

симости от температуры (рис.2.)

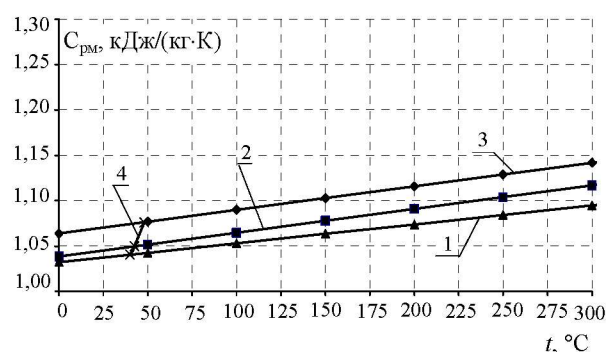


Рис.2. Теплоемкость рабочего тела на такте сжатия при изменении нагрузки по нагрузочной характеристике при $n=3000 \text{ мин}^{-1}$

1– изменение C_{pm} при нагрузке $P_e=0,15$ МПа; 2 – изменение C_{pm} при нагрузке $P_e = 0,31$ МПа; 3 – изменение C_{pm} при нагрузке $P_e = 0,41$ МПа; 4 – изменение C_{pm} по нагрузочной характеристике в момент закрытия выпускного окна

Представленные на рис. 2. интерполяционные зависимости описывают изменение истинной массовой изобарной теплоемкости рабочего тела в карбюраторном двигателе. При построении зависимостей (рис. 2) уровень величины достоверности аппроксимации составил $R^2 = 1$. Представленная на рис. 2. интерполяционная зависимость 4 ($C_{pm} = 0,8586 + 0,0045 \cdot t$ при $R^2 = 0,9953$) отображает увеличение теплоемкости рабочего тела на такте сжатия с ростом нагрузки от $P_e = 0,15$ МПа до $P_e = 0,41$ МПа и позволяет определить значения истинной массовой изобарной теплоемкости в интервале изменения нагрузки.

Направление дальнейших исследований

Истинная массовая изобарная теплоемкость топливоздушной смеси зависит от изменения суммарного коэффициента избытка воздуха, наличия продуктов сгорания в свежей смеси и их состав, что влияет на протекание процессов сгорания. Поэтому направление дальнейших исследований целесообразно проводить на обедненных и расслоенных топ-

ливовоздушных смесях, что предопределяется организацией внутреннего смесеобразования.

Выводы:

1. Определены значения коэффициента остаточных газов от $\gamma = 0,25$ при $P_e = 0,14$ МПа до $\gamma = 0,166$ при $P_e = 0,41$ МПа для двухтактного двигателя ДН-4 при работе по нагрузочной характеристике при $n = 3000 \text{ мин}^{-1}$.

2. Получены интерполяционные формулы для определения истинной массовой изобарной теплоемкости смеси газов в цилиндре двигателя ДН-4 на такте сжатия при работе по нагрузочной характеристике при $n = 3000 \text{ мин}^{-1}$ и внешнем смесеобразовании.

3. Полученные значения истинной массовой изобарной теплоемкости могут быть использованы при трехмерном моделировании газодинамической обстановки в двигателе для последующего использования в процессах газообмена, сжатия, смесеобразование и последующего сгорания.

Список литературы:

1. Двигатели внутреннего сгорания: учебник для вузов / [А.С. Хачиян, К.А. Морозов, В.Н. Луканин и др.] – М.: Высшая школа, 1985. – 311 с.
2. Двигатели внутреннего сгорания: устройство и работа поршневых и комбинированных двигателей / под ред. А.С. Орлина, М.Г. Круглова. – М.: Машиностроение, 1980. – 288 с.
3. Krzysztof Z. Mendera. Thermodynamic properties of working fluid of internal combustion engine / Krzysztof Z. Mendera // Journal of KONES internal combustion engine. – 2004. – №3–4. С.53–60.
4. Krzysztof Z. Mendera. Thermodynamic analysis of spark ignition engine pressure data / Krzysztof Z. Mendera // Journal of KONES internal combustion engine. – 2004. – №3–4. С.45–52.
5. Лебедев С.Е. Исследование продувки двухтактного двигателя методом газовых анализов / С.Е. Лебедев, М.С. Ховах // Дизелестроение. – 1940. – №1,2.
6. Антонов И.В. Методика экспериментального исследования процессов газообмена в двухтактном двигателе / И.В. Антонов // Двигатели внутреннего сгорания. – 1997. – Вып. № 56–57. – С.82–86.
7. Рабинович О.М. Сборник задач по технической термодинамике / Рабинович О.М. – М.: Машиностроение, 1969. – 376 с.

