



Кожушко Андрій Павлович
Доктор технічних наук, доцент кафедри Автомобіле- і тракторобудування НТУ «ХПІ», автор понад 90 наукових праць, 2 монографій та навчального посібника.



Теорія коливань трактора при транспортуванні цистерн сільськогосподарського призначення

Кожушко А.П.



ТЕОРІЯ КОЛИВАНЬ ТРАКТОРА
ПРИ ТРАНСПОРТУВАННІ ЦИСТЕРН
СІЛЬСЬКОГОСПОДАРСЬКОГО
ПРИЗНАЧЕННЯ

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«Харківський політехнічний інститут»

КОЖУШКО Андрій Павлович

ТЕОРІЯ КОЛИВАНЬ ТРАКТОРА ПРИ ТРАНСПОРТУВАННІ ЦИСТЕРН СІЛЬСЬКОГОСПОДАРСЬКОГО ПРИЗНАЧЕННЯ

Монографія

Нераш
Publisher

Харків
2021

УДК 629.1.02
К58

Публікується за рішенням Вченої ради
Національного технічного університету
«Харківський політехнічний інститут»,
протокол № 10 від 29 жовтня 2021 р.

Рецензенти:

М. Л. Шуляк, д-р техн. наук, професор, завідувач кафедри трактори і автомо-білі, Державного біотехнологічного університету
Є. І. Калінін, д-р техн. наук, професор, професор кафедри обчислюваної тех-ніки та програмування, Національний технічний університет «Харківський полі-технічний інститут»

Кожушко А. П.

Теорія коливань трактора при транспортуванні цистерн сільськогосподарського призначення: монографія / А. П. Кожушко — Харків. Видавець: О. А. Мірошниченко, 2021. — 240 с. іл.

ISBN 978-617-7618-94-1.

Наведений матеріал висвітлює основні наукові напрацювання співробітника кафедри автомобіле- і тракторобудування Національного технічного університету «Харківського політехнічного інституту» КОЖУШКА Андрія Павловича в розвитку та узагальненні існуючої теорії коливань колісного трактора з цистерною для транспортування рідини, яка має вільну поверхню, що дає змогу вирішити актуальну науково-практичну проблему поліпшення експлуатаційних показників колісних тракторів шляхом визначення параметрів конструкції машинно-тракторного агрегату для зменшення негативного впливу низькочастотних коливань поверхневого шару рідини у цистерні.

Монографія призначена для інженерно-технічних працівників в галузі механічної інженерії та транспорту, може бути корисною для магістрантів, аспірантів і докторантів інженерного, транспортного та сільськогосподарського профілю.

Іл. 86. Табл. 23. Бібліогр. найм. 268

УДК 629.1.02

ISBN 978-617-7618-94-1

© Кожушко А. П., 2021

ПЕРЕДМОВА

Ця монографія присвячена українським вченим Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут» в галузі тракторобудування – **Борису Івановичу КАЛЬЧЕНКО** та в галузі прикладної математики та механіки – **Олександру Львовичу ГРИГОР'ЄВУ**.



Кальченко Борис Іванович,
доктор технічних наук, професор
кафедри автомобіле- та тракторобу-
дування НТУ «ХПІ»,
Заслужений діяч науки України,
Почесний професор ХНАДУ

Основні напрямки наукової діяльності – динаміка силової передачі трактора; розробник блочномодульної методики конструювання тракторів із впровадженням ергономічного підходу до забезпечення комфортних умов і безпеки праці водія.



Григор'єв Олександр Львович
доктор технічних наук, професор
кафедри вищої математики
НТУ «ХПІ»

Основні напрямки наукової діяльності – математичне моделювання, прикладна гідромеханіка, паливоподача в дизелях, теорія коливань, фізика фундаментальних силових полів.

*На знак пошани та глибокої поваги автор даної монографії
присвячує її випуск своїм вчителям!!!*

ЗМІСТ

Вступ	6
РОЗДІЛ 1. ПЕРЕДУМОВИ ДО ОБҐРУНТУВАННЯ АКТУАЛЬНОСТІ НАУКОВОГО НАПРЯМКУ ДОСЛІДЖЕННЯ	8
1.1 Місце транспортних операцій, що виконуються тракторами, в сільському господарстві України	8
1.2 Аналіз методів опису рухливої маси рідини в замкнутій ємності (цистерни сільськогосподарського призначення)	16
1.3 Аналіз коливальних процесів при русі тракторів з сільськогоспо- дарськими агрегатами	25
1.4. Проблема моделювання руху колісного тракторів з цистер- нами	46
РОЗДІЛ 2. МЕТОДОЛОГІЧНІ ОСНОВИ АНАЛІЗУ ДИНАМІЧНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ РУХУ ТРАКТОРА ПРИ ТРАНСПОРТУВАННІ ТРА- КТОРНИХ ЦИСТЕРН	50
2.1 Концепція зниження низькочастотних коливань мас трактора при перевезенні цистерни з рідиною	50
2.2 Методика визначення поверхневих коливань рідини	55
2.3 Метод формалізації коливань рідини з вільною поверхнею	66
2.4 Масово-інерційні показники руху рідини, що коливається	78
РОЗДІЛ 3. ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНО-ТЕОРЕТИЧНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ВІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ РІДИНИ В ЄМНОСТІ ПРИЗМАТИЧНОЇ ФОРМИ	82
3.1 Мета експериментальних досліджень, прилади і обладнання	82
3.2 Теоретичні результати досліджень з визначення частоти вільних коливань рідини	85
3.3 Результати експериментальних досліджень з визначення основ- ної частоти вільних коливань рідин	86
3.4 Теоретичне дослідження з визначення декременту загасання ві- льних коливань рідини в прямокутній ємності	90
3.5 Експериментальне дослідження з визначення декременту зага- сання рідин різної в'язкості	97

3.6 Визначення формули для опису залежності декременту від амплітуди коливань рідини	101
3.7 Вплив декременту загасань на коливання рідини в ємності ...	108
РОЗДІЛ 4. ПАСИВНИЙ ПРИНЦИП ЗАХИСТУ ВІД НИЗЬКОЧАСТОТНИХ КОЛИВАНЬ МАС ТРАКТОРА ПРИ ПЕРЕВЕЗЕНІ ЦИСТЕРНИ З РІДИНОЮ	113
4.1 Складання математичного апарату для дослідження вільних коливань системи «трактор – цистерна».....	114
4.2 Аналіз вільних коливань системи «трактор – цистерна» в поздовжньо-вертикальній площині руху	116
4.3 Спектральні явища та теореми про властивості пучка симетричних матриць	128
4.4 Дослідження енергетичних властивостей на основі динамічного аналізу в поздовжньо-вертикальній площині руху	139
4.5 Аналіз вільних коливань системи «трактор – цистерна» в поперечно-вертикальній площині	143
РОЗДІЛ 5. АКТИВНИЙ ПРИНЦИП ЗАХИСТУ ВІД НИЗЬКОЧАСТОТНИХ КОЛИВАНЬ МАС ТРАКТОРА ПРИ ПЕРЕВЕЗЕНІ ЦИСТЕРНИ З РІДИНОЮ	156
5.1 Формування нелінійної математичної моделі коливань мас системи «трактор – цистерна» в поздовжньо-вертикальній площині	156
5.2 Параметричні коливання в системи «трактор – цистерна» в поздовжньо-вертикальній площині	189
5.3 Формування нелінійної математичної моделі коливань мас системи «трактор – цистерна» в поперечно-вертикальній площині ..	202
5.4 Параметричні коливання в системи «трактор – цистерна» в поперечно-вертикальній площині	206
Список літератури.....	211

ВСТУП

Україна – однією зі світових аграрних держав, тому і не дивно, що її називають «житницею Європи». В Україні зосереджено близько 25% світових чорноземних ґрунтів високого рівня родючості – це надало підґрунтя до того, що вона стала найбільшим експортером рослинництва. За даними 2020 року аграрний сектор надає 17% внутрішнього валового продукту та 40% валютного надходження.

Перед аграріями України постійно постає завдання підвищення врожайності та родючості ґрунту, одним зі способів підвищення є систематичне внесення рідких органічних добрив, що забезпечується транспортними роботами з перевезення рідких вантажів. Ще не так давно в сільськогосподарських підприємствах транспортна робота здійснювалась в більшій мірі за рахунок автомобільного транспорту, але з розвитком тракторної техніки та не рентабельністю автоперевезень цей відсоток поступово зменшується. За статистичними даними на виконання транспортної роботи колісним трактором припадає 30 – 50% від загального обсягу робіт. Відзначимо, що в державах ЄС цей відсоток значно більший: Чехія – 55%; Угорщина – 77%; Німеччина – 81%; Норвегія – 95%. Таке поширене використання колісних тракторів при виконанні транспортних робіт в агропромисловому комплексі держави обумовлено різноманітністю виконання ними сільськогосподарських робіт. До складу транспортних робіт в будь-якому господарстві входять перевезення рідких вантажів тракторними цистернами. Ці цистерни, на відмінність від автомобільних, не мають внутрішніх перегородок (герметичних і негерметичних), сіток та інших перешкод перетіканню рідини всередині цистерни. Така конструктивна особливість зумовлена меншою транспортною швидкістю тракторних перевезень, ніж автомобільних, а також специфікою рідкого вантажу.

На теперішній час, в умовах постійного нарощування енергонасиченості тракторних агрегатів, транспортна швидкість та вантажопідйомність машинно-тракторного агрегату (МТА) підвищується. Внаслідок збільшення енергії коливань рідкого вантажу підвищується вірогідності виникнення аварійних ситуацій при транспортуванні цистерн (перекидання, складування, галопування агрегату). Значний вплив на динамічні

показники руху здійснюють коливання вільної поверхні рідини, які в комплексі з вимушеними коливаннями транспортного засобу суттєво впливають й на ергономіку.

Обчислення динамічних характеристик об'єкта з рухливою масою в'язкої нестискуваної рідини в ємності носить велику практичну значимість, тому створення нових або модернізація вже існуючих розрахункових методів продовжується і сьогодні. Бурхливий розвиток сучасних математичних моделей, які з висхідною точністю описують коливання вільної поверхні рідини (включно до траєкторій окремих крапель у повітрі), призведе до ускладнення розрахункових алгоритмів і труднощів їх реалізації. Тому в задачах проектування тракторних цистерн доцільним є використання комбінованої моделі класичного типу.

Динаміка руху будь-якої системи характеризується коливальними процесами, тому для повноцінного аналізу впливу руху рідини в цистерні на динамічні властивості транспортного засобу необхідно дослідити наявні коливальні явища. Показово, що трактор з цистерною, який рухається по шляху зі складним рельєфом, є стендом, на якому створюються всі відомі типи механічних коливань – від вільних до параметричних. Досліджуючи коливальні процеси транспортного засобу при врахуванні перерозподілу мас рідини в цистерні може збільшити показники коливальності системи. Зауважимо, що штучні обмеження швидкості в такому випадку не доцільні, адже це призведе до зниження продуктивності МТА. Трактор є багатофункціональним засобом, тому безпеку його руху доцільно забезпечувати параметрами транспортованої причіпної цистерни або напівпричіпної цистерни.

РОЗДІЛ 1. ПЕРЕДУМОВИ ДО ОБҐРУНТУВАННЯ АКТУАЛЬНОСТІ НАУКОВОГО НАПРЯМКУ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1. Місце транспортних операцій, що виконуються тракторами, в сільському господарстві України

Сільське господарство сьогодні є однією з важливих та перспективних платформ для інвестицій, які надають стрімке зростання економіки, причому як для фермерського господарства, так і для держави в цілому. Розвиток агропромислового сектору направлено на створення нової техніки, модернізації старої або впровадженні нових технологій з метою підвищення технічного рівня агротехніки. Сьогодні в фермерських господарствах колісний трактор виконує технологічні операції (тягові роботи з обробки ґрунту або виконання спеціальних робіт), транспортно-технологічні операції (збирально-транспортні та розподільчо-транспортні роботи) та транспортні операції (рис. 1.1).

Особливий інтерес викликає дослідження при виконанні транспортних робіт, адже їх частка може досягати позначки в 50%, залежно від загального обсягу робіт в сільськогосподарському підприємстві. При розгляді колісного трактора як транспортного засобу враховують трудомісткість та енергоємність процесів, тому необхідно зважати на тяговий клас, конструктивні особливості, енергонасиченість, тощо. Транспортна робота трактором часто припадає на рух по дорогах в загальному потоці з іншими учасниками дорожнього процесу, тому до тракторів висувають спеціальні (або підвищені) вимоги. Сучасний темп розвитку тракторної техніки призвів до збільшення енергонасиченості колісної техніки, що, в свою чергу, надало змогу аграріям підвищити масу агрегатної частини (в деяких випадках дана маса значно перевищує масу самого трактора).

Енергонасиченість прийнято визначати за коефіцієнтом енергонасиченості, який встановлює технічну концепцію та відповідність своєму призначенню за критерієм тягово-швидкісних властивостей [1 – 3]

$$\Theta_{\text{тр}} = \frac{N_{\text{НОМ}}}{G},$$

де $N_{\text{ном}}$ – номінальна потужність двигуна внутрішнього згоряння;
 G – вага трактора.



Рисунок 1.1 – Розподіл робіт, які виконуються колісним трактором

При збільшенні потужності силової установки колісного трактора її реалізація здійснюється за рахунок підвищення швидкості руху або зростання тягових характеристик. При цьому виникають збуджувальні перешкоди, які впливають на техніко-економічні та експлуатаційні показники, безпеку руху, тощо. Зважаючи на це, доцільно дослідити енергонасиченість сучасних колісних тракторів, які є поширеними в Україні (табл. 1.1).

Відома [1 – 3] наступна класифікація тракторів за величиною коефіцієнта енергонасиченості:

- 1,4 ... 1,7 – тягова концепція тракторів;
- 1,7 ... 2,3 – тягово-енергетична концепція (можливість обладнання техніки додатковими приводами відбору потужності).

Таблиця 1.1 – Результати дослідження енергонасиченості сучасних колісних тракторів

Бренд	Модель	Потужність, к.с.	Енергона- сиченість	Бренд	Модель	Потужність, к.с.	Енергона- сиченість
CASE IH [4]	Sreiger (400 – 600)	406 – 608	1,85 – 2,19	CLAS [5]	XERION 4000-5000	401 – 487	1,71 – 1,74
	Optum CVT (270 – 300)	271 – 300	1,93 – 2,15		AXION 920-950	315 – 405	1,85 – 2,34
	Magnum (250 – 340)	250 – 340	1,74 – 2,18		AXION 820 / 850	189 – 233	1,91 – 2,2
	Magnum 380 CVX	279	2,3		ARION 640–620 C	135 – 155	1,8 – 1,97
	Puma (125 – 240)	127 – 240	1,71 – 2,37		ARION 430–410	110 – 130	1,72 – 2
	Puma 225 CVT	165	2,34	John Deere [6]	Серія 9R	370 – 570	1,5 – 2,3
	Maxxum (110 – 140)	112 – 141	1,82 – 2,08		Серія 8R	270 – 370	1,72 – 2,35
NEW HOLLAND [7]	Farmall 110 JX	81	2,12	X13 [8]	Серія 6B	95 – 135	1,7 – 1,8
	T9	405 – 608	2,02 – 2,27		150K	179	1,6
	T8	257 – 417	1,8 – 2,87		241K	250	2,2
	T7	227 – 300	2,36 – 2,15		242K	240	2,02
	T6	92 – 165	1,51 – 2,68		243K	250	2,2
				248K	240	2,15	

Аналізуючи показники з табл. 1.1, встановлено, що практично всі моделі тракторів (окрім ХТЗ-150К, New Holland Т6 (< 100 к.с.) та John Deere (потужністю < 420 к.с.)) відносяться до тягово-енергетичної концепції. Такий розподіл показує, що сучасні виробники тракторів збільшують потужність силового агрегату (з метою збільшення продуктивності) та не виключають умов експлуатації з паралельно працюючими приводами відбору потужності. В табл. 1.1 представлені також показники енергонасиченості тракторів українського виробника, а саме моделями виробництва АТ «Харківський тракторний завод». Протягом багатьох десятиліть основу тракторного парку підприємств сільського господарства України складали трактори виробництва ХТЗ. Харківський тракторний завод був і залишається єдиним підприємством на пострадянському просторі, який випускає одночасно колісну і гусеничну техніку.

Крім ХТЗ, в Україні також нарощують виробництво ТОВ «Агроماشінвест» (АМІ Farmer); ТОВ «Слобожанська промислова компанія» (ХТА); ТОВ «Укراгрокомсільмаш» (ТЯ-200 «Ярило»); ТОВ НВП «Базіс» та ТОВ «Укragромаш» (Коваль-5000); DLight (GAL-5052); «Укравтозапчастина» (КИЙ); тощо. Зважаючи на це, було виконано аналіз енергонасиченості аналогів тракторів ХТЗ (трактори з шарнірно-зчленованою рамою) за критеріями однакового типорозміру передніх та задніх шин і діапазону зміни потужності 200 ÷ 500 к.с. серед українських та деяких закордонних виробників, які не потрапили в табл. 1.1. Результати зведено до табл. 1.2. Як видно з табл. 1.2 зберігається тенденція виробництва енергонасичених тракторів. Таким чином, сучасні колісні трактори виробляються в тягово-енергетичній концепції, що дозволяє виконувати різноманітні роботи в умовах збільшеної вантажопідйомності агрегату.

Транспортна робота в сільському господарстві передбачає перевезення вантажів різної номенклатури [9 – 12]. Незалежно від типу вантажу (твердого або рідкого), який транспортується, платформа агрегату за своєю конструкцією поділяється на причіпну та напівпричіпну форми. Інтерес представляє дослідження перевезення рідких вантажів, адже в такому випадку виникають вільні коливання рідини, які в комплексі з вимушеними коливаннями транспортного засобу (рух по складному рельєфу) впливають на рух цистерни та колісного трактора в цілому.

Таблиця 1.2 – Результати дослідження енергонасиченості тракторів за критеріями однакового типорозміру шин серед українських та деяких закордонних виробників

Модель трактора (державна виробник)	Зображення трактора	Номинальна потужність двигуна, к.с.	Показник енергонасиченості, кВт/кН	Тяговий клас	Типорозмір шин
ХТЗ-242К (Україна)		240	2,02	4 – 6	23,1 R26
ХТА 200 – 250 (Україна)		210 – 250	1,8 – 2,2	4 – 6	23,1 R26 або 66x43,00R25
ТЯ-200 «Ярило» (Україна)		180 – 215	1,5 – 1,8	4 – 6	23,1 R26
Коваль-5000 (Україна)		300 – 450	1,6 – 2,5	5 – 8	66x43,00R25
ВАКУЛА (Україна)		300 – 430	1,6 – 2,4	5 – 8	23,1 R26
Кіровоць К-744Р (РФ)		350	1,9	5 – 8	28,1 R26
Versatile 2375 (Канада)		380	2,4	5 – 8	520/85 R42
Challenger MT900B (США)		430	1,85	8	710/70 R42

Тракторні цистерни мають від'ємність в порівнянні з автомобільними та залізничними – це відсутність внутрішніх перегородок всередині цистерни (рис. 1.2), що зумовлює безперешкодний рух рідини від однієї стінки ємності до іншої і, як результат, відбувається перерозподіл мас (перетікання рідини). Даний процес призводить до поздовжньої, поперечної та бічної нестабільності руху, що спричиняє погіршення технічних та експлуатаційних показників, які в значній мірі визначають динамічні показники трактора та можуть призвести до дорожньо-транспортних пригод (рис. 1.3).



а



б

Рисунок 1.2 – Зображення з середини тракторних цистерн:
а – Мерпрозет PN – 1/12A [13]; б – МЖТ-10



а



б

Рисунок 1.3 – Приклад дорожньо-транспортних пригод спричинених впливом вільної поверхні рідини в цистерні:
а – з напівпричіпної; б – з причіпною

Сьогодні відомо декілька концептуальних типів конструкції тракторних цистерн, які використовуються світовими компаніями. Виконано аналіз тракторних цистерн на основі конструкції ходової системи та вантажопідйомності, результати наведено в табл. 1.3. Необхідно зауважити, що сьогодні, окрім причіпних та напівпричіпних цистерн, на європейському ринку достатньо широко представлені цистерни сидельної конструкції, але вони не представлені в табл. 1.3.

Таблиця 1.3 – Різновид конструкцій тракторних цистерн

Назва (виробник)	Мінімальний та максимальний об'єм, м ³				
					
Мeprozet (Польща)	2,3 – 9	9 – 20	18 – 30	–	–
Joskin (Бельгія)	5 – 11	11 – 20,5	22,5 – 26	–	23,5
Garant Kotte (Німеччина)	5 – 12	12 – 20	22 – 25	–	20 – 28
Conor (Ірландія)	5 – 11,7	14 – 17,5	–	–	–
Fliegl (Німеччина)	3 – 10,6	6,2 – 18	18 – 25	–	–
Stapel (Німеччина)	3 – 11,5	10 – 19,5	18,5 – 30	10	20
Wienhoff (Німеччина)	7 – 11,7	12 – 20,2	20 – 30	–	26,5 – 30
Samson (Данія)	–	16 – 20	21 – 35	–	20 – 25
Fuchs (Австрія)	6 – 10	10 – 18	24	–	–
Рееcop (Німеччина)	3 – 13	7,5 – 20	21 – 24,5		
BSA (Німеччина)	5 – 14	6 – 18,5	20 – 27	16	18 – 24
Thyregod (Данія)	12	15 – 20	20 – 24	–	–
NUHN (Канада)	1,1 – 5,7	7,2 – 34	24 – 36	–	–
Agronic (Фінляндія)	10 – 12	14 – 20	17 – 30	–	–
NC Engineering (Ірландія)	5 – 13,5	10 – 20	18,2 – 25	–	–
Mauguin Citagri (Франція)	4,3 – 11	12 – 16,7	21 – 32	–	–
Veenhuis (Голландія)	8 – 16	13,5 – 22	19,9 – 29,1	–	–
ЛУМРА (РФ)	3,1 – 11	8,3 – 18,2	20,4 – 26	–	–
МЖТ (Білорусь)	–	6 – 11	–	10	16
МЖУ (Білорусь)	–	16 – 20	–	–	–
РЗС (Україна)	6	11 – 16	30	–	–
ВНЦ (Україна)	6 – 10	10 – 20	20 – 30	6	–

Виокремлено цистерни, які будуються на базі напівпричепа: одновісні (2 – 16 м³), двовісні (Tandem axle) (6 – 34 м³), трьохвісні (Tridem) (17 – 36 м³), чотирьохвісні (Jamesway Maxx-Trac Dura-Tech (15 – 38,6 м³),

Garant Kotte Quadro (30 – 32 м³), «Завод Кобзаренка» ВНЦ-36 (36 м³) і т.д.), а також на базі причепа: двовісні (10 – 16 м³), тривісні (16 – 30 м³). Ходова система напівпричіпної та причіпної цистерн схожа з тракторними напівпричепами (безресорна або ресорна – в випадку одновісної; балансірна – в випадку з двовісними та чотирьохвісними) та тракторними причепами – ресорна. Для трьохвісних причіпних цистерн використовується комбінована підвіска.

Підводячи підсумок виокремлених тенденцій, звернемо увагу, що:

- створення колісних тракторів тягово-енергетичної концепції з метою збільшення продуктивності, що сприяє підвищенню транспортної швидкості;
- задля задоволення тягових властивостей виробники агротехнічної техніки збільшують вантажопідйомність транспортованих агрегатів;
- відсутність перешкоджаючих факторів (внутрішніх перегородок, сіток та інш.) руху рідини в цистернах сільськогосподарського призначення, що спричиняє погіршення динамічних властивостей руху.

1.2. Аналіз методів опису рухливої маси рідини в замкнутій ємності (цистерни сільськогосподарського призначення)

Динаміка руху об'єкта з рухливою масою актуальна майже в кожній галузі дослідження. Вирішення проблематики руху такого об'єкту може бути зведена до визначення *динамічних властивостей матеріальної точки змінної маси* або *до властивостей вантажу, який рухається з полином часу*. Кожна з цих методик має свою доцільність при використанні залежно від поставлених перед науковцем завдань.

Вирішенням проблеми дослідження *системи зі змінною масою* займалися багато науковців, які працювали в галузі класичної механіки. Відповідно до робіт [14 – 18] одним з перших дослідників, який вирішував подібні задачі щодо системи з різною масою був Георг Букуа (1781–1851), який протягом 1812 – 1815 років опублікував декілька своїх робіт [19 – 21]. Ці роботи базувались на твердженні, що класичне рівняння другого закону Ньютона

$$F = m \cdot \frac{dv}{dt}, \quad (1.1)$$

де m – маса частки; $\frac{dv}{dt}$ – прискорення частки за довільний час t . Додільно застосовувати лише для систем з незмінною масою ($m = \text{const}$), в іншому випадку необхідно враховувати прирощування маси

$$F = m \cdot \frac{dv}{dt} + (v - u) \cdot \frac{dm}{dt}, \quad (1.2)$$

де u – абсолютна швидкість прирощування маси.

Бука також вказав, що при $v = u$ рівняння (1.2) перетворюється в рівняння (1.1), а при $u = 0$ в рівняння

$$F = m \cdot \frac{dv}{dt} + v \cdot \frac{dm}{dt}. \quad (1.3)$$

Отже, рівняння (1.3) є початковим рішенням механічної системи зі змінною масою, але не фундаментальним.

Першим хто запровадив математичне рішення руху системи зі змінною масою та запровадив нову теорію динаміки тіл змінної маси був І.В. Мещерський (1859 – 1935). Його також вважають засновником одного з розділів класичної механіки – механіки систем змінної маси. Мещерським запропоновано рівняння в механіці тіл змінної маси [14, 15, 22, 23]

$$m(t) \frac{dv}{dt} = u_1(t) \frac{dm_1}{dt} - u_2(t) \frac{dm_2}{dt} + F_r, \quad (1.4)$$

де $M(t)$ – маса матеріальної точки, яка змінюється за час t ; $u_1(t)$, $u_2(t)$ – відносні швидкості часток, які приєднуються та від'єднуються;

$\frac{dm_1}{dt}$, $\frac{dm_2}{dt}$ – швидкість збільшення загальної маси часток, які приєдналися та від'єдналися; F_r – зовнішні сили.

Рівняння (1.4) є базовим рівнянням динаміки матеріальної точки змінної маси. Virшення класичних задач механіки тіл перемінної маси орієнтувалось на формулу К.Е. Ціолковського, яка виражала характеристичну швидкість матеріальної точки зі змінною масою [23 – 24]

$$V = I \cdot \ln \left(\frac{m_1}{m_2} \right), \quad (1.5)$$

де V – кінцева швидкість матеріальної точки; I – питомий імпульс; m_1 , m_2 – початкова та кінцева маса матеріальної точки.

Наведені рівняння (1.4 – 1.5) є основними при вирішенні задачі дослідження динаміки руху матеріальної точки змінної маси. Доволі розповсюджений такий підхід при дослідженні ракетоносіїв та і в цілому в ракетобудуванні. Але, окрім ракетобудування, рівняння І.В. Мещерського з успіхом застосовується і при дослідженні транспортних робіт [25 – 37].

Автори [25, 26] досліджують транспортні системи шляхом складання та вирішення окремих задач, зокрема [25] для транспортної системи з магнітолевітуючими потягами. Так, автори [27] запропонували дослідження механічного імпульсу енергії, який характеризує ефективність зміни енергетичного стану тіл. Проведені дослідження, на думку авторів, повинні оптимізувати показники механічного руху тіла змінної маси при проектуванні транспортних систем, механізмів і машин [28, 29].

В роботі [30, 31] автори досліджують рух об'єкта зі змінною масою (маса змінюється за функцією експоненціального закону) та дією сили в'язкого лінійного опору. Автори досліджують об'єкт, як осцилятор, котрий можна використовувати при дослідженні транспортних або спеціальних машин, де маса їх вузлів змінюється в процесі роботи.

Автори в роботах [32 – 34] розглядають рух збирального агрегату з урахуванням його змінної маси. В матеріалах цих робіт присутня матема-

тична модель, яка описує рух збирального агрегату, як механічну систему зі змінною масою. Реалізація даної моделі дозволить визначити критичну швидкість руху, але необхідно відмітити, що автори вводять ряд припущень, які впливають на адекватність моделі [32]: розглядається лише прямолінійний рух; зміщення центру мас та силами пружності шин в поперечному напрямі не враховуються.

Згідно з роботи [35] динаміку машин з механізмами змінної маси необхідно розглядати використовуючи принцип «застиглої» маси та вводячи реактивну силу. Автори [35] відмічають, що динаміку таких машин необхідно досліджувати, як багаторівневу механічну систему з урахуванням режимів їх функціонування.

В роботі [36] автор досліджує раціональний режим експлуатації машинно-тракторного агрегату зі змінною масою шляхом оцінки динамічних втрат при прямолінійному русі виконання технологічної операції. Автор при формуванні математичного апарату використовує величину прирощування маси вантажу, що надає змогу якісно дослідити коливання швидкості руху та динамічну складову буксування.

Більш складний рух розглядає автор роботи [37], який досліджує транспортно-технологічну роботу машинно-тракторного агрегату при русі з тракторними цистернами. Математична модель руху зводиться до обчислення наступного рівняння

$$\bar{F} + \bar{K} + \bar{I} = m \cdot \frac{d\bar{v}}{dt} + \bar{\Phi},$$

де $\bar{F}$ – рівнодіюча сила; $\bar{K}$ – сила Коріолісу; $\bar{I}$ – сила, яку складає прирощування маси об'єкта дослідження; $\bar{\Phi}$ – сила, яка визначає відносне переміщення [37].

Окреслений підхід доцільно розглядати лише при дослідженні транспортно-технологічних робіт (збирально-транспортній або розподільчо-транспортній), оскільки математичний апарат передбачає зміну маси за проміжок певного часу. Тому при дослідженні транспортної роботи, коли вантаж виконує роль лише перерозподілу мас цей метод використовувати

не припустимо.

