеріал методичних вказівок спрямований на формування у студентів теоретичних знань та практичних навичок, які необхідні при використанні методів теорії чисел з метою застосування цих знань для розробки алгоритмічного та програмного забезпечення апаратних та програмних засобів підтримки функціонування комп'ютерних систем та мереж.

У методичних вказівках до практичних занять наведені мінімальні теоретичні відомості та практичні приклади, які розглядаються у першій частині відповідного курсу. Детально розглянуті такі матеріали:

- заняття 1–2: подільність цілих чисел (
- заняття 3–4: найбільший спільний дільник та найменше спільне кратне;
- заняття 5–6: окремі питання подільності цілих чисел;
- заняття 7–8: рівність за модулем.

Заняття 1-2 (тема 1)

Подільність цілих чисел

1.1 Прості і складені числа

Числа можна класифікувати таким чином

Класифікація чисел позначається виразом $N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$ і ілюструється за допомогою геометричної інтерпретації у вигляді кіл Ейлера (діаграм Венна), рис. 1.1.

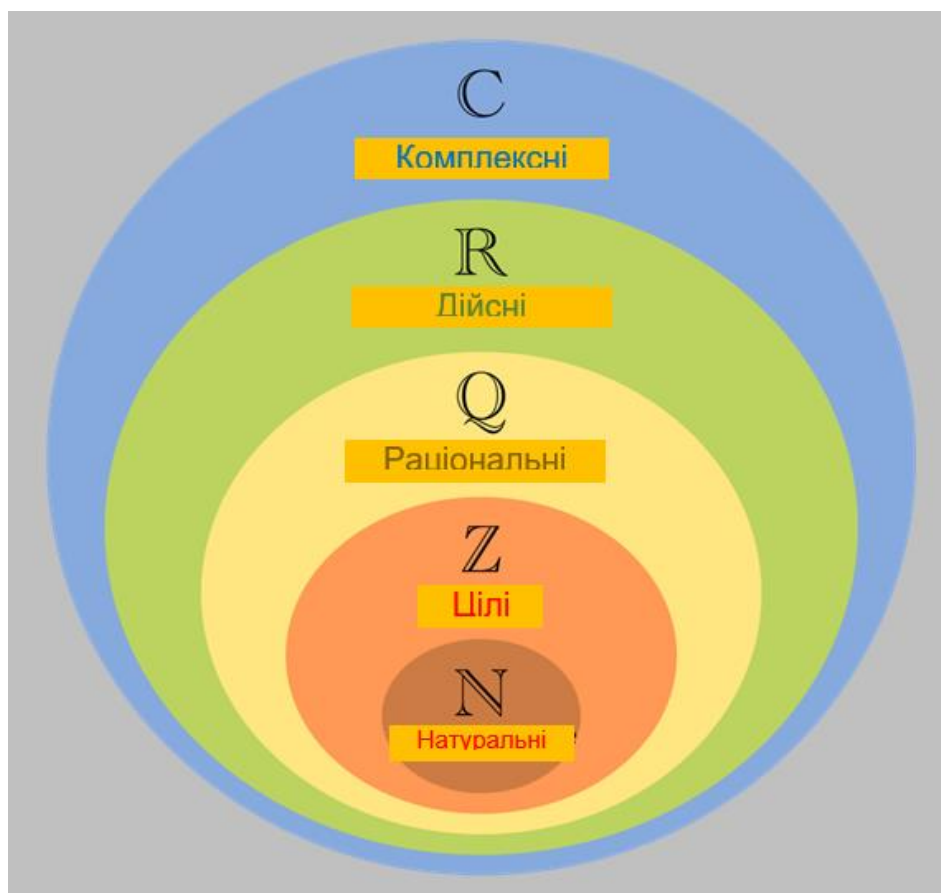


Рисунок 1.1 – Представлення множин чисел у вигляді кіл Ейлера (діаграм Венна)

Дільником натурального числа n називається натуральне число q , для якого виконується тотожність, $n = b \cdot q$, причому $n, b, q \in N$.

Числа n і b називаються ділене і частка відповідно.

Позначення: $n : q$ – n без остачі ділиться на q ; $q | n$ – q є дільником n .

Приклад: $15 = 5 \cdot 3$ можна записати як $15 : 3$ або $3 | 15$.

Множина дільників числа n і позначимо її як $M(n)$.

Приклад: $M(20) = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$.

Потужністю множини дільників числа n називається кількість його дільників. Вона позначається як $|M(n)|$

Приклад: $|M(20)| = 6$.

Простим числом називається натуральне число n , у якого $|M(n)| = 2$ (одиниця та теж саме число n). Прості числа зазвичай позначаються буквою p (від [англ.](#) *prime number* – *просте число*).

Приклад: числа 2, 3, 5, 7 – прості.

Складеним числом називається натуральне число n , число дільників якого більше, ніж 2, тобто $|M(n)| > 2$.

Приклад: числа 4, 6, 8, 9 – складені.

Примітка: Число 1 – не просте і не складене, тому що $|M(1)| = 1$.

Решето Ератосфена (алгоритм знаходження простих чисел від 1 до n).

1. Виписуються все натуральні числа від 1 до n включно.
2. Викреслюються 1 і всі парні числа крім 2 (2 – просте число).
3. Цикл. Беремо перше невикреслене число (воно просте) і викреслюємо всі числа, що кратні йому.
4. Цикл припиняється після досягнення числа, що не менше \sqrt{n} .

Приклад: Знайти всі прості числа від 1 до $n = 30$.

Розв'язання. $5 < \sqrt{n} < 6$, отже після розгляду числа 5 процес буде закінчений.

Застосовуючи решето Ератосфена, отримаємо

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17,
18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30.

Таким чином, простими є числа 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29.

Теорема 1. Якщо у натурального числа n немає дільників, менших або рівних \sqrt{n} , то число n є простим.

Теорема 2. Для будь-якого натурального числа k існує k ($\forall k \in \mathbb{N} \exists k$) послідовних натуральних чисел, що є складеними.

Приклади розв'язання задач

Задача 1.1. Знайти потужність множини дільників чисел 7, 12, 125.

Розв'язання. $M(7) = \{1, 7\}; |M(7)| = 2.$

$M(12) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}; |M(12)| = 6.$

$M(125) = \{1, 5, 25, 125\}; |M(125)| = 4.$

Задача 1.2. Знайти всі прості числа, не більші, ніж 25. Скільки їх?

Розв'язання. $n = 25, \sqrt{n} \leq 5.$

1) 2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,22,23,24,25

2) 2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,22,23,24,25

3) 2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,22,23,24,25

Відповідь. $S = \{2,3,5,7,11,13,17,19,23\}, |S| = 9.$

Задача 1.3. Знайти всі прості числа між 100 і 110. Скільки їх?

Розв'язання. $n = 110, \sqrt{n} \leq 11.$

1) 2,3,5,7,11 100,101,102,103,104,105,106,107,108,109,110

2) 2,3,5,7,11 100,101,102,103,104,105,106,107,108,109,110

3) 2,3,5,7,11 100,101,102,103,104,105,106,107,108,109,110

4) 2,3,5,7,11 100,101,102,103,104,105,106,107,108,109,110

Відповідь. $S = \{101,103,107,109\}, |S| = 4.$

Задача 1.4. Знайти 5 послідовних натуральних складених чисел.

Розв'язання. $(5+1)! = 6! = 720.$ Тоді числа: 722, 723, 724, 725, 726.

1.2 Ділення з остачею

Теорема 3. Для будь-якої пари натуральних чисел n і q існує єдина пара натуральних чисел b і r таких, що $n = b \cdot q + r, 0 \leq r < q.$

Наслідок 1. Якщо остача дорівнює нулю, то n ділиться на q ,

Наслідок 2. $\frac{n}{q} = b + \frac{r}{q} = \left[\frac{n}{q} \right] + \left\{ \frac{n}{q} \right\}$, де: $b = \left[\frac{n}{q} \right]$ – ціла частина
Ц.Ч. Д.Ч.

$\frac{n}{q}, \frac{r}{q} = \left\{ \frac{n}{q} \right\}$ – дробова частина $\frac{n}{q}$.

Наслідок 3. Якщо $n \in \mathbb{N}$ і $n = b \cdot q + r$, то для числа $n_{\text{від}} = -n$ має

місце таке: $n_{\text{від}} = b_{\text{від}} \cdot q + r_{\text{від}}$ та $\begin{cases} b_{\text{від}} = -(b+1), \\ r_{\text{від}} = q - r \geq 0. \end{cases}$

Фактичне значення дільника (натурального числа!) при $n > 0$ (тобто і $b > 0$) лежить усередині інтервалу, що задається цими межами

$$\frac{n}{b+1} < q \leq \frac{n}{b}.$$

При $n < 0$ (тобто і $b < 0$): $\frac{n}{b} \leq q < \frac{n}{b+1}$.

Зауваження. В цих інтервалах може виявитись кілька $q \in \mathbb{N}$. Для кожного з них визначається значення остачі за вище одержаним виразом $r = n - bq$.

Приклади розв'язання задач

Задача 1.5. Загальна постановка. Задані ділене та дільник (n, q) , $n \in \mathbb{Z}$, $n > 0$, $q \in \mathbb{N}$. Знайти частку та остачу, тобто (b, r) , $b \in \mathbb{Z}$ і $r \in \mathbb{N}$.

Конкретно: $(n, q) = (381; 7)$.

Розв'язання. Використаємо формулу:

$$n = b \cdot q + r$$

$$0 \leq r < q$$

$$381 = b \cdot 7 + r$$

$$0 \leq r < 7, r \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$\begin{array}{r|l} 381 & 7 \\ \hline 35 & 54 \\ \hline 31 & \\ \hline 28 & \\ \hline 3 & \end{array} \Rightarrow 381 = 54 \cdot 7 + 3.$$

$$\begin{array}{cccc} & n & b & q & r \end{array}$$

Відповідь. $(b, r) = (54, 3)$

Задача 1.6. Загальна постановка. Задані ділене та дільник $(n1, q)$, $n1 \in \mathbb{Z}$, $n1 < 0$, $q \in \mathbb{N}$. Знайти частку та остачу, $(b1, r1)$, $b1 \in \mathbb{Z}$ і $r1 \in \mathbb{N}$.

Конкретно: $(n1, q) = (-2; 5)$.

Розв'язання. Задамо $n = -n1$. Тоді $n > 0$, $n = 2$.

Спочатку розв'яжемо задачу для $(n, q) = (2; 5)$.

$$2 = 0 \cdot 5 + 2 \Rightarrow (b, r) = (0, 2).$$

Далі використаємо отримані формули:

$$\begin{cases} b1 = -(b+1) = -(0+1) = -1 \\ r1 = q - r = 5 - 2 = 3. \end{cases}$$

Відповідь. $(b1, r1) = (-1; 3)$.

Задача 1.7. Загальна постановка. Знайти всі цілі числа, які при діленні на число $q > 0$ мають частку $b \in \mathbb{Z}$.

Конкретно: 1) $q = 5$, $b = 4$ 2) $q = 3$, $b = -2$.

Розв'язання. Використаємо основну формулу:

$$n = b \cdot q + r; \quad 0 \leq r < q.$$

В ній розглядаємо всі можливі варіанти остачі (буде рівно q варіантів).

$$1) \quad n = 4 \cdot 5 + r = 20 + r, \quad r \in \{0, 1, 2, 3, 4\} \Rightarrow \\ \Rightarrow n \in \{20, 21, 22, 23, 24\}.$$

$$2) \quad n = (-2) \cdot 3 + r = -6 + r, \quad r \in \{0, 1, 2\} \Rightarrow \\ \Rightarrow n \in \{-6 + 0, -6 + 1, -6 + 2\} = \{-6, -5, -4\}$$

Відповідь. 1) $n \in \{20, 21, 22, 23, 24\}$; 2) $n \in \{-6, -5, -4\}$.

Задача 1.8. Загальна постановка. Задані ділене та частка (n, b) , $n, b \in \mathbb{Z}$; $n, b > 0$. Знайти дільник та остачу, тобто (q, r) , $q, r \in \mathbb{N}$.

Конкретно: $(n, b) = (25, 3)$.