УДК 612.43.013

В.Г. Солодов, д-р техн. наук, А.А. Хандримайлов, инж.

ЧИСЛЕННАЯ МОДЕЛЬ СЖИМАЕМОГО ВЯЗКОГО ТУРБУЛЕНТНОГО ТЕЧЕНИЯ ВО ВПУСКНЫХ КАНАЛАХ И ЦИЛИНДРАХ ПОРШНЕВЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ. Часть I. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД

Введение

Работа посвящена численному моделированию

нестационарных сжимаемых вязких турбулентных течений в элементах впускных систем поршневых двигателей. Повышение качества газообмена требует исследования нестационарных газодинамических процессов в ДВС, определяющих степень завихренности газового потока и, как следствие, качество смесеобразования в камере сгорания. Теоретические основы расчета нестационарных сжимаемых вязких турбулентных течений в элементах поршневых двигателей представлены в зарубежной литературе (см. обзор [1]). В то же время авторам статьи неизвестны современные разработки в Украине собственного программного обеспечения для решения задач о трехмерных нестационарных вязких турбулентных течениях в элементах ДВС.

В этой связи разработан и ниже представлен численный метод расчета сжимаемых вязких турбулентных течений газа в элементах впускных систем, цилиндрах и камерах сгорания поршневых двигателей на основе развития программного обеспечения MTFS [2, 3]. В части II работы дано его тестирование на данных ЛДА эксперимента [4].

Основы вычислительного метода

Уравнения переноса. Особенностью газодинамического моделирования в трактах ДВС является нестационарность течения вследствие подвижности границ расчетной области (движение клапанов и поршня). Вязкое турбулентное течение в области с подвижными границами описывается системой уравнений Навье-Стокса для сжимаемого газа в отсутствие массовых сил и в предположении адиабатичности стенок [5]:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho dV + \oint_{S(t)} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS &= 0, \\ \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \vec{u} dV + \oint_{S(t)} \rho \vec{u} \vec{v} \cdot \vec{n} dS + \oint_{S(t)} \vec{P} \cdot \vec{n} dS &= 0, \\ \frac{d}{dt} \int_{V(t)} e dV + \oint_{S(t)} e \vec{v} \cdot \vec{n} dS + \\ + \oint_{S(t)} (\vec{P} \cdot \vec{u}) \cdot \vec{n} dS - \oint_{S(t)} (\vec{q} \cdot \vec{n}) dS &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где \vec{P} - тензор напряжений; $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ - вектор скорости.

Тепловой поток определяется законом Фурье $\vec{q} = -\lambda \nabla T$, вектор относительной скорости движения газа $\vec{v} = \vec{u} - \vec{v}_T$ через движущуюся со скоростью \vec{v}_T границу объема. Система дополняется уравнени-

ем состояния газа. Для случая идеального газа полная энергия единицы объема $e = \rho(RT / (\kappa - 1) + 0.5c^2)$. Для широкого диапазона изменения параметров используется переменное значение удельных теплоемкостей. В общем случае термическое и калорическое уравнения состояния представляются в виде $\rho(p, T)$, $h(p, T)$.

Далее без уменьшения общности будем считать, что система (1) может быть приведена к дивергентному виду в обобщенной криволинейной системе координат $\xi = \xi(x, y, z, t)$, $\eta = \eta(x, y, z, t)$, $\zeta = \zeta(x, y, z, t)$, разделена на конвективную и вязкую части, и осреднена по Рейнольдсу-Фавру [5].

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial \xi} + \frac{\partial F}{\partial \eta} + \frac{\partial G}{\partial \zeta} = \frac{\partial E_v}{\partial \xi} + \frac{\partial F_v}{\partial \eta} + \frac{\partial G_v}{\partial \zeta}. \quad (2)$$

Система (2) замыкается уравнениями модели турбулентности в рамках подхода Буссинеска.