При дослідженні *руху часток суцільного середовища* зазвичай використовують два методи: Ейлера та Лагранжа [38 – 42]:

– Перший метод базується на відображенні усіх величин в координатах не рухомого середовища. Тобто в кожній точці простору (x, y, z) вивчаються параметри руху частки середовища у деякий момент часу t . Таким чином, швидкість рідини в будь-якій точці простору повинна бути функцією наступних змінних (x, y, z, t) . Таке формулювання свідчить про те, що траєкторія руху окремих часток не відслідковується. Стан рідини оцінюється лише векторним полем швидкостей

$$\bar{v} = \bar{v}(x, y, z, t) \Rightarrow \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + V_x \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + V_y \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + V_z \frac{\partial \bar{v}}{\partial z}.$$

– Другий метод ґрунтується на виборі початкових умов, тобто встановлюються початкові координати кожної частки рідини в певний момент часу. З плином часу ця частка зміщується в просторі, а координати нерухомого простору представляють собою функції початкових координат частки. Рух частки за певний час відслідковується за траєкторіями

$$\left. \begin{matrix} x_0 = a \\ y_0 = b \\ z_0 = c \end{matrix} \right\} \Rightarrow \bar{r} = \bar{r}(a, b, c, t) \Rightarrow \bar{v}(a, b, c, t) = \frac{d\bar{r}}{dt} \Rightarrow \frac{d\bar{v}(a, b, c, t)}{dt} = \frac{d^2 \bar{r}(a, b, c, t)}{dt^2}.$$

На сьогоднішній день існує декілька засобів для вирішення задач *дослідження руху рідини* [43 – 46]: модель ідеальної нестискуваної рідини (*рівняння Ейлера*); квазігідродинамічні моделі; модель в'язкої нестискуваної рідини (*рівняння Нав'є-Стокса*) та інші. Окрім того, також існують моделі, які базуються на обчисленні стохастичних диференціальних рівнянь. Їх зазвичай застосовують лише при дослідженні руху рідини в турбулентному режимі.

Використання окреслених вище моделей проводиться за допомогою

розв'язку нелінійних диференціальних рівнянь з частковими похідними. При розрахунках необхідно задовольнити крайові умови. Це обумовлено наявністю вільної поверхні рідини та стінок ємності. Окрім того, труднощі перед науковцями виникають на етапі перетворення континуальної моделі в дискретну, зі звичайними диференціальними рівняннями. Тому при виборі моделі для дослідження руху рідини необхідно виходити з поставлених задач.

При огляді робіт, де використовується модель ідеальної нестискуваної рідини [47 – 53], відмітимо, що вона найбільш популярна серед науковців, і це не дивно, адже під терміном «ідеальна» розуміється рідина, яка позбавлена в'язкості та теплопровідності; її рух описується рівнянням

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v(\nabla \cdot v) = -\frac{1}{\rho} \nabla p, \quad (1.6)$$

де v – швидкість рідини; t – час; ∇ – векторний диференціальний оператор Гамільтона; ρ – щільність; p – тиск.

Оскільки рідина, яка транспортується тракторною цистерною, може мати різну в'язкість, яка певним чином впливає на рух, тому, апіорі, обирати саме цю модель в нашому дослідженні вважається не доречним.

Розглядаючи систему квазігідродинамічних рівнянь звернемо увагу на те, що вони є модифікацією рівнянь Нав'є-Стокса. Відмінність стосується лише врахуванням складових дисипативної дії. З аналізу робіт [54 – 58] встановлено, що відносна мала величина дисипативної дії дає змогу проводити аналіз течії, яка описується класичними моделями гідродинаміки

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j}_m = 0; \\ \frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{j}_m \otimes \vec{v}) + \nabla p = \nabla \cdot \Pi; \\ \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(\frac{\vec{v}^2}{2} + \varepsilon \right) \right] + \nabla \cdot \left[\vec{j}_m \left(\frac{\vec{v}^2}{2} + \varepsilon + \frac{p}{\rho} \right) \right] + \nabla \cdot q = \nabla \cdot (\Pi \cdot \vec{v}), \end{cases} \quad (1.7)$$

де $\vec{v}$ – векторне поле швидкості; $\vec{j}_m$ – вектор щільності потоку маси; Π – тензор в'язких напруг; ε – внутрішня енергія одиниці маси; q – вектор щільності теплового потоку.

Але оскільки при виконанні транспортної роботи в'язке тертя в цистерні майже відсутнє (окрім тертя рідини в тонкому шарі біля стінки цистерни), то використовувати таку модель недоцільно.

Отже, при описі руху в'язкої нестискуваної рідини в замкнутій ємності доцільно використовувати математичну модель, яка базується на рівнянні Нав'є-Стокса

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} + \nu \Delta \vec{v} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{f}, \quad (1.8)$$

де ν – кінематична в'язкість; Δ – векторний оператор Лапласа; $\vec{f}$ – векторне поле масових сил.

Окреслене рівняння має складну математичну природу, оскільки при його вирішенні необхідно враховувати в'язкість рідини, що накладає певні труднощі при формуванні крайових умов. Методу аналітичного вирішення рівняння Нав'є-Стокса до сьогодення не знайдено, і більшість науковців, використовуючи рівняння (1.8), застосовують чисельні методи розв'язку [43, 45, 59 – 64].

Як вказано в роботі [59], більшість ефективних чисельних методів розв'язку рівняння Нав'є-Стокса ґрунтується на вирішенні нестационарної задачі для сталого стану течії.

Відомі роботи [40, 65] базувалися на припущенні щодо малих коливань в'язкої рідини в замкнутій ємності. Це дозволило науковцям використовувати лінеаризовані рівняння Нав'є-Стокса. В роботах [50, 51] досліджувати рідину з великою в'язкістю і при малих числах Рейнольдса; при цих умовах рівняння Нав'є-Стокса зводиться до моделі ідеальної нестискуваної рідини, коливання рідини якої розглядати в контексті перевезення на базі тракторної цистерни недоречно.

Згадаємо також метод «штучної стисненості» [66, 69], який зводить-

ся до додавання штучного доданка, який дорівнює нулю при рішенні у сталому часі. Це один з перших чисельних методів рішення в природних фізичних змінних.

Також одним з перших та, як виявилось, найбільш популярних є *метод часток в осередку*. Цей метод ґрунтується на перевагах Ейлерова та Лагранжевого підходів. Тобто рішення базується на дослідженні сукупності часток фіксованої маси (підхід Лагранжа), які рухаються скрізь нерухому сітку (підхід Ейлера) [70 – 72]. Таким чином, частки визначають природні параметри рідини (швидкість, масу), а сітка встановлює параметри поля (тиск, щільність). Даний метод дозволяє відстежувати динаміку багатокomпонентних середовищ, але недоліком цього методу є те, що він потребує великого обсягу обчислювальних операцій.

На практиці широкого загалу набув *метод розщеплення* [43, 72 – 76], який використовує розгалуження фізичних процесів в часовому континуумі, після чого вирішуються стаціонарні задачі. На думку автора [72] цей метод має велику перспективу для моделювання в'язких потоків, дослідження течії розрідженого газу та вивчення турбулентності.

Як видно з аналізу, обчислення рівняння руху в'язкої нестискуваної рідини в ємності носить велику практичну значимість, тому створення або модернізація вже існуючих чисельних методів продовжується і сьогодні. Подальший розвиток алгоритмів рішення призведе до ускладнення розрахункових моделей шляхом використання апроксимованих функцій більшого порядку, що в кінцевому етапі призведе до труднощів їх реалізації. Таке спостереження вказує на обмежену здатність їх впровадження в інженерно-конструкторську діяльність при формуванні досліджень руху цистерни.

При дослідженні руху в'язкої нестискуваної рідини в цистерні необхідно виділити роботи [77 – 104], які присвячені аналізу руху рідини в автомобільних та залізничних цистернах, дослідження котрих (на відміну від тракторних цистерн) описано більш якісно.

Більшість з цих робіт базуються на чисельних методах, що наведені вище, але є і ті, які ґрунтуються на *методі кінцевих елементів* (стандартна (k -е) модель турбулентності [104]). В цьому методі основні рівняння та крайові умови представляються як осередненні середовища. Тобто відбу-

вається апроксимація різноманітних полів (потенціального, вихрового, тощо) локально та незалежно від його положення в загальній моделі [72]. Такий чисельний метод має відмінність в процесі побудови наближеного вирішення від континуальної моделі. Але, незважаючи на такі спрощення, автор роботи [72] вважає, що загалом такий процес апроксимації носить більш строгий характер.

Зважаючи на вище сказане, при розв'язанні проблеми руху рідини в задачах проектування тракторних цистерн доцільним є використання комбінованих методів класичного типу, які ґрунтуються на об'єднанні рівняння Нав'є-Стокса з рівняннями поверхневих хвиль Релея. Використання таких методів повинно враховувати вільні та вимушені низькочастотні поверхневі коливання рідини, що б давало змогу більш якісно оцінювати лінійну та нелінійну модель транспортного засобу. Реалізація такого підходу базується на вирішенні так званої *потенціальної постановки задачі*, при якій коливальний рух рідини (за виключенням вузького пристінного шару) вважався безвихровим, та використанні *методу парціальних осциляторів*, який дозволяє для низькочастотних коливань замінити континуальну модель рідини дискретною моделлю.

Використання *методу парціальних осциляторів* не нове, його започаткували ще в 60 – 70х роках минулого сторіччя для моделювання старту ракети на рідкому паливі. Даний метод описано в роботах К.С. Колеснікова, Г.Н. Мікішева, Н.Н. Моїсєєва, А.А. Петрова, Б.І. Рабіновича, В.Г. Сухореброго [48, 49, 105]. Він ґрунтується на розгляді збурювального руху, як в полі масових сил, так і в площині еквівалентного твердого тіла, в якому рідина замінена сукупністю фізичних маятників (парціальних осциляторів). Як відмічено в роботі [48] ідея такого механічного аналога запропонована О.Ю. Ішлінським. Особливістю вибору параметрів осциляторів є те, що їх кількість, яка може прагнути до нескінченності, стає точним механічним аналогом початкового тіла з рідким наповненням. Таким чином, осцилятор під дією зовнішніх сил і при певних початкових умовах здійснює такий же рух, як і рідина.

Проте використання *методу парціальних осциляторів* для ракетної та сільськогосподарської техніки має суттєві відмінності: за формою ємності; за гладкістю змочуваної поверхні стінок; за системою координат;

за рівнем вертикальних прискорень. Тому цей метод потребує значної переробки та адаптації до нових задач при описі руху рідини в тракторній цистерні.

1.3. Аналіз коливальних процесів при русі тракторів з сільсько-господарськими агрегатами

Основний та єдиний показник, який характеризує динамічні властивості руху будь-якої системи – це коливання. Коливанням називають явище, яке характеризує зміну стану системи біля точки рівноваги. Як відомо, коливання розподіляються на такі типи:

- вільні (власні) коливання, які виникають при дії внутрішніх сил;
- вимушені (зовнішні) коливання, які виникають при дії зовнішніх чинників;
- автоколивання, при яких система має запас потенціальної енергії, що використовується на процес коливань;
- параметричні коливання, які виникають при зміні якогось параметра коливальної системи при зовнішньому впливі.

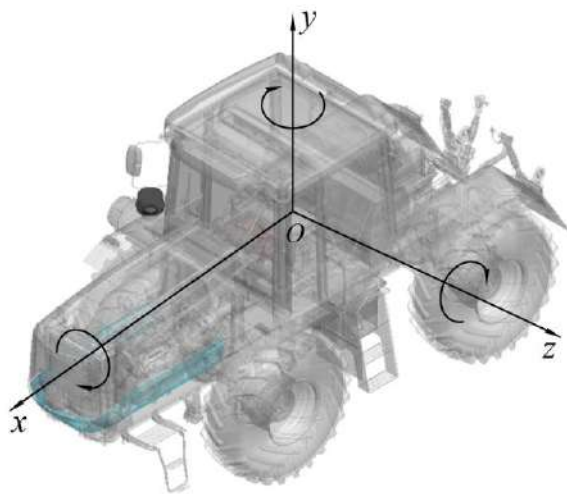


Рисунок 1.4 – Система координат, пов’язана з трактором

При дослідженні руху тракторної техніки всі ці види коливань присутні. Вони діють у відповідних площинах (рис. 1.4). Відомо, що найбільший і суттєвий вплив, який здійснюють коливання, відбувається лише в двох площинах – поздовжній (xOy) та поперечній (zOy). Як відмічено в роботах [106 – 107], поперечні коливання майже вдвічі менші поздовжніх, і при запровадженні практичних рекомендацій щодо зменшення поздовжніх коливань їх дія переноситься також і на поперечні. Але зовсім нехтувати поперечними коливаннями неможливо, їх розглядають при дослідженні курсової стійкості та керованості транспортних засобів.

Дія коливань на трактор може нести як руйнівний характер, так і майже не мати впливу на систему. Оцінка впливу коливань на транспортний засіб базується на побудові та застосуванні динамічних моделей, які, по своїй природі, можуть бути одно- та багатомасовими. Останні більш точніші, але і вимагають від науковця застосування поглибленого математичного апарату.

1.3.1. Вільні коливання

Аналіз вільних коливань – це перший етап визначення динамічних властивостей кожної системи. Його проводять передусім для [108]:

- оцінки існуючих резонансних зон (збігу власних частот з частотами зовнішнього впливу) в робочому діапазоні руху. Це може викликати деформацію або руйнування досліджуваного об'єкту;
- визначення ступеня небезпеки ймовірних резонансних режимів, тобто при потраплянні небезпечних гармонік в робочий діапазон руху з'ясується, чи відбувається відстроювання системи від резонансу, та/або виконується аналіз за величиною роботи збурювальних моментів;
- побудова алгоритмів динамічного аналізу (включно процесів відстроювання від резонансних режимів);
- отримання умов виникнення вимушених коливань нелінійних систем, частота яких в ціле число раз менша частоти гармонійних збурень;
- виокремлення парціальних коливальних систем.

Загальний принцип визначення частот вільних коливань системи зводиться до рішення системи лінійних диференціальних рівнянь багатомасових моделей аналітичним, чисельним та іншими методами.

Великого розповсюдження набули рекурентні методи [109 – 116]: *метод Толле, метод Терських, метод Хольцера* та інші.

Метод Толле базується на рівності нулю суми моментів сил пружності та сил інерції мас системи при вільних коливаннях. Як вказано в роботі [109], перевагою цього метода є простота його реалізації, натомість необхідно застосовувати підвищені вимоги до розрядності чисел з плаваючою точкою.

Метод Терських складається з вирішення диференціальних рівнянь у вигляді ланцюгового дробу. З роботи [114] відомо, що за допомогою даного методу виконується перевірка отриманих результатів, але також можуть виникати випадки неправильних рішень це пов'язано зі специфікою розрахунків, а саме в момент проходження через нуль.

Метод Хольцера ґрунтується на рівності кінетичної енергії на масах системи від інерційного моменту до потенційної енергії на ділянках еластичного моменту, який діє під час вільних коливань. Згідно з цим при переході від однієї маси до іншої для кожного пробного значення колової частоти, розраховується накопичений інерційний момент, який на останній масі системи при дослідженні шуканої частоти повинен дорівнювати нулю В роботі [115] вказано, що окреслений метод дуже схожий на метод Толле, але в порівнянні з іншими він найбільш складний при реалізації.

Сьогодні окреслені методи визначення вільних коливань системи дуже популярні при дослідженні не складних систем, тобто тих, які мають до 40 ступенів свободи [108]. Алгоритми цих методів розраховуються матричним способом вирішення диференціальних рівнянь руху механічної системи

$$[J] \cdot \{\ddot{\phi}\} + [H] \cdot \{\dot{\phi}\} + [C] \cdot \{\phi\} = \{M\}, \quad (1.9)$$

де $[J]$, $[H]$, $[C]$ – матриці інерційності, демпфірування та жорсткостей; $\{\ddot{\phi}\}$, $\{\dot{\phi}\}$, $\{\phi\}$ – вектори прискорення, швидкості та переміщення кутів закручування; $\{M\}$ – вектор зовнішніх моментів, які діють на систему.

Зауважимо, що в більшості випадках науковці при дослідженні віль-

них коливань нехтують дисипативною енергією, що обумовлено її малою значимістю. При описі в'язкопружних середовищ в контексті розгляду лінійних задач відомими [117] є *модель Кельвіна-Фойгта*, *модель Максвелла* та *модель стандартного лінійного тіла*.

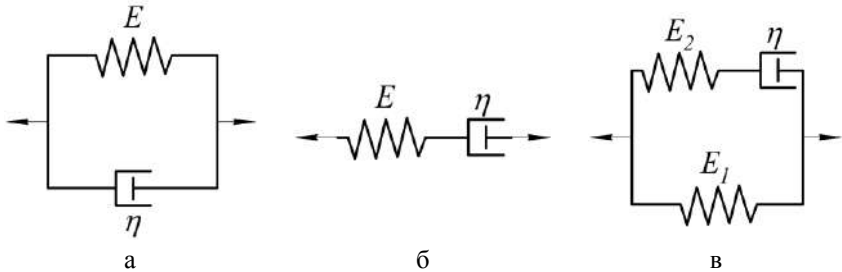


Рисунок 1.5 – Схеми, які використовуються при описі в'язкопружних середовищ:

а – модель Кельвіна-Фойгта; б – модель Максвелла; в – модель стандартного лінійного тіла

Відповідно до моделі Кельвіна-Фойгта реологічні властивості середовища описуються складовими, які пропорційні похідній першого порядку за час від деформації

$$\sigma(t) = E \cdot \varepsilon(t) + \eta \frac{d\varepsilon(t)}{dt}, \quad (1.10)$$

де σ – напруження; $\varepsilon(t)$ – деформація; η – в'язкість; E – жорсткість.

Ця модель віддзеркалює явище, яке характеризує зміну пружної деформації в часі у випадках, коли вона постійно зростає (до якоїсь межі), або зменшується. Саме на основі моделі Кельвіна-Фойгта відбувається аналіз вільних коливань переважної більшості інженерних задач.

Модель Максвелла по своїй суті представляє послідовно з'єднані в'язкий та пружний елементи

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\sigma}{\eta} + \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt}. \quad (1.11)$$

Згідно з цією моделлю, якщо об'єкт знаходиться під постійним навантаженням, то напруження поступово слабне. Дана модель переважно використовується при дослідженні пластичних твердих тіл.

Модель стандартного лінійного тіла складається з паралельно розташованих моделі Максвелла та пружного елемента

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\frac{E_2}{\eta} \left(\frac{\eta}{E_2} \frac{d\sigma}{dt} + \sigma - E_1 \varepsilon \right)}{E_1 + E_2}. \quad (1.12)$$

Згідно з роботою [118] модель стандартного лінійного тіла набагато точніша, ніж моделі Кельвіна-Фойгта та Максвелла, але вона і найбільш трудомістка.

Широкого загалу набув матричний чисельно-аналітичний метод інтегрування рівнянь руху механічної системи із зосередженими параметрами [119]. Окреслений метод дозволяє представити загальні рішення задачі Коши у вигляді лінійної форми з матричними коефіцієнтами. Метод розроблявся для дослідження механічних систем з розтягнутим спектром вільних частот, де він дозволяв відмовитись від неявних або інших видів схем типу Адамса. Однак при дослідженні вільних коливань гідромеханічних вузлів в роботі [120] наведено переваги застосування різних схем Адамса при розрахунку вузлів, які описуються жорсткою системою диференціальних рівнянь при наявності погано обумовленої матриці коефіцієнтів.

Відомою також є робота [121], в якій автор запропонував новий аналітичний метод визначення власних частот коливальної системи з різним числом ступенів свободи. Автор роботи стверджує, що метод базується на принципах теорії автоматичного керування з використанням в описі окремих ланок перетворення Фур'є.

В роботах [122 – 124] при розрахунку власних частот коливань ви-

користовується модальний аналіз. Автори підкреслюють, що сучасні програмні продукти типу LMS Imagine.Lab AMESim, ANSYS та Nastran дозволяють значно прискорити дослідження коливань систем та об'єктів, але використання таких програмних продуктів є недоречним при поглибленому аналізі коливань (неможливо визначити алгоритми дослідження програм) або при складній системі дослідження.

Визначення вільних коливань в системах трактора передусім досліджуються при розгляді моторно-трансмісійної установки [123 – 130] та при дослідженні дії підресорених мас трактора [122, 131 – 134]. Всі ці дослідження направлені на визначення базових частот, які впливають на конструктивні особливості трактора та/або на стан водія.

З проведеного аналізу встановлено, що дослідження вільних коливань трактора несуть першочергову важливість для вивчення динаміки його руху. Особливо актуальні питання пов'язані з впливом гідромеханічних коливань (які виникають в цистерні) на механічні коливання трактора.

1.3.2. Зовнішні коливання

Зовнішні (вимушені) коливання діють на динаміку руху трактора шляхом утворення зовнішньої сили, яка здійснює позитивну роботу та забезпечує додатковий енергетичний вплив на загальну коливальну систему. Така дія здійснює не згасаючий коливальний рух системи.

Збурювальні зовнішні сили утворюються за рахунок руху по складному мікропрофілю дорожньої поверхні та/або дією агрегатів, що транспортуються (тобто при впливі змінного навантаження на гак).

Формування мікропрофілю земної поверхні, по якій рушить трактор, визначається під впливом багатьох чинників – це, насамперед, властивості покриття, інтенсивність руху трактора та інше [135 – 153]. З роботи [135] відомо, що дослідження мікропрофілю дорожньої поверхні ґрунтуються на трьох методах: прямий (експериментальний), непрямий (зміна нерівностей мікропрофілю носить емпіричну залежність) та модельний (складаються з визначення параметрів, використовуючи аналітичний процес).

Аналітичним шляхом визначення зміни мікропрофілю відбувається

при обчисленні випадкової функції, яка залежить від координат усередненої площини, відносно якої змінюється висота нерівностей [138]. Статистичними характеристиками поверхні полотна шляху будуть кореляційні функції [136]:

$$R_q(l) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2X} \int_{-N}^N q(x) \cdot q(x+l) dx; \quad (1.13)$$

$$R_\psi(l) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2X} \int_{-N}^N \psi(x) \cdot \psi(x+l) dx; \quad (1.14)$$

де $R_q(l)$ та $R_\psi(l)$ – кореляційні функції повздовжніх та поперечних перетинів мікропрофіля; q – ординати середнього перерізу; ψ – кут нахилу поперечного перетину.

Відомо, що нормовані кореляційні функції ординат середнього перетину апроксимуються за наступними виразами [136, 149]:

$$R(\tau) = D \cdot e^{-\alpha|\tau|}; \quad (1.15)$$

$$R(\tau) = D \cdot e^{-\alpha|\tau|} \cdot \cos(\beta \cdot \tau); \quad (1.16)$$

$$R(\tau) = \begin{cases} D \cdot (A_1 \cdot e^{-\alpha_1|\tau|} + A_2 \cdot e^{-\alpha_2|\tau|} \cdot \cos(\beta \cdot \tau)); \\ A_1 + A_2 = 1; \end{cases} \quad (1.17)$$

$$R(\tau) = \begin{cases} D \cdot (A_1 \cdot e^{-\alpha_1|\tau|} + A_2 \cdot e^{-\alpha_2|\tau|} + A_3 \cdot e^{-\alpha_3|\tau|} \cdot \cos(\beta \cdot \tau)); \\ A_1 + A_2 + A_3 = 1, \end{cases} \quad (1.18)$$

де D – дисперсія висот нерівностей поверхні; α , β – коефіцієнти кореляції.

На рис. 1.6 наведено графіки нормованої функції кореляції в залежності від вибору функції [136].

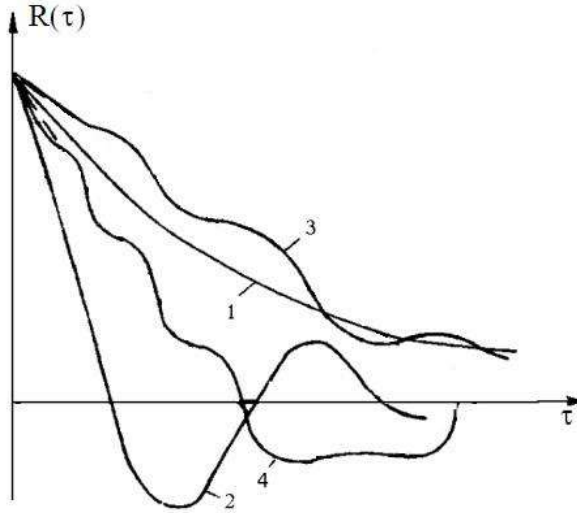


Рисунок 1.6 – Нормовані функції кореляції [136] з рівнянь:
1 – (1.15); 2 – (1.16); 3 – (1.17); 4 – (1.18)

Спектральна щільність – це найбільш повна характеристика збурень, що діють на самохідну машину [136, 149]. Застосовуючи перетворення Фур'є, наведено спектральну щільність для нормованих кореляційних функцій

$$S(\omega) = D \cdot \frac{2 \cdot \alpha}{\omega^2 + \alpha^2}; \quad (1.19)$$

$$S(\omega) = D \cdot \frac{2 \cdot \alpha \cdot (\omega^2 + \alpha^2 + \beta^2)}{\omega^4 + 2 \cdot \omega^2 \cdot (\alpha^2 - \beta^2) + (\alpha^2 + \beta^2)^2}; \quad (1.20)$$

$$S(\omega) = D \cdot \left(\frac{2 \cdot A_1 \cdot \alpha_1}{\omega^2 + \alpha_1^2} + \frac{2 \cdot A_2 \cdot \alpha_2 \cdot (\omega^2 + \alpha_2^2 + \beta^2)}{\omega^4 + 2 \cdot \omega^2 \cdot (\alpha_2^2 - \beta^2) + (\alpha_2^2 + \beta^2)^2} \right); \quad (1.21)$$

$$S(\omega) = D \cdot \left(\frac{2 \cdot A_1 \cdot \alpha_1}{\omega^2 + \alpha_1^2} + \frac{2 \cdot A_2 \cdot \alpha_2}{\omega^2 + \alpha_2^2} + \frac{2 \cdot A_3 \cdot \alpha_3 \cdot (\omega^2 + \alpha_3^2 + \beta^2)}{\omega^4 + 2 \cdot \omega^2 \cdot (\alpha_3^2 - \beta^2) + (\alpha_3^2 + \beta^2)^2} \right). \quad (1.22)$$

За допомогою генерації білого шуму будується випадкова функція $q(t)$, яка описує висоти нерівностей за відомими методами [138 – 141]. Суть цих методів зводиться до формування диференційного рівняння

$$T_1^2 + \ddot{q}(t) + T_2 \cdot \dot{q}(t) + q(t) = K_\zeta \cdot \zeta(t), \quad (1.23)$$

де T_1 та T_2 – сталі часу, які формують функцію $q(t)$ при подачі на його вхід білого шуму $\zeta(t)$; K_ζ – коефіцієнт підсилення [141].

В відомих методиках визначають випадкову функцію $q(t)$ для таких поверхонь, як асфальтобетонної або ґрунтової дороги та стерні колосових культур. На основі розв'язку системи рівнянь (1.16, 1.20, 1.23) будується випадковий мікропрофіль відповідної поверхні (рис. 1.7). Подальшим кроком науковці намагаються виконати згладжування випадкового мікропрофілю тракторною шиною [152].

Окрім методик, які було наведено попереднє, виконати моделювання випадкового мікропрофілю дорожньої поверхні можливо за рахунок використання ординат поверхні відносно умовної базової лінії з ГОСТу 31323-2006 [153]. В наведеному ГОСТі надано інформацію щодо ділянки з нерівною (35 м) та гладкою (100 м) поверхнями досліджуваного шляху. Для нерівної ділянки ординати задаються з інтервалом 80 мм, а для гладкої ділянки – з інтервалом 160 мм. Кожна ділянка включає в себе дві паралельні полоси, відстань між якими відповідає колісній колії машини.

Наведені методики популярні, адже їх використання доречно робити при визначенні передаточних функцій підвіски транспортних засобів. Але для опису динаміки руху вони не зовсім доречні, тому що вимагають копіткої обробки даних для коефіцієнтів кореляції та спектральної щільності. Тому більшість науковців використовують непрямий метод, тобто гармонічний періодичний сигнал, який формується на основі синусоїдального закону. Такий режим досліджень є найбільш навантажений, тобто енергетичний вплив на коливальну систему максимальний з ймовірних, що надає змогу оцінювати пікові значення резонансів.

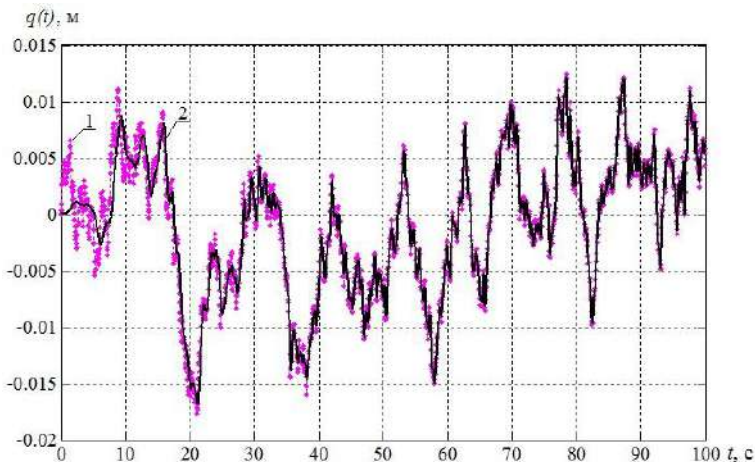


Рисунок 1.7 – Реалізація випадкового мікропрофіля дороги на асфальтобетонній поверхні:

1 – без згладжування колісною шиною; 2 – зі згладжуванням шиною

Вимушені коливання, які діють на трактор, також здійснюються за рахунок руху сільськогосподарського агрегату. Так ще в роботах В.П. Горячкина при аналізі тягового опору плугів автором помічено періодичність та повторюваність їх дії. Тому основною задачею при їх дослідженні є розкладання кривої на окремі складові з різноманітними значеннями амплітуд та періодів коливань [154]. В роботах Ю.К. Кіртбая відмічено, що тяговий опір має два характерних види коливань: коливання з періодом до 2 м (викликані умовами руху МТА) та коливання з періодом до 12 м (викликані періодичною зміною фізико-механічних властивостей ґрунту) [155].

В.І. Анохін в праці [156] пропонує тягові навантаження з періодом коливань 2 с вважати основними та вважати їх за параметри несталого навантаження. Інші коливання, які є складовими з більшим періодом зміни, необхідно використовувати при дослідженні тривалих навантажень, що можуть викликати перевантаження двигуна внутрішнього згоряння.