Розв'язання. Використаємо таку формулу: $\frac{n}{b+1} < q \leq \frac{n}{b}$

$$\frac{25}{3+1} < q \leq \frac{25}{3} \Rightarrow \frac{25}{4} < q \leq \frac{25}{3} \Rightarrow 6\frac{1}{4} < q \leq 8\frac{1}{3} \Rightarrow q \in \{7, 8\}.$$

Для кожного значення дільника знаходимо остачу:

$$q = 7 \Rightarrow r = n - bq = 25 - 3 \cdot 7 = 4 \Rightarrow (q, r) = (7, 4);$$

$$q = 8 \Rightarrow r = n - bq = 25 - 3 \cdot 8 = 1 \Rightarrow (q, r) = (8, 1).$$

Відповідь. $(q, r) = (7, 4)$ або $(q, r) = (8, 1)$.

Задача 1.9. Задані ділене та частка (n, b) , $n, b \in \mathbb{Z}$; $n, b < 0$. Знайти дільник та остачу, тобто (q, r) , $q, r \in \mathbb{N}$. Конкретно: $(n, b) = (-30, -4)$.

Розв'язання. Використаємо таку формулу: $\frac{n}{b} \leq q < \frac{n}{b+1}$.

$$\frac{-30}{-4} \leq q < \frac{-30}{-4+1} \Rightarrow \frac{30}{4} \leq q < \frac{30}{3} \Rightarrow 7\frac{1}{2} \leq q < 10 \Rightarrow q \in \{8, 9\}.$$

Для кожного значення дільника знаходимо остачу:

$$q = 8 \Rightarrow r = n - bq = -30 - (-4) \cdot 8 = 2 \Rightarrow (q, r) = (8, 2);$$

$$q = 9 \Rightarrow r = n - bq = -30 - (-4) \cdot 9 = 6 \Rightarrow (q, r) = (9, 6).$$

Відповідь. $(q, r) = (8, 2)$ або $(q, r) = (9, 6)$.

1.3 Завдання за темою 1

Задача 1. Знайти потужність множини дільників чисел 43, 420, 960, 4096.

Задача 2. Знайти всі прості числа, не більші, ніж 50. Скільки їх?

Задача 3. Знайти всі прості числа 1) між 190 і 200; 2) між 200 і 220.

Задача 4. Знайти 6 послідовних натуральних складених чисел.

Задача 5. Задана пара чисел (n, q) , $n \in Z$ и $q \in N$. Знайти частку та остачу, тобто пару чисел (b, r) , $b \in Z$ и $r \in N$:

1) $(n, q) = (38, 7)$;

2) $(n, q) = (11, 11)$;

3) $(n, q) = (100, 101)$;

4) $(n, q) = (0, 7)$.

Задача 6. Задана пара чисел $(n_{отр}, q)$, $0 > n_{отр} \in Z$ і $q \in N$. Знайти частку и остачу від ділення $n_{отр}$ на q , тобто пару чисел $(b_{отр}, r_{отр})$, $b_{отр} \in Z$ і $r_{отр} \in N$, таку, що $n_{отр} = b_{отр} \cdot q + r_{отр}$:

2) $(n, q) = (-4, 3)$;

3) $(n, q) = (-38, 7)$;

4) $(n, q) = (-11, 11)$;

5) $(n, q) = (-100, 101)$.

Задача 7. Знайти всі цілі числа, які при діленні на $q \in N$ дають частку $b \in Z$: 1) $q = 4$, $b = 11$; 2) $q = 5$, $b = -4$.

Задача 8. Знайти найбільше ціле число, яке при діленні на q дає частку b : 1) $q = 3$, $b = -2$; 2) $q = 13$, $b = 17$.

Задача 9. Знайти:

1) найбільше число, яке при діленні на 7 має частку 11;

2) найменше число, яке при діленні на 7 має частку 11;

3) найбільше число, яке при діленні на 7 має частку -11;

4) найменше число, яке при діленні на 7 має частку -11;

Задача 10. Задана пара (n, b) , тобто ділене n і частка b . Знайти (q, r) , тобто дільник q і остачу r :

3) $(n, b) = (31, 3)$.

4) $(n, b) = (29, 4)$.

5) $(n, b) = (-31, -5)$.

Задача 11. Чи може площа квадрата виражатися простим числом, якщо довжина його сторони виражається натуральним числом?

Задача 12. Знайдіть найменше натуральне число, яке при діленні на будь-яке із перших 6 простих чисел дає остачу 1.

Задача 13. Є гіпотеза Гольдбаха: довільне парне число більше двох можна представити у вигляді суми двох простих чисел. Перевірити її для таких чисел: 18; 20; 48; 100; 110.

Задача 14. Доведіть, що будь-яке просте число, більше трьох, можна записати в одному з двох видів: $6n + 1$ або $6n - 1$, где n — натуральне число.

Задача 15. Чи може сума двох простих чисел бути простим числом?

Задача 16. Чи може сума трьох послідовних натуральних чисел бути простим числом?

Задача 17. Клієнт банку забув чотиризначний шифр свого сейфа і пам'ятав лише, що це шифр – просте число, а добуток його цифр дорівнює 243. За яке найменше спроб він напевно зможе відкрити свій сейф?

Заняття 3-4 (тема 2)

Найбільший спільний дільник та найменше спільне кратне

2.1 Найбільший спільний дільник натуральних чисел

Спільний дільник (СД) натуральних чисел $a_1, a_2, \dots, a_n \in N$ – це натуральне число, на яке діляться всі числа $a_i, i = \overline{1, n}$.

Множина спільних дільників чисел a_1, a_2, \dots, a_n – $D = \{d_1, d_2, \dots, d_k\}$, де $d_j, j = \overline{1, k}$ – **спільні дільники** чисел a_1, a_2, \dots, a_n .

Найбільший спільний дільник (НСД) натуральних чисел a_1, a_2, \dots, a_n – це найбільший елемент їхньої множини спільних дільників.

$$\text{НСД}(a_1, a_2, \dots, a_n) = (a_1, a_2, \dots, a_n) = \max_{d_j \in D} d_j.$$

Задача 2.1. Знайти множину спільних дільників чисел 6, 27, 18.
Знайти НОД (6, 27, 18).

Розв'язання. Маємо $M(6) = \{1, 2, 3, 6\}$, $M(18) = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$,
 $M(27) = \{1, 3, 9, 27\}$. Тоді множина їх спільних дільників буде такою:
 $D = \{1, 3\}$. Далі шукаємо НСД:

$$\text{НОД}(6, 18, 27) = (6, 18, 27) = \max \{1; 3\} = 3.$$

Відповідь. $D = \{1; 3\}$, $(6, 18, 27) = 3$.

Твердження. Для будь-якої множини натуральних чисел $a_1, a_2, \dots, a_n \in N$ є рівно один натуральний НСД.

Теорема 2.1. Якщо НСД d множини чисел $a_1, a_2, \dots, a_n \in N$ ділиться на натуральне число b , то НСД множини часток від ділення a_i на b є $\frac{d}{b}$:

$$\left. \begin{array}{l} (a_1, a_2, \dots, a_n) = d \\ d : b, b > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\frac{a_1}{b}, \frac{a_2}{b}, \dots, \frac{a_n}{b} \right) = \frac{d}{b}.$$

Приклад. В задачі 2.1: $\left. \begin{array}{l} (6, 18, 27) = 3 \\ d : 3, 3 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\frac{6}{3}, \frac{18}{3}, \frac{27}{3} \right) = \frac{3}{3} = 1.$

Дійсно, $\left(\frac{6}{3}, \frac{18}{3}, \frac{27}{3} \right) = (2, 6, 9) = 1.$

Теорема 2.2 (рекурентність обчислення НСД). Якщо d є НСД множини чисел $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n \in N$, то він співпадає с НСД множини, що складається із одного із елементів (наприклад, a_n) і НСД решти елементів множини (тобто a_1, a_2, \dots, a_{n-1}):

$$d_n = \underbrace{(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n)}_{\text{НОД}(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n)} = \left(\underbrace{(a_1, a_2, \dots, a_{n-1})}_{d_{n-1} = \text{НОД}(a_1, a_2, \dots, a_{n-1})}, a_n \right) = (d_{n-1}, a_n).$$

Висновок. Для знаходження НСД $a_1, a_2, \dots, a_n \in N$ при $n \geq 3$ можна послідовно знаходити НСД пар чисел.

Задача 2.1 (продовження). Знайти НСД чисел 6, 27, 18, тобто $(6, 27, 18)$, використовуючи рекурентність НСД.

Розв'язання. В задачі 2.1 знайдено: $(6, 18, 27) = 3$.

Використовуємо властивість рекурентності НСД і визначаємо НСД будь-яких двох з цих трьох чисел, наприклад, $(6, 18) = 6$. Потім обчислюємо НСД цього результату та третього числа із цієї трійки, тобто 27 : $((6, 18), 27) = (6, 27) = 3$.

Результати співпадають.

Взаємно простими називаються такі числа, які не мають спільного дільника, не рахуючи одиниці, тобто числа $a_1, a_2, \dots, a_n \in N$ – взаємно прості, якщо їх НСД дорівнює 1. При цьому числа самі по собі не обов'язково є простими.

Приклади. $(2, 6, 9) = 1$, тобто числа 2, 6, 9 – взаємно прості.

$(6, 19, 12, 8) = 1 \Rightarrow$ числа 6, 19, 12, 8 – взаємно прості;

$(1024, 256, 625) = 1 \Rightarrow$ числа 1024, 256, 625 – взаємно прості.

2.2 Алгоритм Евкліда

Теорема 2.3. Якщо b є дільником числа a , то b теж є і НСД чисел a

и b , тобто $\left. \begin{array}{l} a:b \\ b > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (a, b) = b$.

Приклад: Знайти НСД чисел $a = 125$, $b = 5$.

Перевіряємо подільність $a:b$. Вона є, $a = 25b$. Потім визначаємо множину подільників a і b та знаходимо НСД: $M(a) = \{1, 5, 25, 125\}$, $M(b) = \{1, 5\} \Rightarrow$ НСД a та b є рівним b , тобто $(125, 5) = 5$.

Теорема 2.4. Якщо при діленні $a \in N$ на $q \in N$ з остачею часткою є b , а остачею r , то НСД чисел a и b є рівним НСД чисел b та r :

$$a = bq + r \Rightarrow (a, b) = (b, r).$$

Приклад: $a = 187, b = 33 \Rightarrow 187 = 33 \cdot 5 + 22 \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 17 \cdot 11 & 3 \cdot 11 \\ 187, & 33 \end{pmatrix}}_{11} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \cdot 11 & 2 \cdot 11 \\ 33, & 22 \end{pmatrix}}_{11}.$

Теорема 2.5 (алгоритм Евкліда). Для $\forall a, b \in N$ існує кінцеве розкладання:

$$\begin{aligned} a &= b q_1 + r_1 \\ b &= r_1 q_2 + r_2 \\ r_1 &= r_2 q_3 + r_3 \\ r_2 &= r_3 q_4 + r_4 \\ &\dots \end{aligned}$$

$$r_{s-2} = r_{s-1} \cdot q_s + r_s$$

$$r_{s-1} = r_s \cdot q_{s+1} + 0.$$

Тоді НСД чисел a и b є r_s , $(a, b) = r_s$.

Задача 2.2. За допомогою алгоритму Евкліда знайти НСД чисел:

1) $a = 187$ и $b = 33$.

Розв'язання. Записуємо результат ділення a на b з остачею – це перший рядок послідовності з алгоритму Евкліда; а далі виконуємо послідовні заміщення до отримання нульової остачі:

$$187 = 33 \cdot 5 + 22;$$

$$33 = 22 \cdot 1 + 11;$$

$$22 = 11 \cdot 2 + 0 \quad \Rightarrow \text{НСД}(187, 33) = 11.$$

НСД

2) $a = 563$ и $b = 334$.