Аппроксимация 2-го порядка решения во времени нестационарной задачи об эволюции газовой смеси в газовом тракте двигателя в условиях движущихся границ позволяет повысить разрешение физических полей во времени. Это достигается на основе неявного алгоритма с применением процедуры двойного временного шага [6], в которой в рамках глобального шага по физическому времени t сходимость достигается путем применения серии индивидуальных для каждой ячейки шагов по псевдовремени τ . При этом для временной производной системы уравнений (2) применяется дискретизация 1-го порядка для псевдовремени в рамках одного физического временного шага и трехточечная разностная формула 2-го порядка для физического времени t :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} \approx \frac{\Delta Q}{\Delta t} + \frac{3(Q^m + \Delta Q) - 4Q^n + Q^{n-1}}{2\Delta t}.$$

Счетчиком по псевдовремени служит индекс m , по физическому времени - индекс n . При вычислении приращения ΔQ поля величин Q^m, Q^n, Q^{n-1} в момент псевдовремени $m\Delta t$ и в моменты физического времени $n\Delta t, (n-1)\Delta t$ считаются известными.

Коррекция сжимаемости для низкоскоростных течений [7] обеспечивает снижение жесткости матрицы конвективного оператора в уравнениях Навье-Стокса с помощью коррекции собственных зна-

чений якобиевых матриц для малых чисел Маха. С этой целью в дополнение к вектору консервативных переменных $Q = (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, e)^T$ вводится вектор примитивных переменных $q_T = (p, u, v, w, T)^T$ матричным преобразованием вида $dQ = \Gamma_T dq_T, \Gamma_T = \partial Q / \partial q_T, \Gamma_T^{-1} = \partial q_T / \partial Q$.

При дискретизации (2) получается основное неявное разностное уравнение для приращения вектора консервативных переменных ΔQ в общей форме

$$\hat{\Gamma}_T \frac{\Delta q_T}{\Delta t} + \frac{3(Q^m + \Delta Q) - 4Q^n + Q^{n-1}}{2\Delta t} + \quad (3)$$

$$\delta_\xi E^{m+1} + \delta_\eta F^{m+1} + \delta_\zeta G^{m+1} = RHS_v(Q^n, Q^{n-1}),$$

где $\Delta Q = Q^{m+1} - Q^m, \Delta q_T = q_T^{m+1} - q_T^m$ - временные разности;

δ_ψ - дифференциальные операторы по соответствующим направлениям;

$RHS_v(Q^n, Q^{n-1})$ - правая часть разностной формулы, содержащая вязкие слагаемые.

Одинаковые по структуре исходная Γ_T и скорректированная $\hat{\Gamma}_T$ матрицы перехода к примитивным переменным q_T , одномерная форма которых в случае уравнения состояния общего вида имеет вид

$$\Gamma_T = \begin{bmatrix} \rho_p & 0 & \rho_T \\ u\rho_p & \rho & u\rho_T \\ h_0\rho_p + \rho h_p - 1 & \rho u & \rho h_T + h_0\rho_T \end{bmatrix},$$

где $h_0 = (e + p)/\rho = h + 0.5c^2$ - полная энтальпия.

В матрице $\hat{\Gamma}_T$ производная от плотности, характеризующая сжимаемость среды, заменена на $\rho'_p = 1/(\xi \cdot a^2)$ с корректирующим множителем $\varepsilon = M_p^2 / (1 - (\kappa - 1)M_p^2)$. Величина M_p^2 - корректируемое число Маха, является параметром коррекции сжимаемости, определяется по [7]: $M_p^2 = \min\{1, \max(M_i^2, M_u^2, M_{\min}^2)\}$; M_i - местная скорость звука, $M_u = L/(\pi \Delta t a)$, L - характерный размер течения, a - скорость звука; $M_{\min}^2 \approx 3M_\infty^2$ - ограничитель.

Для нахождения решения (3) линеаризуется в части конвективных членов относительно ΔQ :

$$\hat{\Gamma}_T \frac{\Delta q_T}{\Delta t} + \frac{3(Q^m + \Gamma_T \Delta q_T) - 4Q^n + Q^{n-1}}{2\Delta t} +$$

$$+ \delta_\xi (\Delta E^m + A_T^m \Delta q_T) + \delta_\eta (\Delta F^m + B_T^m \Delta q_T) + \delta_\zeta (\Delta G^m + C_T^m \Delta q_T) = RHS_v(Q^n, Q^{n-1}).$$

Дальнейшие преобразования приводят к разностной формуле

$$\left[\hat{\Gamma}_T + \frac{3\Delta\tau}{2\Delta t} \Gamma_T + \Delta\tau \sum_{(\psi)} D_T^m \delta_\psi \right] \Delta q_T = RHS_v(Q^n, Q^{n-1}) - \Delta\tau \left(\frac{3Q^m - 4Q^n + Q^{n-1}}{2\Delta t} \right) - \Delta\tau (\delta_\xi E^m + \delta_\eta F^m + \delta_\zeta G^m) = RHS^m,$$

где $D_T^m \delta_\psi = (A, B, C)_T^m$ - якобианы конвективных потоковых векторов по отношению к вектору переменных $q_T, \psi = (\xi, \eta, \zeta)$.