За даними робіт В.М. Болтинського період коливань сили опору на силу перекочування трактора досягає значень від 0,1 до 0,3 с. Період ко-

ливань величини тягового опору при роботі з плугом може досягати $0,2 \div 2$ с [157]. В.М. Болтинський відмітив, що за час зміни дотичної сили тяги приблизно 0,3 с, дотична сила тяги здійснить приблизно чотири коливання, що дає передумови до формування негативних чинників, які утворюються коливальним горизонтальним навантаженням на ґрунт.

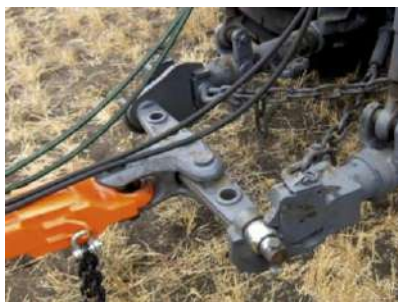
Отже, як засвідчено в роботі Г.М. Кутькова [158], багато авторів розглядають коливальний процес тягового опору як гармонійну функцію зі змінними частотами; також пропонують використовувати функціональну залежність, яка ґрунтується на п'яти основних складових коливань, що відрізняються між собою амплітудою та частотою.

З роботи А.А. Юшина [159] також відомо, що збільшення швидкості руху МТА призводить до зростання амплітуди коливань тягового опору. Зокрема, при зростанні швидкості від 1,33 м/с до 2,33 м/с при роботі МТА на оранці відчувається підвищення тягового опору з 34 до 37 кН.

Згідно з роботою [160] істотним чинником, який зменшує вимушені коливання руху сільськогосподарського агрегату, є розробка та вдосконалення тракторної техніки шляхом впровадження пружних елементів в системи передачі енергії тягово-зчіпного пристрою. При виконанні транспортних, технологічних (тягових), транспортно-технологічних операцій з причіпними або напівпричіпними агрегатами трактор оснащується тягово-зчіпними пристроями [161 – 163]. На більшості світових колісних тракторів, зазвичай, використовуються три типи тягово-зчіпних пристроїв (рис. 1.8).

Зазвичай тягову вилку використовують при ввімкненому задньому валу відбору потужності. Її монтують на навісний пристрій трактора, що дозволяє транспортувати тільки причіпні агрегати. За рахунок роботи рухомих частин навісного обладнання поздовжні коливання при транспортуванні причіпних агрегатів можуть бути зменшені. Гідрофікований гак призначено для зчіпки, причому як напівпричіпних агрегатів, так і причіпних. Завдяки вбудованому демпферному механізму такий гак має властивість зменшувати поздовжні коливання, які мають місце на етапах розгону і гальмуванні транспортного засобу, а також при перевезенні агрегатів перемінної маси (цистерн з рідиною, що має вільну поверхню). Маятникова скоба, як і гідрофікований гак, також може транспортувати

причіпні і напівпричіпні (з обмеженням по вантажопідйомності) агрегати, але має свої переваги при виконанні повороту.



а



б



в

Рисунок 1.8 – Тягово-зчіпні пристрої колісних тракторів:

а – причіпна скоба; б – гідрофікований кріюк; в – маятникова скоба

Як видно з опису стандартних тягово-зчіпних пристроїв лише гідрофікований гак може зменшити поздовжні коливання причіпних і напівпричіпних агрегатів. Але в роботі [164] автор свідчить, що застосування пружного елемента оптимальної (розрахункової) жорсткості в тягово-зчіпному пристрої дозволить знизити на $20 \div 25\%$ динамічність процесу навантаженості трактора.

В роботі [160] автори запропонували замість серійного навісного обладнання використовувати навісне обладнання з пружною ланкою, яка

складається з пневмогідроаккумулятора мембранного типу та гідроциліндру. Покращення роботи МТА з таким навісним обладнанням підтверджено шляхом проведення теоретичних досліджень.

Однак, результати роботи [165] показали, що нелінійний пружний елемент при слабкому демпфіруванні сприяє розвитку коливань ланок агрегату при сталому режимі руху. Це спостереження свідчить про те, що жорсткість зв'язку трактора з причіпним агрегатом повинна бути змінною: при перехідних режимах роботи вона повинна бути мінімальною, а при сталому русі – максимально демпфірувальна.

Автори роботи [166] запропонували для підвищення тягових властивостей рушіїв колісних тракторів на транспортних роботах впровадити спосіб зниження динамічного впливу, який ґрунтується на використанні додаткового вантажу, що кріпиться шарнірно на раму трактора. Окреслений пристрій повинен працювати від гідравлічної системи трактора та виконувати коливання зі змінним прискоренням. Використання такого пристрою дозволить підвищити тягові властивості трактора на транспортних роботах до 12 – 15%.

З роботи [167] встановлено, що ведуться роботи щодо перспективної конструкції для причіпних агрегатів (рис. 1.9) – тягово-зчіпний пристрій з плаваючою скобою. Як вказує автор роботи [167], наведена конструкція сприяє підвищенню розгінних та гальмівних властивостей за рахунок автоматизації процесу регулювання тягово-зчіпних властивостей МТА, але дана конструкція є новою і в повній мірі не відомо, як вона буде працювати з точки зору надійності.

З роботи [168] відомо, що тягово-зчіпні пристрої також можуть бути модернізовані шляхом встановлення додаткових обладнань і виконувати навантажувальні роботи. Така зчіпка буде називатися тягово-навантажувальною і великої зміни впливу на гасіння поздовжніх коливань не викликатиме.

В роботі [169] автори провели дослідження впливу конструктивних параметрів тягово-зчіпних пристроїв на стійкість руху МТА, а саме за рівнем коливань курсового кута трактора та причіпного агрегату. Дослідження показали, що застосування тягово-зчіпного пристрою зі змінною відстанню від положення центру мас причіпного агрегату до його центру

повороту підвищує стійкість руху МТА. Застосування тягово-зчіпного пристрою зі змінною відстанню також здійснює зменшення смуги руху МТА при коловому русі, що сприяє поліпшенню маневрових властивостей [170].

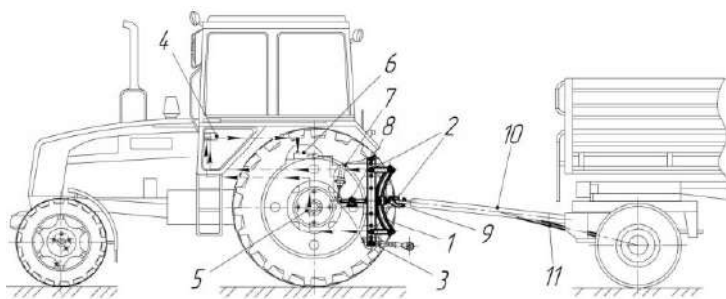


Рисунок 1.9 – Пристрій плаваючого типу [167]:

1 – напрямна; 2 – силові датчики тягового навантаження; 3 – вертикальний брус навішування трактора; 4 – електронний блок управління; 5 – датчик буксування; 6 – електрогідорозподільвачі; 7 – гідроциліндр двосторонньої дії; 8 – для важеля висувний механізм; 9 – тяговий крюк; 10 – дишло; 11 – обмежувач вертикального переміщення

Відомо також з роботи [136], що на курсовий рух мобільної машини великий вплив мають низькочастотні коливання (в діапазоні від 0 до 20 Гц), а високочастотні згасають за рахунок дії інерції агрегату.

Значного наукового результату здобув автор роботи [171], який при дослідженні просторової динаміки центру мас транспортно-технологічного агрегату при виконанні технологічного процесу визначив, що причіпний агрегат, на відміну від напівпричіпного, дозволяє знизити поздовжні коливання на 60%, поперечні – на 50%, а вертикальні – на 66,7%.

Проведений аналіз показав, що розробка нових технічних рішень дозволить зменшити динамічну дію, що передається через тягово-зчіпний пристрій, яка виникає при русі сільськогосподарського агрегату. Відмічено, що зменшення вимушених коливань в повздовжній площині руху

також може досягатися впровадженням нових технічних рішень в моторно-трансмісійну установку трактора.

Найбільш популярним типом трансмісії, якими оснащуються колісні трактори, є механічна. Це обумовлено рядом переваг, особливо цінна з яких це покращені експлуатаційні показники. Але механічна трансмісія забезпечує жорсткий зв'язок між двигуном та рушієм колісної машини, що з урахуванням транспортування агрегатів сприяє виникненню додаткових вимушених коливань, які діють в повздовжній площині. Так з роботи [172] встановлено, що зниження жорсткості трансмісії шляхом встановлення пружнодемпфіруючих ланок дозволяє знизити горизонтальні прискорення до величин, які не перевищують верхній рівень допустимих значень (0,1 – 0,2 g) в усьому діапазоні швидкостей.

На сьогоднішній день великої вживаності на тракторній техніці отримала безступінчаста гідروоб'ємно-механічна трансмісія, яка з огляду зниження повздовжніх коливань є пріоритетною. Це обумовлено наявністю гідрооб'ємної передачі, яка за рахунок властивостей рідини (демпфірування) в гідравлічній ланці здатна зменшувати вплив поздовжніх коливань транспортного засобу, тим самим забезпечувати сталу роботу двигуна. Велику наукову та практичну значимість при дослідженні, розробці та впровадження гідрооб'ємно-механічних трансмісій на колісну тракторну техніку висвітлено в роботах: Авруніна Г.А., Александрова Є.Є., Башти Т.М., Бондаренка А.І., Городецького К.І., Забелішинського З.Е., Кісточкіна Є.С., Кононенко В.О., Лебедєва А.Т., Осипова О.Ф., Панченка А.І., Петрова В.А., Прочка Є.І., Рогова А.В., Самородова В.Б., Тарана І.О., Філічкіна М.В., Щельцина М.О., Aitzetmuller H., Jarchow F., Kohmascher T., Kyle R.W., Monika M.I., Rydberg K.-E., Weber M., та ін. [173 – 178].

Сьогодні тенденції розвитку двигунобудування свідчать про масове використання електронних компонентів для керування його агрегатів і систем. Зокрема, електронне керування подачею палива дозволяє більш точно регулювати параметри процесу впорскування. До відомих конструкцій електронних систем керування двигуна входять: набір датчиків – це датчик частоти обертання, датчик положення органу керування двигуном, датчик положення рейки паливного насоса високого тиску, датчик

температури палива, тиску та температури наддування, температур відпрацьованих газів і охолоджуючої рідини; виконавчий механізм у вигляді електромагніту, лінійного п'єзоактуатора або крокового двигуна; електронний блок керування, що пов'язує датчики і виконавчі механізми.

Існують відомі конструкції електронних систем керування подачею палива, зокрема, є регулятор частоти обертання колінчастого валу двигуна [179]. По сигналам, що надходять від датчиків, електронний блок керування виробляє електричний сигнал для виконавчого механізму, який безпосередньо управляє рейкою паливного насоса високого тиску. Недоліком такої системи є те, що алгоритм управління засновано на принципі інтерполяції закладених в пам'ять контролера (в табличному вигляді) необхідних статичних характеристик регулятора.

В роботах [180 – 182] автори наводять принципи створення ефективних систем електронного керування тепловозних дизелів, алгоритми яких не можуть бути використані для машин наземного транспорту, особливо в тракторній галузі, в силу особливостей їх експлуатації.

Найбільш пріоритетною електронною системою керування подачею палива є система, що наведена в роботах [183, 184], яка з точки зору швидкодії та точності має кращі показники, ніж аналоги. Головним новаторством цієї системи є програмний алгоритм роботи, який базується на аналогії з роботою механічного пружинно-важільного регулятора прямої дії без конструктивних змін у паливній апаратурі.

Положення рейки паливного насоса високого тиску, яке позитивно залежить від положення органу керування паливоподачею (педаль акселератора) та негативно – від поточної частоти обертання (кутової швидкості) колінчастого валу. Управління положенням органу керування паливоподачі (рейкою паливного насоса) та поточною частотою обертання здійснюється шляхом застосування запропонованого алгоритму та таким вибором його коефіцієнтів, який забезпечує будь-які універсальні характеристики дизеля.

Дана інновація дозволить стабілізувати рух колісного трактора з сільськогосподарськими агрегатами шляхом гасіння поздовжніх коливань нормованою подачею палива.

Таким чином, наведено можливі способи зменшення поздовжніх ко-

ливань колісного трактора, які виникають при транспортуванні сільсько-господарських агрегатів за рахунок впровадження гідрооб'ємно-механічної трансмісії, а також нових технічних рішень в електронній системі керування подачею палива двигуна внутрішнього згоряння. Але слід відзначити, що впровадження таких способів жодним чином не впливають на вертикальні коливання, тому комплексне дослідження вимушених коливань в поздовжньо-вертикальній та поперечно-вертикальній площинах має велику актуальність, особливо при транспортуванні рідких вантажів транспортним засобом.

1.3.3. Автоколивання

Автоколивання присутні в будь-якій складній механічній системі і відіграють, як позитивну дію (створюючи основу їх роботи), так і негативну (відтворюючи додаткову збурювальну силу).

Поняття «автоколивань» введено А.А. Андроновим в 1928 році [185]. Явище автоколивань передбачає незатухаючий рух системи, який підтримується зовнішнім джерелом енергії в нелінійній дисипативній системі. Автоколивання, по своїй природі, схожі на вимушені коливання, які викликані періодичним зовнішнім впливом (частота вимушених коливань дорівнює частоті зовнішнього впливу). Автоколивання визначаються за внутрішніми властивостями автоколивальної системи, що нагадує дію вільних (власних) коливань, частота яких визначається параметрами системи [186 – 188].

В роботі [186] вказано, що для встановлення автоколивань велику роль відіграє нелінійність системи, яка приводить до обмежувань коливань, що обумовлено постачанням та витратами енергії джерела.

Найбільш розповсюдженими видами автоколивань, згідно з роботи [189], є коливання, які викликані тертям або фрикційними релаксаційними автоколиваннями. Автор роботи [189] стверджує, що причиною виникнення автоколивань є нелінійна сила тертя, яка залежить від відносної швидкості об'єктів, що труться. Сьогодні на практиці використовують декілька моделей тертя та їх апроксимації, які здатні описати динаміку виникнення автоколивань: модель Кулона, модель з монотонно спадною силою тертя, пост кулонівська модель, магічна формула Пасейко.

Дослідження впливу автоколивань на системи автомобілів та тракторів загалом помічаються при русі на перехідних режимах, зокрема при гальмуванні. Так, автор [189] досліджує деякі етапи гальмування, які виникають на дорожньому покритті з хвилеподібним рельєфом. Автор акцентує увагу на тому, що в умовах, коли швидкість ковзання блокованих коліс потрапляє в ділянку, яка характеризується збільшенням сили тертя при зменшенні швидкості ковзання, виникають автоколивання в процесі руху.

Автори робіт [190, 191] стверджують, що автоколивання присутні при дослідженні роботи пар сухого фрикційного зчеплення. Це твердження ґрунтується на проведених стендових випробуваннях при дії тривалого буксування елементів. Автором роботи [190] встановлено, що автоколивальні процеси виникають на початку та в кінці буксування фрикційного зчеплення. Згідно роботи [191] встановлено, що істотний вплив на автоколивання здійснює жорсткість валопроводів досліджуваного стелю, яка в трансмісії автомобілів та тракторів значно вища. Результати робіт [190, 191] спростовуються в матеріалі [192] на основі дослідження реальної експлуатації автомобілів і тракторів.

Великого значення набув процес автоколивань при дослідженні стійкості руху транспортного засобу. Це пов'язано з явищем шимі (автоколивань) керованих коліс транспортного засобу. Як зазначено в роботі [193] причинами виникнення автоколивань є кінематична схема рульового керування, дисбаланс керованих коліс, кінематика підвіски, та інше.

Великий внесок в дослідження автоколивань транспортного засобу в умовах стійкого руху внесли Д.А. Антонов, Г.В. Аронович, Б.Л. Бидерман, В.О. Богомоллов, А.Г. Болдырев, В.П. Волков, Г.А. Гаспарянц, Б.А. Глух, В.А. Горелов, А.А. Загордан, М.В. Келдиш, Д.М. Клец, М. Певзнер, М.А. Подригало, В.В. Редчиц, И. Рокар, В.П. Сахно, Г.А. Смирнов, А.В. Смирчек, Е.А. Чудаков, Б.М. Шифрин, G. Broulhiet, R. Dietrich, H. Fromm, J.H. Greidanus, H. B. Pacejka, B. Von Schlippe, та ін. [193 – 207].

Відокремити автоколивання керованих коліс від вимушених коливань, які викликані дисбалансом коліс, при експлуатації транспортних засобів дуже важко. Тому виникає необхідність проведення експериментальних досліджень. Відмінність автоколивань від вимушених коливань

полягає в тому, що частота автоколивань практично не залежить від швидкості руху на відміну від вимушених коливань. Як відмічено в роботі [208] це пов'язано із внутрішніми властивостями коливальної системи транспортного засобу.

В науковій літературі вказано, що автоколивання керованих коліс транспортного засобу виникають на підвищених швидкостях руху. Їх виникнення може відбуватися на гладкій дорозі при нерухомому рульовому колесі і, як вказано в роботі [209], незатухаючі коливання керованих коліс досягають частоти $10 \div 30$ Гц.

Відомий випадок фіксування автоколивань відбувається при дослідженні поперечних коливань транспортного засобу в зчіпці причіпного та напівпричіпного агрегатів. Так, в роботі [209] встановлено, що при русі автопотягу зі швидкістю вище 40 км/год виникає виляння причепа (тобто, коливання у вигляді бокових зміщень в повздовжній площині).

Першим, хто почав досліджувати поперечні коливання транспортного засобу в зчіпці з агрегатами, вважається Я.Х. Закін. Ним в роботі [210] було доведено, що при появі періодичних коливань причепа виникає баланс в коливальній системі енергії, яка потрапляє та витрачається, що свідчить про автоколивання. Цей баланс порушується при впровадженні еластичних шин та при відсутності зазору в тягово-зчіпному пристрої.

В роботі [211] вказано, що потрапляння енергії, яка збурює автоколивання причепів, що транспортуються, забезпечується кінетичною енергією рухомого транспортного засобу. Тобто автори відмічають, що на систему не діють жодні періодичні зовнішні сили, а джерелом коливань є рухомий причіпний агрегат. Дослідження також показали, що критична швидкість руху транспортного засобу з причіпним агрегатом, подолання якої сприяє виникненню автоколивань, залежить в більшій мірі від жорсткості системи та в меншій – від дисипативних опорів.

Основний принцип, який закладено при дослідженні поперечних коливань в умовах дослідження прямолінійного руху, зведено до знаходження критичної швидкості руху [212].

З роботи [213] відомо, що більшість науковців працюють над стійкістю руху в контексті дослідження геометричних параметрів транспортного засобу, конструктивних особливостей ходової системи та навіть де-

яких елементів трансмісії.

Так, з роботи [214] встановлено, що задля запобігання розгойдування ланок автопоїзду, в схему зв'язку причепа з транспортним засобом необхідно ввести пружнодемпфований елемент (канатний та/або резинокордний), який би мав змогу компенсувати кутові коливання причепа.

З проведеного аналізу встановлено, що в науковій літературі дослідження поперечних коливань, які сприяють виникненню автоколивань, для колісного трактора з причіпними та напівпричіпними цистернами окреслено не досить повно. Більшість науковців вважають, що експлуатація тракторних цистерн не може досягти критичної швидкості руху, але в умовах сучасного рівня енергонасиченості ці тенденції змінюються.

1.3.4. Параметричні коливання

Параметричні коливання в будь-якій складній механічній системі викликані періодичною зміною якогось параметра коливальної системи. Параметричні коливання подібні зовнішнім проявам вимушених коливань, але у цьому випадку коливальні рухи підтримуються шляхом зміни параметрів системи.

Параметричний резонанс полягає у зростанні коливань біля нестійкого положення рівноваги, тобто в ділянках динамічної нестійкості. У випадку появи параметричного резонансу в зоні рівноважного стану системи стає нестійким, і вихід з цієї зони характеризується коливаннями з прогресивно-зростаючою амплітудою.

Фундаментальне значення в теорії параметричних коливань отримали роботи В.В. Болотіна, Б.Г. Галеркіна, К.С. Колеснікова, М.Г. Крейна, В.І. Крилова, А.М. Ляпунова, С.П. Тимошенка, Г. Шмідт, N.M. Beliaev, F. Bloch, G. Hill, R.A. Ibrahim, F. Melde, D.T. Mook, G.I. Simitses, та інших вчених [215 – 224].

Розгляд параметричних коливань проводиться на основі дослідження стійкості параметричних резонансів, тобто при математичному моделюванні значно нелінійної системи диференціальних рівнянь. Аналіз динамічної стійкості систем при параметричних збудженнях в основному зводиться до вирішення рівнянь типу Мат'є-Хілла, або використовують методи Галеркіна, Ляпунова, Болотного та інші.

Відомою є робота [225], в якій автор запропонував методи зменшення параметричних коливань керованих коліс транспортної машини. Дані методи ґрунтуються на виборі жорсткості і демпфірування в рульовому управлінні шляхом використання діаграми Айнса-Стретта для рівняння типу Мат'є.

Також в напрямку зменшення параметричних коливань керованих коліс націлено роботи [226, 227], в яких автори зменшують рівень коливань коліс навколо шкворневих осей за рахунок збільшення жорсткості рульового управління.

В роботі [228] автор досліджує параметричні коливання автомобільного колеса, які викликані періодичною зміною радіальної жорсткості по мірі його перекочування. В результаті чого автором отримано залежності, які дозволяють оцінити межі зони параметричної нестійкості автомобільного колеса на ділянці частот біля параметричного резонансу.

Згідно з роботою [229] встановлено, що найбільш небезпечною величиною відношення частоти власних коливань невідвішеної маси до частоти параметричного збурення, що підводиться до коліс, є відношення, яке дорівнює 2.

Також явище параметричних коливань зустрічається при дослідженні роботи моторно-трансмісійної установки. Так в роботі [230] автори помітили наявність параметричних коливань при дослідженні динамічної навантаженості трансмісійної установки. Як зазначено авторами, зниження динамічної навантаженості, що формується параметричними резонансами, може бути досягнута введенням демпфірованого елемента.

В роботі [231] зроблено висновок, що основну роль у формуванні високочастотних коливань силової передачі відіграє параметричне збурення, яке пов'язане з нерівномірністю обертання карданного валу. Автори роботи відмічають, що ефективним засобом зменшення динамічних навантажень є зміна жорсткості карданного валу, величина якою впливає на резонансну зону коливальної системи.

В роботі [232] досліджено можливість виникнення параметричних резонансів для різноманітних форм власних коливань прямокутного епіциклу. Встановлено, що в прямокутному зчепленні кінематична похибка розширює діапазон ділянки нестійких коливань до 50%.

Також відмітимо, що автор роботи [233] встановив, що низькочастотні коливання, так само, як і високочастотні, можуть при певних умовах змінювати дисипативні характеристики коливальних процесів, а також суттєво збільшувати амплітуди параметричних резонансів.

З аналізу дії параметричних коливань на складні механічні системи помітно, що вони викликають ділянки динамічної нестійкості, які призводять до руйнування системи. Особливо актуальним є вирішення проблеми виникнення параметричних резонансів в системі «колісний трактор – агрегат перемінної маси». Адже при частковому рівні рідини в цистерні відбувається перерозподіл мас, який здатний призвести до періодичної зміни руху агрегату та може викликати параметричний резонанс загальної коливальної системи.

1.4. Проблема моделювання руху колісного тракторів з цистернами

Динаміка (від греч. Δύναμις «сила, міць») – розділ механіки, в якому вивчаються причини виникнення механічного руху [234]. Відповідно до наведеного поняття стає зрозумілим, що кожна складна механічна система має динамічні властивості. Колісний трактор не є винятком, адже його динамічні властивості залежать від експлуатаційних показників. З роботи [130] відомо, що зі збільшенням енергонасиченості тракторів вплив динамічних властивостей суттєво збільшується, що зумовлює до подальшого розвитку досліджень в галузі динаміки трактора.

Дослідженням динаміки трактора почали займатися з моменту зародження галузі тракторобудування. З науки про трактор виділяють три основні підрозділи досліджень [235]:

- теорія трактора (взаємодія рушіїв з опорною поверхнею; тягова динаміка; стійкість; керованість; плавність ходу),
- теорія конструювання трактора (конструювання агрегатів та систем; розрахунок агрегатів та систем; ергономічні розрахунки)
- теорія експлуатації (теорія технічної та технологічної експлуатації). Кожен з цих підрозділів так чи інакше описує рух трактора, тобто аналізує вплив динамічних властивостей на загальну будову та роботу.

Динаміка трактора (або мобільної сільськогосподарської машини) аналізується в чисельних працях Є.Д. Львова, Д.К. Карельського, В.М. Болтинського, І.І. Трепененкова, В.Я. Аніловича, Д.А. Чудакова, Ю.К. Кіртбая, В.І.Анохіна, А.В. Ніколаєнка, Б.І. Кальченка, І.І. Артоболовського, П.М. Василенка, В.М. Великодного, Л.В. Погоріло-го, М.П. Артѣмова, Є.С. Александрова, В.Л. Вейца, А.Т. Лебедева, А.М. Туренка, А.В. Рославцева, І.Б. Барського, А.І. Гришкевича, І.П. Ксєневича, В.В. Кацігіна, М.А. Подригала, В.Б. Самородова, В.П. Сахна, В.Л. Строкова, В.М. Шаріпова, І.Г. Шепелєнка, М.М. Щуки-на, та інших вчених [130, 154 – 159, 234 – 239].

В більшості випадків дослідження динаміки руху технічної системи зводиться до складного математичного моделювання, де кожен науко-вець використовує доступні для нього методи та способи реалізації. Але формування математичної моделі, яка б досліджувала динаміку руху складної системи, зокрема колісного трактора, повинна базуватись на загальноприйнятих принципах. Так в роботі [236] автори запропонували наступні принципи.

1. Модульності (для аналізу динамічних властивостей системи необ-хідно розбивати її на підсистеми типу «двигун-трансмсія-колесо»).

2. Взаємопов'язаності (якщо система поділяється на підсистеми, тоді між ними повинен встановитись математично описаний зв'язок).

3. Відповідності частотних діапазонів (перш ніж проводити аналіз впливу збурювальних сил необхідно встановити спектр власних коли-вань, що надасть інформацію щодо частотних діапазонів визначаючих збурюючих факторів).

4. Урахування збурюючих впливів (при формуванні математичної моделі треба враховувати збурювальні сили, що діють з внутрішнього (робота оператора-водія) та навколишнього середовища).

5. Урахування нелінійних факторів (більшість технічних об'єктів в підсистемах трактора мають нелінійну характеристику, тому їх врахуван-ня дасть змогу для якісного покращення математичної моделі).

6. Комплексності (розроблювана математична модель повинна ви-рішувати задачі з галузей науки о тракторі, наприклад, тягова динаміка, стійкість, керованість, тощо).

Існує багато наукових робіт, в яких досліджують динамічні властивості руху сільськогосподарського агрегату при виконанні технологічних робіт окремо від трактора [240 – 242]. Така реалізація технічної системи використовує типові фундаментальні моделі.

Найбільш вживані та популярні математичні моделі, які досліджують динаміку руху колісного трактора, створені за допомогою рівняння Лагранжа II роду та принципу Д'Аламбера – Ейлера.

Використання рівнянь Лагранжа II роду при формуванні динамічної системи трактора вимагає копіткої роботи, адже, як вказано в роботі [173], запис таких рівнянь в явній формі достатньо громіздкий.

В роботі [9] звернено увагу на те, що використання такого математичного підходу при оцінці динамічних показників, як трактора, так і сільськогосподарського агрегату при виконанні транспортної роботи має важливе значення. Але реалізація такої динамічної моделі повинна враховувати конструктивні особливості технічної системи, що вимагає відслідковувати наявність голономних та неголономних зв'язків цієї системи. Таке твердження змушує науковців спрощувати динамічні моделі [130, 242, 243].

Застосування принципу Д'Аламбера – Ейлера ґрунтується на вирішенні квазістатичних рівнянь, тобто виконати перетворення рівнянь динаміки до рівнянь статички. Від'ємністю рішень квазістатички (кінетостатички) від статичних рішень буде використання сил інерції [188]. В роботі [244] зазначено, що використання принципу Д'Аламбера – Ейлера при побудові динамічних моделей машинно-тракторних агрегатів не зовсім доречно, адже він може призвести до похибок, які викликані введенням «фіктивних сил інерції». Автор вказує на те, що величину цих похибок можна зменшити шляхом введення парціальних прискорень.

Метод парціальних прискорень, згідно з роботами [244 – 246], побудовано за принципом зворотного переходу від векторної суми в просторі сил до векторної суми в просторі прискорень. Автори відмічають, що метод парціальних прискорень можна віднести до тих, які побудовані за принципом кінетодинаміки.

Окреслені вище методики побудови математичних моделей руху тракторів з сільськогосподарськими агрегатами зводяться до визначення

одного з основних параметрів, за допомогою якого характеризуються динамічні властивості будь-якої технічної системи – це прискорення. Так, в роботі [9] представлено методологію функціонального аналізу енергозберігаючих режимів роботи трактора на транспортних роботах, яка ґрунтується на побудові в інерціальній системі координат усталеного руху годографа вектора повного прискорення. На основі цієї методології автором доведено, що «вага вантажу має суттєвий вплив при її відповідності чи домінуванні над вагою трактора; характер та властивості вантажу, що транспортується, задає динамічні відхилення функціональних показників особливо при неповному завантаженні ємності, бункера чи кузова» [9]. Зважаючи на це, доцільно поглибити ці дослідження, а саме встановити енергетичність системи «трактор – агрегат перемінної маси (цистерна)» при впливі змінної маси агрегату (коливання рідини в цистерні) на сталий рух трактора, а також оцінити енергетичну складову передачі руху агрегату перемінної маси на трактор при виконанні транспортної роботи.