Розв'язання. Застосовуємо алгоритм Евкліда:

$$563 = 334 \cdot 1 + 229,$$

$$334 = 229 \cdot 1 + 105,$$

$$229 = 105 \cdot 2 + 19,$$

$$105 = 19 \cdot 5 + 10,$$

$$19 = 10 \cdot 1 + 9,$$

$$10 = 9 \cdot 1 + 1,$$

$$9 = 1 \cdot 9 + 0 \quad \Rightarrow \text{НСД}(563, 334) = 1, \text{ тобто ці числа взаємно прості.}$$

НСД

Задача 2.3. Лист картону має форму прямокутника, довжина якого 96 см, а ширина – 80 см. Цей лист треба розрізати без відходів на рівні квадрати. Скільки найбільших квадратів можна отримати з цього листа?



Розв'язання. 1) x – сторона квадрата;

2) $96 : x$ – кількість квадратів, яку можна укласти по довжині листа;

$80 : x$ – кількість квадратів, яку можна укласти по ширині листа.

3) Шукаємо НСД (96, 80): $96 = 80 \cdot 1 + 16$

$$80 = 16 \cdot 5 + 0 \quad \Rightarrow \text{НСД}(96, 80) = 16$$

4) Отже, сторона квадрата $x = 16$ см, площа - 256 см^2 , кількість квадратів $(96 : x = 6) \cdot (80 : x = 5) = 30$.

Відповідь. 30 квадратів.

Задача 2.4. Сума двох натуральних чисел дорівнює 20, а НСД дорівнює 5. Знайти дані числа.

Розв'язання. Позначимо числа x та y . Тоді: $x + y = 20$; (2.1)

$$(x, y) = 5. \quad (2.2)$$

Із (2.2) витікає, що $x = 5 \cdot a$, $y = 5 \cdot b$, причому $(a, b) = 1$.

Використавши (2.1), отримуємо $a + b = 4$, тоді можливі тільки 3 та 1.

Отже, шукані числа **5** та **15**.

Відповідь. Шукані числа **5** та **15**.

Задача 2.5. Є декілька однакових пакунків гуманітарної допомоги, в яких 185 пакетів рису та 111 пакетів пшона. Скільки пакунків є?

Розв'язання. Знаходимо НСД: $(185, 111) = 37$, отже є **37** пакунків.

Відповідь. **37** пакунків.

Задача 2.6. В олімпіаді з програмування бере участь 145 юнаків та 87 дівчат. В кожній команді є однакова кількість юнаків та дівчат. Скільки команд прибуло на олімпіаду, та який склад команд?

Розв'язання. Знаходимо НСД: $(145, 87) = 29$.

Відповідь. Прибуло **29** команд, в кожній **5** юнаків та **2** дівчат.

2.3 Функція Ейлера

Функція Ейлера $\varphi(n)$ –кількість взаємно простих з n натуральних чисел, що лежать в інтервалі від 1 до $n - 1$.

Властивість 1. $\varphi(n) < n$.

Властивість 2. $\varphi(n) \geq 1$, $n > 1$.

Властивість 3. $\varphi(p) = p - 1$, p – просте число тут і нижче.

Властивість 4. $\varphi(p^w) = p^w - p^{w-1} = p^{w-1}(p - 1)$.

Властивість 5. Факторизація натурального числа $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$.

$$\varphi(n) = p_1^{\alpha_1-1}(p_1 - 1) \cdot p_2^{\alpha_2-1}(p_2 - 1) \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k-1}(p_k - 1) =$$

Тоді

$$= n \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

Властивість 6. Якщо число $n \in N$ є добутком двох простих чисел

$$n = p_1 \cdot p_2, \text{ то } \varphi(n) = (p_1 - 1) \cdot (p_2 - 1) = \varphi(p_1) \cdot \varphi(p_2)$$

Властивість 7 (мультиплікативність функції Ейлера). Якщо

числа $m, n \in N$ взаємно прості, тобто. $(m, n) = 1$, то $\varphi(m \cdot n) = \varphi(m) \cdot \varphi(n)$.

Задача 2.7. Знайдіть значення числа Ейлера для чисел 288 і 100 різними варіантами, використовуючи властивості функції $\varphi(n)$.

$$288 = 2^5 \cdot 3^2 \quad \varphi(288) = 2^4 \cdot 3^1 \cdot (2 - 1) \cdot (3 - 1) = 96$$

$$\varphi(288) = 288 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 96$$

Розв'язання.

$$100 = 2^2 \cdot 5^2 \quad \varphi(100) = 2^1 \cdot 5^1 \cdot (2 - 1) \cdot (5 - 1) = 40$$

$$\varphi(100) = 100 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 40$$

Відповідь. $\varphi(288) = 96$; $\varphi(100) = 40$.

Задача 2.8. Скільки існує правильних нескоротних дробів із знаменником 150?

Розв'язання. Дріб $n/150$ є правильним нескоротним дробом тоді і тільки тоді, коли чисельник $n < 150$ та знаменник 150 є взаємно простими,

тобто $(n, 150) = 1$. Легко бачити, що кількість таких дробів дорівнює $\varphi(150)$. Оскільки $150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$, то $\varphi(150) = 5(2 - 1)(3 - 1)(5 - 1) = 40$, отже кількість таких дробів зі знаменником 150 дорівнює **40**.

Відповідь. Є 40 правильних нескоротних дробів із знаменником 150.

Задача 2.9. Знайдіть кількість натуральних чисел n , що не перевищують 615, таких що $(n, 615) = 15$.

Розв'язання. $615 = 15 \cdot 41$, отже число n має дільник 15 та не повинно мати спільних дільників з простим числом 41, тобто кількість таких чисел дорівнює $\varphi(41) = 40$. Це, 15, 30, 45, 60, ..., 585, 600.

Відповідь. 40 чисел.

Задача 2.10. Розв'яжіть рівняння $\varphi(x) = x/3$.

Розв'язання. Вочевидь, $x \geq 3$, нехай $x = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$.

Тоді $\varphi(x) = x \cdot ((1 - 1/p_1) \cdot (1 - 1/p_2) \cdot \dots \cdot (1 - 1/p_k))$, а після скорочення на x рівняння набуває вигляду: $(1 - 1/p_1) \cdot (1 - 1/p_2) \cdot \dots \cdot (1 - 1/p_k) = 1/3$.

Виписуючи можливі множники лівої частини $(1/2, 2/3, 4/5, 6/7, \dots)$, бачимо, що дріб $1/3$ може бути отриманий тільки при перемноженні дробів $1/2$ та $2/3$. Таким чином, $x = 2^\alpha \cdot 3^\beta$, де $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$.

Відповідь. $x = 2^\alpha \cdot 3^\beta$, де $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$.

2.4 Найменше спільне кратне натуральних чисел

Нехай є натуральні числа $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{N}$. Тоді їх найменшим спільним кратним (НСК) називається найменше натуральне число m , у

якого числа $a_i, i = \overline{1, n}$, є дільниками, $\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subset M(m)$, причому

- 1) $m \in N$;
- 2) $\forall a_i, m : a_i, i = \overline{1, n}$;
- 3) $\left\{ \forall M \mid M : a_i, i = \overline{1, n} \right\} \Rightarrow m = \min M$.

Тут M – множина всіх чисел, у яких є дільники $a_i, i = \overline{1, n}$.

НСК $a_1, a_2, \dots, a_n \in N$ будемо позначати як $[a_1, a_2, \dots, a_n]$.

Теорема 2.6. Якщо числа $a_1, a_2, \dots, a_n \in N$ факторизувати (тобто розкласти в добуток простих чисел), то *НСК* – це добуток всіх простих співмножників, що зустрічаються у факторизації цих чисел, причому для кожного співмножника вибирається максимальна степінь, в якій він входить до факторизації чисел $a_i, i = \overline{1, n}$.

Задача 2.11. Знайти *НСК* чисел 24 и 36, тобто $[24, 36]$.

Розв’язання. Спочатку визначаємо прості множники цих чисел:

$24 \mid 2$	$36 \mid 2$	Маємо $24 = 2^3 \cdot 3^1, \quad 36 = 2^2 \cdot 3^2$.
$12 \mid 2$	$18 \mid 2$	Максимальна степінь 2 є 3,
$6 \mid 2$	$9 \mid 3$	максимальна степінь 3 є 2, отже,
$3 \mid 3$	$3 \mid 3$	$[24, 36] = 2^3 \cdot 3^2 = 8 \cdot 9 = 72$.
$1 \mid 1$	$1 \mid 1$	Перевірка підтверджує цей результат.

Теорема 2.7. Добуток двох натуральних чисел дорівнює добутку їх НСД і НСК, тобто.

$$\forall a, b \in N \quad a \cdot b = (a, b) \cdot [a, b].$$

Задача 2.12. *Перевірити теорему 2.7 для чисел $a = 24$ $b = 36$.*

Розв'язання. НСК розраховане в попередньому прикладі і дорівнює $[24, 36] = 72$. Знаходимо НСД за допомогою алгоритму Евкліда:

$$\left. \begin{array}{l} 36 = 1 \cdot 24 + 12 \\ 24 = 12 \cdot 2 + 0 \\ \text{НОД} \end{array} \right\} \Rightarrow (24, 36) = 12.$$

Тоді згідно теор. 2.7 $a \cdot b = (a, b) \cdot [a, b]$, тобто $864 = 24 \cdot 36 = 12 \cdot 72 = 864$.

Висновок 1 (рекурентність обчислення НСК).

$$\underbrace{[a, b, c]}_{\text{НСК}[a,b,c]} = [[a, b], c].$$

Висновок 2. $[\alpha \cdot m, \alpha \cdot n] = \alpha \cdot [m, n]$.

Задача 2.13. *Знайти НСК чисел $a = 96$ і $b = 144$.*

Розв'язання. Відмітимо, що $a = 4 \cdot 24$ і $b = 4 \cdot 36$. Тоді до розрахунку їх НСК $[96, 144]$ застосуємо висновок 2, тобто

$$[96, 144] = [4 \cdot 24, 4 \cdot 36] = 4 \cdot [24, 36] = 4 \cdot 864 = 3456.$$

Відповідь. $[96, 144] = 3456$

Властивості НСК

Властивість 1. $[a, b] = [b, a]$ – комутативність НСК.

Властивість 2. $[a, [b, c]] = [[a, b], c]$ – асоціативність НСК.

Властивість 3. $(a, b) = 1 \Rightarrow [a, b] = a \cdot b$.

Властивість 4. $a : b \Rightarrow [a, b] = a$.

Задача 2.14. Три теплоходи роблять з одного і того самого порту регулярні рейси. Один із них повертається через 10 днів, другий – через 12 днів, а третій – через 15 днів. Через яку найменшу кількість днів усі три теплоходи зустрінуться разом у порту?

Розв'язання. Знаходимо НСК: $[10, 12, 15] = 5 \cdot 2^2 \cdot 3 = 60$ (днів).

Відповідь. теплоходи зустрінуться разом у порту через 60 днів.

Задача 2.15. Яка найменша кількість студентів могла скласти іспит з алгебри програмування за умови, що чотирнадцята частина з них отримала оцінку «незадовільно», 15% – «задовільно», 75% – «добре» і не менше п'яти осіб – «відмінно»?

Розв'язання. Переведемо відсотки для невідмінних оцінок у дроби: $(1/14; 3/4; 3/20)$. Далі знайдемо НСК знаменників: $[14, 4, 20] = 140$. Приведемо дроби до спільного знаменника $(10/140; 105/140; 21/140)$ та складемо, отримаємо $136/140$.

Отже, частка відмінників складає $4/140$, тобто загальна кількість студентів є не меншою, ніж $5 \cdot 140/4 = 175$.

Відповідь. Іспит складає не менше, ніж 175 студентів.

2.5 Завдання за темою 2

Задача 1. Знайти множину спільних дільників і НСД чисел:

- а) 256, 64, 48;
- б) 27, 81, 48;
- в) 1024, 100, 125
- г) 121, 66, 165.

Задача 2. Знайти НСД, використовуючи його властивості:

- а) (420, 126, 525) (рекурентність);
- б) (2520, 84, 1400) (рекурентність);
- в) (2800, 3500) (поділити на 100);
- г) (39000, 512000) (поділити на 1000).

Задача 3. Знайти НСД, використовуючи алгоритм Евкліда:

- а) (420, 126);
- б) (42, 525);
- в) (561, 143);
- г) (529, 1541);
- д) $(n, n + 1)$
- е) $(2n, 2n + 2)$.