Матрица преобразования (с учетом двойного временного шага) определяется, как

$\Phi_T = \hat{\Gamma}_T + \frac{3\Delta\tau}{2\Delta t} \Gamma_T$ и получается разностное соотношение

$$\left[I + \Delta\tau \Gamma_T \Phi_T^{-1} \sum_{(\psi)} D_\psi^m \delta_\psi \right] \Delta Q = \Gamma_T \Phi_T^{-1} RHS^m, \quad (4)$$

где D_ψ^m - якобианы конвективных потоковых векторов по отношению к вектору переменных Q .

Матрица Φ_T , характеризующая двойной шаг по времени, учитывает коррекцию матрицы преобразования и имеет вид

$$\Phi_T = \frac{1}{\phi} \begin{bmatrix} \rho_p'' & 0 & \rho_T \\ u\rho_p'' & \rho & u\rho_T \\ h_0\rho_p'' + \rho h_p - 1 & \rho u & \rho h_T + h_0\rho_T \end{bmatrix}.$$

где $\rho_p'' = \phi(\rho'_p - \rho_p) + \rho_p$ - величина, обратная квадрату скорости звука с учетом коррекции сжимаемости; $\phi = 1/(1 + 1.5\Delta\tau/\Delta t)$ - основной параметр двойственности шага по времени; для стационарных течений $\phi = 1$.

Определение ΔQ приводит к проблеме решения разностных уравнений (4) на каждом шаге псевдовремени. Решение основывается на обращении оператора левой части с помощью процедуры приближенной факторизации по пространственным переменным и последующей диагонализации [8, 9]:

$$\left[I + \Delta\tau \Gamma_T \Phi_T^{-1} \sum_{(\psi)} D_\psi^m \delta_\psi \right] \Delta Q \approx \prod_{(\psi)} (I + \Delta\tau \Gamma_T \Phi_T^{-1} D_\psi^m \delta_\psi) \Delta Q = \Gamma_T \Phi_T^{-1} RHS^m.$$

Прием сводит разностную задачу к трехдиагональным системам алгебраических уравнений, решаемым скалярными прогонами.

Далее система системы разностных уравнений приводится к трехдиагональному виду диагонализацией модифицированных якобианов $\Phi_T^{-1} D_T^m$ на основе соотношений:

$$\Gamma_T \Phi_T^{-1} D_T^m = \Gamma_T \Phi_T^{-1} D_{T\psi}^m \Gamma_T^{-1} = \Gamma_T L_\psi \Lambda_\psi^m L_\psi^{-1} \Gamma_T^{-1}.$$

Матрицы L_ψ составлены из собственных векторов $\Phi_T^{-1} D_{T\psi}^m$, соответствующих их собственным значениям [7, 8]. Диагональные матрицы $\Lambda_\psi = L_\psi^{-1} \Phi_T^{-1} D_{T\psi}^m L_\psi$ состоят из собственных значений матриц $\Phi_T^{-1} D_{T\psi}^m$.

$$\Lambda_\psi^m = \text{diag}(\lambda_\psi^i) = \text{diag}\{\phi D_\psi, \phi D_\psi, \phi D_\psi, \lambda_\psi^4, \lambda_\psi^5\},$$

$$\lambda_\psi^{4,5} = \frac{1}{2} \phi \left[D_\psi \left(1 + \frac{d}{d'} \right) \pm \sqrt{D_\psi^2 \left(1 - \frac{d}{d'} \right)^2 + 4 \frac{\rho h_T}{d'} \psi_0^2} \right].$$

Скорректированные скорости переноса представляются в виде

$$D^\pm = \frac{1}{2} \phi D_\psi \left(1 \pm \frac{d}{d'} \right),$$

$$a' = \frac{1}{2} \phi \sqrt{D_\psi^2 \left(1 - \frac{d}{d'} \right)^2 + 4 \frac{\rho h_T}{d'} \psi_0^2}.$$

Величины d, d' определяются из термодинамических соотношений [7] как

$$d = \rho h_T \rho_p + \rho_T (1 - \rho h_p), \quad d' = \rho h_T \rho'_p + \rho_T (1 - \rho h'_p),$$