Побудова динамічної математичної моделі руху колісного трактора з агрегатом змінної маси не нова, так автор роботи [171] «сформулював теорію руху транспортно-технологічного агрегату при зміні його маси, яка, на відміну від відомих, дозволяє враховувати додаткові енергетичні втрати, викликані динамікою центру мас агрегату». Основним напрямом досліджень автора було визначення нових наукових аспектів при встановленні динамічної навантаженості трансмісійної установки трактора при виконанні транспортно-технологічної роботи.

Аналіз наукових робіт та публікацій з висвітлення питань дослідження динамічних властивостей руху колісних тракторів при транспортуванні рідини з вільною поверхнею показав, що загальні принципи формування розрахункових досліджень для визначення складових динаміки руху такого об'єкту не систематизовані. Невизначеною залишається проблема впливу вільної поверхні рідини в цистерні на коливальні явища системи «трактор – цистерна». Напрямок дослідження визначає необхідність розробки концептуального підходу з формування методу динамічного аналізу показників колісного трактора при перевезенні рідкого вантажу з вільною поверхнею, що базується на дослідженні коливального руху цієї вкрай складної системи.

РОЗДІЛ 2. МЕТОДОЛОГІЧНІ ОСНОВИ АНАЛІЗУ ДИНАМІЧНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ РУХУ ТРАКТОРА ПРИ ТРАНСПОРТУВАННІ ТРАКТОРНИХ ЦИСТЕРН

2.1. Концепція зниження низькочастотних коливань мас трактора при перевезенні цистерни з рідиною

Сформуємо особливості та наведемо етапи процесу створення математичної моделі для дослідження динаміки руху транспортних засобів з рідким вантажем. Досліджувана гідромеханічна система досить складна та складається з багатьох елементів, які впливають на коливання з різного діапазону частот: низькочастотних (до 16 Гц) та високочастотних (більше 16 Гц). Тому залежно від поставлених задач дослідження звужується коло шуканих коливальних процесів. При аналізі руху колісного трактора з цистерною (а також автомобілів-паливозаправників (рис. 2.1), танкерів і т.д.) головним вважають діапазон частот від 0,5...2 Гц, який впливає на фізіологічний стан водія (або екіпажу). Якщо дослідника цікавить й міцнісний аналіз, тоді діапазон частот розширюється.

Зрозуміло, що металеві (рамні, корпусні, стрижневі) конструкції в цих задачах доречно вважати абсолютно жорсткими (для чого, інколи, доводиться збільшувати розрахункову піддатливість амортизаторів, шин та інших елементів).



Рисунок 2.1 – Паливозаправник на базі автомобіля КрАЗ-63221

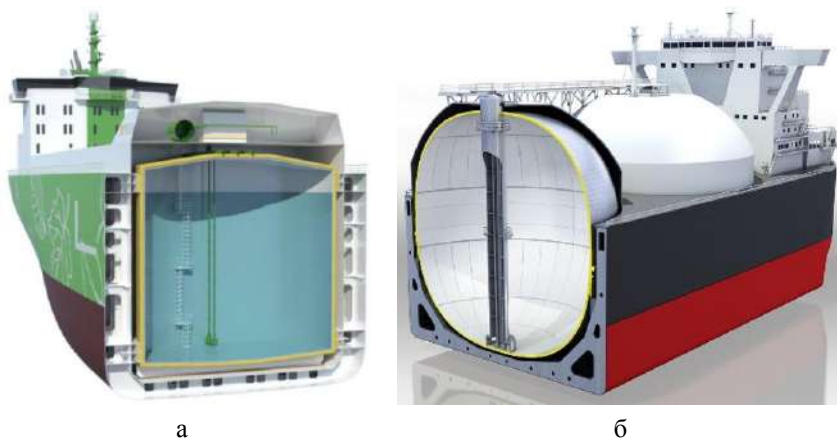


Рисунок 2.2 – Морські танкери:
а – нафтовий; б – газовий (LPG)

Динаміка частини таких транспортних засобів буде описуватися відомими рівняннями руху та пружності для дискретних систем з зосередженими параметрами. Але коливання рідини, що має вільну поверхню, традиційно описується моделлю з розподіленими масами. Проте, використовуючи досвід ракетобудівників, стало можливим застосувати

- *потенційну постановку задачі*, при якій коливальний рух рідини (за виключенням вузького пристінного шару) вважався безвихровим, та
- *метод парціальних осциляторів*, який дозволив для низькочастотних коливань замінити континуальну модель рідини дискретною моделлю.

Саме такий підхід необхідно використовувати в усіх інших технічних додатках, але число осциляторів повинно обиратися з урахуванням основної постановки задач. Крім того, на відміну від моделей паливних баків ракети, де важливо врахувати їх реальну форму, що вимагає складних розрахунків, зважаючи на специфіку вирішуваних задач при транспортуванні рідкого вантажу доцільно проводити еквівалентну заміну реальної форми ємності (циліндричної, овальної, «валізної» і т.д.) на форму прямокутного паралелепіпеда. Принципом приведення є збереження розмірів вільної поверхні рідини та маси рідини в цистерні.

В задачах про крутильні коливання класична методика [247] використовує відомий потенціал Жуковського $f(x, y)$ для повільних обертань, який для ємності із розмірами вільної поверхні $a \times b$ (рис. 2.3) описується досить складною формулою:

$$\Psi(x, y) = 4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(\beta_k)^3} \cdot \left[\frac{a^2 \operatorname{sh}(\beta_k y / a) \sin(\beta_k x / a)}{\operatorname{ch}(0.5 \beta_k b / a)} - \frac{b^2 \operatorname{sh}(\beta_k x / b) \sin(\beta_k y / b)}{\operatorname{ch}(0.5 \beta_k a / b)} \right],$$

де $\beta_k = \pi \cdot (1 + 2k)$, а початок системи координат xOy розташований в центрі цистерни.

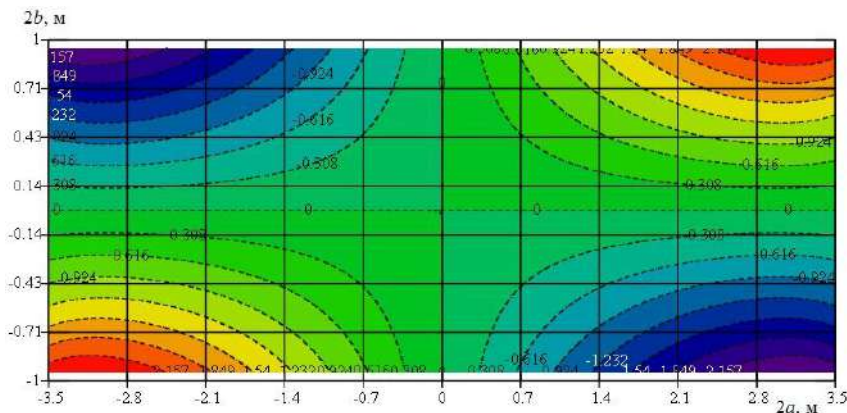


Рисунок 2.3 – Лінії рівня потенціалу Жуковського для крутильних коливань цистерни з розмірами 7000 x 1900 мм

Для задач про транспортування рідини в цистернах, де $a \gg b$, а криволінійність траєкторії руху не є надмірною, потенціал Жуковського припустимо замінити апроксимацією наступного простого вигляду

$$\Psi(x, y) \approx x \cdot y,$$

яка суттєво спрощує й усі наступні розрахунки.

З урахуванням кількості парціальних осциляторів дискретна математична модель транспортного засобу може досягати великої кількості мас та мати сильно розтягнутий спектр вільних коливань. Останній недолік змушує використовувати для інтегрування такої системи надмірно малий розрахунковий крок, що ускладнює обчислення задачі дослідження динаміки (бо також необхідно враховувати й багато режимів руху, різні рівні рідини, тощо). Тому, до її практичного використання, доцільно виконати спрощення моделі і пружні зв'язки, які утворюють високі частоти, замінити жорстким зв'язком (а відповідні маси об'єднати). Для виконання цього спрощення необхідно систему диференціальних рівнянь, яка описує й нелінійні зв'язки, лінеаризувати, записати в матричній формі та, використовуючи стандартні процедури лінійної алгебри, визначити частоти і форми вільних коливань даної системи. Спрощена таким чином модель замінюється нелінійною, для чого відновлюються ті зв'язки, які були нелінійними в початковій системі, а потім були лінеаризовані. Таким чином, отримуємо нелінійну модель, яка є придатною для виконання динамічного розрахунку процесів транспортування рідких вантажів.

При русі транспортного засобу по шляху із складним рельєфом в рідині збуджуються не лише поздовжні, поперечні та крутильні коливання, але й вертикальні зміщення, які призводять до періодичної зміни її ваги. Тому при дослідженні поздовжніх коливань цистерни можуть утворитися передумови до появи параметричного резонансу. При цьому може виникнути: *внутрішній параметричний резонанс*, який за умови $a_x(t) = 0$ описується рівнянням Мат'є; *зовнішній параметричний резонанс*, який за умови співпадіння або кратності частот зміни прискорень $a_x(t)$ та $a_z(t)$ описується рівнянням Хілла.

Оскільки частоти та амплітуди зазначених прискорень залежать від багатьох чинників, дослідити розвиток параметричного резонансу та визначити умови стійкості руху можливо лише при використанні моделі всього транспортного засобу. Причому, ця модель повинна бути нелінійною. Зауважимо, що параметричний резонанс залежить від рівня H рідини в цистерні, що суттєво ускладнює розрахункові дослідження. До того ж від значення H залежить набуття внутрішнього резонансу, коли дві

спектральні лінії частот вільних коливань перетинаються (або зближаються). Важливо, що таке явище можна передбачити на основі аналізу лінеаризованої моделі (модель вільних коливань системи (рис. 2.4)), і це слід вважати додатковим аргументом на користь її створення.



Рисунок 2.4 – Узагальнення принципів зниження низькочастотних коливань мас трактора при перевезенні цистерни з рідиною

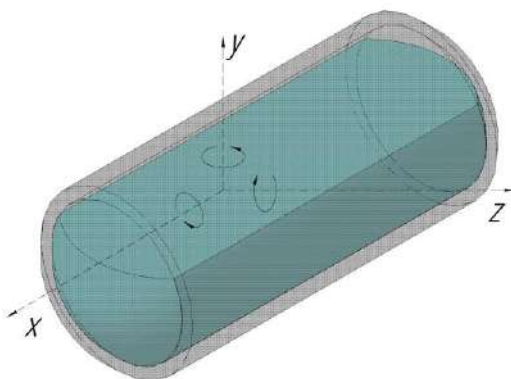
Таким чином, окреслено фундаментальний підхід до математичного моделювання руху транспортного засобу при перевезенні рідкого вантажу. Зауважимо, що теоретичне підґрунтя для такого підходу виникло досить давно, і його елементи можна знайти в трудах багатьох класиків прикладної механіки та теорії коливань. Тому розширення методології аналізу динамічних властивостей руху трактора при транспортуванні тракторних цистерн зводиться до врахування низькочастотних коливань рідини в цистерні, які в цілому впливатимуть на рух транспортного засобу.

2.2. Методика визначення поверхневих коливань рідини

Перш ніж перейти до дослідження коливань машинно-тракторного агрегату в складі з цистерною (рис. 2.5), необхідно дослідити вільні та вимушені коливання рідини в горизонтальній ємності з певним рівнем її заповнення. Щодо властивостей екіпажної частини цистерни, то на початковій стадії її проектування достатньо знати, що там існує граничне значення частоти (приблизно, $3 \dots 5$ Гц), при перебільшенні якого амплітуди вимушених коливань в практичному сенсі дорівнюють нулю.



а



б

Рисунок 2.5 – Фактична та спрощена форма цистерни:
а – вид з боку; б – розрахункова модель (ось Ox розташовано на
початковому рівні вільної поверхні рідини)

В ході подальших досліджень значення цієї частоти буде уточнюватися, проте інтервал пропускання для ресорної системи залишиться на тому рівні, як зазначене вище. Цей рівень і поділяє частоти, які виникають при коливальному русі рідини, на низькі та високі. Зазначимо, що швидкість звука в рідині, що досліджується, становитиме близька 1400 м/с, а максимальний розмір тракторної цистерни (по діагоналі) становить 8 м. Як наслідок, усі хвилі стиснення будуть мати частоти понад 100 Гц, і для процесів, що змінюються з періодом (або з постійною часу) 0,5...5 с, вони якісно знівелюють зміну щільності. Крім того, перепад тиску, спричинений силами гравітації, не перевершує 0,02 МПа, що ущільнить рідину приблизно на 0,02%. *Тому статичним і динамічним стискуванням рідини в задачі, що розглядається, можна знехтувати.*

Цистерна, зображена на рис. 2.5, перевозить по сільськогосподарським ділянкам та розпилює водні розчини органічних та мінеральних добрив, кінематична в'язкість яких, як правило, лежить в межах $\nu = 1,4...2$ сСт [248], а коефіцієнт поверхневого натягу становитиме $\sigma = 0,06...0,08$ Н/м. Тобто, за прийнятою класифікацією, ця рідина є мало в'язкою, а її поверхнева плівка має приблизно такі ж якості, як на межі води та повітря.

Джерелами низькочастотних коливань є імпульси сили і моменту сили, які прикладаються до оболонки цистерни з боку її екіпажної частини та насосного навісного обладнання. Відповідні чинники можуть діяти епізодично (при подоланні дорожньої перешкоди) чи утворювати періодичні послідовності (при роботі вакуумного насосу), що породжуватиме загасаючі вільні або незгасаючі вимушені коливання рідини.

В якості генератора вільних коливань низької частоти (і, одночасно, трансформатора вимушених коливань) виступає вільна поверхня рідини. Фронти і хвилі кінематичного збурення поширюються по рідині від бокових поверхонь цистерни і приводять до підйому (чи опусканню) рівня вільної поверхні. Як наслідок, в протилежній фазі до вертикального зміщення поверхні змінюється величина нормального тиску, спричиненого гравітаційними силами та силами поверхневого натягу, що і приводить до вільних коливань, амплітуда яких зменшується при зростанні глибини

по експоненціальному закону. Під дією тертя ці коливання стають затухаючими. Крім того, тертя обмежує амплітуди вимушених коливань при резонансах.

Згідно до *теорії поверхневих хвиль Релея*, при амплітудах, що перевершують 10% від довжини хвилі, ці хвилі втрачають стійкість і руйнуються, що є автоматичним запобіжником значного зростання коливань при резонансах. З іншого боку, в зоні стійкості хвилі амплітуда коливань не є значною, тому їх використовують при моделюванні лінійної моделі.

Використання *теорії поверхневих хвиль Релея* обумовлено врахуванням вертикальної поляризації хвиль, що дає змогу досліджувати зміщення часток середовища хвилі направлених паралельно вектору швидкості. І саме така властивість хвиль Релея дозволяє спростити математичний апарат при описі низькочастотних коливань рідини. Адже, наприклад, використання відомих хвиль Лява з горизонтальної поляризації сформує інтегро-диференціальні рівняння, які доволі складно обчислити.

Як і в інших задачах механіки, всі типи лінійних коливань рідини можна проаналізувати в рамках єдиного підходу, що базується на пошуку частот і форм власних (інша назва – *парціальних*) коливань.

Для формування математичної моделі низькочастотних коливань скористаємося відомою системою рівнянь Стокса для ізотермічного руху ньютонівської в'язкої нестискуваної рідини [45]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 V_x; \\ \frac{\partial V_y}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_y}{\partial z} = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \nabla^2 V_y; \\ \frac{\partial V_z}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_z}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \nabla^2 V_z; \\ \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}; \quad \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0, \end{array} \right. \quad (2.1)$$

де $\vec{V} = \{V_x, V_y, V_z\}$, p, ρ – швидкість, тиск та щільність рідини; t – час;

∇^2 – диференціальний оператор Лапласа; g – модуль прискорення вільного падіння, яке направлено вздовж осі Oy , що перпендикулярна до начального положення вільної поверхні (рис. 2.5).

Якщо коливання швидкості є малими, то систему (2.1) можливо лінеаризувати та спростити, нехтуючи більшою частиною конвективних членів. У векторній формі вона матиме такий вигляд:

$$\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \rho V_0 \cdot \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} = -\text{grad } p - \rho \cdot v \cdot \text{rot rot } \vec{V}, \quad (2.2)$$

де V_0 – швидкість випуску рідини із цистерни.

Зауважимо, що, наприклад, для паливних баків ракетного двигуна [45] швидкість V_0 є значною, і там вона виступає як основний чинник загасання коливань рідини. Але під час транспортування цистерни ця швидкість дорівнює 0, а при операції розпилювання рідини – близька до 0, тому в моделі, що розробляється, її можна й не враховувати. До того ж, тут є інші чинники, які приводять до загасання вільних коливань, а саме – сили тертя.

Цистерна має великі розміри, тому рух рідини й при малих коливаннях треба вважати турбулентним. В турбулентному ядрі в'язкість набагато більша, ніж у обмежуючої стінки, тому лінійні або кутові швидкості в ядрі стають суттєво вирівняними, а зміни тангенціальної швидкості потоку відбувається в вузькому слою поблизу стінки. Тому крім внутрішнього тертя, що описується роторами векторного поля, в цій задачі треба враховувати і зовнішнє тертя, яке пропорційне різниці швидкостей між рідиною і поверхнею бокової стінки. Позначимо коефіцієнт зовнішнього тертя літерою f ; тоді для плоского турбулентного ядра потоку рідини замість рівняння (2.2) треба записати таке:

$$\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = -\text{grad } p - \rho \cdot v \cdot \text{rot rot } \vec{V} - f \cdot (\vec{V} - \vec{V}_{cm}), \quad (2.3)$$

де $\vec{V}_{cm}$ – тангенціальна швидкість бокової стінки (вона лежить у площині плоского ядра потоку).

Відповідно до теорії турбулентних течій [45], коефіцієнт тертя f залежить від форми і шорсткості поверхні, що обтікає, а також від середнього рівня $V_{сер}$ тангенціальних швидкостей (що робить задачу моделювання вимушених нестационарних коливань рідини нелінійною). У першому наближенні його можна визначати за формулою

$$f = \rho \cdot \zeta \cdot V_{сер};$$

$$\zeta \approx \frac{1}{Re_{кр}} \approx 0,000435,$$

де $Re_{кр} \approx 2300$ – критичне значення числа Рейнольдса, яке визначає ширину ламінарного слою біля стінки.

Надалі значення цього коефіцієнта буде уточнятися за результатами експериментів на фізичних моделях цистерни. Для аналітичного дослідження достатньо знати, що значення цього коефіцієнту мало, і в практичному сенсі воно не впливає на частоти вільних коливань.

Згідно із теоремою Гельмгольца [249], вектор швидкості рідини представимо як суму потенціального та соленоїдального поля:

$$\vec{V} = \text{grad } \varphi + \text{rot } \vec{b}, \quad (2.4)$$

де φ – скалярний потенціал, який, в наслідок нестисливості рідини, є гармонійною функцією, тобто відповідає рівнянню Лапласа

$$\text{div grad } \varphi = 0;$$

$\vec{b}$ – це векторний потенціал, який для плоского поля, перпендикулярного до вектора $\vec{n} \in \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, визначається відповідною скалярною функцією саме:

$$\vec{b} = \psi(x, y, t) \cdot \vec{k};$$

$$\vec{b} = \psi(x, z, t) \cdot \vec{j} ;$$

$$\vec{b} = \psi(y, z, t) \cdot \vec{i} .$$

Формулу, аналогічну (2.4), запишемо для швидкостей відносного руху стінки цистерни:

$$\vec{V}_{cm} = \text{grad } \varphi_{cm} + \text{rot } \vec{b}_{cm} , \quad (2.5)$$

де перший доданок відповідає поступальному руху, а другий – обертальному руху стінки,

$$\vec{b}_{cm} = \psi_{cm}(x, y, t) \cdot \vec{k} ;$$

$$\vec{b}_{cm} = \psi_{cm}(x, z, t) \cdot \vec{j} ;$$

$$\vec{b}_{cm} = \psi_{cm}(y, z, t) \cdot \vec{i} ,$$

причому для твердого тіла:

$$\psi_{cm}(x, y, t) = 0,5 \cdot (x^2 + y^2) \cdot \Omega_{cm.z} ;$$

$$\psi_{cm}(x, z, t) = 0,5 \cdot (x^2 + z^2) \cdot \Omega_{cm.y} ;$$

$$\psi_{cm}(y, z, t) = 0,5 \cdot (y^2 + z^2) \cdot \Omega_{cm.x} ,$$

де $\Omega_{cm.x}$, $\Omega_{cm.y}$, $\Omega_{cm.z}$ – це кутова швидкість обертання стінки відносно відповідної координатної осі.

Підставимо формули (2.4), (2.5) у рівняння (2.3) та запишемо його у наступному вигляді:

$$\text{grad} \left[\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + p + f \cdot (\varphi - \varphi_{cm}) \right] + \text{rot} \left[\rho \frac{\partial \vec{b}}{\partial t} + \rho \cdot v \text{rot rot } \vec{b} + f \cdot (\vec{b} - \vec{b}_{cm}) \right] = 0 . \quad (2.6)$$

Зауважимо, що із рівняння (2.6) витікають два співвідношення:

$$\begin{aligned}\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + p + f \cdot (\varphi - \varphi_{cm}) &= \varphi_{lan}; \\ \rho \frac{\partial \vec{b}}{\partial t} + \rho \cdot \nu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{b} + f \cdot (\vec{b} - \vec{b}_{cm}) &= -\vec{b}_{lan},\end{aligned}$$

де φ_{lan} та $\vec{b}_{lan}$ – скалярний та векторний потенціали одного й того же лапласового векторного поля $\vec{a}$, тобто

$$\operatorname{rot} \vec{b}_{lan} = \operatorname{grad} \varphi_{lan}.$$

Ймовірна присутність зазначених потенціалів суттєво ускладнює задачу. Проте, після виконання крайових умов зазначений люфт у визначенні потенціалу φ зникає, і надалі можна вважати, що $\vec{b}_{lan} = 0$. Це означає, що вихрову компоненту поля можна визначити попередньо, розв'язуючи крайову задачу

$$\begin{aligned}\rho \frac{\partial \vec{b}}{\partial t} + \rho \cdot \nu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{b} + f \cdot \vec{b} &= f \cdot \vec{b}_{cm}, \\ \vec{b} - \vec{b}_{cm} \Big|_{\Gamma_0} &= 0,\end{aligned}\tag{2.7}$$

де Γ_0 – так звана змочена поверхня цистерни.

При вирішенні потенціальної постановки задачі, якщо $\vec{b}_{cm} = 0$, то і $\vec{b} = 0$, тобто вихрова складова поля відсутня. Рівняння

$$\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + p + f \cdot (\varphi - \varphi_{cm}) = 0$$

перепишемо як визначення для тиску по відомому скалярному потенціа-

лу швидкостей:

$$p = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} - f \cdot (\varphi - \varphi_{cm}).$$

На змоченій поверхні Γ тиск може бути довільним (рис. 2.6, *a*), а на початковому рівні вільної поверхні Γ_0 його значення розраховується за формулою

$$p = \rho g \cdot \Delta y_n - \sigma \cdot \left[\frac{\partial^2 \Delta y_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Delta y_n}{\partial z^2} \right], \quad (2.8)$$

де Δy_n – локальний підйом вільної поверхні від її початкового положення,

$$\Delta y_n = \frac{\partial \Phi}{\partial y};$$

$$\Phi = \int (\varphi - \varphi_{cm}) dt,$$

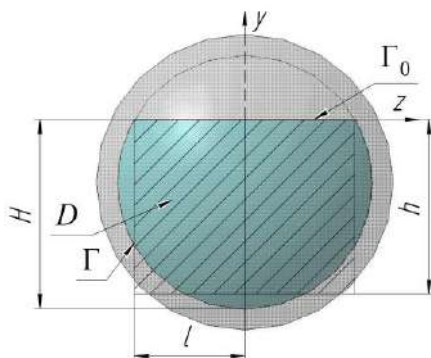
σ – коефіцієнт поверхневого натягу; вираз в квадратних дужках обчислює середню кривизну цієї поверхні.

В результаті, для функції Φ , яка є скалярним потенціалом зміщення рідини, отримали наступну крайову задачу:

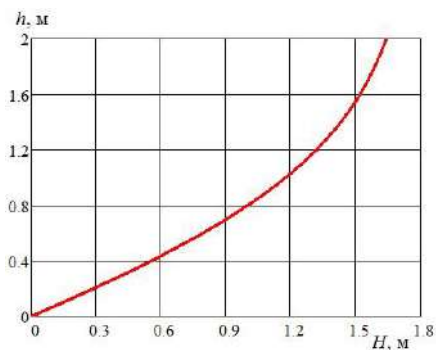
$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{V} = \left\{ \frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial x}; \frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial y}; \frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial z} \right\}; \quad \nabla^2 \Phi = 0; \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \vec{n}} \right|_{\Gamma_0} = 0; \\ \ddot{\Phi} + f \cdot \dot{\Phi} + g \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\sigma}{\rho} \cdot \left[\frac{\partial^3 \Phi}{\partial y \partial x^2} + \frac{\partial^3 \Phi}{\partial y \partial z^2} \right] \bigg|_{\Gamma} = \ddot{\Phi}_{cm}, \end{array} \right. \quad (2.9)$$

де $\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \vec{n}} \right|_{\Gamma_0}$ – це похідна за напрямком нормалі до змоченої поверхні, а

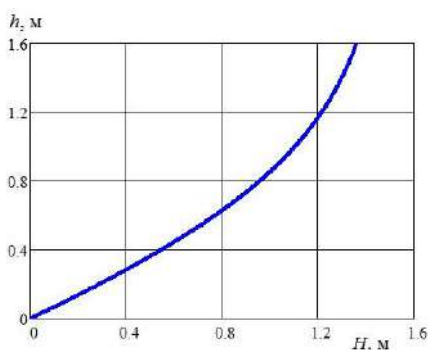
поле $\vec{V}$ відповідає швидкостям рідини відносно оболонки.



а



б



в

Рисунок 2.6 – Спрощення форми ємності з циліндричної на прямокутний паралелепіпед:

а – вид спереду цистерни; б – залежність рівня h рідини від рівня H (цистерна розміром 7000 x 1900 мм); в – залежність розрахункового рівня h рідини від фактичного рівня H (цистерна розміром 5000 x 1600 мм)

Зауважимо, що при зміщенні в площині zOy потенціал Φ не залежить от координати x , а при зміщенні в площині yOx потенціал Φ не залежить от координати z , тому в системі (2.9) формула для кривизни матиме лише одну складову, а векторне поле $\vec{V}$ матиме лише дві не нульові компоненти. Причому праві частини останнього рівняння визначаються за формулами

$$\ddot{\Phi}_{cm} = a_{cm,z} \cdot z \quad \text{або} \quad \ddot{\Phi}_{cm} = a_{cm,y} \cdot y ,$$

де $a_{cm,z}$, $a_{cm,y}$ – це прискорення стінки по напрямку осі Oz або Oy .

Таким чином, у розглянутому випадку джерелом низькочастотних поверхневих коливань є здвигові прискорення поверхні.

При вирішенні потенціальної форми змішаної (потенціальної та вихрової) задачі, якщо $\vec{b}_{cm} \neq 0$, то рівняння (2.7) мають не нульові розв'язки, і на вільній поверхні виникає додатковий (вихровий) підйом $\Delta u_{вих}$, який у системі (2.9) не врахований. Проте ситуацію можна швидко виправити, якщо, наприклад, для поля $\vec{V}_{вих}$ вихрових швидкостей стінки навколо осі Ox скористатися формулою

$$\vec{V}_{cm,вих} = \{ \Omega_{cm,x} \cdot y; -\Omega_{cm,x} \cdot z \} = \Omega_{cm,x} \cdot \{ y; z \} + \Omega_{cm,x} \cdot \{ 0; -2z \} . \quad (2.10)$$

У правій частині (2.10) перша складова має скалярний гармонійний потенціал

$$\Omega_{cm,x} \cdot \{ y; z \} = \text{grad}(\Omega_{cm,x} \cdot z \cdot y) ,$$

а друга складова активізує нерівномірний коливальний зсув рідини вздовж осі Oz ; до вихрового підйому вільної поверхні цей зсув не приводить.

Таким чином, якщо оболонка цистерни обертається навколо осі Ox з кутовою швидкістю $\Omega_{cm,x}(t)$ і зсувається вздовж осі Oz з лінійною швидкістю $Vz_{cm}(t)$, то для задачі щодо низькочастотних коливань цей складний рух оболонки описує ефективний потенціал

$$\varphi_{cm}(t) = Vz_{cm}(t) \cdot z + \Omega_{cm,x}(t) \cdot z \cdot y .$$

Далі можна повторити виклад, що привів до рівнянь (2.9); при цьому

треба врахувати, що додатковий потенціал на вільній поверхні дорівнює 0 та не змінює її кривизну. В результаті ми прийшли до системи типу (2.9) зі зміненою правою частиною:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{V} = \left\{ \frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial z}; \frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial y} \right\}; \quad \nabla^2 \Phi = 0; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \vec{n}} \Big|_{\Gamma_0} = 0; \\ \ddot{\Phi} + f \cdot \dot{\Phi} + g \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\sigma}{\rho} \cdot \left[\frac{\partial^3 \Phi}{\partial y \partial z^2} \right] \Big|_{\Gamma} = -[a_{cm,z}(t) + g \cdot \theta_{cm,x}(t)] \cdot z, \end{array} \right. \quad (2.11)$$

де $\theta_{cm,x}(t) = \int \Omega_{cm,x} dt$ – кут закручення оболонки.

Аналогічний результат отримано для коливань у площині xOy :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{V} = \left\{ \frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial z}; \frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial y} \right\}; \quad \nabla^2 \Phi = 0; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \vec{n}} \Big|_{\Gamma_0} = 0; \\ \ddot{\Phi} + f \cdot \dot{\Phi} + g \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\sigma}{\rho} \cdot \left[\frac{\partial^3 \Phi}{\partial y \partial x^2} \right] \Big|_{\Gamma} = -[a_{cm,x}(t) + g \cdot \theta_{cm,z}(t)] \cdot x. \end{array} \right. \quad (2.12)$$

Для обертових коливань в площині xOz ефективний потенціал має лише один доданок,

$$\varphi_{cm}(t) = \Omega_{cm,y}(t) \cdot x \cdot z,$$

причому, у протилежність до двох попередніх випадків, на вільній поверхні він приймає саме такі (не нульові) значення, але похідна $\partial \varphi_{cm}(t) / \partial y = 0$. Тому рівняння для цих коливань має інший вигляд:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{V} = \left\{ \frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial x}; \frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial y}; \frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial z} \right\}; \quad \nabla^2 \Phi = 0; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \vec{n}} \Big|_{\Gamma_0} = 0; \\ \ddot{\Phi} + f \cdot \dot{\Phi} + g \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\sigma}{\rho} \cdot \left[\frac{\partial^3 \Phi}{\partial y \partial x^2} + \frac{\partial^3 \Phi}{\partial y \partial z^2} \right] \Big|_{\Gamma} = \dot{\Omega}_{cm,y} \cdot z \cdot y, \end{array} \right. \quad (2.13)$$

тобто у якості чинника, що збуджує коливання, тут виступає кутове прискорення.