Задача 4 Сума двох натуральних чисел дорівнює 48, а НСД дорівнює 12. Знайти дані числа.

Задача 5. Сума двох натуральних чисел дорівнює 150, а НСД дорівнює 30. Знайти дані числа.

Задача 6. Натуральні числа відносяться як 11 до 7, а НСД дорівнює 45. Знайти дані числа.

Задача 7. Натуральні числа відносяться як 5 до 9, а НСД дорівнює 28. Знайти дані числа.

Задача 8. Лист картону має форму прямокутника, довжина якого 65 см, а ширина – 91 см. Цей лист треба розрізати без відходів на рівні квадрати. Які найбільші квадрати можна отримати з цього листа і скільки?

Задача 9. Є декілька однакових пакунків гуманітарної допомоги, в яких 451 пакет рису та 205 пакетів пшона. Скільки пакунків є?

Задача 10. В олімпіаді з програмування бере участь 268 юнаків та 201 дівчина. В кожній команді є однакова кількість юнаків та дівчат. Скільки команд прибуло на олімпіаду, та який склад команд?

Задача 11. Числа a та b – взаємно прості. Розрахувати $(a + b; a - b)$.

Задача 12. $a - b = 2^n$. Знайти (a, b) , якщо a, b – непарні.

Задача 13. Коли є вірною така нерівність: $(a, b) > a - b$?

Задача 14. Знайти функцію Ейлера для чисел:

- а) 12;
- б) 17;
- в) 1000;
- г) 360;
- д) 1001;
- е) 63000.

Задача 15. Скільки існує правильних нескоротних дробів із знаменником 1500?

Задача 16. Скільки натуральних чисел, не більших 120, мають з числом 30 НЗД, яке більше 1?

Задача 17. Розв'яжіть рівняння $\varphi(5^x) = 100$.

Задача 18. Розв'яжіть рівняння $\varphi(7^x) = 294$.

Задача 19. Знайдіть кількість натуральних чисел n , що не перевищують 407, таких що $(n, 407) = 11$.

Задача 20. Знайти НСК чисел:

- а) 126, 70;
- б) 68, 34;
- в) 441, 700;
- г) 84, 648.

Задача 21. Знайти, знаючи НСД (задача 3), НСК чисел:

- а) (420, 126);
- б) (42, 525);
- в) (561, 143);
- г) (529, 1541);
- д) $(n, n + 1)$
- е) $(2n, 2n + 2)$.

Задача 22. Знайти НСК чисел, використовуючи його властивості.

- а) (210, 350);
- б) (168, 231 та 60);
- в) (1350, 900);
- г) (111111, 999).

Задача 23. Знайти НСД та НСК чисел 97, 98, 99.

Задача 24. Знайти НСД та НСК чисел 98, 99, 100.

Задача 25. Добуток двох натуральних чисел дорівнює 20, а НСК дорівнює 10. Знайти дані числа.

Задача 26. Яка найменша кількість студентів першого курсу кафедри КІП могла скласти іспит з алгебри програмування за умови, що дванадцята частина з них отримала оцінку «відмінно», 24% – «задовільно», 65% – «добре» і не менше чотирьох осіб отримали оцінку «незадовільно»?

Заняття 5-6 (тема 3)

Окремі питання подільності цілих чисел

3.1 Факторизація цілих чисел

Теорема 3.1. Для будь-якого натурального числа $n > 1$ ($\forall n | n > 1 \wedge n \in N$) найменший, відмінний від одиниці, дільник є завжди простим числом.

Теорема 3.2. Будь-яке натуральне число $n > 1$ ($\forall n | n > 1 \wedge n \in N$) можна представити як добуток простих чисел, $n = \prod_{k=1}^K p_k = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k$.

Розкладення $n = \prod_{k=1}^K p_k$ є факторизацією натурального числа n .

Теорема 3.3. Факторизація числа є однозначною з точністю до порядку співмножників.

Алгоритм факторизації цілого числа

Крок 1. Послідовно ділимо ціле число n на прості числа $2, 3, \dots, p_r \leq \sqrt{n}$, доки не отримаємо простий дільник p_1 числа n ($p_1 | n$).

Крок 2. Для числа $\frac{n}{p_1} = n_1 \in N$ повторюємо крок 1, але починаючи його з p_1 , тому що менших простих чисел серед дільників числа n не існує. Якщо дільники вичерпані, то алгоритм закінчується.

Задача 3.1. Факторизувати число 2016.

Розв'язання. 1. Визначаємо, коли закінчити алгоритм: $\sqrt{2016} < 45$.

Отже, будемо розглядати всі прості числа, починаючи від 2, причому максимально можливим дільником може бути число 43.

2. Будемо ділити 2016 на 2, поки не отримаємо непарне число:

$$2016 \rightarrow 1008 \rightarrow 504 \rightarrow 252 \rightarrow 126 \rightarrow 63$$

3. Тепер ділимо на наступне просте число 3:

$$63 \rightarrow 21 \rightarrow 7.$$

4. Отримали просте число 7, отже факторизацію завершено,

Відповідь. $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$.

Задача 3.2. Добуток двох натуральних чисел, які не діляться на 10, дорівнює 10000. Знайти їх суму.

Розв'язання. Факторизуємо 10000: $10000 = 2^4 \cdot 5^4$.

Щоб його множники не ділилися на 10, потрібно, щоб вони факторизувалися або тільки на 2, або тільки на 5. Отже, це числа 16 та 625, а сума – **641**.

Відповідь. Сума дорівнює 641.

3.2 Ознаки подільності

У цілого числа n t -значною гранню називається t цифр із його правого краю (праворуч), наприклад, у числа 1234567 є такі грані:

1-значна грань – 7; 2-значна грань – 67; 3-значна грань – 567.

Таблиця 3.1 – Ознаки подільності

k	n
2	Парність числа n (1-значна грань числа n ділиться на 2)
3	Сума цифр числа n ділиться на 3
4	2-значна грань числа n , ділиться на 4
5	1-значна грань числа n дорівнює 0 або 5
6	Парність числа n , та сума його цифр ділиться на 3
7	<ul style="list-style-type: none"> • відокремити останню цифру числа. В результаті вийде два числа, одне з яких завжди менше 10; • менше число потрібно помножити на 2. • з більшого числа відняти отриманий добуток, якщо результат ділиться на 7, то і початкове число ділиться на 7.
8	3-значна грань числа n ділиться на 8
9	Сума цифр ділиться на 9 (9, 27, 54, 81, 162, 243, 18243)
10	1-значна грань числа n дорівнює 0
11	Знакозмінна сума цифр ділиться на 11

Задача 3.3. Чи ділиться дане число на 11: 1) 4856579; 2) 1234567895.

Розв'язання. 1) $4 - 8 + 5 - 6 + 5 - 7 + 9 = 2$, або розглядаємо дві суми:

$$S_1 = 4 + 5 + 5 + 9 = 23, \quad S_2 = 8 + 6 + 7 = 21 \quad \text{та} \quad S = 23 - 21 = 2.$$

Результат не ділиться на 11, тому і число 4856579 не ділиться на 11.

2) $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 + 9 - 5 = 0$, або розглядаємо дві суми:

$$S_1 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25, \quad S_2 = 2 + 4 + 6 + 8 + 5 = 25 \quad \text{та} \quad S = 25 - 25 = 0.$$

Результат ділиться на 11, тому і число 1234567895 ділиться на 11.

Відповідь. 1) 4856579 не ділиться на 11; 2) 1234567895 ділиться на 11.

Задача 3.4. Знайдіть найбільше парне трицифрове число.

Розв'язання. Найбільше трицифрове число 999 – непарне. Йому передує число 998. Отже найбільше парне трицифрове число 998.

Відповідь: найбільше парне трицифрове число 998.

Задача 3.5. Знайдіть найбільше чотирицифрове число, яке кратне 3, але не кратне 9.

Розв'язання. Найбільше чотирицифрове число 9999 – непарне. Воно ділиться і на 3 і на 9. Якщо це число зменшити на 3, то воно стане 9996 і буде кратним числу 3, але не кратне 9.

Відповідь: найбільше чотирицифрове число, яке кратне 3, але не кратне 9 є 9996.

Задача 3.6. Знайдіть серед чисел виду $3n + 1$ три числа, кратні 5.

Розв'язання. Для того, щоб число виду $3n + 1$ ділилося на 5, необхідно, щоб остання цифра була 0 або 5. Нехай ці числа закінчуються 0, тоді числа виду $3n$ повинні закінчуватися на 9 і ділитися на 3. Розглянемо ті, що задовольняють 1-шу вимогу: 9, 19, 29, 39, 49, 59, 69... Виберемо з них ті, що задовольняють і другій вимозі: 9, 39, 69. Отже серед чисел виду $3n + 1$ на 5 діляться числа: $9 + 1 = 10$, $39 + 1 = 40$, $69 + 1 = 70$.

Відповідь: 10, 40, 70.

Задача 3.7. Число $a+2$ ділиться на 5. Довести: $3a+16$ ділиться на 5.

Розв'язання. $3a + 16 = 3a + 6 + 10 = 3(a+2) + 10$. Кожен з доданків ділиться на 5, то й вся сума ділиться на 5.

Задача 3.8. Нехай a, b – натуральні числа, причому сума $6a + 11b$ ділиться на 31. Довести, що тоді число $a+7b$ також ділиться на 31.

Розв'язання. Розглянемо добуток $(a+7b) \times 6 = 6a+42b = (6a+11b)+31b$.
 $(a+7b) \times 6$ – ділиться на 31, то й $(6a+11b)+31b$ ділиться на 31. Отже, додатак $6a+11b$ повинен ділитися на 31.

Задача 3.9. Довести, що сума п'яти послідовних цілих чисел ділиться на 5.

Розв'язання. Число ділиться на 5, якщо воно закінчується 5 або 0. Послідовні цілі числа позначимо $n-3$; $n-2$; $n-1$; n ; $n+1$. Знайдемо їх суму
 $n-3 + n-2 + n-1 + n + n+1 = 5n - 5 = 5(n-1)$ ділиться на 5. бо $5 : 5$.

Задача 3.10. На дошці написано число 321321321321. Які цифри треба стерти, щоб отримати найбільше число, яке ділиться на 9?

Розв'язання. Для розв'язання задачі скористаємося ознакою подільності натуральних чисел на 9 : на 9 діляться ті і лише ті натуральні числа, сума цифр яких ділиться на 9. Сума цифр даного числа $a = 321321321321$ становить 24.

Найбільшим натуральним числом, яке не перевищує 24 і ділиться на 9, є число 18. Оскільки $24 - 18 = 6$, то в даному числі слід закреслити такі цифри, сума яких становить 6. Очевидно, що шукане число буде найбільшим, коли буде закреслена найменша кількість цифр. Оскільки в даному числі $a = 321321321321$ зустрічаються виключно цифри 1, 2 і 3 (кожна точно чотири рази), то найменша кількість цифр, що закреслюються у числі і сума яких дорівнює 6, становить 2, тобто, коли видаляються точно дві трійки. Отже, шукане число одержується із заданого в результаті закреслювання двох трійок. Оскільки в даному числі рівно чотири трійки (що займають 1-шу, 4-ту, 7-му та 10-ту позиції), то існує точно 6 різних способів закреслювання двох зазначених трійок.

Шукане число буде найбільшим в тому випадку, коли будуть викресленими трійки, що займають 7-му і 10-ту позиції, тобто ті, що відповідають меншим розрядним одиницям. Отже шуканим числом є число $321321\cancel{3}21\cancel{3}21 = 3213212121$.

Відповідь: задане число – 3213212121.

3.3 Нормалізація дійсного числа

Нехай є дійсне число $\alpha \in R$, його ціла частина $[\alpha]$ і дробова частина $\{\alpha\}$, $0 \leq \{\alpha\} < 1$ задовольняють виразам: $[\alpha] \leq \alpha < [\alpha] + 1$, $\{\alpha\} = \alpha - [\alpha]$. Тоді $\alpha = [\alpha] + \{\alpha\}$ називається **нормалізованим дійсним числом**.