и справедливы для достаточно общего уравнения состояния, включая случай $\rho = \text{const}$, при котором $d = 0$. Отключение коррекции сжимаемости влечет $d \equiv d''$, откуда следует

$$D_\psi = \phi D_\psi^+, \quad D_\psi^- = 0, \quad a' = \phi a \psi_0.$$

Окончательно приближенную факторизацию получаем в виде

$$\Gamma_T \prod_{(\psi)} \left(L_\psi \left(I + \phi \Delta \tau \delta_\psi \Lambda_\psi^m \right) L_\psi^{-1} \right) \Gamma_T^{-1} \Delta Q = \Gamma_T \Phi_T^{-1} RHS^m.$$

В соответствии с методом [8] выполняется расщепление диагональных матриц Λ_ψ и якобианов D_ψ^m на составляющие матрицы со знакоопределенными собственными значениями для реализации обращения матриц способом прогонки:

$$\Lambda_\psi^\pm = 0.5 \left(\Lambda_\psi \mid \pm \Lambda_\psi \right)$$

$$D_\psi^m = \left(\Phi_T^{-1} D_\psi^m \right)^+ - \left(\Phi_T^{-1} D_\psi^m \right)^- \\ = L_\psi \Lambda_\psi^+ L_\psi^{-1} - L_\psi \Lambda_\psi^- L_\psi^{-1},$$

где матрицы Λ_ψ составлены из абсолютных значений матриц Λ_ψ .

Переход от дифференциального факторизованного оператора δ_ψ к разностному оператору осуществляется с помощью односторонних разностей, составленных с учетом знаков собственных значений или направлений распространения возмущений в потоке [8]:

$$\nabla_\psi \left(\Phi_T^{-1} D_\psi^m \right)^+ \approx L_\psi \nabla_\psi \Lambda_\psi^+ L_\psi^{-1},$$

$$\Delta_\psi \left(\Phi_T^{-1} D_\psi^m \right)^- \approx L_\psi \Delta_\psi \Lambda_\psi^- L_\psi^{-1},$$

где $\Delta_\psi f = f_{i+1} - f_i$, $\nabla_\psi f = f_i - f_{i-1}$, $\psi \equiv (\xi, \eta, \zeta)$.

Обращение оператора левой части производится на каждом шаге псевдовремени по известному алгоритму прогонки [8]. Правая часть *RHS* данного разностного уравнения зависит от членов, вычисленных на $m-1$ подитерации $n+1$ физического временного шага и моментов времени n и $n-1$, и поэтому вычисляется явно.

Пространственные производные в «вязких» членах аппроксимируются со 2-м порядком точности с помощью центральных разностей. Конвективные члены рассчитываются через векторы потоков на границах ячеек:

$$\left(\frac{\partial E}{\partial \xi} + \frac{\partial F}{\partial \eta} + \frac{\partial G}{\partial \zeta} \right)_{ijk}^n \approx \frac{E_{i+\frac{1}{2},j,k} - E_{i-\frac{1}{2},j,k}}{\Delta \xi} \Big|_k^n + \\ + \frac{F_{i,j+\frac{1}{2},k} - F_{i,j-\frac{1}{2},k}}{\Delta \eta} + \frac{G_{i,j,k+\frac{1}{2}} - G_{i,j,k-\frac{1}{2}}}{\Delta \zeta} \Big|_k^n.$$

Вычисление векторов потоков через грани может быть выполнено с помощью противопоточных разностей (см. например [8, 9 и др.]) по процедуре, подобной процедуре расщепления для неявной части алгоритма. Другим способом является приближенное решение задачи Римана о распаде произвольного разрыва параметров на грани ячейки.

Для повышения порядка аппроксимации газодинамических переменных по обе стороны грани применяется их реконструкция изнутри ячейки на грань с помощью заранее вычисленных производных от поля параметров в центрах ячеек по формулам квадратичной реконструкции переменных [9]:

$$\phi(\psi, t^m) = \phi_i^m + \left(\frac{\partial \phi}{\partial \psi}\right)_i^m (\psi - \psi_i) + 0.5 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \psi^2}\right)_i^m (\psi - \psi_i)^2,$$

которая приводит к семейству схем повышенного порядка точности на неравномерных сетках.