Задача для вертикальних коливань зсуву розглядається в потенційній постановці, що приводить до системи рівнянь вигляду (2.9). Проте, оскільки тепер вібрація оболонки є вертикальною, на вільній поверхні похідна $\ddot{\Phi}_{cm}$ приймає одне й теж значення,

$$\ddot{\Phi}_{cm} \Big|_{\Gamma} = \text{const} .$$

При такому характері збудження перетікання рідини вздовж вільної поверхні не відбувається, і низькочастотні коливання (якщо не враховувати можливість відриву рідини від дна цистерни з утворенням каверни або парової подушки) стають неможливими. До того ж, тут варто було б врахувати й іншу можливість – нерівномірне коливання оболонки, при якому масивні бокові кришки цистерни рухаються з дещо іншими швидкостями, ніж її центральна частина. Проте, якщо звернути увагу на масивну опорну балку, що простягнулася на усю довжину цистерни (рис. 2.5), то можливість таких коливань стає ілюзорною.

2.3. Метод формалізації коливань рідини з вільною поверхнею

Повна група рухів жорсткої оболонки включає 3 переміщення та 3 обертання. Деформації та пружні зв'язки коливань оболонки не враховуються, тому що їх частота значно більше 100 Гц.

При вертикальних коливаннях, як зазначено вище, переливання рідини не відбувається, а частота коливань визначається стисненням рідини. Власна частота при цьому дорівнює приблизно 500 Гц, тому їх не враховуємо (адже необхідно враховувати разом з деформацією оболонки [105, 250, 251]). Інші 5-ть коливань розбиваємо на групи, які пов'язані з переливанням рідини та мають низькі власні частоти коливання:

- Група №1. Коливання в площині zOy (переміщення та оберт).
- Група №2. Коливання в площині xOy (переміщення та оберт).

– Група №3. Обертання навколо вісі Oy .

Для перших двох груп векторне поле швидкостей є плоским, а для третьої групи – просторовим.

Оскільки форма цистерни для застосування відомих методів математичного аналізу, зокрема метода Фур'є розподілу змінних, є складною, то для подальшого дослідження приймемо спрощену форму прямокутного паралелепіпеда (рис. 2.6), який має аналогічні розміри вільної поверхні та містить той же самий об'єм рідини.

Для подальшої зручності будемо позначати діаметр цистерни як $2R_{\text{ц}}$, а її довжину – як $2L$. Тоді, в залежності від реального рівня H рідини в цистерні, за формулами

$$l = \sqrt{H \cdot (2R_{\text{ц}} - H)}; \quad (2.14)$$

$$S = \begin{cases} R_{\text{ц}}^2 \arcsin\left(\frac{l}{R_{\text{ц}}}\right) - l \cdot (R_{\text{ц}} - H), & H \leq R_{\text{ц}}; \\ R_{\text{ц}}^2 \left[\pi - \arcsin\left(\frac{l}{R_{\text{ц}}}\right) \right] - l \cdot (R_{\text{ц}} - H), & H > R_{\text{ц}}; \end{cases} \quad (2.15)$$

$$h = \frac{S}{2l}, \quad (2.16)$$

можна знайти площу S перерізу та розміри $2l$ і h умовного прямокутного паралелепіпеда (рис. 2.6, б, в).

Слід відмітити, що коливання рідини у цистерні описують рівняннями в частинних похідних, тобто модель поверхневих хвиль Релея на початковому рівні є континуальною. Що є не зовсім доцільним, адже подальше формування математичних моделей системи «трактор-цистерна» буде виконано дискретним чином. Але, як показало дослідження, розв'язки континуальної моделі допустимо трактувати як рішення системи звичайних диференціальних рівнянь для так званих *парціальних осциляторів* [48]. Кожний парціальний осцилятор – це умовний шар рідини, який зсувається вздовж вільної поверхні і взаємодіє із оболонкою шляхом

натискання на бокову стінку та дно цистерни. Щоб спростити процес моделювання, умовний шар рідини допустимо вважати наявним, надавши йому конкретний розмір, масу та місце у цистерні.

Розглянемо парціальні частоти та відповідні форми коливань рідини, для цього знайдемо розв'язок системи (2.11), що відповідає коливанням групи №1. У поверхневої хвилі Релея амплітуда при заглибленні зменшується за експоненціальним законом, причому якщо глибина перевищує довжину хвилі, то амплітуда коливань близька нулю. Таку ж саме поведінку матиме векторне поле, яке породжує гармонійний потенціал

$$\Phi = T(t) \cdot \sin(\beta \cdot z) \cdot ch(\beta \cdot y), \quad (2.17)$$

де $T(t)$ – функція змінного амплітудного коефіцієнту.

Причому при $y = -h$ і любому значенню β він буде задовольняти крайовій умові $V_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0$, а якщо

$$\beta = \beta_m^I = \frac{\pi \cdot (0,5 + m)}{l}, m = 1, 2, \dots \text{ або } \beta = \beta_m^{II} = \frac{\pi \cdot m}{l}, m = 1, 2, \dots, \quad (2.18)$$

то при $z = \pm l$ він буде задовольняти крайовій умові $V_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0$.

Тобто похідна цього поля по напрямку нормалі до змоченої поверхні тотожно дорівнює нулю.

Права частина (2.11) є непарною за змінною x і її можна розкласти в тригонометричний ряд Фур'є по синусах:

$$(-a_{cm} - g \cdot \theta_{cm}) \cdot z = (-a_{cm} - g \cdot \theta_{cm}) \cdot \sum_{m=0}^{\infty} b_m \cdot (-1)^m \cdot \sin(\beta_m^I z);$$

$$b_m = \frac{2/l}{(\beta_m^I)^2}.$$

Коефіцієнти Фур'є зменшуються з великою швидкістю. Це означає, що для рішення використовуватимуться лише перші хвилові числа із (2.18), а саме

$$\beta_m = \frac{\pi \cdot (0,5 + m)}{l}, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

і позначати їх додатковим верхнім номером більше не треба.

Щоб задовольнити рівняння (2.11), представимо шуканий потенціал у вигляді аналогічного ряду Фур'є:

$$\Phi(t, z) = \sum_{k=0}^{\infty} T_m(t) \cdot (-1)^m \sin(\beta_m \cdot z) \cdot \operatorname{ch}(\beta_m \cdot y), \quad (2.19)$$

і підставимо його в (2.11). В результаті отримаємо нескінчену систему звичайних диференціальних рівнянь другого порядку із сталими коефіцієнтами

$$\begin{aligned} \ddot{T}_m + f \cdot \dot{T}_m + \beta_m \cdot (g + (\sigma / \rho) \cdot \beta_m^2) \cdot \operatorname{th}(\beta_m h) \cdot T_m = \\ = \frac{2}{l} \cdot \frac{(-a_{cm,z}(t) - g \cdot \theta_{cm,x}(t))}{\beta_m^2 \cdot \operatorname{ch}(\beta_m h)}, \quad m = 1, 2, 3, \dots, \end{aligned} \quad (2.20)$$

де кожне окреме рівняння описує парціальне (вільне або вимушене) коливання рідини.

Якщо в (2.20) відкинути праву частину, то ми отримуємо рівняння вільних затухаючих коливань,

$$\ddot{T}_m + f \cdot \dot{T}_m + \beta_m \cdot (g + (\sigma / \rho) \cdot \beta_m^2) \cdot \operatorname{th}(\beta_m h) \cdot T_m = 0,$$

звідки маємо аналітичні рівняння для комплексних кругових частот,

$$\omega_m^2 + f \cdot \omega_m + \beta_m \cdot (g + (\sigma / \rho) \cdot \beta_m^2) \cdot \operatorname{th}(\beta_m h) \cdot \omega_m = 0,$$

яке має розв'язки

$$\omega_m = -0,5f \pm i\sqrt{\beta_m \cdot (g + (\sigma / \rho) \cdot \beta_m^2) \cdot \text{th}(\beta_m h) - 0,25f^2}.$$

Такі рішення відповідають затухаючим коливанням, частота яких розраховується за формулою

$$\nu_m = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\beta_m \cdot (g + (\sigma / \rho) \cdot \beta_m^2) \cdot \text{th}(\beta_m h)}, \quad (2.21)$$

або

$$\nu_m = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{g \cdot \frac{0,5+m}{\pi l} \cdot \text{th} \left[\pi \cdot (0,5+m) \cdot \frac{h}{l} \right] \cdot \left(1 + \frac{\sigma}{\rho g} \cdot \left[\frac{\pi \cdot (0,5+m)}{l} \right]^2 \right)}. \quad (2.22)$$

Результат застосування формули (2.22) для перших 4-ох гармонік із номерами $m = 1, 2, 3$ показаний на рис. 2.7.

Для коливань групи №2 розв'язок системи (2.12) знаходимо у вигляді суми ряду Фур'є

$$\Phi(t, x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t) \cdot (-1)^k \sin(\lambda_k \cdot x) \cdot \text{ch}(\lambda_k \cdot y), \quad (2.23)$$

де $\lambda_k = \pi \cdot (0,5+k) / L$, а функції $T_k(t)$ відповідають рівнянням

$$\begin{aligned} \ddot{T}_k + f \cdot \dot{T}_k + \lambda_k \cdot (g + (\sigma / \rho) \cdot \lambda_k^2) \cdot \text{th}(\lambda_k h) \cdot T_k = \\ = \frac{2}{L} \cdot \frac{(-a_{cm,x}(t) - g \cdot \theta_{cm,z}(t))}{\lambda_k^2 \cdot \text{ch}(\lambda_k h)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.24)$$

Формула для власних частот має вигляд, аналогічний (2.20),

$$\nu_k = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{g \cdot \frac{0,5+k}{\pi L} \cdot \operatorname{th} \left[\pi \cdot (0,5+k) \cdot \frac{h}{L} \right] \cdot \left(1 + \frac{\sigma}{\rho g} \cdot \left[\frac{\pi \cdot (0,5+k)}{L} \right]^2 \right)}; \quad (2.25)$$

залежність перших частот від рівня рідини у цистерні показана на рис. 2.8. Зауважимо, що зростання частот при малих рівнях рідини є не-доліком використаного метода заміни циліндричної форми ємності на призматичну; в роботі [247] для випадку так званої «дрібно́ї води» надано спосіб, що дозволяє врахувати кривизну днища та позбутися цього недо-ліку.

Для моделювання коливань групи №3 візьмемо подвійні ряди Фур'є:

$$\Phi(t, x, z, y) = \sum_{m,k=0}^{\infty} T_{m,k}(t) \cdot (-1)^m \sin(\beta_m \cdot z) \cdot (-1)^k \sin(\lambda_k \cdot x) \cdot \operatorname{ch}(\gamma_{m,k} \cdot y),$$

де

$$\gamma_{m,k} = \sqrt{\beta_m^2 + \lambda_k^2} = \pi \cdot \sqrt{\frac{(m+0,5)^2}{l^2} + \frac{(k+0,5)^2}{L^2}}, \quad k, m = 1, 2, 3, \dots$$

а амплітудні коефіцієнти є розв'язками диференціальних рівнянь

$$\ddot{T}_{m,k} + f \cdot \dot{T}_{m,k} + \gamma_{m,k} \cdot \left(g + \frac{\sigma}{\rho} \cdot \gamma_{m,k}^2 \right) \cdot \operatorname{th}(\gamma_{m,k} h) \cdot T_{m,k} = \frac{4}{l \cdot L} \cdot \frac{(-g \cdot \theta_{cm,y}(t))}{\beta_m^2 \lambda_k^2 \cdot \operatorname{ch}(\gamma_{m,k} h)}. \quad (2.26)$$

Власні частоти коливань знаходяться за формулою

$$\nu_{m,k} = \sqrt{\gamma_{m,k} \cdot (g + (\sigma / \rho) \cdot \gamma_{m,k}^2) \cdot \operatorname{th}(\gamma_{m,k} h)}.$$

Як бачимо, вони утворюють подвійну нескінченість. Декілька пер-ших частот зображено на рис. 2.9.

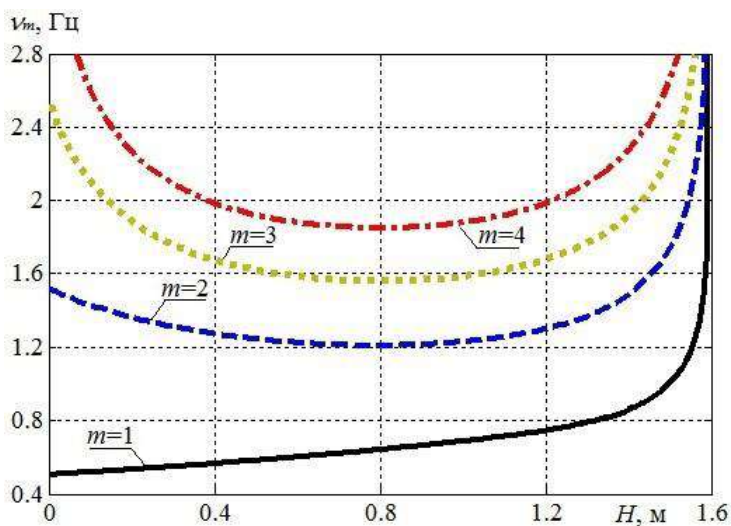


Рисунок 2.7 – Графік залежності власних частот поперечних коливань в площині zOy від рівня рідини в цистерні МЖТ-10 (5000 x 1600 мм)

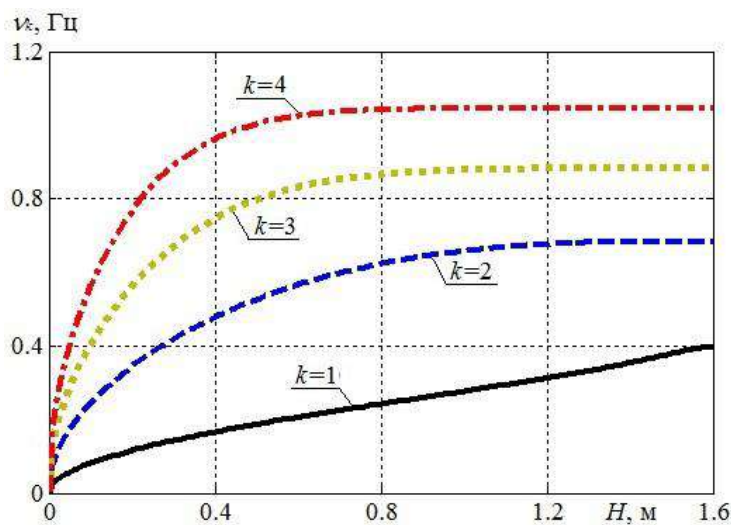


Рисунок 2.8 – Графік залежності власних частот повздовжніх коливань в площині xOy від рівня рідини в цистерні МЖТ-10 (5000 x 1600 мм)

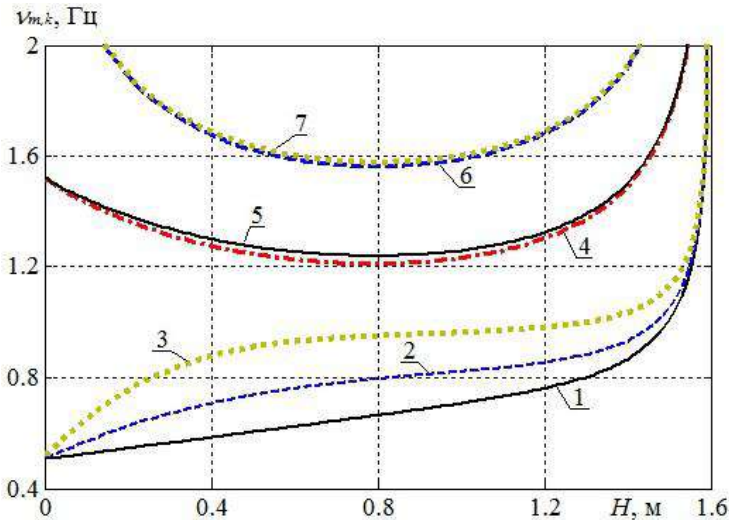


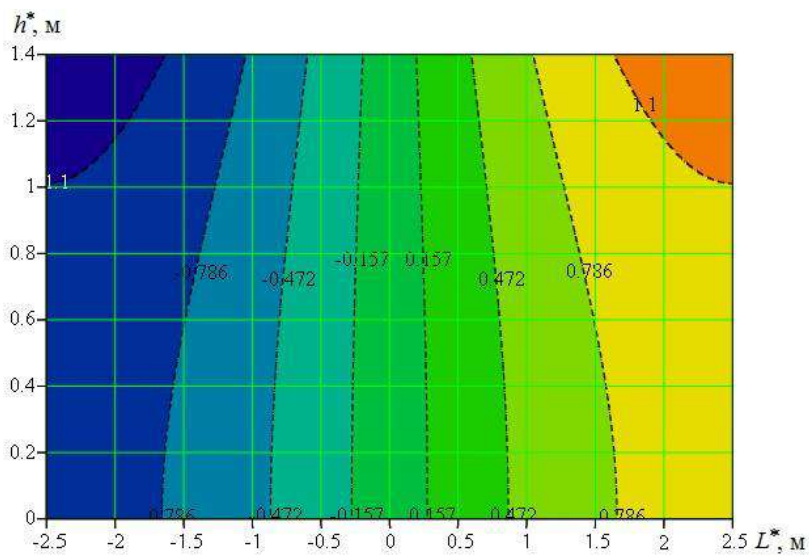
Рисунок 2.9 – Графік залежності власних частот обертових коливань в площині xOz від рівня рідини в цистерні МЖТ-10 (5000 x 1600 мм):

- 1 – $k = 1$; $m = 1$; 2 – $k = 1$; $m = 2$; 3 – $k = 1$; $m = 3$; 4 – $k = 2$; $m = 1$;
 5 – $k = 2$; $m = 2$; 6 – $k = 3$; $m = 1$; 7 – $k = 3$; $m = 2$

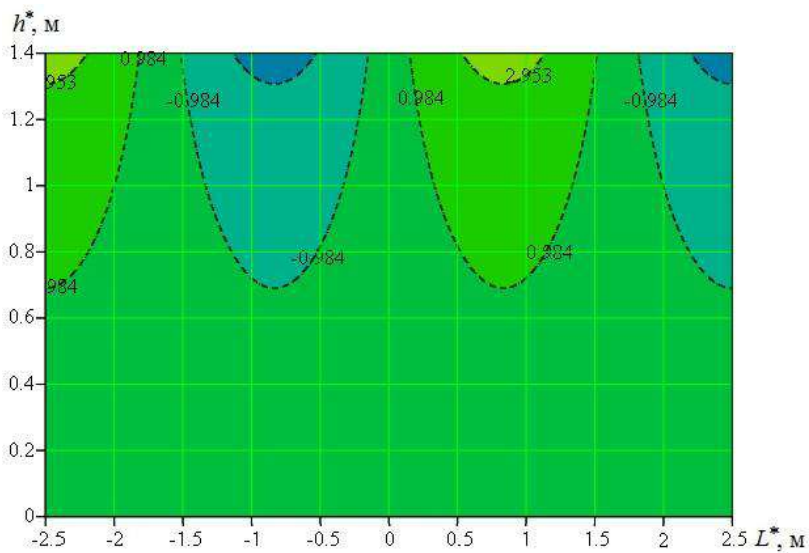
Таким чином, на основі виведених формул для парціальних частот стає можливим визначити спектр низькочастотних коливань вільної поверхні рідини та описати відповідну форму коливань, що розвивається в ємності. Для прикладу, на рис. 2.10 зображено лінії рівня для власної форми потенціалів, які відповідають першому та другому парціальному шару коливань рідини в поздовжньо-вертикальній площині у призматичній ємності розміром 5 м x 1,6 м при рівні рідини 1,4 м.

При заглибленні в ємність інтенсивність коливань зменшується, і для другого шару на дні вона стає ледь помітною.

Визначимо масу парціального осцилятора. Кожний доданок із суми (2.19), (2.23) або (2.25) відповідає окремій базисній (власній) формі низькочастотних коливань рідини відносно оболонки цистерни, тобто деякому парціальному осцилятору. Кожному осцилятору можна приписати масу, яка буде частиною загальної маси рідини.



а



б

Рисунок 2.10 – Власні форми потенціалу низькочастотних коливань:
а – для першого парціального шару; б – для другого шару

Щоб знайти відносну частину δM_k маси, пов'язаної з k -тим осцилятором із суми (2.19), можна використати його власну форму

$$\Phi_k^*(z) = (-1)^k \sin(\lambda_k \cdot z) \cdot \text{ch}(\lambda_k \cdot y),$$

і знайти середнє значення похідної $\partial \Phi_k^* / \partial z$ по площі поперечного перерізу D , заштрихованого на рис. 2.6, a , тобто

$$\frac{1}{S} \iint_D \frac{\partial \Phi_k^*}{\partial z} dS = \frac{1}{l \cdot h} \cdot \frac{\text{sh}(\beta_m \cdot h)}{\beta_m}.$$

Далі цей результат множиться на коефіцієнт $\frac{2}{l \cdot \beta_m^2 \text{ch}(\beta_m h)}$, що використовується в правій частині (2.20) разом із значенням збуджуючого чинника, і ми отримуємо шукану формулу

$$\delta M_m = \frac{2}{\pi^2} \frac{\text{th}(\beta_m h)}{\beta_m^3 h}. \quad (2.27)$$

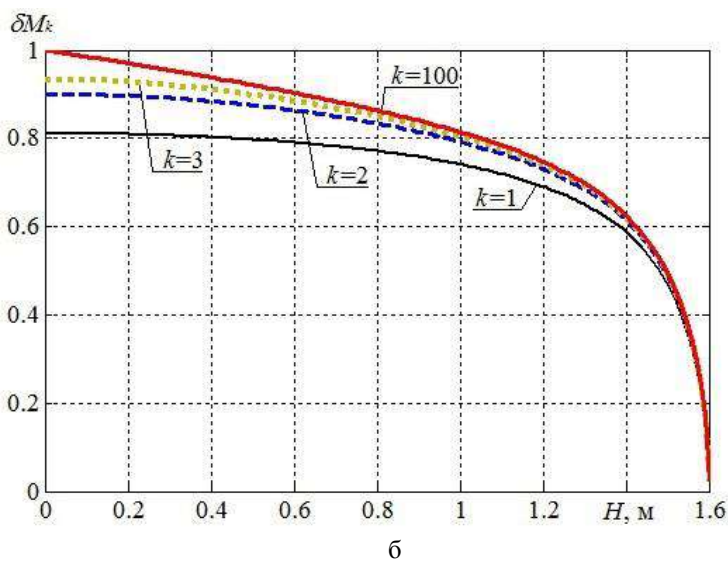
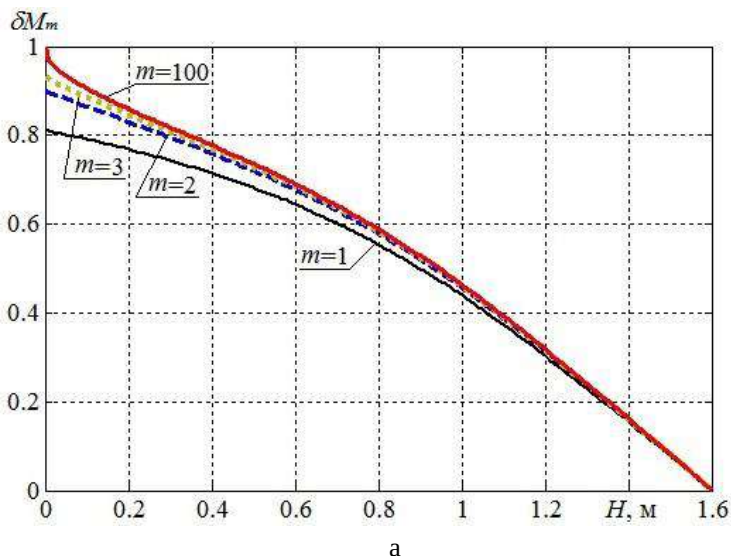
Формула для відносної маси осциляторів, що коливаються у площини xOy , має аналогічний вигляд:

$$\delta M_k = \frac{2}{\pi^2} \frac{\text{th}(\lambda_k h)}{\lambda_k^3 h}, \quad (2.28)$$

а для випадку обертових коливань у площині xOz – подібний, проте більш складний;

$$\delta M_{m,k} = \frac{4}{\pi^4} \frac{\text{th}(\gamma_{m,k} h)}{\beta_m^2 \lambda_k^2 (\gamma_{m,k} h)}. \quad (2.29)$$

На рис. 2.11 надано дані по розподілу парціальних мас; по мірі зростання глибини сумарна частина рідини δM , що приймає участь у низько-частотних коливаннях вільної поверхні, зменшується.



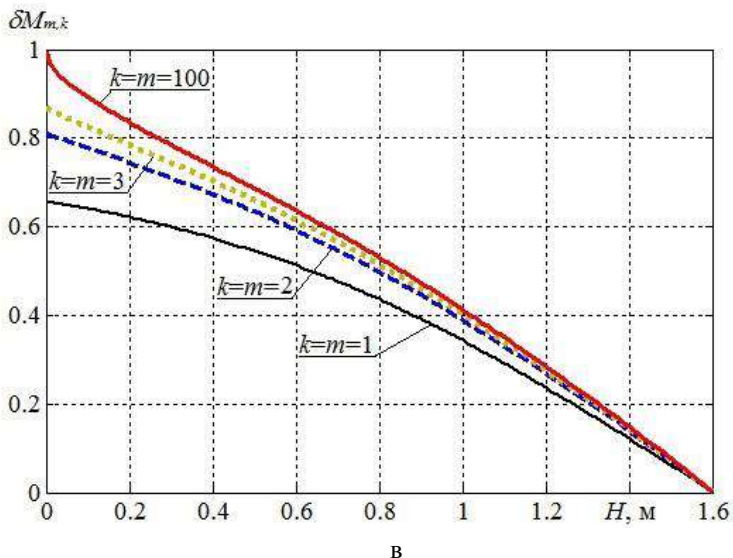


Рисунок 2.11 – Сумарна відносна маса вказаної кількості осциляторів в залежності від рівня рідини в цистерні МЖТ-10 (5000 x 1600 мм) для коливань у площинах:
а – zOy; б – xOy; в – xOz

З'ясовано, що сумарна частина рідини δM можна апроксимувати аналітичними залежностями наступного вигляду:

$$\delta M_m = \frac{1}{(h/l)^{4/3} + 1}, \quad \delta M_k = \frac{1}{(h/L)^{4/3} + 1}, \quad \delta M_{m,k} = \frac{1}{(h/l)^{4/3} + (h/L)^{4/3} + 1},$$

для коливань групи №1, групи №2 та групи №3, відповідно.

Аналізуючи результати з залежностей рис. 2.11, констатуємо, що для подальших розрахунків динамічних властивостей достатньо враховувати лише перші 3 маси парціальних осциляторів. Така кількість осциляторів обумовлена тим, що їх сумарна відносна маса забезпечує більше ніж 90% від загальної маси рідини у цистерні.

2.4. Масово-інерційні показники руху рідини, що коливається

Після знаходження відносної маси δM співвідношення (2.20) та аналогічні для інших груп коливань отримують вигляд звичайного рівняння для коливання одно масової системи. Розглянемо інерційні та пружні коефіцієнти парціальних осциляторів для групи №2 (площина xOy)

$$m_k^p \ddot{x}_k + f_k^p \cdot \dot{x}_k + c_k^p \cdot x_k = m_k^p \cdot (-a_{cm,z}(t) - g \cdot \theta_{cm,x}(t)), \quad k=1,2,3,\dots;$$

$$m_k^p = \delta M_k \cdot m_p; \quad m_p = 2\rho \cdot S \cdot L; \quad f_k^p = 2\delta_n \cdot \nu_k \cdot m_k^p; \quad c_k^p = m_k^p \cdot (2 \cdot \pi \cdot \nu_k)^2,$$

де m_k^p , m_p – це парціальна маса і загальна маса рідини; $\ddot{x}_k$, $\dot{x}_k$, x_k – прискорення, швидкість та переміщення шару рідини; f_k^p – коефіцієнт демпфірування коливань k -го шару рідини; δ_n – логарифмічний декремент загасання цих коливань; c_k^p – коефіцієнт жорсткості (або пружності) коливань k -го шару рідини. Обчислення моменту інерції рідини, яка знаходиться в цистерні, маси та моменту інерції рідини k -го шару рідини обчислюється за наступною формулою:

$$J_p = m_p \cdot (1 - \delta M_{k=100}) \cdot \frac{\left(R_{ц} - 2 \sqrt{(2R_{ц}H - H^2)^3} / 3S \right) + L^2}{3};$$

$$m_1^p = m_p \cdot \delta M_{k=1}; \quad m_2^p = m_p \cdot (\delta M_{k=2} - \delta M_{k=1});$$

$$m_3^p = m_p \cdot (\delta M_{k=3} - \delta M_{k=2});$$

$$J_1^p = m_1^p \cdot H^2; \quad J_2^p = m_2^p \cdot H^2; \quad J_3^p = m_3^p \cdot H^2.$$

На прикладі цистерни МЖТ-10, побудуємо залежності маси та моментів інерції рідини (рис. 2.12), а також коефіцієнтів жорсткості та демпфірування (рис. 2.13) від рівня наповненості рідини H при коливаннях у площині головного вертикального перерізу цистерни.