Приклади: $5,8 = 5 + 0,8$,

$-7,3 = -8 + 0,7$ (вказівка: $\{\alpha\}$ повинна задовольняти умові $0 \leq \{\alpha\} < 1$),

$-0,7 = -1 + 0,3$ (те ж, що і в попередньому прикладі), $0,7 = 0 + 0,7$.

Властивості нормалізованого дійсного числа

Властивість 1. Нехай $\beta \in R$, $\beta > 1$, $d \in N$. Введемо функцію $\psi(\beta, d)$ – кількість натуральних чисел, що не більші, ніж β , дільником яких є d .

Тоді $\psi(\beta, d) = \left[\frac{\beta}{d} \right]$, тобто дорівнює цілій частині відношення β і d .

Задача 3.11. Визначити $\psi(\beta, d)$ для $\beta = 20$ і $d = 3$.

Розв'язання. Згідно властивості 1 маємо $\psi(\beta, d) = \left[\frac{\beta}{d} \right] = \left[\frac{20}{3} \right] = 6$.

Знайдемо їх: $\{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$. Як бачимо, їх **6**.

Властивість 2. $\left[\frac{\beta}{d} \right] = \left[\frac{[\beta]}{d} \right]$, $\beta \in R$, $\beta > 0$, $d \in N$.

Властивість 3. $[\alpha] - 2 \left[\frac{\alpha}{2} \right] \in \{0, 1\}$.

Теорема. Нехай $n \in N$, $n > p \in N$, і p – просте. Введемо число $m = \left[\frac{n}{p} \right] + \left[\frac{n}{p^2} \right] + \left[\frac{n}{p^3} \right] + \dots$. Тоді $n! : p^m$ і $n!$ не ділиться на p^{m+1} .

Задача 3.12. Знайти найбільше m таке, що $100! : 3^m$.

Розв'язання. $m = \left[\frac{100}{3} \right] + \left[\frac{100}{3^2} \right] + \left[\frac{100}{3^3} \right] + \dots = 33 + 11 + 3 + 1 = 48$.

Тобто згідно вищевведеної теореми $100! : 3^{48}$, але $100!$ вже не ділиться на 3^{49} , 3^{50} і так далі, тобто на числа 3^k , $k > 48$, тобто $m = 48$.

3.4. Математична індукція

Метод (принцип) математичної індукції

Нехай досліджувана властивість залежить від натурального числа n , тобто є його функцією. Надалі:

- 1) нехай для $n = 1$ вона є вірною;
- 2) припустимо, що ця властивість є вірною для $2, 3, \dots, k - 1$;
- 3) якщо можна довести, що вона є вірною для k , то вона є вірною і для будь-кого натурального числа n .

Задача 3.13. Довести, що $\forall n \in N \quad f(n) = (4^n + 15 \cdot n - 1) : 9$.

Доведення (методом математичної індукції).

1) для $k = 1$: $f(1) = (4^1 + 15 \cdot 1 - 1) : 9 = 18 : 9$;

2) припустимо, що для $k = n - 1$:

$$f(n-1) = (4^{n-1} + 15 \cdot (n-1) - 1) : 9 = 9 \cdot m;$$

3) переходячи до $k = n$, маємо: $f(n) = (4^n + 15 \cdot n - 1)$.

Спробуємо виразити $f(n)$ через $f(n-1)$:

$$f(n) = (4^n + 15 \cdot n - 1) = 4 \cdot 4^{n-1} + 15 \cdot (n-1) + 15 - 1.$$

Винесемо четвірку за дужки, а в дужках виділимо

$$f(n-1) = (4^{n-1} + 15 \cdot (n-1) - 1).$$

Щоб зберегти тотожність, треба із $4 \cdot f(n-1)$ відняти число $[45 \cdot (n-1) - 18]$. Покажемо це:

$$f(n) = 4 \cdot 4^{n-1} + 15 \cdot (n-1) + 15 - 1 = 4 \cdot \underbrace{(4^{n-1} + 15(n-1) - 1)}_{f(n-1)} - [45 \cdot (n-1) - 18].$$

Перевіряємо це розкриттям всіх дужок. Тоді маємо

$$f(n) = 4(4^{n-1} + 15(n-1) - 1) - [45 \cdot (n-1) - 18] = \underbrace{4 \cdot f(n-1)}_{(4 \cdot 9 \cdot m) : 9} - \underbrace{45 \cdot (n-1)}_{:9} + \underbrace{18}_{:9}.$$

Як видно, другий і третій член цього виразу справа діляться без остачі на 9 безумовно, а перший ділиться на 9 в силу нашого припущення (пункт 2). Тому і сума цих членів ділиться на 9, тобто

$$f(n) = \left[\underbrace{4 \cdot f(n-1)}_{(4 \cdot 9 \cdot m) : 9} - \underbrace{45 \cdot (n-1)}_{:9} + \underbrace{18}_{:9} \right] : 9.$$

Тоді згідно з принципом (методом) математичної індукції це справедливо при будь-якому n . \square

Задача 3.14. Довести методом математичної індукції, що різниця між кубом будь-якого числа і самим числом завжди ділиться на 3.

Доведення (спосіб 1). $n^3 - n = (n - 1) n (n + 1)$.

Доведення (спосіб 2). Потрібно показати, що вираз $n^3 - n$ при довільному натуральному n ділиться на 3.

1. Перевіряємо справедливість цього твердження при $n=2$.

При $n = 2$ $n^3 - n = 8 - 2 = 6$, тобто твердження справедливе.

2. Припустимо тепер, що вираз $k^3 - k$ ділиться на 3.

3. Тоді при $n = k + 1$ одержуємо:

$$(k+1)^3 - k - 1 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k - 1 = k^3 + 3k^2 + 3k - k = k^3 - k + 3(k^2 + k).$$

Вираз $k^3 - k$ ділиться на 3 по припущенню.

Вираз $3(k^2 + k)$ теж ділиться на 3.

Тому, і вся сума $k^3 - k + 3(k^2 + k)$ також ділиться на 3. Таким чином доведено, що вираз $n^3 - n$ ділиться на 3 при довільному n .

Задача 3.15. Доведіть, що для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ і $n > 4$ виконується нерівність $2^n > n^2$.

Доведення. 1. При $n = 5$ маємо вірну нерівність $2^5 > 5^2$.

2. Припустимо, що нерівність, яку треба довести, є правильною при $n = k$, тобто $2^k > k^2$, де $k \in \mathbb{N}$, $k > 4 \Rightarrow 2 \cdot 2^k > 2 \cdot k^2 \quad 2^{k+1} > 2k^2$.

3. Для $n = k + 1$: Треба довести: $2^{k+1} > (k + 1)^2$.

$2^{k+1} > 2k^2 = k^2 + k^2 > k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$, що і потрібно було довести.

Задача 3.16. Довести, що $\forall n \Rightarrow 4 \uparrow (2n - 1) + 1 \div 5$

Доведення. 1. Для $n = 1$: $4 \uparrow (2 \cdot 1 - 1) + 1 = 4 \uparrow 1 + 1 = 5 \div 5$.

2. Припустимо: $\forall n \in 2, 3, \dots, k - 1$ твердження є вірним, тому:

$$4 \uparrow (2 \cdot (k - 1) - 1) + 1 = 5 \cdot d$$

$$4 \uparrow (2 \cdot (k - 1) - 1) = 5 \cdot d - 1$$

3. Для $n = k$:

$$\begin{aligned} 4 \uparrow (2k - 1) + 1 &= 4 \uparrow ((2(k - 1) - 1) + 2) + 1 = 4 \uparrow (2 \cdot (k - 1) - 1) \cdot 4 \uparrow 2 + 1 = \\ &= (5 \cdot d - 1) \cdot 16 + 1 = 5 \cdot d - 16 + 1 = (5 \cdot d - 15) \div 5, \text{ що і п. б д.} \end{aligned}$$

Задача 3.17. Чи вірно: $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + 2020 \cdot 2020! = 2021! - 1$?

Доведення. 1) $1 \cdot 1! = 2! - 1$; $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! = 5$ та $3! - 1 = 5$;

2) припустимо: $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + 2019 \cdot 2019! = 2020! - 1$;

3) $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + 2020 \cdot 2020! = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + 2019 \cdot 2019! + 2020 \cdot 2020! = 2020! - 1 + 2020 \cdot 2020! = 2020! (2020 + 1) - 1 = 2021! - 1$.

3.5 Завдання за темою 3

Задача 1. Факторизувати такі числа:

- а) 83006;
- б) 3400;
- в) 32768;
- г) 510510.

Задача 2. Чи існує ціле число, добуток цифр якого є 594?

Задача 3. Чи існує ціле число, добуток цифр якого є 1330?

Задача 4. Чи може у натурального числа бути рівно три натуральних дільника?

Задача 5. Чи є число $41!$ квадратом натурального числа?

Задача 6. Довести двома способами (без використання методу математичної індукції та з її використанням), що квадрат непарного числа при діленні на 8 завжди дає остачу 1.

Задача 7. Довести двома способами (без використання методу математичної індукції та з її використанням), що сума квадратів двох послідовних натуральних чисел при діленні на 4 завжди дає остачу 1.

Задача 8. Довести без використання методу математичної індукції, що будь-яке просте число при діленні на 6 завжди дає остачі 1 або 5.

Задача 9. Довести без використання методу математичної індукції, що квадрат простого числа при діленні на 24 завжди дає остачу 1.

Задача 10. Довести двома способами (без використання методу математичної індукції та з її використанням), що якщо при діленні на 3 натуральне число дає остачу 2, то воно не може бути квадратом натурального числа.

Задача 11. Довести двома способами (без використання методу математичної індукції та з її використанням), що сума квадратів двох непарних чисел не може бути квадратом натурального числа.

Задача 12. Доведіть, що будь-яка натуральна степінь числа 15 при діленні на 7 дає остачу 1.

Задача 13. Доведіть, що будь-яке число вигляду $(2 \uparrow (2 \uparrow n)) + 1$ завжди закінчується цифрою 7.

Задача 14. Доведіть, що будь-яке число вигляду $(2 \uparrow (4 \uparrow n)) - 5$ завжди закінчується цифрою 1.

Задача 15. Використовуючи метод математичної індукції, доведіть, що для будь-якого натурального числа n є істинним наступне твердження: $6 \uparrow (2n-2) + 3 \uparrow (n+1) + 3 \uparrow (n-1)$ ділиться на 11.

Задача 16. Довести, що з будь-якому натуральному n число c ділиться на число b : $c = 2n \uparrow 3 + 3n \uparrow 2 + 7n$, $b = 6$.

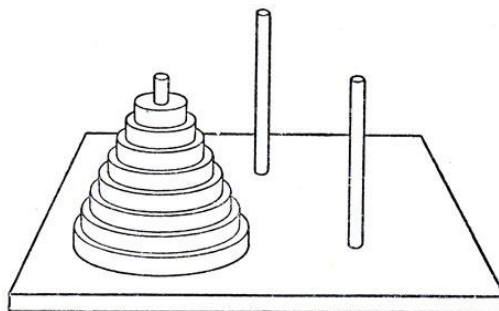
Задача 17. Довести: $p + (p+1) + (p+2) + \dots + (p+n) = (2p+n)(n+1)/2$

Задача 18. Довести нерівність: $2! \cdot 4! \cdot \dots \cdot (2n)! > [(n+1)!] \uparrow n$, $(n > 2)$.

Задача 19. Знайти суму: $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + 2021 \cdot 2021! + 2022 \cdot 2022!$

Задача 20. Довести нерівність Бернуллі для будь-якого натурального числа n та $(1+h) > 0$: $(1+h) \uparrow n > 1 + hn$.

Задача 21. Довести можливість розв'язання задачі «Ханойська башта» для будь-якої кількості кілець (на більше кладемо тільки менше, перекласти башту на інший стрижень).



Задача 22. У 1615 році козаки 12 куренів на бойових човнах розбили турецьке військо під Стамбулом та отримали викуп із різноманітних складових. Кожен із курінних отаманів має власну думку щодо поділу викупу на будь-яку кількість рівних частин. Чи можливо поділити викуп таким чином, щоб усі були задоволені (принцип запоріжців – всю здобич потрібно ділити порівну)?