В этой связи особую важность приобретает точность и способ вычисления производных газодинамических переменных по полю на момент времени $m\Delta t$. В данной работе использована ENO аппроксимация в виде [9]:

$$\left(\frac{\Delta \phi}{\Delta \psi}\right)_i = \frac{1}{\Delta \psi} \min\text{mod} \left[\Delta_{i+1} \phi - \beta \min\text{mod}(\Delta_{i+1}^+ \phi, \Delta_{i+1}^- \phi), \Delta_i \phi + \beta \min\text{mod}(\Delta_i^+ \phi, \Delta_i^- \phi) \right],$$

где $\Delta_i \phi = \phi_{i+1} - \phi_i$, $\Delta_i^+ \phi = \Delta_i \phi - \Delta_{i-1} \phi$, $\Delta_i^- \phi = \Delta_{i+1} \phi - \Delta_i \phi$ - первые и вторые разности характеристической переменной ϕ , приращение которой вычисляется на основе матричного преобразования $\Delta_m \phi = \Gamma_\psi^{-1} L_\psi^{-1} \Delta_m \phi$ в ячейке с номером i на основе пятиточечного шаблона первых и вторых разностей ϕ по соседним ячейкам с применением ограничителя $\min\text{mod}(x, y)$ [8, 9]. Согласно [9] производная от переменной ϕ вычисляется со вторым порядком при $\beta = 0.5$.

В задачах газообмена в ДВС использовано уравнение состояния идеального газа $p = R\rho T$. Коэффициент теплоемкости газа при постоянном объеме предполагался линейно зависящим от температуры в процессе сжатия газа $C_V = C_{V_0} + C_V^T T$, $C_V^T \neq 0$. Переменность C_V отражается в собственных числах матриц якобианов преобразований и системы уравнений, влияет на скорость распространения малых возмущений в газе.

Заключение

Представлена численная модель сжимаемого вязкого турбулентного течения в элементах впуск-

ных трактов, камерах сгорания и цилиндрах поршневых двигателей на тактах впуска и сжатия на основе развития программного комплекса **MTFS**. Численное моделирование процессов наполнения и сжатия представляется перспективным для исследования характеристик потока в цилиндре и камере сгорания дизеля, позволяет получать решения газодинамических задач в областях сложной геометрии, визуализировать структуру течения, получать количественную оценку характеристик потока. Развитие метода целесообразно в направлении повышения точности разрешения турбулентных пульсаций, практическое применение может быть направлено на решение задач смесеобразования и горения в ДВС.

Список литературы:

1. Солодов В.Г. Численное моделирование сжимаемых вязких турбулентных течений во впускных каналах и цилиндрах поршневых двигателей / В.Г. Солодов, А.А. Хандримайлов // *Аэрогидродинамика: проблемы и перспективы*. – 2006. – Вып.2. – С. 212–233.
2. Солодов В.Г. Солвер для решения трехмерных нестационарных задач внутренней газодинамики / В.Г. Солодов, Ю.В. Стародубцев // *Вестник ХГАДТУ*. – 2000. – Вып. 12,13. – С. 103–105.
3. Солодов В.Г. Научно-прикладный программный комплекс **MTFS**® для расчета трехмерных вязких турбулентных течений жидкостей и газов в областях произвольной формы. / В.Г. Солодов, Ю.В. Стародубцев // *Сертификат гос. регистр. авторских прав*. – УГААСП. – №5921. – 07.16.2002.
4. Bicen A.F. Steady and unsteady air flow through an intake valve of a reciprocating engine / A.F. Bicen, C. Vafidis, J.H. Whitelaw // *2nd Winter Annual Meeting ASME*. – 1984. – P. 47 – 55.
5. Ferziger J. *Computational Methods for Fluid Dynamics* / J. Ferziger, M. Peric. – Springer. – 1999. – 389 p.
6. Arnone A. *Integration of Navier-Stokes Equations Using Dual Time Stepping and a Multigrid Method* / A. Arnone, V.Liou, L.Povinelli. // *AIAA Journal* - 1995. – №6. – P. 985–990.
7. Merkle C. *Convergence Acceleration of the Navier-Stokes Equations through Time-Derivative Preconditioning* / C. Merkle, S. Venkateswaran, M. Deshpande. // *AGARD-CP578-NATO*. – 1995. – P. 1-10.
8. Chung T.J. *Computational Fluid Dynamics* / T.J. Chung. – CUP. – 2002. – 1022 p.
9. Yang J.Y. *Uniformly Second Order Accurate ENO Schemes for Euler Equations of Gas Dynamics* / J.Y. Yang, C.K. Lombard. // *AIAA Pap.* 87-1166. – 1987. – 9 p.