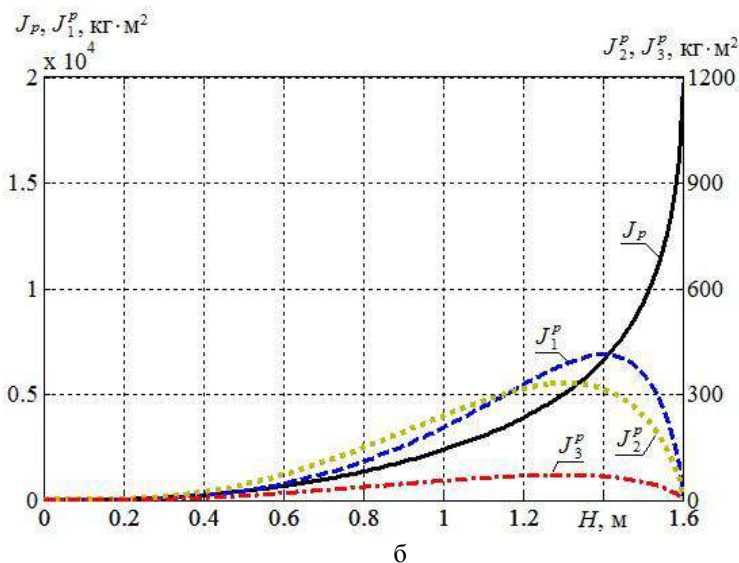
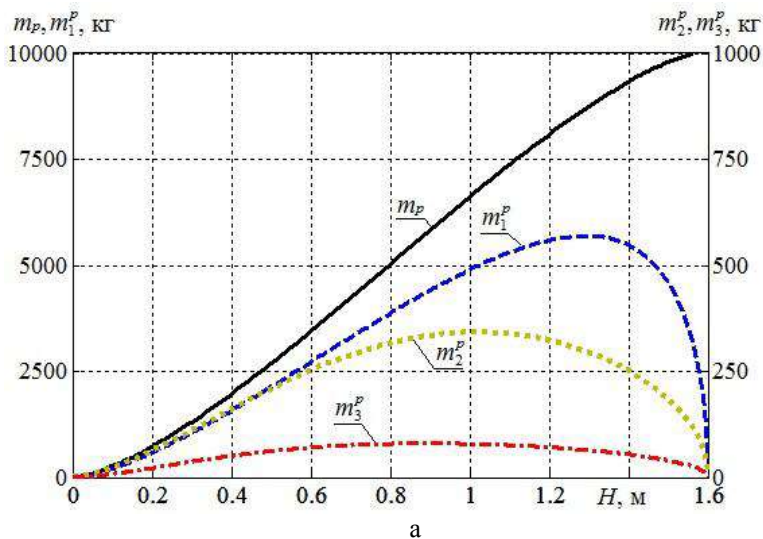


Рисунок 2.12 – Залежність вагових та інерційних показників рідини в цистерні типу МЖТ-10 від рівня рідини при коливаннях у площині головного вертикального перерізу цистерни:

а – маси; б – моменти інерції

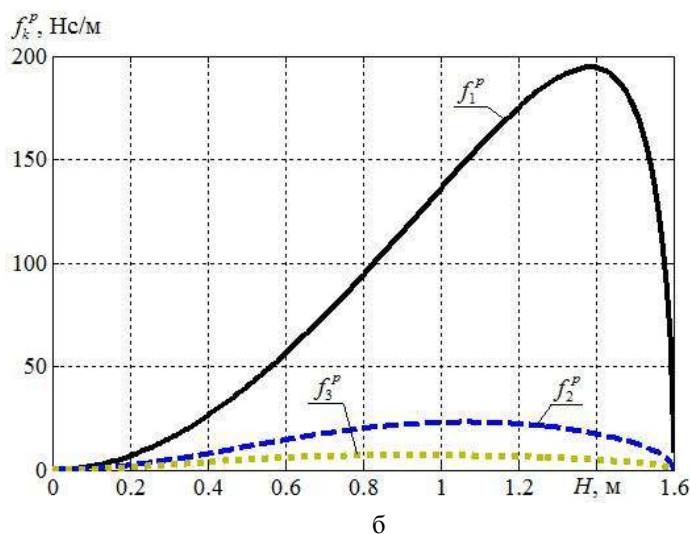
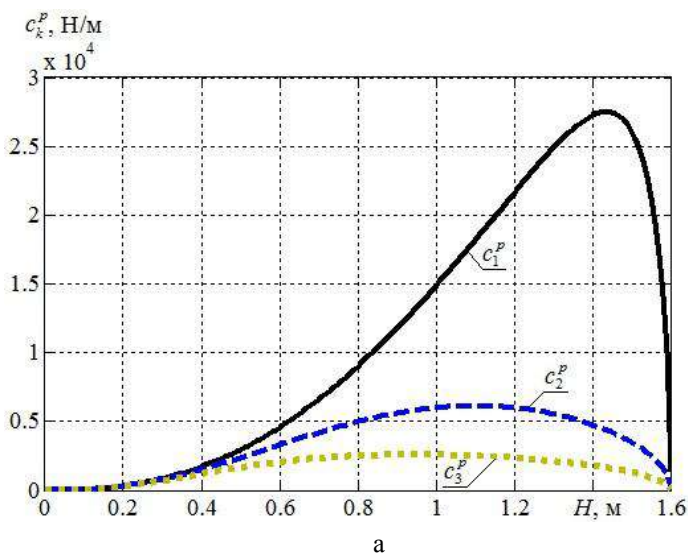


Рисунок 2.13 – Залежності пружних та дисипативних показників рідини в цистерні типу МЖТ-10 від рівня рідини при коливаннях у площині головного вертикального перерізу цистерни:

а – коефіцієнти жорсткості; б – коефіцієнти демпфірування

Таким чином, виведено рівняння для динамічного розрахунку парціальних амплітуд та отримано формули для обчислення вагових, інерційних, пружних та дисипативних показників парціальних осциляторів.

Підсумовуючи вище сказане відмітимо, що наведено загальну концепцію зниження низькочастотних коливань мас транспортного засобу від ефектів, які утворюються за рахунок перерозподілу мас рідини в цистерні, що викликано рухом вільної поверхні рідини. Оприлюднена концепція ґрунтується на формуванні пасивного (дослідженні лінійаризованої моделі) та активного (дослідженні нелінійної моделі) принципів захисту від коливань складної системи «трактор – цистерна». Сформовано математичну модель, яка дозволяє описати низькочастотний коливальний рух рідини в ємності з вільною поверхнею за рахунок раціонального поєднання відомої моделі з розподіленими масами, що описується *рівняннями Нав'є-Стокса*, та класичної теорії *хвиль Релея*. Наведений математичний підхід ґрунтується на використанні так званої потенційної постановки задачі, при якій коливальний рух рідини (за виключенням вузького пристінного шару) вважається безвихровим, та використанні *методу парціальних осциляторів*, який дозволив для низькочастотних коливань замінити континуальну модель рідини дискретною моделлю (з зосередженими масами). Запропонований математичний підхід якісно відрізняється від існуючих необов'язковістю врахування реальної форми ємності, що значним чином ускладнювало розрахунковий процес. Запропоновано проводити еквівалентну заміну реальної форми ємності (циліндричної, овальної, «валізної» й ін.) на форму прямокутного паралелепіпеда, скориставшись запропонованим принципом приведення, а саме: збереженням розмірів вільної поверхні рідини та маси рідини в цистерні.

РОЗДІЛ 3. ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНО-ТЕОРЕТИЧНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ВІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ РІДИНИ В ЄМНОСТІ ПРИЗМАТИЧНОЇ ФОРМИ

3.1. Мета експериментальних досліджень, прилади та обладнання

Експериментальні дослідження мали за мету підтвердити спроможність використання описаного вище математичного апарату для визначення основних параметрів вільних коливань залежно від рівня наповнення рідиною в прямокутній ємності.

В ході досліджень вирішувались наступні задачі:

- перевірити адекватність використання математичних алгоритмів при визначенні частот вільних коливань рідини в ємності шляхом порівняння теоретичних та експериментальних значень періодів коливань;
- визначити декремент загасання рідини різної в'язкості.

Об'єктом експериментальних досліджень є ємність прямокутної форми (рис. 3.1 *а*) з габаритними значеннями 0,3 (Д)х0,2 (Ш)х0,2 (В) м, а також три види рідини (рис. 3.1 *б – в*): 20% розчин цукру у воді, вода, рослинна (соняшникова) олія.

Проведення експериментальних досліджень відбувалось при температурі навколишнього середовища та рідини +20...25 °С. Дослідження проводилось на рівній твердій поверхні з нахилом меншим за 1 град, як в поздовжній, так і в поперечній площинах.

Порядок проведення експериментальних досліджень був наступний.

1. Прямокутна ємність встановлюється на дві дерев'яні підставки (висотою 0,025 м), що розміщені на рівній поверхні паралельно одна до одної. При дослідженні коливань в поздовжній площині підставки встановлювались на грані довжиною 0,2 м, а в поперечній – на грані довжиною 0,3 м.

2. Ємність заповнюється рідиною на висоту 0,15 м, 0,1 м та 0,05 м.

3. Одна з підставок прибирається, створюючи кінематичне збурення рідини в ємності, та реєструються коливання рідини в трьох серіях дослідів.



а



б



в



г

Рисунок 3.1 – Об'єкти експериментальних досліджень:

а – ємність для дослідів; б – ємність з 20% розчином цукру (щільність $\rho = 1095 \text{ кг/м}^3$); в – ємність з водою ($\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$); г – ємність з рослинною олією ($\rho = 920 \text{ кг/м}^3$)

Весь процес експериментальних досліджень фіксується на відеокамеру, яка встановлюється на штатив. Кожен з дослідів проводився 5 разів. В ході випробувань використовується два ареометри:

- для води та 20% розчину води і цукру – ТУ 25-11.1209-75 (рис. 3.2 а);

- для рослинної олії – АНТ-1 ДСТУ ГОСТ 18481:2009 (рис. 3.2 б).



Рисунок 3.2 – Ареометри, які використовуються:
а – ТУ 25-11.1209-75; б – АНТ-1 ДСТУ ГОСТ 18481:2009

3.2. Теоретичні результати досліджень з визначення частоти вільних коливань рідини

Згідно з результатами перетворень та введенням певних допущень (щодо крайових умов) було отримано формули для низьких частот вільних коливань рідини в прямокутній призматичній ємності з вільною по верхньою: формули (2.25) для коливань у поперечній площини та (2.22) для коливань у поздовжній площини.

В формулах (2.22, 2.25) m та k відповідають певному шару рідини, що коливається. Для перевірки адекватності математичної моделі достатнім буде визначення частоти першого шару рідини ($m = 1$ та $k = 1$), який має суттєво більшу масу в порівнянні з іншими шарами рідини. Тоді теоретичне значення частоти коливань першого парціального шару розраховується так:

$$\nu_{m=1}^T = \frac{1}{2} \sqrt{g \cdot \frac{1}{2\pi l} \cdot th\left[\frac{\pi h}{2l}\right] \cdot \left(1 + \frac{\sigma}{\rho g} \cdot \left[\frac{\pi}{2l}\right]^2\right)}; \quad (3.1)$$

$$\nu_{k=1}^T = \frac{1}{2} \sqrt{g \cdot \frac{1}{2\pi L} \cdot th\left[\frac{\pi h}{2L}\right] \cdot \left(1 + \frac{\sigma}{\rho g} \cdot \left[\frac{\pi}{2L}\right]^2\right)}. \quad (3.2)$$

Зважаючи на відомі значення габаритних розмірів ємності ($l = 0,15$ м – напівдовжина та $L = 0,1$ м – напівширина), обчислюємо частоту вільних коливань; результати зведемо до табл. 3.1.

Аналізуючи дані з табл. 2.1, констатуємо, що на значення основних частот вільних коливань коефіцієнт поверхневого натягу та щільність рідини (для 3-ох рідин, що досліджуються) не впливають. Причина – мале значення коефіцієнта поверхневого натягу рідини нівелює у наведених формулах свій вплив, а також вплив щільності на значення вільної частоти.

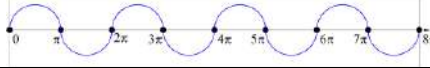
Таблиця 3.1 – Результати теоретичного розрахунку основних частот вільних коливань рідини

Рідина	Висота наповнення, м	Частоти вільних коливань рідини ν^T , Гц	Коефіцієнт поверхневого натягу рідини σ , Н/м	Щільність рідини ρ , кг/м ³	Кінематична в'язкість, сСт
20% розчин цукру у воді	Поперечна площина		0,0504 [252]	1095	1,79 [253]
	0,15	1,959			
	0,1	1,893			
	0,05	1,6			
	Поздовжня площина				
	0,15	1,545			
	0,1	1,426			
	0,05	1,118			
Вода	Поперечна площина		0,07422	1000	1,00
	0,15	1,959			
	0,1	1,893			
	0,05	1,601			
	Поздовжня площина				
	0,15	1,545			
	0,1	1,426			
	0,05	1,119			
Рослинна олія	Поперечна площина		0,03634 [254]	920	60,30 [255]
	0,15	1,959			
	0,1	1,893			
	0,05	1,6			
	Поздовжня площина				
	0,15	1,545			
	0,1	1,426			
	0,05	1,118			

3.3. Результати експериментальних досліджень з визначення основної частоти вільних коливань рідин

Результати експериментального дослідження зведені до табл. 3.2 – 3.7.

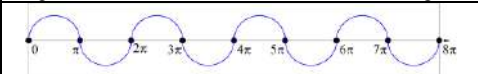
Таблиця 3.2 – Коливання рідини у поперечній площині ємності, рідина – 20% водний розчин цукру

№ досліду	Періоди коливань та відповідні кількості кадрів					Кіл-ть кадрів, яка припадає на один період	Періоди (експер.) вільних коливань рідини T_m^E , с	Період (теорія) вільних коливань рідини T_m^T , с	Похибка, %
									
	0	2π	4π	6π	8π				
Висота наповнення $h = 0,15$ м									
1	0	13	25	37	47	11,75	0,489	0,510	3,92
2	0	12	25	38	49	12,25	0,510		0,00
3	0	13	23	36	47	11,75	0,489		3,92
4	0	12	24	36	48	12	0,500		1,96
Висота наповнення $h = 0,1$ м									
1	0	13	25	38	51	12,75	0,531	0,528	0,57
2	0	13	25	37	50	12,5	0,521		1,33
3	0	13	26	38	51	12,75	0,531		0,57
4	0	12	25	36	49	12,25	0,510		3,41
Висота наповнення $h = 0,05$ м									
1	0	14	29	44	59	14,75	0,615	0,625	1,60
2	0	16	30	46	61	15,25	0,635		1,60
3	0	15	30	45	60	15	0,625		0,00
4	0	16	31	46	62	15,5	0,645		3,2

Таблиця 3.3 – Коливання у поздовжній площині ємності, рідина – 20% розчин цукру у воді

№ досліду	Періоди коливань та відповідні кількості кадрів					Кіл-ть кадрів, яка припадає на один період	Періоди (експер.) вільних коливань рідини T_k^E , с	Період (теорія) вільних коливань рідини T_k^T , с	Похибка, %
									
	0	2π	4π	6π	8π				
Висота наповнення $h = 0,15$ м									
1	0	15	29	45	60	15	0,625	0,647	3,40
2	0	15	30	46	62	15,5	0,646		0,15
3	0	16	31	46	61	15,25	0,635		1,85
4	0	16	31	46	62	15,5	0,646		0,15
Висота наповнення $h = 0,1$ м									
1	0	17	34	49	66	16,5	0,688	0,701	1,85
2	0	16	33	50	67	16,75	0,698		0,43
3	0	16	32	49	65	16,25	0,677		3,42
4	0	17	34	50	67	16,75	0,698		0,43
Висота наповнення $h = 0,05$ м									
1	0	22	46	67	87	21,75	0,906	0,894	1,34
2	0	22	45	66	86	21,5	0,896		0,22
3	0	23	45	68	88	22	0,917		2,57
4	0	22	46	66	87	21,75	0,906		1,34

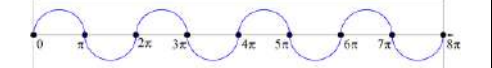
Таблиця 3.4 – Коливання у поперечній площині смності, рідина – вода

№ досліду	Періоди коливань та відповідні кількості кадрів					Кіл-ть кадрів, яка припадає на один період	Періоди (експер.) вільних коливань рідини T_m^E , с	Період (теорія) вільних коливань рідини T_m^T , с	Похибка, %
									
	0	2π	4π	6π	8π				
Висота наповнення $h = 0,15$ м									
1	0	13	25	37	48	12	0,500	0,511	2,15
2	0	12	25	37	49	12,25	0,510		0,2
3	0	12	23	36	48	12	0,500		2,15
4	0	13	25	36	49	12,25	0,510		0,2
Висота наповнення $h = 0,1$ м									
1	0	13	26	38	50	12,5	0,521	0,529	1,51
2	0	13	25	37	49	12,25	0,510		3,59
3	0	13	26	38	50	12,5	0,521		1,51
4	0	12	25	37	50	12,5	0,521		1,51
Висота наповнення $h = 0,05$ м									
1	0	15	29	44	60	15	0,625	0,625	0
2	0	15	30	44	59	14,75	0,615		1,60
3	0	15	30	45	61	15,25	0,635		1,60
4	0	14	30	44	60	15	0,625		0

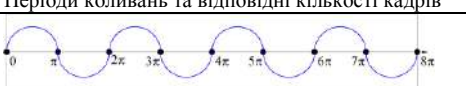
Таблиця 3.5 – Коливання у поздовжній площині смності, рідина – вода

№ досліду	Періоди коливань та відповідні кількості кадрів					Кіл-ть кадрів, яка припадає на один період	Періоди (експер.) вільних коливань рідини T_k^E , с	Період (теорія) вільних коливань рідини T_k^T , с	Похибка, %
									
	0	2π	4π	6π	8π				
Висота наповнення $h = 0,15$ м									
1	0	14	30	44	59	14,8	0,617	0,647	4,35
2	0	16	30	46	61	15,25	0,635		1,89
3	0	16	32	47	63	15,75	0,656		1,01
4	0	16	31	47	62	15,5	0,646		0,15
Висота наповнення $h = 0,1$ м									
1	0	17	33	49	66	16,5	0,688	0,702	2,04
2	0	19	35	50	68	17	0,708		0,85
3	0	18	33	50	67	16,75	0,698		0,57
4	0	18	34	51	67	16,75	0,698		0,57
Висота наповнення $h = 0,05$ м									
1	0	22	43	65	85	21,25	0,885	0,894	1,02
2	0	22	44	66	86	21,5	0,896		0,22
3	0	21	43	65	84	21	0,875		2,40
4	0	22	44	65	86	21,5	0,896		0,22

Таблиця 3.6 – Коливання у поперечній площині ємності, рідина – рос-
линна олія

№ досліду	Періоди коливань та відповідні кількості кадрів					Кіл-ть кадрів, яка припадає на один період	Періоди (експер.) вільних коливань рідини T_m^E , с	Період (теорія) вільних коливань рідини T_m^T , с	Похибка, %
									
	0	2π	4π	6π	8π				
Висота наповнення $h = 0,15$ м									
1	0	12	25	37	49	12,25	0,510	0,511	0,20
2	0	12	24	36	48	12	0,500		2,15
3	0	13	23	36	47	11,75	0,489		4,11
4	0	13	25	37	49	12,25	0,510		0,20
Висота наповнення $h = 0,1$ м									
1	0	13	25	37	51	12,75	0,531	0,528	0,38
2	0	12	25	37	50	12,5	0,521		1,51
3	0	13	26	38	50	12,5	0,521		1,51
4	0	12	25	38	50	12,5	0,521		1,51
Висота наповнення $h = 0,05$ м									
1	0	15	29	45	59	14,75	0,615	0,625	1,60
2	0	14	29	44	60	15	0,625		0
3	0	15	30	45	61	15,25	0,635		1,60
4	0	14	30	45	62	15,5	0,646		3,36

Таблиця 3.7 – Коливання у поздовжній площині ємності, рідина – рос-
линна олія

№ досліду	Періоди коливань та відповідні кількості кадрів					Кіл-ть кадрів, яка припадає на один період	Періоди (експер.) вільних коливань рідини T_k^E , с	Період (теорія) вільних коливань рідини T_k^T , с	Похибка, %
									
	0	2π	4π	6π	8π				
Висота наповнення $h = 0,15$ м									
1	0	16	30	47	62	15,5	0,646	0,647	0,18
2	0	15	29	45	60	15	0,625		3,40
3	0	16	31	46	62	15,5	0,646		0,18
4	0	15	30	45	60	15	0,625		3,40
Висота наповнення $h = 0,1$ м									
1	0	17	33	50	67	16,75	0,698	0,701	0,44
2	0	18	34	50	67	16,75	0,698		0,44
3	0	19	35	51	68	17	0,708		1,05
4	0	17	34	49	66	16,5	0,688		1,93
Висота наповнення $h = 0,05$ м									
1	0	21	44	66	88	22	0,917	0,894	2,57
2	0	21	45	65	87	21,75	0,906		1,34
3	0	22	44	65	87	21,75	0,906		1,34
4	0	21	44	64	86	21,5	0,896		0,22

Аналізуючи результати досліджень з табл. 3.2 – 3.7, констатуємо, що при визначенні основних резонансних частот максимальна похибка для коливань рідини в поперечній і поздовжній площинах не перевищує 4,35%.

Така незначна величина похибки надає право стверджувати щодо адекватності математичних алгоритмів, які використано при теоретичному визначенні частот вільних коливань рідини.

3.4. Теоретичне дослідження з визначення декременту загасання вільних коливань рідини в прямокутній ємності

Позначимо довжину, ширину та висоту прямокутного паралелепіпеду, об'єм якого займає рідина, як a , b та h . Рідина має щільність ρ та кінематичну в'язкість ν . Позначимо, як це було і раніше, власну (кругову) частоту n -ого парціального осцилятора символом ω_n , а символом Φ_n – відповідну власну форму потенціалу для коливань у повздовжній площині, що визначається за формулою

$$\Phi_n = \Delta u \cdot \sin\left(k\pi \frac{x}{a}\right) \cdot \frac{ch(k\pi y/a)}{ch(k\pi h/a)} \cdot \sin(\omega_n t), \quad k = 1, 3, 5;$$

де Δu – амплітуда коливань; числа $k = 1, 3, 5$ відповідають першому, другому та третьому парціальному шару рідини, $k = 2n - 1$.

Обчислимо значення безрозмірної характеристики коливань

$$R_n = \frac{\omega_n \cdot a^2}{\nu},$$

яке в теорії потенціальних коливань рідини називають, хоча і не зовсім слушно, *числом Рейнольдса*, та припустимо, що це число задовольняє умові

$$R_n > 5 \cdot 10^4. \quad (3.3)$$

Тоді, як показано в [48], шуканий логарифмічний декремент затухання можна знайти за формулою

$$\delta_n = \frac{\Delta E_n}{2E_n}, \quad (3.4)$$

де ΔE_n – це робота сил тертя за один період коливань,

$$\Delta E_n = \pi \rho \sqrt{\frac{\nu}{\omega_n}} \iint_{\Omega} \nu_n^2 dS; \quad (3.5)$$

Ω – тверда поверхня стінок ємності, що змочується рідиною; ν_n – амплітуда швидкості руху рідини у стінки; E_n – енергія парціального осцилятора,

$$E_n = \frac{\rho}{2} \cdot \iiint_V \nu_n^2 dV; \quad (3.6)$$

V – об'єм ємності, що зайнятий рідиною.

В роботі [48] формули (3.4) – (3.6) було застосовано для ємності циліндричної форми, де й потенціали використовували циліндричні функції Беселя, а поле швидкостей було просторовим.

Зараз це поле є плоским, і тому інтеграл (3.6) можна спростити до такого вигляду:

$$\iiint_V \nu_n^2 dV = \frac{b}{2} \cdot \iint_{\Omega_{\bar{\delta}}} \nu_n^2 dS, \quad (3.7)$$

де $\Omega_{\bar{\delta}}$ – це дві бічні стінки ємності, що має довжину a і висоту h .

Крім двох бічних стінок ємність має дві торцеві стінки з загальною поверхнею Ω_m та днище $\Omega_{\partial n}$, причому має місце рівність

$$\iint_{\Omega} v_n^2 dS = \iint_{\Omega_{\sigma}} v_n^2 dS + \iint_{\Omega_m} v_n^2 dS + \iint_{\Omega_{\partial n}} v_n^2 dS. \quad (3.8)$$

Обчислимо кожний із інтегралів правої частини (2.37) окремо.

На дні ємності

$$v_n^2 = \omega_n^2 \cdot \Delta u^2 \cdot \frac{\cos^2(k\pi x/a) \cdot (k\pi/a)^2}{\operatorname{ch}^2(k\pi h/a)};$$

звідки

$$\iint_{\Omega_{\partial n}} v_n^2 dS = \omega_n^2 \cdot \Delta u^2 \cdot \frac{(k\pi/a)^2}{\operatorname{ch}^2(k\pi h/a)} \cdot \frac{ab}{2}$$

На торцях ємності

$$v_n^2 = \omega_n^2 \cdot \Delta u^2 \cdot \frac{\operatorname{ch}^2(k\pi y/a) \cdot (k\pi/a)^2}{\operatorname{ch}^2(k\pi h/a)},$$

звідки

$$\begin{aligned} \iint_{S_{\text{тор}}} v_n^2 dS_{\text{тор}} &= \frac{2\omega_n^2 \cdot \Delta u^2 \cdot (k\pi/a)^2}{\operatorname{ch}^2(k\pi h/a)} \cdot b \cdot \int_0^h \operatorname{ch}^2(k\pi y/a) dy = \\ &= \frac{2\omega_n^2 \cdot \Delta u^2 \cdot (k\pi/a)^2}{\operatorname{ch}^2(k\pi h/a)} \cdot b \cdot \left[2h + \frac{\operatorname{sh}(2k\pi h/a)}{k\pi/a} \right] = \\ &= \omega_n^2 \cdot \Delta u^2 \cdot (k\pi/a)^2 \cdot b \cdot h \cdot \left[\frac{1}{\operatorname{ch}^2(k\pi h/a)} + \frac{\operatorname{th}(k\pi h/a)}{k\pi h/a} \right]. \end{aligned}$$

На бокових стінках ємності швидкість рідини має дві складові, причому:

$$v_{n,x}^2 = \frac{\omega_n^2 \cdot \Delta u^2 \cdot (k\pi/a)^2}{\operatorname{ch}^2(k\pi h/a)} \cdot \cos^2(k\pi x/a) \cdot \operatorname{ch}^2(k\pi y/a);$$

$$v_{n,y}^2 = \frac{\omega_n^2 \cdot \Delta u^2 \cdot (k\pi/a)^2}{\operatorname{ch}^2(k\pi h/a)} \cdot \sin^2(k\pi x/a) \cdot \operatorname{sh}^2(k\pi y/a).$$

Тому:

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega_6} v_{n,x}^2 dS &= \frac{2\omega_n^2 \cdot \Delta u^2 \cdot (k\pi/a)^2}{\operatorname{ch}^2(k\pi h/a)} \cdot \int_{-a/2}^{a/2} \cos^2(k\pi x/a) dx \cdot \int_0^h \operatorname{ch}^2(k\pi y/a) dy = \\ &= a \frac{\omega_n^2 \cdot \Delta u^2 \cdot (k\pi/a)^2}{\operatorname{ch}^2(k\pi h/a)} \cdot \left[2h + \frac{\operatorname{sh}(2k\pi h/a)}{k\pi/a} \right] = \\ &= \frac{1}{2} a \cdot h \cdot \omega_n^2 \cdot \Delta u^2 \cdot (k\pi/a)^2 \cdot \left[\frac{\operatorname{th}(k\pi h/a)}{k\pi/a} + \frac{1}{\operatorname{ch}^2(k\pi h/a)} \right]; \\ \iint_{\Omega_6} v_{n,y}^2 dS &= \frac{2\omega_n^2 \cdot \Delta u^2 \cdot (k\pi/a)^2}{\operatorname{ch}^2(k\pi h/a)} \cdot \int_{-a/2}^{a/2} \cos^2(k\pi x/a) dx \cdot \int_0^h \operatorname{sh}^2(k\pi y/a) dy = \\ &= \frac{1}{2} a \cdot h \cdot \omega_n^2 \cdot \Delta u^2 \cdot (k\pi/a)^2 \cdot \left[\frac{\operatorname{th}(k\pi h/a)}{k\pi/a} - \frac{1}{\operatorname{ch}^2(k\pi h/a)} \right]. \end{aligned}$$

Загальний результат для бічних стінок ємності має вигляд:

$$\iint_{\Omega_6} v_n^2 dS = a \cdot h \cdot \omega_n^2 \cdot \Delta u^2 \cdot (k\pi/a)^2 \cdot \frac{\operatorname{th}(k\pi h/a)}{k\pi h/a},$$

звідки

$$\iint_{\Omega} v_n^2 dS = \omega_n^2 \cdot \Delta u^2 \cdot (k\pi/a)^2 \cdot \left[\frac{ab}{2} \frac{1}{\text{ch}^2(k\pi/a)} + ah \cdot \frac{\text{th}(k\pi h/a)}{k\pi h/a} + \right. \\ \left. + bh \left[\frac{\text{th}(k\pi h/a)}{k\pi h/a} + \frac{1}{\text{ch}^2(k\pi/a)} \right] \right]$$

i

$$\iiint_V v_n^2 dV = \frac{b}{2} \cdot \iint_{\Omega_6} v_n^2 dS = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot h \cdot \omega_n^2 \cdot \Delta u^2 \cdot (k\pi/a)^2 \cdot \frac{\text{th}(k\pi h/a)}{k\pi h/a}.$$

Підставляємо отримані результати в (3.4) – (3.6) і отримуємо шуканий результат:

$$\delta_n = \frac{\Delta E_n}{2E_n} = \left[\frac{\frac{ab}{2} \frac{1}{\text{ch}^2(k\pi/a)} + (a+b)h \cdot \frac{\text{th}(k\pi h/a)}{k\pi h/a} + \frac{bh}{\text{ch}^2(k\pi/a)}}{\frac{\rho abh}{2} \cdot \frac{\text{th}(k\pi h/a)}{k\pi h/a}} \right] \cdot \pi \rho \sqrt{\frac{\nu}{\omega_n}},$$

звідки

$$\delta = \pi \sqrt{\frac{\nu}{\omega_n (a/2)^2}} \cdot \left[1 + \frac{a}{b} + \frac{(1 + (2h/a))k\pi}{\text{sh}(2k\pi h/a)} \right]. \quad (3.9)$$

Проаналізуємо отриманий результат.