Задача 23. $x + \frac{1}{x}$ – ціле число. Довести, що $x^n + \frac{1}{x^n}$ є цілим $\forall n$.

Задача 24. На дошці написані два числа: 1 та 1. Вписавши між ними суму (перший крок), отримаємо таку послідовність: 1, 2, 1. Повторивши цю операцію ще раз (другий крок), отримаємо таку послідовність: 1, 3, 2, 3, 1. На наступному (третьому) кроці отримаємо таку послідовність: 1, 4, 3, 5, 2, 5, 3, 4, 1. Якою буде сума всіх чисел після 2022 кроку? (підказка: на кроці n сума буде $3 \uparrow n + 1$, довести це за допомогою мат. інд.).

Задача 25. Перевірити за допомогою ознак подільності, чи має число a дільником число c :

$$a = 1234567890, \quad c = 3;$$

$$a = 1234567890, \quad c = 4;$$

$$a = 1234567890, \quad c = 5;$$

$$a = 1234567890, \quad c = 6;$$

$$a = 1234567890, \quad c = 9;$$

$$a = 1234567890, \quad c = 11.$$

Задача 26. Виконати без калькулятора множення на 11 числа 1234567890.

Задача 27. Довести ознаку подільності на число 37: маємо 2 тризначних числа, сума яких ділиться на 37; якщо одне дописати до іншого, то отримане шестизначне число ділиться на 37 (підказка: $1000=37\cdot 27+1$)

Задача 28. Довести, що різниця чисел, що мають однакову суму цифр, завжди ділиться на 9.

Задача 29. Представити числа $121,1$; $-121,1$; $0,1$ у нормалізованому вигляді:

Задача 30. Знайти кількість натуральних чисел, що не більші, ніж 1000, дільником яких є 7..

Задача 31. Що більше: $\left[\frac{1157,13}{141} \right]$ або $\left[\frac{1157}{141} \right]$?

Задача 32. Знайти найбільше m таке, що $124!$ ділиться на $5^{\uparrow m}$.

Задача 33. Розв'яжіть рівняння $[x] = 1 + 2\{x\}$.

Задача 34. Доведіть: $[x] + [x + 0,5] = 2[x]$.

Задача 35. Запишіть найменше 10-значне число в якому:

- (а) всі цифри є різними, і воно ділиться на 4;
- (б) всі цифри є різними, і воно ділиться на 25.

Задача 36. Чи ділиться число:

- (а) $11 \cdot 21 \cdot 31 \cdot \dots \cdot 91 - 1$ на 5?
- (б) $19 \cdot 29 \cdot 39 \cdot \dots \cdot 99 + 1$ на 5?

Задача 37. Відомо, що $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 35 = 10333147966386144929 * 66651337523200000000$. Знайдіть цифру, замінену зірочкою.

Задача 38. На дошці написано число, що складається лише з цифр 5 і 6 і поділяється на 9. У цього числа стерли останні три цифри. Виявилось, що одержане число також поділяється на 9. Доведіть, що початкове число не поділяється на 4.

Задача 39. Довести, що якщо $(11m + 4n)$ ділиться 6, то і $(m + 8n)$ ділиться на 6.

Задача 40. Чи може залишок від розподілу простого числа на 30 бути складовим числом?

Задача 41. Число $A = (19a + 20b)(20a + 19b)$. Цілі числа a та b підібрані так, що ділиться на 13. Довести, що A ділиться на 169.

Заняття 7-8 (тема 4)

Рівність за модулем

4.1 Визначення рівності за модулем

Def. Цілі числа a та b рівні за модулем m , якщо при діленні на m вони мають однакові остачі:

$$a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow \begin{cases} a = m \cdot q_1 + r, \\ b = m \cdot q_2 + r. \end{cases}$$

Приклад 4.1: $29 \equiv 65 \pmod{12}$. Перевірка виконується згідно з визначенням рівності чисел за модулем, тобто шляхом ділення обох чисел на $m = 12$ і порівняння остач від цього ділення. Рівність остач означає рівність чисел за модулем. Маємо: $29 = 12 \cdot 2 + 5$ и $65 = 12 \cdot 5 + 5$.

$$\begin{array}{ccccccccc} a & m & q_1 & r & b & m & q_2 & r \end{array}$$

Остачі від ділення цих чисел на $m = 12$ співпадають (і дорівнюють 5).

Приклад 4.2:

$35 \equiv 25 \pmod{5}$. Аналогічно: $35 = 5 \cdot 7 + 0$ і $25 = 5 \cdot 5 + 0$.

$$\begin{array}{ccccccccc} a & m & q_1 & r & b & m & q_2 & r \end{array}$$

Остачі від ділення цих чисел на $m = 5$ співпадають (і дорівнюють 0).

Приклад 4.3: $-27 \equiv 15 \pmod{7}$. Аналогічно: $-27 = 7 \cdot (-4) + 1$,

$$\begin{array}{ccccccccc} a & m & q_1 & r \end{array}$$

$15 = 7 \cdot 2 + 1$. Остачі від ділення цих чисел на $m = 7$ співпадають.

$$\begin{array}{ccccccccc} b & m & q_2 & r \end{array}$$

Твердження 1. Всі цілі числа дорівнюють одне одному за модулем 1, тобто $\forall a, b \in Z \quad a \equiv b \pmod{1}$.

Твердження 2. Із рівності чисел за модулем m випливає, що їх різниця ділиться на m , тобто $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow (a - b) : m$.

Використовуємо твердження 2 для розглянутих вище прикладів:

$$1) \quad 29 \equiv 65 \pmod{12} \Rightarrow 29 - 65 = -36 = (-3) \cdot 12 \quad (k = -3);$$

$$2) \quad 35 \equiv 25 \pmod{5} \Rightarrow 35 - 25 = 10 = 2 \cdot 5 \quad (k = 2);$$

$$3) \quad -27 \equiv 15 \pmod{7} \Rightarrow -27 - 15 = -42 = (-6) \cdot 7 \quad (k = -6).$$

4.2 Властивості рівності за модулем

Властивість 1. $a \equiv 0 \pmod{m} \Leftrightarrow a : m$.

Приклад 4.4. $1001 \equiv 0 \pmod{11} \Rightarrow 1001 : 11 \quad (1001 : 11 = 91)$.

Властивість 2. $a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow \begin{cases} (a - b) \equiv 0 \pmod{m}, \\ (a - b) : m. \end{cases}$

Приклад 4.5. $1002 \equiv 122 \pmod{11} \Rightarrow \begin{cases} 880 \equiv 0 \pmod{11}, \\ 880 : 11 \left(\frac{880}{11} = 80 \right). \end{cases}$

Властивість 3 (рефлексивність). $a \equiv a \pmod{m} \quad \forall m \in N$.

Приклад 4.6. $1002 \equiv 1002 \pmod{11} \Rightarrow 0 : 11$.

Властивість 4 (симетричність). $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow b \equiv a \pmod{m}$.

Приклад 4.7. $\underbrace{1002 \equiv 122 \pmod{11}}_{1002 - 122 = 880 : 11} \Rightarrow \underbrace{122 \equiv 1002 \pmod{11}}_{122 - 1002 = -880 : 11}$.

Властивість 5 (транзитивність).
$$\left. \begin{array}{l} a \equiv b \pmod{m} \\ b \equiv c \pmod{m} \end{array} \right\} \Rightarrow a \equiv c \pmod{m}.$$

Приклад 4.8. Перевірити транзитивність рівнянь за модулем для трьох чисел 1002, 122 і 386.

Спочатку виписуємо вираз, що підлягає перевірці:

$$\left. \begin{array}{l} 1002 \equiv 122 \pmod{11} \\ 122 \equiv 386 \pmod{11} \end{array} \right\} \Rightarrow 1002 \equiv 386 \pmod{11}.$$

Потім виконуємо саму перевірку, за логікою доказу властивості 5:

$$\begin{aligned} & \left. \begin{array}{l} 1002 - 122 = 80 \cdot 11 \\ + 122 - 386 = (-24) \cdot 11 \end{array} \right\} \Rightarrow \underbrace{1002 - 386}_{616} = \underbrace{(80 - 24)}_{56} \cdot 11 \Rightarrow \\ & \Rightarrow 1002 - 386 \equiv 0 \pmod{11} \Rightarrow 1002 \equiv 386 \pmod{11}. \end{aligned}$$

Властивість 6. $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} k \cdot a \equiv k \cdot b \pmod{m}, \\ k \cdot a \equiv k \cdot b \pmod{k \cdot m}. \end{array} \right.$

Приклад 4.9. $1002 \equiv 122 \pmod{11} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 5010 \equiv 610 \pmod{11}, \\ 5010 \equiv 610 \pmod{55}; \end{array} \right. \quad (k = 5).$

Властивість 7. $\left. \begin{array}{l} a \equiv b \pmod{m} \\ c \equiv d \pmod{m} \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a \pm c \equiv b \pm d \pmod{m}, \\ a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod{m}, \\ a^n \equiv b^n \pmod{m}. \end{array} \right.$

Приклад 4.10.

$$\left. \begin{array}{l} \underbrace{(32-10):11}_{32 \equiv 10 \pmod{11}} \quad (2) \\ \underbrace{3 \equiv 14 \pmod{11}}_{(3-14):11 \quad (-1)} \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} (+) \quad 35 \equiv 24 \pmod{11} \\ (-) \quad 29 \equiv -4 \pmod{11} \\ (\times) \quad 96 \equiv 140 \pmod{11} \\ (x^n) \quad 32^2 \equiv 10^2 \pmod{11} \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (35 - 24):11 \quad (1) \\ (29 + 4):11 \quad (3) \\ (96 - 140):11 \quad (4) \\ (1024 - 100):11 \quad (84) \end{array} \right]$$

Властивість 8. Нехай є функція $f(x) = \sum_{k=1}^n c_k x^k$, $\forall c_k \in Z$. Тоді вірно:

$$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow f(a) \equiv f(b) \pmod{m}.$$

Приклад 4.11. Дано $3 \equiv 7 \pmod{4}$; $f(x) = x^2 - 5x + 3$. Перевірити властивість 8.

Виконуємо розрахунок функції при обох значеннях аргументу (3 і 7):

$$f(3) = 3^2 - 5 \cdot 3 + 3 = -3, \quad f(7) = 7^2 - 5 \cdot 7 + 3 = 17.$$

Перевіряємо рівність цих значень за модулем 4. $-3 \equiv 17 \pmod{4}$.

Дійсно, маємо $-3 - 17 = -20 : 4$.

Властивість 9. $\left. \begin{array}{l} a \equiv b \pmod{m} \\ m : d \end{array} \right\} \Rightarrow a \equiv b \pmod{d}.$

Приклад 4.12. $\left. \begin{array}{l} \overbrace{3 \equiv 7 \pmod{4}}^{(3-7):4} \\ 4 : 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \underbrace{3 \equiv 7 \pmod{2}}_{(3-7):2}.$

Наслідок 1. Будь-який доданок у рівності за модулем переноситься з протилежним знаком в іншу частину:

$$\text{Приклад 4.13. } 1002 \equiv 122 \pmod{11} \Leftrightarrow 1002 - 122 \equiv 0 \pmod{11}$$

Наслідок 2. У рівності за модулем можна відкидати і додавати складові, що діляться на модуль:

Приклад 4.14. $123 \equiv 68 \pmod{11}$. Спочатку перевіряємо вірність рівності за модулем: $123 - 68 = 55 : 11$, або $55 \equiv 0 \pmod{11}$. Далі перевіряємо наслідок 2: віднімемо з лівої частини $11 \times 11 = 121$, та $3 \times 11 = 33$ із правої частини. При цьому тотожність зберігається.

$$\text{Наслідок 3. } a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow \overbrace{(a, m)}^{\text{НСД}} = \overbrace{(b, m)}^{\text{НСД}}.$$

Наслідок 4.

$$\left. \begin{array}{l} a \equiv b \pmod{m_1} \\ a \equiv b \pmod{m_2} \\ \dots \\ a \equiv b \pmod{m_k} \end{array} \right\} \Rightarrow a \equiv b \pmod{M}, \text{ где } M = \underbrace{[m_1, m_2, \dots, m_k]}_{\text{НОК}}.$$

Задача 4.1. Відомо, що $y \equiv 5 \pmod{12}$. Знайти такі y .