По-перше, він подібний до того, що був знайдений в роботі [48], але присутні й суттєві відмінності; особливо щодо старших тонів коливань.

По-друге, якщо рівень рідини не малий, а також для старшого тону коливань, формула (3.9) спрощується і приймає такий вигляд:

$$\delta_n = 2\pi \sqrt{\frac{\nu}{\omega_n \cdot r_*^2}}, \quad (3.10)$$

де $r_* = \frac{a \cdot b}{a + b}$ – це так званий еквівалентний радіус призматичної ємності.

Відмітимо, що в визначення цього розміру довжина та ширина ємності входять симетрично, а частота ω_n залежить від $\sqrt{a}$, звідки декремент δ_n є пропорційним $\sqrt[4]{a}$. Як наслідок, *коливання у поздовжній та поперечній площинах мають майже однаковий декремент загасання*. Проте, підтвердити таке твердження можуть лише результати експериментального дослідження декременту, що наведено в наступному пункті.

По-третє, формули (3.9) і (3.10) можна застосовувати лише для рідин малої в'язкості, а для таких в'язких, як рослинна олія, лише при використанні великих ємностей (цистерн). Що стосується дослідної ємності малого розміру, яку описано в пункті 3.1, то для неї умова (3.3) щодо числа Рейнольдса виконується лише для води і цукрового розчину.

А для рослинної олії отримаємо іншу умову: $R_1 < 10^4$, тому розвинути тут теорію розрахунку декременту використовувати не вдасться, про що буде сказано далі. Проте, якщо перейти до розміру тракторних цистерн, то ситуація з виконанням умови (3.3) змінюється на кращу.

До того ж, для цистерн нівелюється суттєвий вплив на величину декременту загасання з боку сили поверхневого натягу рідини (рис. 3.3).

Якщо число Рейнольдса для призматичної ємності визначити такою ж формулою, як для циліндра, тобто

$$R_n = \frac{\omega_n \cdot r_*^2}{\nu},$$

то формула (3.10) для декременту стане такою:

$$\delta_n = \frac{2\pi}{\sqrt{R_n}}. \quad (3.11)$$

Звідки, зважаючи на умову $R_n > 5 \cdot 10^4$ (3.3), отримаємо нерівність $\delta_n < 0,03$. Зрозуміло, що коли рівень рідини зменшується, то треба використовувати формулу (3.9), і там декремент зростає (рис. 3.3).

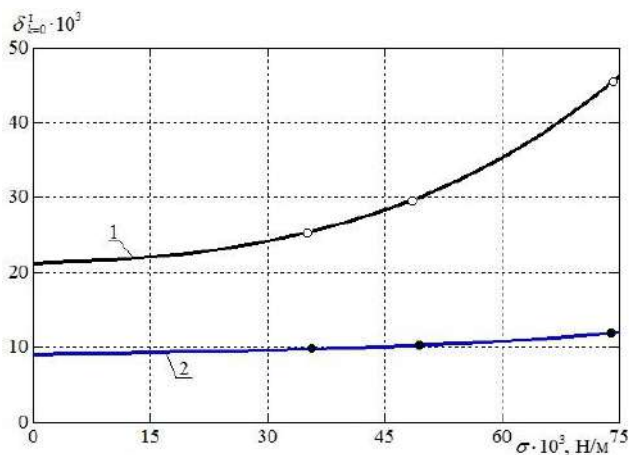


Рисунок 3.3 – Експериментальна залежність логарифмічного декременту загасань від поверхневого натягу рідини [48]:
1 – ємність діаметром 200 мм; 2 – ємність діаметром 518 мм

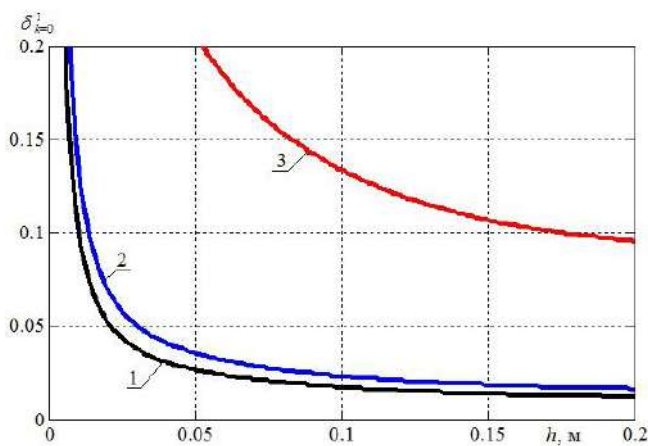


Рисунок 3.4 – Залежність логарифмічного декременту загасань від рівня наповнення h в дослідній ємності розміром $0,3 \text{ м} \times 0,2 \text{ м}$:
1 – вода; 2 – 20% розчин цукру; 3 – рослинна олія

3.5 Експериментальне дослідження з визначення декременту загасання рідин різної в'язкості

Відомо, що величиною декременту характеризується інтенсивність загасання коливань, а коефіцієнт загасання D можна визначити як відношення двох суміжних граничних відхилень системи (рис. 3.5) від рівноважного стану за умови руху системи в одному напрямку:

$$D = A(t)/A(t+T).$$

Для декількох періодів коефіцієнт загасання знаходять по формулі

$$D = \sqrt[n]{\frac{A(t_1^{(k)}) - A(t_2^{(k)})}{|A(t_1) - A(t_2)|}}, \quad (3.12)$$

де n – кількість хвиль.

При розв'язанні задач динаміки науковці при визначенні дисипативних характеристик зазвичай використовують так званий логарифмічний декремент загасання (ЛДЗ):

$$D = e^{-\delta} \Rightarrow -\delta = \ln D \Rightarrow \delta = -\ln D. \quad (3.13)$$

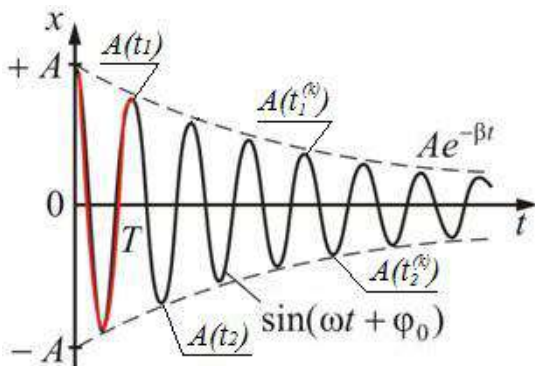


Рисунок 3.5 – Спрощена схема дії загасаючих коливань



Рисунок 3.6 – Ордината $A(t_1)$ при наповненні ємності з водою на рівень $h = 0,1$ м



Рисунок 3.7 – Ордината $A(t_2)$ при наповненні ємності з водою на рівень $h = 0,1$ м

Таблиця 3.8 – Визначення коефіцієнту загасання для 20% розчину цукру у воді

Рідина	Кіл-ть дослідів	Кіл-ть хвиль n	Граничні ординати		Коефіцієнт загасання D	Рідина	Кіл-ть дослідів	Кіл-ть хвиль n	Граничні ординати		Коефіцієнт загасання D
			$A(t_1)$	$A(t_2)$					$A(t_1)$	$A(t_2)$	
Висота наповнення ємності $h = 0,15$ м	1	1	63,0	64,0	0,932	Висота наповнення ємності $h = 0,1$ м	4	1	67,6	68,6	0,935
		2	63,0	63,9				2	67,7	68,5	
		3	63,0	63,9				3	67,7	68,5	
		4	63,0	63,9				4	67,7	68,5	
		5	63,1	63,9				5	67,7	68,5	
		6	63,1	63,8				6	67,8	68,5	
		7	63,1	63,8				7	67,8	68,5	
		8	63,1	63,8				8	67,8	68,4	
		9	63,1	63,8				9	67,8	68,4	
		10	63,2	63,7				10	67,8	68,4	
		11	63,2	63,7				11	67,9	68,4	
		12	63,2	63,7				12	67,9	68,4	
		13	63,3	63,7				13	67,9	68,3	
	2	1	62,9	63,9	0,935			14	67,9	68,3	0,929
		2	63,0	63,9				15	67,9	68,3	
		3	63,0	63,9				16	67,9	68,3	
		4	63,0	63,9				17	67,9	68,3	
		5	63,0	63,9				18	68,0	68,3	
		6	63,0	63,9			1	67,6	68,6		
		7	63,1	63,9			2	67,6	68,5		
		8	63,1	63,8			3	67,6	68,5		
		9	63,1	63,8			4	67,7	68,5		
		10	63,1	63,8			5	67,7	68,5		
		11	63,1	63,8			6	67,7	68,4		
		12	63,2	63,8			7	67,8	68,5		
		13	63,2	63,7			8	67,7	68,5		
		14	63,2	63,7			9	67,8	68,5		
		15	63,2	63,7			10	67,8	68,4		
		16	63,2	63,7			11	67,8	68,4		
		17	63,3	63,7			12	67,8	68,4		
		18	63,3	63,6			13	67,9	68,3		
	3	1	63,0	64,0	0,939		14	67,9	68,4		
		2	63,0	63,9			15	67,9	68,3		
		3	63,0	63,9			16	67,9	68,3		
		4	63,0	63,9			17	67,9	68,3		
		5	63,0	63,9			18	67,9	68,3		
		6	63,1	63,9			19	67,9	68,3		
		7	63,1	63,8			20	67,9	68,3		
		8	63,1	63,8			21	68,0	68,3		
		9	63,1	63,8			22	68,0	68,2		
		10	63,1	63,8							
		11	63,2	63,7							

Таблиця 3.9 – Визначення ЛДЗ для води

Рідина	Кіл-ть дослідів	Кіл-ть хвиль n	Граничні ординати		Коефіцієнт загасання D	Рідина	Кіл-ть дослідів	Кіл-ть хвиль n	Граничні ординати		Коефіцієнт загасання D		
			$A(t_1)$	$A(t_2)$					$A(t_1)$	$A(t_2)$			
Висота наповнення ємності $h = 0,15$ м	1	1	63,2	64,2	0,896	Висота наповнення ємності $h = 0,1$ м	4	1	67,7	68,7	0,905		
		2	63,3	64,1				2	67,8	68,7			
		3	63,3	64,1				3	67,8	68,6			
		4	63,3	64,0				4	67,8	68,6			
		5	63,3	64,0				5	67,8	68,6			
		6	63,4	63,8				6	67,9	68,6			
		7	63,4	63,7				7	67,9	68,5			
		8	63,4	63,7				8	67,9	68,5			
		9	63,4	63,7				9	68,0	68,5			
		10	63,4	63,7				10	68,0	68,5			
	2	1	63,1	64,1	0,903			5	11	68,0		68,4	0,903
		2	63,1	64,1					12	68,1		68,4	
		3	63,2	64,0			1		67,7	68,7			
		4	63,2	64,0			2		67,8	68,6			
		5	63,3	64,0			3		67,8	68,6			
		6	63,3	63,9			4		67,8	68,6			
		7	63,3	63,9			5		67,9	68,5			
		8	63,3	63,9			6		67,9	68,5			
		9	63,4	63,8			7		67,9	68,5			
	3	1	63,1	64,1	0,898		6		8	68,0	68,5	0,891	
		2	63,1	64,0					9	68,0	68,4		
		3	63,1	64,0					1	67,7	68,7		
		4	63,2	64,0				2	67,8	68,7			
		5	63,2	63,9				3	67,8	68,7			
		6	63,2	63,9				4	67,9	68,7			
		7	63,2	63,9				5	67,9	68,6			
		8	63,3	63,8				6	67,9	68,6			
		9	63,3	63,8				7	68,0	68,6			
		10	63,3	63,8				8	68,0	68,6			
		11	63,3	63,7				9	68,0	68,5			
		12	63,4	63,7				10	68,0	68,5			
		13	63,4	63,7			11	68,1	68,5				
		14	63,4	63,7			12	68,1	68,5				
		15	63,4	63,6			13	68,1	68,4				
				14	68,2		68,4						

З табл. 3.8 знаходимо, що середнє значення ЛДЗ для 20% водного розчину цукру складає

$$\delta_E^{\text{вода+цук}} = \sum_{i=1}^5 \delta_i^{\text{вода+цук}} / 5 = 0,068 \pm 0,005.$$

З табл. 3.9 знаходимо, що середнє значення ЛДЗ для води складає

$$\delta_E^{\text{вода}} = \sum_{i=1}^6 \delta_i^{\text{вода}} / 6 = 0,106 \pm 0,007 .$$

Таблиця 3.10 – Визначення ЛДЗ для рослинної олії

Рідина	Кіл-ть дослідів	Кіл-ть хвиль n	Граничні ординати		Коефіцієнт загасання D	Рідина	Кіл-ть дослідів	Кіл-ть хвиль n	Граничні ординати		Коефіцієнт загасання D	
			$A(t_1)$	$A(t_2)$					$A(t_1)$	$A(t_2)$		
Висота наповнення ємності $h = 0,15$ м	1	1	64,7	63,7	0,765	Висота наповнення ємності $h = 0,1$ м	4	1	67,5	68,5	0,725	
		2	64,3	63,7				2	67,8	68,5		
		3	64,1	63,7				3	68	68,5		
		4	63,8	63,7				4	68,1	68,5		
		5	63,2	63,6				5	68,2	68,4		
		6	63,4	63,6								
	2	1	64,7	63,7	0,725		5	1	67,5	68,5	0,720	
		2	64,3	63,7				2	67,7	68,5		
		3	64,0	63,7				3	67,9	68,5		
		4	63,7	63,7				4	68,1	68,5		
		5	63,4	63,6				5	68,2	68,5		
	3	1	64,7	63,7	0,681			6	6	68,3		68,5
		2	64,4	63,7					7	68,4		68,5
		3	64,1	63,7			1		67,5	68,5		
		4	63,8	63,7			2		67,7	68,5		
		5	63,6	63,7			3		67,9	68,5		
		6	63,5	63,6			4		68,2	68,5		
								5	68,3	68,5	0,681	
						6	68,4	68,5				

З табл. 3.10 знаходимо, що середнє значення ЛДЗ для рослинної олії складає

$$\delta_E^{\text{р.масло}} = \sum_{i=1}^6 \delta_i^{\text{р.масло}} / 6 = 0,335 \pm 0,03 .$$

3.6 Визначення формули для опису залежності декременту від амплітуди коливань рідини

Рівняння для зміни потенціалу зміщення парціального слою рідини

у поздовжній площині цистерни (розділ 2) на її вільній поверхні має вигляд

$$\rho\ddot{\Phi} + \rho f\dot{\Phi} + \rho g \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \sigma \frac{\partial \Phi}{\partial y \partial x^2} \Big|_{\Gamma} = -\rho [a_{cm.x}(t) + g \cdot \theta_{cm.z}(t)] \cdot x, \quad (3.14)$$

та по своїй формі нагадує рівняння руху, причому другий доданок $\rho f\dot{\Phi}$ нагадує силу тертя. І ця аналогія вірна не тільки по формі.

Приберемо в (3.14) праву частину та застосуємо до лівої частини оператор $grad[\Phi]$. Врахуємо, що $grad[\Phi] = u$, де $u(x, y, t)$ – це зміщення точки рідини з положення рівноваги. Отже, для вільних коливань парціального слою отримаємо

$$\rho\ddot{u} + \rho f\dot{u} + \rho g \frac{\partial u}{\partial y} - \sigma \frac{\partial u}{\partial y \partial x^2} \Big|_{\Gamma} = 0. \quad (3.15)$$

Якщо тепер всю масу слою привести до вільної поверхні Γ , то з співвідношення (3.15) з'являється рівняння вільних коливань слою

$$m\ddot{u} + mf\dot{u} + L[u] = 0, \quad (3.16)$$

де $L[u]$ – диференціальний оператор, який визначає силу пружності для зв'язку конкретного осцилятора, що має власну частоту ω_n , зі стінками цистерни,

$$L[u] = m_n^p \omega_n^2 u,$$

і рівняння (3.16) приймає вигляд:

$$m_n^p \ddot{u}_n + m_n^p f_n \dot{u}_n + m_n^p \omega_n^2 u_n = 0. \quad (3.17)$$

Таким чином, доданок $m_n^p f_n \dot{u}_n$ – це сила тертя, і $\delta_n = \pi f_n / \omega_n$ є логарифмічним декрементом загасання коливань n - того парціального шару рідини.

Дослідимо виникнення сили тертя. Традиційно вважають [48], що оскільки задача вирішується в потенціальній постановці, то це тертя виникає у тонкому пристінному слою. І це, безумовно, вірно, якщо амплітуда коливань мала, і у відомій формулі для повного тиску

$$p + \frac{\rho}{2} \dot{u}^2$$

другим доданком можливо знехтувати.

Відомо, що з цими доданками пов'язують загальні втрати тиску Δp , які виникають по довжині тракту та в місцевих опорах течії:

$$\Delta p = \xi \cdot \frac{\rho}{2} \cdot |\dot{u}| \cdot \dot{u};$$

$$\xi = \xi_{\text{расп}} + \xi_{\text{міс}}.$$

У пристінному слою течія ламінарна, і якщо ширина Δl цього слою не залежить від швидкості, тоді

$$\xi_{\text{расп}} = \frac{\Psi}{\text{Re}},$$

де Re – це число Рейнольдса,

$$\text{Re} = \frac{|\dot{u}| \cdot \Delta l}{\nu}.$$

В результаті в доданку $\xi_{\text{расп}} \cdot \dot{u}$ швидкості скорочуються, і тертя стає лінійним:

$$\Delta p_{\text{расп}} = \Psi \cdot \frac{\rho}{2} \cdot \dot{u}.$$

В роботі [48] виведені залежності коефіцієнта Ψ від частоти парціального осцилятора для випадку коливань вільної поверхні круглої форми, і після співставлення з експериментом вона була дещо скорегована і, в результаті формула для логарифмічного декременту загасання коливань прийняла такий вигляд:

$$\delta_k^I = \frac{\pi}{\sqrt{R_n}} \left[\frac{\xi_n^2 + 1}{\xi_n^2 - 1} + \frac{2\xi_n}{\text{sh}(2\xi_n \bar{h})} \right], \quad (3.18)$$

де число R_n для n - того парціального слою рідини знаходиться за формулою

$$R_n = \frac{\omega_n \cdot r_*^2}{\nu}$$

ν – в'язкість рідини; $\bar{h}$ – відносний рівень наповнення; r_* – радіус циліндра; ξ_k – корінь циліндричної функції Беселя.

В розділі 3.4 отримано формулу (3.9), аналогічну (3.18), але для ємності призматичної форми.

Що стосується місцевого опору, то для першого парціального шару він виникає при повороті потоку (рис. 3.8), що набігає на стінку, та характеризується значенням $\xi_{\text{mic}} = 1 \dots 2$ [256].

Знайдемо значення декременту, що відповідає цьому опору для першого парціального шару. Для цього розраховуємо силу тертя, яка діє на шар

$$F_{\text{тр}} = \xi_{\text{mic}} \cdot \frac{\rho}{2} \cdot |\dot{u}| \cdot \dot{u} \cdot S = (\rho S a) \cdot \frac{\xi_{\text{mic}}}{2a} \cdot |\dot{u}| \cdot \dot{u} = m_n \cdot \frac{\xi_{\text{mic}}}{2a} \cdot |\dot{u}| \cdot \dot{u},$$

де a , S – довжина ємності і площа поперечного перерізу для потоку рідини; m_n – маса рідини у парціальному шарі.

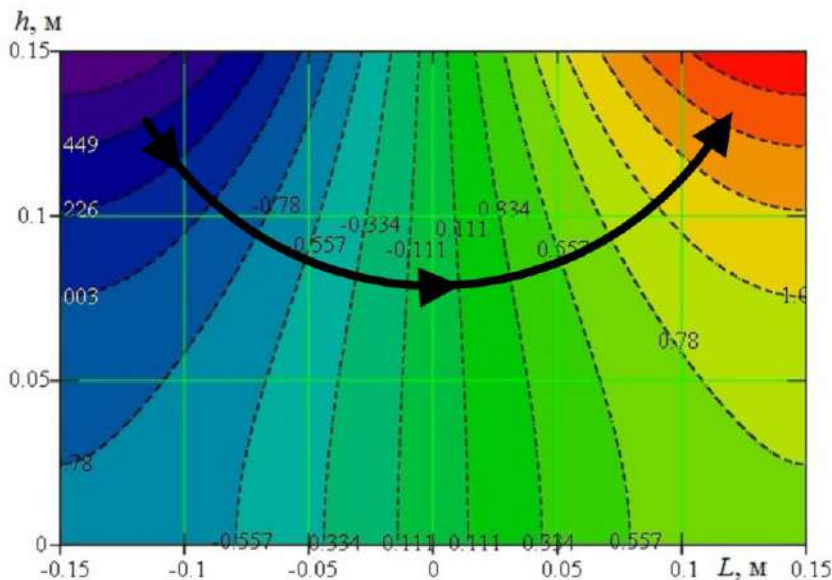


Рисунок 3.8 – Потенціал для візуалізації руху першого парціального шара рідини у дослідній ємності розміром $0,2 \times 0,3$ м при $h = 0,15$ м

Врахуємо, що $u = \Delta u_n \cdot \sin(\omega_n t)$, тому $\dot{u} = -\Delta u_n \cdot \omega_n \cdot \cos(\omega_n t)$ і

$$F_{\text{тр}} = m_n \cdot \frac{\xi_{\text{міс}} \cdot \Delta u_n \cdot \omega_n}{2a} \cdot |\cos(\omega_n t)| \cdot \dot{u}.$$

Оскільки

$$\frac{1}{T} \int_0^T |\cos(\omega_n t)| dt = \frac{2}{\pi}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega_n},$$

отримуємо

$$F_{\text{тр}} = m_n \cdot \frac{\xi_{\text{mic}} \cdot \Delta u_n \cdot \omega_n}{\pi a} \cdot \dot{u};$$

звідки

$$\delta_n^{\text{II}} = \frac{F_{\text{тр}}}{m_n} \cdot \frac{\pi}{\pi} \cdot \xi_{\text{mic}} \cdot m_n \cdot \frac{\Delta u_n}{a} = \xi_{\text{mic}} \cdot \frac{\Delta u_n}{a}. \quad (3.19)$$

Таким чином, встановлено, що величина декременту загасань має перемінне значення і значним чином залежить від амплітуди коливань рідини.

На основі формул (3.18, 3.19), а також враховуючи коефіцієнт ζ на-
рощування декременту (див. п. 3.4), пов'язаний з дією поверхневого натя-
гу, стає можливо теоретичним шляхом встановити величину логарифміч-
ного декременту будь-якої рідини, що коливається в ємності різного роз-
міру

$$\delta_n = \delta_n^{\text{I}} \zeta + \delta_n^{\text{II}}. \quad (3.20)$$

Що стосується декременту δ_n^{II} при $n > 0$, тобто для другого і тре-
тього парціального шару рідини, то скористаємося підказкою, яку надає
рис. 3.9.

Як бачимо, вертикальні пунктирні лінії на рис. 3.9 потік рідини не
пересікають. Тому формула для декременту, що залежить від амплітуди
 Δu_n коливань, набуває такого остаточного вигляду:

$$\delta_n^{\text{II}} = k \cdot \xi_{\text{mic}} \cdot \frac{\Delta u_n}{a}, \quad (3.21)$$

де для першого, другого і третього парціального шару рідини число
 $k = 1, 3, 5$, відповідно.

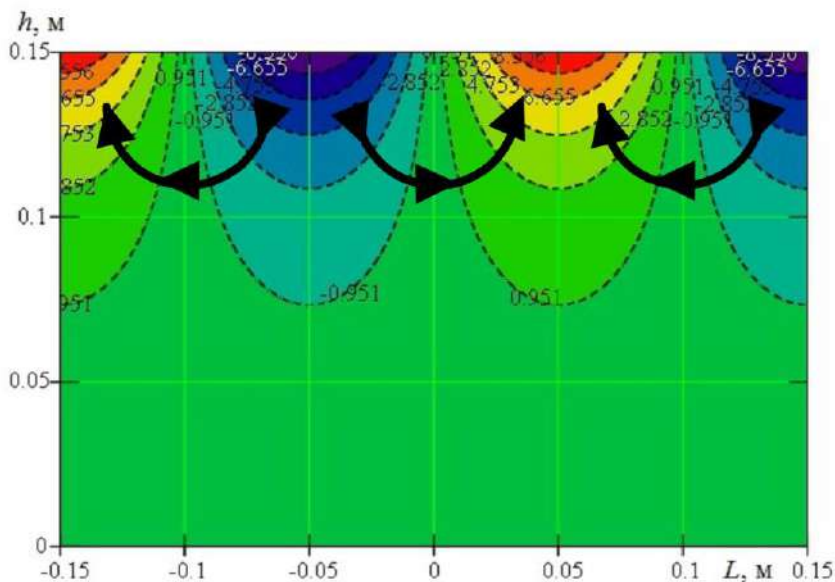


Рисунок 3.9 – Потенціал для візуалізації руху другого парціального шару рідини у дослідній ємності розміром $0,2 \times 0,3$ м при $h = 0,15$ м

Перевіримо результати, що отримані в ході експериментального та теоретичного визначення величини декременту загасань рідини для першого парціального шару рідини, значення, що відповідатиме рівню $0,075$ м, тобто характерному для тракторних цистерн значенню у 25% від довжини цистерни, наведемо в табл. 3.11.

Таблиця 3.11 – Порівняння величин логарифмічного декременту загасань

Рідина	Величина ЛДЗ $\delta_{n=0}^I$ (рис. 3.4)	Величина ЛДЗ $\delta_{k=0}^{II}$	Коефіцієнт нарощування ЛДЗ ζ	Теоретичний ЛДЗ δ_T	Експериментальний ЛДЗ δ_E	Похибка, %
Вода	0,021	0,04	2,00	0,082	$0,106 \pm 0,007$	-13
20% водного розчину цукру	0,027		1,23	0,073	$0,068 \pm 0,005$	0
Рослинна олія	0,160		1,33	0,253	$0,335 \pm 0,03$	-17

Як видно з табл. 3.11, порівняння результатів теоретичного та експериментального визначення ЛДЗ має хорошу збіжність для рідин з малою в'язкістю, що дозволяє стверджувати про доцільність використання формули (3.20) для малих та великих ємностей (цистерн).

Що стосується рослинної олії, яка має завелику в'язкість, то формулу (3.20) доцільно використовувати лише для ємностей, які мають великі розміри (наприклад, як у тракторних цистерн), про що йшлося у п. 3.4. Причому провина за високої похибки лежить на сталому декременту δ_n^I , а змінний декремент δ_n^{II} , як вважається, і в цьому випадку за формулою (3.19) було визначено вірно.

3.7. Вплив декременту загасань на коливання рідини в ємності

Для розгляду вільних коливань рідини необхідно сформулювати відповідне рівняння, що описує коливальний рух рідини без врахування зовнішніх факторів:

$$\ddot{y} + f \cdot \omega_0 \cdot \dot{y} + \omega_0^2 \cdot y = 0; \quad (3.22)$$

$$f = \delta/\pi,$$

де $f \cdot \omega_0$ – коефіцієнт дисипації; ω_0 – власна кругова частота коливань ($\omega_0 = 2\pi/T$).

Розв'яжемо рівняння (3.22) за допомогою комплексних чисел. Якщо

$$y = e^{i\omega t}, \quad i = \sqrt{-1},$$

тоді

$$-\omega^2 + i(\delta/\pi) \cdot \omega_0 \cdot \omega + \omega_0^2 = 0 \rightarrow \omega^2 - i(\delta/\pi) \cdot \omega_0 \cdot \omega - \omega_0^2 = 0. \quad (3.23)$$

Рішеннями рівняння (3.23) є два комплексних числа:

$$\omega = i(\delta/2\pi) \cdot \omega_0 \pm \omega_0 \sqrt{1 - (\delta/2\pi)^2}.$$

Зважаючи на отриману формулу та умову $\delta < 0,1$ зробимо висновок про те, що вплив декременту затухання на частоти вільних коливань дуже малий.

Для розгляду вимушених коливань рідини складемо рівняння, що описує рух основного шару рідини з врахування зовнішніх факторів. Та використаємо для багаторівневого збудження $F(t)$ комплексний запис

$$\ddot{y} + f \cdot \omega_0 \cdot \dot{y} + \omega_0^2 \cdot y = F(t); \quad (3.24)$$

$$F(t) = A_0 \omega_0^2 e^{i\omega t},$$

де A_0 – це амплітудний множник.

Представимо рішення (3.24) у вигляді $y = A \cdot e^{i\omega t}$, тоді

$$-A \cdot \omega^2 - i \cdot A \cdot f \cdot \omega_0 \cdot \omega - A \cdot \omega_0^2 = A_0 \cdot \omega_0^2. \quad (3.25)$$

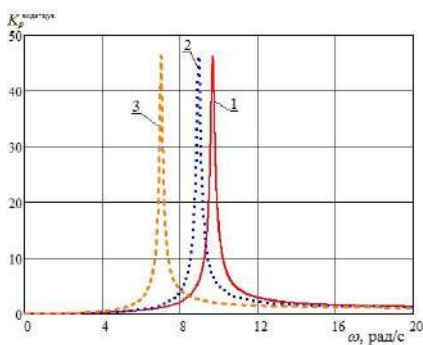
Зважаючи на рівняння (3.25), величина амплітуди вимушених коливань обчислюється за формулою

$$|A| = A_0 \omega_0^2 / \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + f^2 \omega_0^2 \omega^2}. \quad (3.26)$$

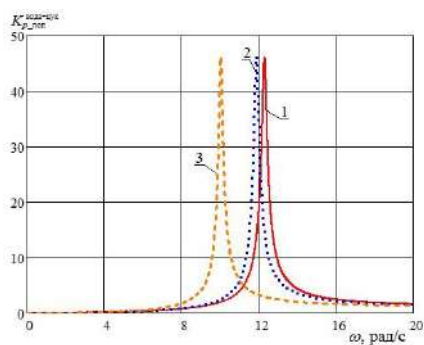
Для якісної оцінки результатів амплітудно-частотного аналізу введемо коефіцієнт K_p , який відображатиме відношення амплітуди вимушених коливань з амплітудним множником.

$$K_p = |A| / A_0.$$

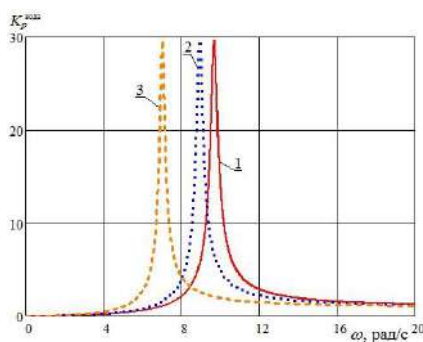
На рис. 3.10 наведено амплітудно-частотні характеристики (АЧХ) різних рідин (20% водного розчину цукру; води; рослинної олії) при дії вимушених коливань в поздовжній та поперечній площинах.