Розв'язання. Ці $y \in Z$ – числа, остача від ділення яких на 12 дорівнює 5. Рівняння: $y = 5 + 12t$, $t \in Z$, тобто $y = \{\dots, -19, -7, 5, 17, \dots\}$.

Відповідь: $y = \{\dots, -19, -7, 5, 17, \dots\}$

Задача 4.2. Знайти, за якими модулями m є вірною рівність $37 \equiv 21 \pmod{m}$.

Розв'язання. Знаходимо $37 - 21 = 16 : m$. Отже, треба знайти всі дільники числа 16. Це числа 1, 2, 4, 8, 16.

Відповідь: $m = 1, 2, 4, 8, 16$.

Задача 4.3. Знайти найменше натуральне чотиризначне число, рівне 23 за модулем 101.

Розв'язання. Складемо рівняння, якому задовольняють всі чотириохзначні натуральні числа, рівні 23 за модулем 101:

$$1000 + t \equiv 23 \pmod{101}, t \geq 0.$$

Врахуємо, що $1000 = -10 \pmod{101}$, тому що $1010 : 101$.

Тоді початковий вираз рівносильний такому: $-10 + t \equiv 23 \pmod{101}$, отже $t \equiv 33 \pmod{101}$. Тоді найменше t , що задовольняє умові, є $t = 33$. А шукане число дорівнює 1033.

Відповідь: 1033 – найменше натуральне чотиризначне число, рівне 23 за модулем 101.

4.3 Класи лишків

Def. Множина всіх чисел, що є рівними a за модулем m , називається **класом лишків a за модулем m** (классом вычетов a по модулю m) та позначається таким чином: $[a]_m = \bar{a}_m$.

Наслідок. $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow \bar{a}_m = \bar{b}_m$ (класи лишків за модулем m співпадають для чисел, що є рівними за цим модулем).

Будь-яке число із \bar{a}_m називається **лишком a за модулем m** .

Приклади:

$$1) \bar{2}_5 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv 2 \pmod{5}\} = \{\dots, -13, -8, -3, 2, 7, 12, \dots\}.$$

$$2) 56 \in \bar{6}_{10} = [6]_{10} = \bar{6} \pmod{10}.$$

Дії із класами лишків за модулем m .

$$\bar{a}_m + \bar{b}_m = \left(\overline{a+b} \right)_m = \underbrace{\left(\overline{a+b} \right)}_{\text{клас лишків суми}} \pmod{m};$$

$$\bar{a}_m \cdot \bar{b}_m = \left(\overline{a \cdot b} \right)_m = \underbrace{\left(\overline{a \cdot b} \right)}_{\text{клас лишків добутку}} \pmod{m}.$$

4.4 Властивості класів лишків

Властивість 1. $\bar{a}_m = \bar{b}_m \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{m}$ (див. наслідок із визначення класу лишків).

Властивість 2. Кожен клас лишків має нескінченну потужність (нескінченне число елементів).

Властивість 3. Число класів лишків за модулем m дорівнює m (тому що остача від ділення на m може приймати усього m значень: $0, 1, 2, \dots, m-2, m-1$).

Властивість 4. Число класів лишків за модулем m , взаємно простих із m , дорівнює функції Ейлера $\varphi(m)$ (за визначенням).

Властивість 5. Числа класу $[a]_m$ створюють k класів за модулем $k \cdot m$: $\bar{a}_{k \cdot m}, \overline{(a+m)}_{k \cdot m}, \dots, \overline{(a+(k-1) \cdot m)}_{k \cdot m}$.

Повною системою лишків (ПСЛ) називається множина чисел, у якій є по одному із кожного класу даного модуля.

Приклад 4.12.

Для $m = 5$ існує 5 класів лишків (оскільки остача від ділення на 5 приймає п'ять значень: $0, 1, 2, 3, 4$). Отже, і ПСЛ за модулем 5 має п'ять елементів. Наприклад, $\{5, 6, 2, 3, 34\}$. Дійсно:

$$5 \equiv 0 \pmod{5}; 6 \equiv 1 \pmod{5}; 2 \equiv 2 \pmod{5}; 3 \equiv 3 \pmod{5}; 34 \equiv 4 \pmod{5}.$$

Найпростіша повна система лишків (НПСЛ) за модулем m – це ПСЛ, у якій всі елементи є невід'ємними лишками, меншими ніж m .

Приклад 4.13. Для $m = 5$ НПСЛ є такою: $0, 1, 2, 3, 4$.

Приведена система лишків (ПрСЛ) – це система елементів ПСЛ, взаємно простих із модулем.

Приклад 4.14. Визначимо такі ПрСД. Для $m = 12 : \{1, 5, 7, 11\}$. Для $m = 5 : \{1, 2, 3, 4\}$.

Задача 4.4. Довести, що $2^{5n} - 1$ при будь-якому числі n ділиться на 31.

$2^5 \equiv 1 \pmod{31}$, піднесемо це рівняння за модулем до степеню n :

$2^{5n} \equiv 1^n \pmod{31}$, тоді $2^{5n} - 1 \equiv 0 \pmod{31}$, що і потрібно було довести.

Задача 4.5. Знайти остачу від ділення $a = 33^6 \cdot 37^2 + 31^7 \cdot 34^4$ на 32.

Розв'язання.

$33 \equiv 1 \pmod{32}$; $37 \equiv 5 \pmod{32}$; $31 \equiv 31 \pmod{32} \equiv -1 \pmod{32}$;

$34 \equiv 2 \pmod{32}$; $a \equiv (1^6 \cdot 5^2 + (-1)^7 \cdot 2^4) \pmod{32} \equiv (25 - 16) \equiv 9 \pmod{32}$.

Відповідь. Остача дорівнює 9.

Задача 4.6. Знайти остачу від ділення $f(168)$ на 13, якщо $f(x)$ задана.

Розв'язання. $f(x) = 15x^7 + 25x^5 + 65x^2 + 15x + 174$.

$168 \equiv -1 \pmod{13}$; $174 \equiv 5 \pmod{13}$; $f(168) \equiv (15(-1)^7 + 25(-1)^5 + 65(-1)^2 + 15(-1) + 5) \pmod{13} \equiv 15 \pmod{13} \equiv 2$

Відповідь. Остача дорівнює 2.

4.5 Завдання за темою 4

Завдання 1. Які рівності за модулем є вірними:

1.1. $1 \equiv -5 \pmod{6}$.

1.2. $546 \equiv 0 \pmod{13}$.

1.3. $2^8 \equiv 1 \pmod{4}$.

1.4. $3m \equiv -1 \pmod{m}$ для парних m .

Завдання 2. Довести, що рівність за модулем є вірною:

2.1. $121 \equiv 13145 \pmod{2}$.

2.2. $121347 \equiv 92817 \pmod{10}$.

2.3. $31 \equiv -9 \pmod{10}$.

2.4. $(m-1)^2 \equiv 1 \pmod{m}$.

2.5. $2m+1 \equiv (m+1)^2 \pmod{m}$.

Завдання 3. Довести, що рівність за модулем є невірною,

використовуючи НСД: $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow \overbrace{(a, m)}^{\text{НСД}} = \overbrace{(b, m)}^{\text{НСД}}$

3.1. $5^{2022} \equiv 2022 \pmod{25}$

3.2. $7^3 \equiv 3 \pmod{27}$

3.3. $4^{2022} \equiv 5^{2022} \pmod{10}$

3.4. $(2m+1) \cdot (2n+1) \equiv 2k \pmod{6}$

Завдання 4. При діленні на 11 число x надає остачу 9. Записати для таких чисел рівняння за модулем та параметричний вигляд чисел.

Завдання 5. Для яких натуральних m є вірною рівність за модулем:

5.1. $20 \equiv 8 \pmod{m}$?

5.2. $122 \equiv 1 \pmod{m}$?

5.3. $3p+1 \equiv (p+1) \pmod{m}$, p – просте число?

Завдання 6. Відомо, що серед всіх можливих значень рівності за модулем $a \pmod{m}$ треба обрати такі: x – мінімальне невід'ємне, y –

максимальне від'ємне, z – мінімальне за абсолютною величиною.

Заповніть таблицю для :

6.1. $m=5$, a – у верхньому рядку: $a \pmod{5}$

a	3	17	35	-21	21
x					
y					
z					

6.2. m – у верхньому рядку, $a=200$ ($200 \pmod{m}$)

m	3	7	12	100	121
x					
y					
z					

Завдання 7. Записати у вигляді рівностей за модулем всі класи лишків за модулем 10. Скільки їх?

Завдання 8. Записати такі класи лишків:

7.1. Взаємно простих з модулем 10.

7.2. Тих, що мають з 10 НСД = 2.

7.3. Тих, що мають з 10 НСД = 5.

7.4. Тих, що мають з 10 НСД = 10.

Завдання 8. За яким модулем числа складають повну систему лишків?

8.1. $\{-20, -4, 22, 18, -1\}$.

8.1. $\{20, 31, -8, -5, 25, 14, 8, -1, 13, 6\}$.

Список рекомендованої літератури

1. Клесов, О. І. Елементарна теорія чисел: підручник. Київ : НТУУ "КПІ", ТВіМС, 2016. 412 с. URL: <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/30046>
2. Оглобліна О. І., Сушко Т. С., Шрамко С. В. Елементи теорії чисел : навч. посібник. Суми: МОН України, Сумський державний університет, URL: 2015. <https://essuir.sumdu.edu.ua/handle/123456789/42788>
3. Тменова Н. П. Дискретна математика : теорія множин і відношень : навч. посібник. Київ : ВПЦ КНУ ім. Шевченка, 2018. 103 с. URL: https://pdf.lib.vntu.edu.ua/books/2020/Tmenova_2018_103.pdf
4. Гутік О. Дискретна математика в задачах і прикладах. Львів : НУ ЛП, 2021. URL: https://new.mmf.lnu.edu.ua/wp-content/uploads/2017/11/Discrete_Math.pdf
5. Гиря Н. П., Заварзіна О. О., Каролінський Є. О., Полякова Л. Ю. Елементи теорії чисел : навчально-методичний посібник. Харк. нац. ун.т ім. В.Н. Каразіна, 2024. 48 с. URL: <https://ekhnuir.karazin.ua/handle/123456789/18423>
6. Федак І.В. Курс лекцій з функціонального аналізу та теорії міри. Навчальний посібник. Ч.1. Вимірні множини та вимірні функції. – Івано-Франківськ: ПНУ імені Василя Стефаника, 2020. 52с.
7. Ivan M. Niven, Herbert S. Zuckerman, Hugh L. Montgomery. An introduction to the theory of numbers. John Wiley & Sons, 2018. ISBN :978-8-12-651811-1.
8. Kenneth Ireland, Michael Rosen. A Classical Introduction to Modern Number Theory. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2018. ISBN : 978-0387973296.
9. Kieth Devlin. The Joy of Sets: Fundamentals of Contemporary Set Theory. 2. Springer (Undergraduate Texts in Mathematics), 2014. 194 с. ISBN : 978-0387940946.
10. Paul R. Halmos. Naive set theory. Martino Fine Books, 2015. 114 с. ISBN : 978-1614271314.
11. Коваленко А. А., Кучук Г. А. Методи синтезу інформаційної та технічної структур системи управління об'єктом критичного застосування. *Сучасні інформаційні системи*. 2018. Т. 2, № 1. С. 22–27. DOI: <https://doi.org/10.20998/2522-9052.2018.1.04>
12. Свиридов А. С., Коваленко А. А., Кучук Г. А. Метод перерозподілу пропускну здатності критичної ділянки мережі на основі удосконалення ON/OFF-моделі трафіку. *Сучасні інформаційні системи*. 2018. Т. 2, № 2. С. 139–144. DOI: <https://doi.org/10.20998/2522-9052.2018.2.24>
13. Yaloveha V., Podorozhniak A., Kuchuk H. Convolutional neural network hyperparameter optimization applied to land cover classification. *Radioelectronic and computer systems*. 2022. No. 1. С. 115–128. DOI: <https://doi.org/10.32620/reks.2022.1.09>
14. Kuchuk, H., Kovalenko, A., Ibrahim, B.F., Ruban, I. Adaptive compression method for video information. *International Journal of Advanced Trends in Computer Science and Engineering*/ 2019. Vol. 8(1). P. 66–69, doi: <http://dx.doi.org/10.30534/ijatcse/2019/1181.22019>

15. Kovalenko, A., Kuchuk, H., Kuchuk, N., Kostolny, J. Horizontal scaling method for a hyperconverged network. *2021 International Conference on Information and Digital Technologies (IDT)*, Zilina, Slovakia, 2021. doi: <https://doi.org/10.1109/IDT52577.2021.9497534>
16. Худов В.Г., Кучук, Г.А., Маковейчук, О.М., Крижний А.В. Аналіз відомих методів сегментування зображень, що отримані з бортових систем оптикоелектронного спостереження. *Системи обробки інформації*. 2016. Вип. 9 (146). С. 77-80. URL: http://nbuv.gov.ua/UJRN/soi_2016_9_18
17. Кучук Г.А., Коваленко, А.А., Лукова-Чуйко Н.В. Метод мінімізації середньої затримки пакетів у віртуальних з'єднаннях мережі підтримки хмарного сервісу. *Системи управління, навігації та зв'язку*. Полтава: ПНТУ, 2017. Вип. 2(42). С. 117-120. URL: http://nbuv.gov.ua/UJRN/suntz_2017_2_32
18. Kuchuk, G., Nechausov, S., Kharchenko, V. (Two-stage optimization of resource allocation for hybrid cloud data store. *International Conference on Information and Digital Technologies*, Zilina. 2015. P. 266-271. DOI: <http://dx.doi.org/10.1109/DT.2015.7222982>
19. Kuchuk G., Kovalenko A., Komari I.E., Svyrydov A., Kharchenko V. Improving Big Data Centers Energy Efficiency: Traffic Based Model and Method. In: Kharchenko V., Kondratenko Y., Kasprzyk J. eds) *Green IT Engineering: Social, Business and Industrial Applications. Studies in Systems, Decision and Control*. 2019. Vol. 171. Springer, Cham., DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-00253-4_8
20. Yaloveha, V., Hlavcheva, D., Podorozhniak, A., Kuchuk, H. Fire hazard research of forest areas based on the use of convolutional and capsule neural networks. *2019 IEEE 2nd Ukraine Conference on Electrical and Computer Engineering, UKRCON 2019 – Proceedings*. 2019. DOI: <http://dx.doi.org/10.1109/UKRCON.2019.8879867>
21. Svyrydov, A., Kuchuk, H. and Tsiapa, O. Improving efficiency of image recognition process: Approach and case study. *Proc. of 2018 IEEE 9th Int. Conf. on Dependable Systems, Services and Technologies, DESSERT 2018*. P. 593–597, DOI: <https://doi.org/10.1109/DESSERT.2018.8409201>
22. Mukhin, V., Kuchuk, N., Kosenko, N., Artiukh, R., Yelizyeva, A., Maleyeva, O., Kuchuk, H., Kosenko, V. Decomposition Method for Synthesizing the Computer System Architecture. *Advances in Intelligent Systems and Computing*. 2020. Vol. 938. P. 289–300. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-16621-2_27
23. Hlavcheva, D., Yaloveha, V., Podorozhniak, A., Kuchuk, H. Comparison of CNNs for Lung Biopsy Images Classification. *2021 IEEE 3rd Ukraine Conference on Electrical and Computer Engineering, UKRCON 2021 – Proceedings*. P. 1–5, doi: <https://doi.org/10.1109/UKRCON53503.2021.9575305>
24. Kovalenko, A., Kuchuk, H. Methods to Manage Data in Self-healing Systems. *Studies in Systems, Decision and Control*, 2022. Vol. 425. P. 113–171. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-96546-4_3
25. Dotsenko, N., Chumachenko, I., Galkin, A., Kuchuk, H., Chumachenko, D. Modeling the Transformation of Configuration Management Processes in a Multi-Project Environment. *Sustainability (Switzerland)*. 2023. Vol. 15(19). 14308, DOI: <https://doi.org/10.3390/su151914308>

26. Petrovska, I., Kuchuk, H. Adaptive resource allocation method for data processing and security in cloud environment. *Advanced Information Systems*. 2023. Vol. 7(3). P. 67–73, DOI: <https://doi.org/10.20998/2522-9052.2023.3.10>

27. Hunko, M., Tkachov, V., Kuchuk, H., Kovalenko, A. Advantages of Fog Computing: A Comparative Analysis with Cloud Computing for Enhanced Edge Computing Capabilities, *2023 IEEE 4th KhPI Week on Advanced Technology, KhPI Week 2023 - Conference Proceedings*, 02-06 October 2023. Code 194480. DOI: <https://doi.org/10.1109/KhPIWeek61412.2023.10312948>

28. Kuchuk, N., Mozhaiev, O., Semenov, S., Haichenko, A., Kuchuk, H., Tiulieniev, S., Mozhaiev, M., Davydov, V., Brusakova, O., Gnusov, Y. Devising a method for balancing the load on a territorially distributed foggy environment. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2023. Vol. 1(4 (121)). P. 48–55, DOI: <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2023.274177>

29. Petrovska, I., Kuchuk, H., Mozhaiev, M. Features of the distribution of computing resources in cloud systems. *2022 IEEE 4th KhPI Week on Advanced Technology. KhPI Week 2022 - Conference Proceedings*, 03-07 October 2022, Code 183771, DOI: <https://doi.org/10.1109/KhPIWeek57572.2022.9916459>

30. Petrovska, I., Kuchuk, H., Kuchuk, N., Mozhaiev, O., Pochebut, M., Onishchenko, Yu. Sequential Series-Based Prediction Model in Adaptive Cloud Resource Allocation for Data Processing and Security. *2023 13th Int. Conf. on Dependable Systems, Services and Technologies (DESSERT 2023)*. Athens, Greece. DOI: <https://doi.org/10.1109/DESSERT61349.2023.10416496>

31. Kuchuk, H., Malokhvii, E. Integration of IOT with Cloud, Fog, and Edge Computing: A Review. *Advanced Information Systems*. 2024. Vol. 8(2). P. 65–78, DOI: <https://doi.org/10.20998/2522-9052.2024.2.08>

32. Hlavcheva, D., Yaloveha, V., Podorozhniak, A., Kuchuk, H. Tumor nuclei detection in histopathology images using R – CNN. *CEUR Workshop Proceedings*, 2020. 2740. P. 63–74. URL: <https://ceur-ws.org/Vol-2740/20200063.pdf>

33. Kuchuk, H., Mozhaiev, O., Kuchuk, N., Tiulieniev, S., Mozhaiev, M., Gnusov, Y., Tsuranov, M., Bykova, T., Klivets, S., Kuleshov, A. Devising a method for the virtual clustering of the Internet of Things edge environment. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2024. Vol. 1, no. 9 (127). P. 60–71, DOI: <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2024.298431>

34. Kuchuk, N., Mohammed, A. S., Shyshatskyi, A., Nalapko, O. The method of improving the efficiency of routes selection in networks of connection with the possibility of self-organization. *International Journal of Advanced Trends in Computer Science and Engineering*, 2019. Vol. 8(1). P. 1–6. DOI: <https://doi.org/10.30534/ijatcse/2019/0181.22019>

35. Кучук Г. А., Кіріллов І. Г., Пашнєв А. А. Моделювання трафіка мультисервісної розподіленої телекомунікаційної мережі. *Системи обробки інформації*. 2006. Вип. 9. С. 50–59. URL: http://nbuv.gov.ua/UJRN/soi_2006_9_15

36. Dun B., Zakovorotnyi, O., Kuchuk, N. Generating currency exchange rate data based on Quant-Gan model. *Advanced Information Systems*. 2023. Vol. 7, no. 2. P. 68–74. DOI: <http://dx.doi.org/10.20998/2522-9052.2023.2.10>

37. Gomathi, B., Saravana Balaji, B., Krishna Kumar, V., Abouhawwash, M., Aljahdali, S., Masud, M., Kuchuk, N. Multi-Objective Optimization of Energy Aware Virtual Machine Placement in Cloud Data Center. *Intelligent Automation and Soft Computing*. 2022. Vol. 33(3). P. 1771–1785. DOI: <http://dx.doi.org/10.32604/iasc.2022.024052>
38. Kuchuk, N., Kovalenko, A., Ruban, I., Shyshatskyi, A., Zakovorotnyi, O., Sheviakov, I. Traffic Modeling for the Industrial Internet of NanoThings. 2023 IEEE 4th KhPI Week on Advanced Technology, KhPI Week 2023 – Conf. Proc. doi: <http://dx.doi.org/10.1109/KhPIWeek61412.2023.10312856>
39. Shmatko, O., Kolomiitsev, O., Rekova, N., Kuchuk, N., Matvieiev, O. Designing and evaluating dl-model for vulnerability detection in smart contracts. *Advanced Information Systems*. 2023. Vol. 7(4)/ P. 41–51, doi: <https://doi.org/10.20998/2522-9052.2023.4.05>
40. Attar, H., Khosravi, M.R., Igorovich, S.S., Georgievan, K.N., Alhihi, M. Review and performance evaluation of FIFO, PQ, CQ, FQ, and WFQ algorithms in multimedia wireless sensor networks. *International Journal of Distributed Sensor Networks*, 16(6). 2020. DOI: <https://doi.org/10.1177/1550147720913233>
41. Зиков І. С., Кучук Н. Г., Шматков С. І. Синтез архітектури комп'ютерної системи управління транзакціями e-learning. *Сучасні інформаційні системи*. 2018. Т. 2, № 3. С. 60–66. DOI: <https://doi.org/10.20998/2522-9052.2018.3.10>
42. Kuchuk N., Shefer O., Cherneva G., Alnaeri F. A. Determining the capacity of the self-healing network segment. *Advanced Information Systems*. 2021. Vol. 5, no. 2. P. 114–119. DOI: <https://doi.org/10.20998/2522-9052.2021.2.16>
43. Nechausov A., Mamusuç I., Kuchuk N. Synthesis of the air pollution level control system on the basis of hyperconvergent infrastructures. *Сучасні інформаційні системи*. 2017. Т. 1, № 2. С. 21 – 26. DOI: <https://doi.org/10.20998/2522-9052.2017.2.04>
44. Кучук Н. Г., Мерлак В. Ю., Скороделов В. В. Метод зменшення часу доступу до слабкоструктурованих даних. *Сучасні інформаційні системи*. 2020. Т. 4, № 1. С. 97-102. DOI: <https://doi.org/10.20998/2522-9052.2020.1.14>
45. Gadetska S., Dubnitskiy V., Khodyrev A., Kushneruk Y. Excel-oriented calculator for calculating results of entropy analysis of data distributed by categories. *Advanced Information Systems*. 2023. Vol. 7, no. 2. P. 28–40. DOI: <https://doi.org/10.20998/2522-9052.2023.2.05>
46. Gadetska S., Dubnitskiy V., Kushneruk Y., Ponochovnyi Y., Khodyrev A. Simulation of exchange processes in multi-component environments with account of data uncertainty. *Advanced Information Systems*. 2024. Vol. 8, no. 1. P. 12–23. DOI: <https://doi.org/10.20998/2522-9052.2024.1.02>
47. Dubnitskiy V., Kobylin A., Kobylin O., Kushneruk Y., Khodyrev A. Calculation of harrington function (desirability function) values under interval determination of its arguments. *Advanced Information Systems*. 2023. Vol. 7, no. 1. P. 71–81. DOI: <https://doi.org/10.20998/2522-9052.2023.1.12>

Навчальне видання

КУЧУК Георгій Анатолійович
ФІЛОНЕНКО Алевтина Михайлівна

Алгебра програмування

Методичні вказівки до практичних занять

Відповідальний за випуск *О. Ю. Заковоротний*
Роботу до видання рекомендував *М. Й. Заповловський*

План 2024 р., п. 132

Підп. до друку 15.02.2024

Видавничий центр НТУ «ХПІ»
61002, Харків, вул. Кирпичова, 2.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 5478 від 21.08.2017 р.

Електронне видання