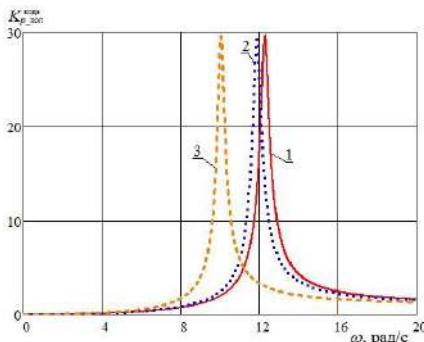
а



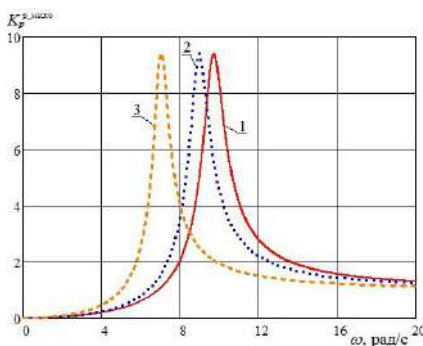
б



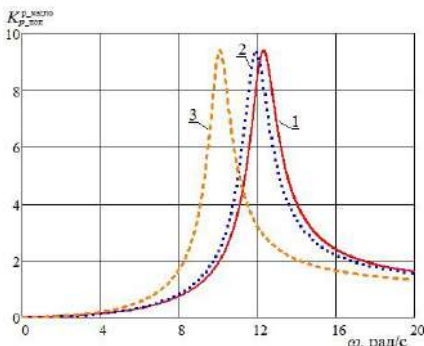
в



г



д

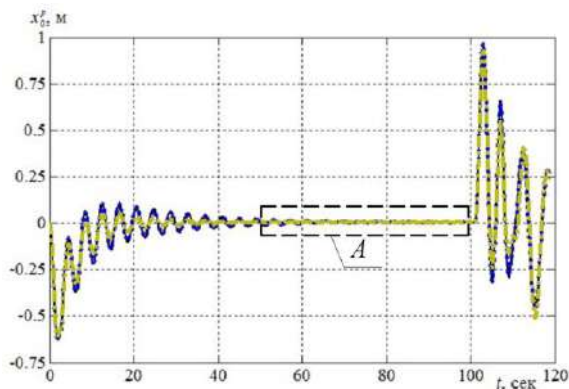


ж

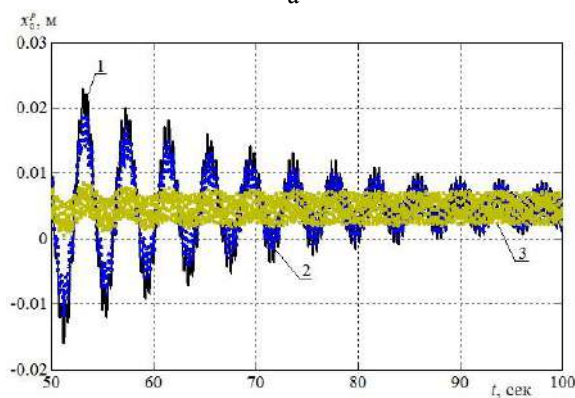
Рисунок 3.10 – АЧХ основного шару рідини:

а, б – 20% розчину цукру; в, г – води; д, ж – рослинної олії; а, в, д – поздовжні; б, г, ж – поперечні; 1 – $h = 0,15$ м; 2 – $h = 0,1$ м; 3 – $h = 0,05$ м

Як видно з рис. 3.10, амплітуди вимушених коливань в поперечній та в поздовжній площинах для кожної рідини при однаковій висоті наповнення співпадають (в деяких випадках різниця не перевищує 1%). Наявність різниці викликана врахуванням величин поверхневого натягу та щільності рідин. Також відмітимо, що після кінематичного збурення нахил прямокутної ємності склав близько 4° , проте це жодним чином не вплинуло на значення резонансних частот коливань.



а



б

Рисунок 3.11 – Результати моделювання горизонтального зсуву основного парціального шару ($k = 1$) рідини в цистерні:

а – загальний вигляд; б – ділянка А; 1 – для 20% розчину цукру ($\delta_0 \approx 0,04$); 2 – для води ($\delta_0 \approx 0,05$); 3 – для рослинної олії ($\delta_0 \approx 0,15$)

Знайдені в значення декременту загасання рідини різної в'язкості (табл. 3.11) використаємо при обчисленні горизонтальних зсувів поверхневих шарів рідини в причіпний цистерні типу МЖТ-10, яка транспортується. На рис. 3.11 показано результати моделювання при рівні рідини в цистерні 1,5 м. Амплітуда мікроколивань нерівностей шляху становила $A_{\lambda} = 0,02$ м ; а довжина хвилі мікроколивань $L_{\lambda} = 3$ м [130].

Як видно з рис. 3.11 транспортування рослинної олії відбувається значно стабільніше, ніж води, адже величина горизонтальних зсуву поверхневого шару олії мінімальна.

Таким чином, експериментальним шляхом визначено декремент загасання вільних коливань рідини різної в'язкості задля уточнення початкових даних при подальших розрахунках. Отримано формули для визначення логарифмічного декременту з урахуванням в'язкості рідини та амплітуди її коливань, що є внеском в теорію поверхневих хвиль Релея та підґрунтям для адекватного розрахунку резонансних явищ в тракторній цистерні з рідиною.

РОЗДІЛ 4. ПАСИВНИЙ ПРИНЦИП ЗАХИСТУ ВІД НИЗЬКО-ЧАСТОТНИХ КОЛИВАНЬ МАС ТРАКТОРА ПРИ ПЕРЕВЕЗЕНІ ЦИСТЕРНИ З РІДИНОЮ

Сьогодні при виконанні транспортних робіт МТА передусім займається перевезенням вантажу, збиральними та розподільчими роботами. Вантаж, який перевозиться, ділиться на твердий та рідкий. Оскільки перевезення рідкого вантажу призводить до виникнення додаткових вільних коливань, які впливають на рух цистерни та колісного трактора в цілому, то розвиток цього напрямку досліджень є актуальним. При чому, не лише для сільського господарства, а й для інших галузей промисловості і транспорту. Адже це дасть змогу значно підвищити технічні та експлуатаційні показники МТА.

Під час руху цистерни з рідиною у складі МТА, в елементах її конструкції збуджуються різноманітні механічні та гідромеханічні коливання, які утворюють широкий спектр частот. Відомо, що на самопочуття та здоров'я людини найбільш негативний вплив чинять коливання із частотою $0,5 \dots 2$ Гц [153], які мають вертикальний напрямок (тобто, вздовж тулуба оператора-водія). Вимушені коливання зазначеної частоти можуть збуджуватися від нерівностей дороги, проте їх амплітуда нівелюється дією ресор та амортизаторів кабіни й сидіння і залишається незначною. Інша ситуація виникає у разі, коли вимушені коливання виникають на резонансній частоті вільних коливань МТА.

На основі матеріалів, що наведені в розділі 2, з'ясовано, що в цистернах із рідиною, які входять до складу МТА, виникають вільні коливання рідини з частотами, меншими за 2 Гц. Проте ці дослідження не дають відповіді на питання, чи розповсюджуються коливання рідини в цистерні через тягово-зчіпний пристрій на кабіну тракториста та його сидіння. І чи матимуть відповідні пов'язані коливання у кабіні трактора шкідливу вертикальну проекцію.

До того ж слід додати, що у МТА можуть існувати в небезпечному інтервалі частот й інші вільні коливання, не викликані перетіканнями рідини. Але, оскільки частоти поверхневих хвиль залежать від рівня рідини, а цей рівень при виконанні транспортних робіт сільськогосподар-

ського призначення може бути довільним, то саме врахування цих хвиль породжує особливі труднощі і, одночасно, особливо великий інтерес.

Проведення динамічного аналізу відбувається при умові прямолінійного руху транспортного засобу, зважаючи на це утворюються коливання, які діють в поздовжньо-вертикальній та поперечно-вертикальній площинах.

4.1. Складання математичного апарату для дослідження вільних коливань системи «трактор – цистерна»

При математичному аналізі механізмів, в залежності від заданого діапазону частот, використовуються, як правило, дискретні, континуальні або змішані (дискретно – континуальні) моделі. В діапазоні інфразвукових механічних коливань усі тверді або пружні елементи конструкції МТА допустимо моделювати за допомогою дискретних моделей із зосередженими параметрами, тобто системами звичайних диференціальних рівнянь.

Перш ніж створювати складну математичну модель з урахуванням більшості факторів, які впливають на динамічну складову руху транспортного засобу з агрегатами для перевезення рідини, необхідно розробити лінійну (лінеаризовану) модель, яка буде враховувати усі відомі зв'язки між елементами та формуватися й аналізуватися при використанні матричного аналізу.

Кожне рівняння лінеаризованої моделі у точності повинно відповідати другому закону Ньютона і вказувати на залежність прискорення від діючих сил. Деякі нелінійні чинники (наприклад, сили Коріоліса або другий і інші члени розкладання синуса чи косинуса у степеневі ряди) у цих рівняннях не враховані, бо вони відповідають малим складовим більшого порядку, ніж перший. Всі блоки лінеаризованої моделі симетричні та задовольняють третьому закону Ньютона (сила дії дорівнює силі протидії).

Лінійні коливання підресованої маси (рис. 1.4) вздовж вісі OX (похитування), вздовж вісі OY (підсакування); оберти навколо вісі OX (кутові поперечні погойдування), навколо OZ (галоупування), навколо OY (рискання) – сукупний розгляд всіх цих рухів підресованої маси не

обов'язковий, адже встановлено, що деякі переміщення мають мале значення, або незалежність одних рухів до інших, це дозволяє нехтувати цими рухами. Відомо, що при прямолінійному русі підсакування, погойдування та рискання мають малі значення, що пояснюється великою боковою жорсткістю. Похитування мас вздовж вісі OX виникають головним чином при розгляді перехідних процесів (розгін та гальмування). При сталій їзді похитування не відчуваються, оскільки сили інерції, що діють вздовж вісі OX незіставно великі у порівнянні з горизонтальними складовими реакцій дороги, які виникають при наїзді коліс на нерівність. Тому при формуванні лінеаризованої моделі достатньо навести головні, що визначають коливальні рухи, фактори, які викликають лінійні переміщення вздовж вісі OY .

Оскільки моделюються вільні коливання, то усі зовнішні чинники, які збуджують вимушені, вільні та супроводжуючі коливання тут ігноруються. Зрозуміло, що зроблені припущення притаманні лише лінеаризованій моделі, і при моделюванні вимушених коливань вони відкидаються.

Рівняння коливань загальної форми для дискретної моделі має наступний вигляд

$$M \cdot \ddot{\vec{Y}} + F \cdot \dot{\vec{Y}} + C \cdot \vec{Y} = \vec{0}; \quad (4.1)$$

де M – діагональна інерційна матриця, яка складена із мас та моментів інерції; F та C – матриця демпфірування та матриця жорсткості, відповідно.

Відмітимо, що в лінеаризованій моделі матриця F , яка складена із коефіцієнтів внутрішнього тертя, розглядатися не буде, адже задачею динамічного аналізу є знаходження резонансних частот, а коефіцієнти демпфірування на величини цих частот не впливають, тому ними знехтуємо. Для того, щоб на початковому етапі перевірити складену лінеаризовану модель, достатньо переконатися у виконанні умови $C = C^T$; саме ця умова відповідає третьому закону Ньютона.

Якщо система, що моделюється, під час руху залишається динамічно

стійкою, то виконується додаткова умова $C \geq 0$, тоді всі власні числа цієї матриці – невід’ємні. Проте при значному від’ємному значенні сили R_x у дишлі ця система може втрачати стійкість; при цьому одна із частот матриці C також стає від’ємною, а у агрегаті спостерігається галопуючий резонанс. При формуванні пов’язаних форм коливань МТА зведемо рівняння (3.1) до наступного вигляду:

$$M^{\frac{1}{2}} \frac{d^2}{dt^2} \left(M^{\frac{1}{2}} \cdot \vec{Y} \right) + C \cdot M^{-\frac{1}{2}} \left(M^{\frac{1}{2}} \cdot \vec{Y} \right) = \vec{0} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{d^2}{dt^2} \left(M^{\frac{1}{2}} \cdot \vec{Y} \right) + M^{-\frac{1}{2}} \cdot C \cdot M^{\frac{1}{2}} \left(M^{\frac{1}{2}} \cdot \vec{Y} \right) = \vec{0},$$

або

$$\frac{d^2}{dt^2} \vec{Y}^* + C^* \cdot \vec{Y}^* = \vec{0},$$

де

$$C^* = M^{-\frac{1}{2}} \cdot C \cdot M^{\frac{1}{2}} > 0 \Rightarrow \vec{Y}^* = M^{\frac{1}{2}} \cdot \vec{Y}.$$

Звідки отримаємо рівняння для власних кутових частот ω :

$$\det(\omega^2 I - C^*) = 0.$$

Отже, окреслені основні етапи побудови математичної моделі, яка досліджує вільні коливання складної системи «трактор – цистерна».

4.2. Аналіз вільних коливань системи «трактор – цистерна» в поздовжньо-вертикальній площині руху

Лінеаризовану модель при транспортуванні причіпної (рис. 4.1) та

напівпричіпної (рис. 4.2) цистерн утворюють 11 диференціальних рівняння другого порядку, тобто при русі такого транспортного засобу збуджується 11 власних частот, які відповідають коливанням в поздовжньо-вертикальній площині. На схемах (рис. 4.1 – 4.2) кожному з трьох парціальних осциляторів відповідає умовний вантаж, що взаємодіє з оболонкою цистерни через деформацію умовної пружини, а також через умовну опору, де діє сила ваги та сила тертя. Сили взаємодії, на відмінність від об'єктів, є не умовними, а дійсними. При моделюванні складові величини коливального процесу об'єднуються у вигляді

$$\vec{Y} = (y_T \quad y_1^M \quad y_2^M \quad y_K \quad y_C \quad y_{\Pi} \quad y_3^M \quad y_4^M \quad y_1^P \quad y_2^P \quad y_3^P)^T, \quad (4.2)$$

де y_T , y_1^M , y_2^M , y_K , y_C – вертикальні переміщення остову (рами), переднього та заднього мостів, кабіни, сидіння трактора; y_{Π} , y_3^M , y_4^M – вертикальні переміщення платформи, першого та другого мостів причіпного агрегату; y_1^P , y_2^P , y_3^P – рухи рідини, які приймають участь в коливальному процесі.

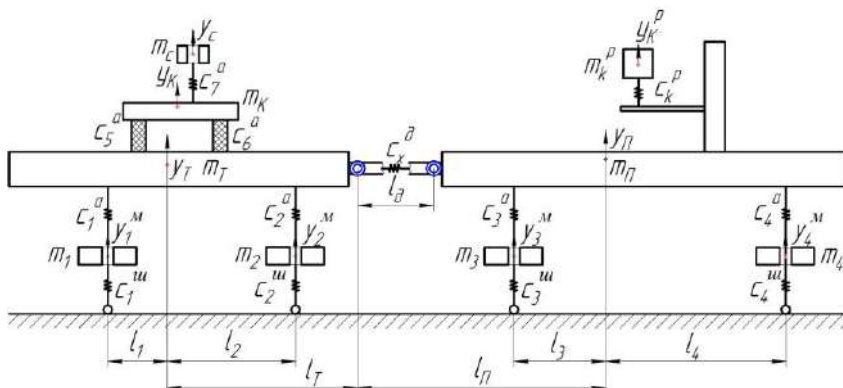


Рисунок 4.1 – Спрощена схема трактора з причіпною цистерною, яка використовується для аналізу частот вільних коливань

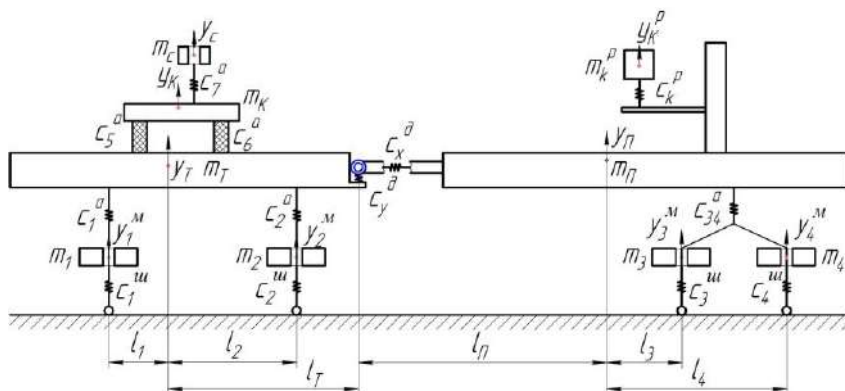


Рисунок 4.2 – Спрощена схема трактору з напівпричіпною цистерною, яка використовується для аналізу частот вільних коливань

Основні параметри трактора і цистерни, що були використані при проведенні аналізу коливальних процесів в МТА та під час його подальших розрахунків, наведено у табл. 4.1.

Таблиця 4.1 – Початкові дані для використання у математичних моделях коливального руху трактора ХТЗ-150К та цистерн

Маса рами трактора, кг	m_T	4800	Маса остову цистерни, кг	$m_П$	3200
Маса мостів трактора, кг	$m_{1,2}$	1450	Маса мостів, кг	$m_{3,4}$	600
Маса кабіни, кг	m_K	900	Жорсткість ресор причепа, кН/м	$c_{3,4}^a$	24000
Маса сидіння з водієм, кг	m_C	120	Жорсткість ресор напівпричепа, кН/м	c_{34}^a	700
Сумарна жорсткість ресор трактора, кН/м – переднього мосту; – заднього мосту	c_i^a	220 24000	Сумарна жорсткість шин трактора, кН/м – переднього мосту; – заднього мосту	c_i^u	900 900
Жорсткість шин агрегату, кН/м	c_j^u	944	Жорсткість опор сидіння у вертикальному напрямку, кН/м	c_7^a	4
Сумарна жорсткість опор кабіни у вертикальному напрямку, кН/м – передніх; – задніх	c_i^a	0,7	Жорсткість дишла при згинанні у вертикального напрямку, кН/м	c_y^o	2000

Діагональна інерційна матриця, яка складена із мас та моментів інерції враховує наступні чинники

$$M = \text{diag} (m_T, m_1, m_2, m_K, m_C, m_{\Pi} + m_P, m_3, m_4, m_1^P, m_2^P, m_3^P).$$

Матриці жорсткостей C для МТА з причіпною цистерною (з індексом «а»), а для агрегату з напівпричіпною цистерною (з індексом «б») можуть бути зведені в блочному вигляді:

$$C = \begin{bmatrix} [C_T] & [\Theta_1] \\ [\Theta_1^T] & [C_{\Pi}] \end{bmatrix}; \quad (4.3a)$$

$$C = \begin{bmatrix} [C_T] & [\Theta_1] \\ [\Theta_1^T] & [C_{\Pi}] \end{bmatrix} + C_y \cdot \begin{bmatrix} [C_T^{\Psi}] & [C_{\Pi\Pi}] \\ [C_{\Pi\Pi}^T] & [C_{\Pi\Pi}^{\Psi}] \end{bmatrix}, \quad (4.3б)$$

де квадратні блоки C_T , C_T^{Ψ} , C_{Π} , C_{Π}^{Ψ} , $C_{\Pi\Pi}$ – матриці коефіцієнтів жорсткості, які відносяться, відповідно, до трактора (розміром $[5 \times 5]$) та агрегату в цілому (розміром $[6 \times 6]$ та $[5 \times 6]$); Θ_1 – нульові матриці розмірів, $[5 \times 6]$, які вказують на відсутність силового зв'язку між відповідними групами елементів

$$C_T = \begin{bmatrix} \sum_{j=1,2,5,6} c_j^a & -c_1^a & -c_2^a & -\sum_{j=5,6} c_j^a & 0 \\ -c_1^a & c_1^a + c_1^{uu} & 0 & 0 & 0 \\ -c_2^a & 0 & c_2^a + c_2^{uu} & 0 & 0 \\ -\sum_{j=5,6} c_j^a & 0 & 0 & \sum_{j=5,6,7} c_j^a & -c_7^a \\ 0 & 0 & 0 & -c_7^a & c_7^a \end{bmatrix};$$

$$C_T^{\Psi} = \text{diag}(1, 0, 0, 0, 0);$$

$$C_{\Pi} = \begin{bmatrix} \sum_{j=3,4} c_j^a + \sum_{k=1,2,3} \frac{c_k^p}{2S\rho g} & -c_3^a & -c_4^a & \frac{-c_1^p}{2S\rho g} & \frac{-c_2^p}{2S\rho g} & \frac{-c_3^p}{2S\rho g} \\ -c_3^a & c_3^a + c_3^u & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c_4^a & 0 & c_4^a + c_4^u & 0 & 0 & 0 \\ -c_1^p/2S\rho g & 0 & 0 & \frac{c_1^p}{2S\rho g} & 0 & 0 \\ -c_2^p/2S\rho g & 0 & 0 & 0 & \frac{c_2^p}{2S\rho g} & 0 \\ -c_3^p/2S\rho g & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{c_3^p}{2S\rho g} \end{bmatrix};$$

$$C_{\Pi}^{\Psi} = \text{diag}(1, 0, 0, 0, 0, 0);$$

$$C_{\Pi\Pi} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Відмітимо, що при розгляді напівпричіпної цистерни $\sum_{j=3,4} c_j^a = c_{34}^a$.

Використовуючи складену лінеаризовану модель та конкретні значення параметрів для конструкції МТА з цистернами двох типів отримуємо розподіли власних (резонансних) частот (табл. 4.2) в причіпній (Stapell) та напівпричіпній (МЖТ-10) цистернах вантажопідйомністю 10 т при рівні рідини $H = 1,3$ м. Даний рівень обумовлено значенням максимального перерозподілу мас рідини (рис. 2.12 а). З'ясовано наявність чотирьох груп частот:

- Високі частоти – група має резонансні частоти, які перевищують 20 Гц. Вони передусім залежать від величини коефіцієнтів жорсткості пружних елементів мостів цистерни.

- Середні частоти – група має частоти, які знаходяться в діапазоні від 2 до 20 Гц. Ці частоти залежать від коефіцієнтів жорсткості переднього моста трактора і тягово-зчіпного пристрою.

- Низькі частоти – група, яка складається з частот від 0,5 до 2 Гц. Саме коливання з цією частотою суттєво впливають на самопочуття оператора-водія, тому вони викликають найбільшу увагу.

- Найнижчі частоти – в цю групу входять коливання, які мають частоти від 0 Гц (невизначеність рівноваги) до 0,5 Гц; для людини вони є небезпечними.

Кожній частоті із табл. 4.2 відповідає форма вільних коливань; форми для частот наведено у табл. 4.3, 4.4. Коефіцієнти кожної (k -тої) власної форми було нормовано у відповідності до правила

$$\vec{Y}_j^* = M_{j,j}^{-\frac{1}{2}} \cdot \vec{Y}_j, \quad j = 0, 1, \dots, 10. \quad (4.4)$$

Таблиця 4.2 – Значення резонансних частот системи «трактор–цистерна»

Номер гармоніки	Частоти ν , Гц		Групи частот
	Причіпна (Stapell)	Напівпричіпна (МЖТ-10)	
0	0,18	0,18	I
1	0,34	0,34	
2	0,69	0,69	II
3	0,79	0,79	
4	0,92	0,92	
5	2,14	1,7	
6	2,31	2,06	III
7	5,43	5,53	
8	23,95	11,5	
9	44,92	11,56	
10	46,05	24,01	IV

Якщо тепер утворити суми

$$T_k = \frac{1}{2} \cdot A_k^2 \cdot \omega_k^2 \cdot \sum_{j=0}^{10} (\vec{Y}_j^*)^2, \quad (4.5)$$

де A_k , $\omega_k = 2\pi \cdot \nu_k$ – амплітуда та кругова частота коливань, то ці суми відповідатимуть кінетичній енергії коливання. Тому сума квадратів координат $\vec{Y}_j^*$ дорівнює 1, а таке нормування називають *енергетичним*.

Таблиця 4.3 – Компоненти нормованих форм вільних коливань МТА з причіпною цистерною

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ν	0,18	0,34	0,69	0,79	0,92	2,14	2,31	5,43	23,95	44,92	46,05
y_T	0	0	0	-0	0	0	0,84	-0,23	-0,49	0	0
y_1^M	0	0	0	-0	0	0	0,26	0,96	0,01	0	0
y_2^M	0	0	0	-0	0	0	0,48	-0,14	0,87	0	0
y_K	0,89	0	0	-0,45	0	0	-0	0	0	0	0
y_C	0,45	0	0	0,89	0	0	0	-0	-0	0	0
y_{II}	0	-0,02	0,02	0	0,02	0,97	0	0	0	0	-0,22
y_3^M	0	-0	0	0	0	0,16	0	0	0	0,7	0,7
y_4^M	0	-0	0	0	0	0,16	0	0	0	-0,71	0,68
y_1^P	0	-1	-0	0	-0	-0,02	0	0	0	-0	0
y_2^P	0	-0	1	0	-0	-0,02	0	0	0	-0	0
y_3^P	0	-0	0	0	1	-0,02	0	0	0	-0	0

Таблиця 4.4 – Компоненти нормованих форм вільних коливань МТА з напівпричіпною цистерною

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ν	0,18	0,34	0,69	0,79	0,92	1,7	2,06	5,53	11,5	11,56	24,01
y_T	0	0,01	0,01	-0	0,01	0,41	0,67	-0,36	0	0	-0,5
y_1^M	0	0	0	-0	0	0,12	0,41	0,9	0	-0	0,01
y_2^M	0	0,01	0,01	-0	0,01	0,23	0,39	-0,21	0	0	0,86
y_K	0,89	-0	-0	-0,45	-0	-0	-0	0	0	-0	0
y_C	0,45	-0	-0	0,89	0	0	0	-0	0	0	-0
y_{II}	0	0,02	0,02	-0	0,02	0,87	-0,48	0,11	0	-0,11	0,01
y_3^M	0	0	0	-0	0	0,06	-0,04	0,01	-0,71	0,7	-0
y_4^M	0	0	0	-0	0	0,06	-0,04	0,01	0,71	0,7	-0
y_1^P	0	1	-0,01	0	-0	-0,03	0	-0	0	0	-0
y_2^P	0	0	1	0	-0	-0,03	0	-0	0	0	-0
y_3^P	0	0	0	-0	1	-0,03	0	-0	0	0	-0

Жирним шрифтом в табл. 4.3, 4.4 показані максимальні значення, які свідчать про найбільший вплив цієї складової на загальний коливальний процес. Для більшої інформативності на рис. 4.3 зобразимо схеми МТА з наявними резонансними частотами систем «трактор–цистерна». Завдяки отриманим в табл. 4.3, 4.4 формам низьких частот можливо виявити спільний рух елементів та визначити розмір деформації (без урахування амплітуди коливань). Для цього необхідно на основі динамічного аналізу лінеаризованої моделі виконати наступне перетворення

$$\vec{Y} = M^{-\frac{1}{2}} \vec{Y}^* \quad (4.6)$$

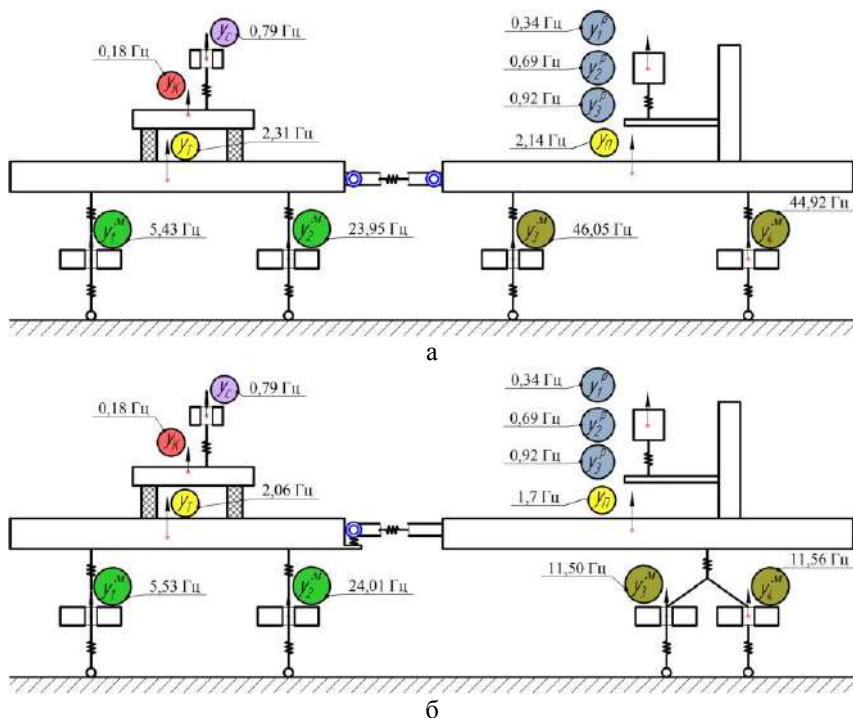


Рисунок 4.3 – Карти власних частот МТА в умовах максимального перерозподілу мас рідини при рівні $H = 1,3$ м:
а – XT3-150K зі Stapell; б – XT3-150K з MJT-10

Таблиця 4.5 – Реальні значення складових власної форми при коливальному процесі для причіпної цистерни

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ν	0,18	0,34	0,69	0,79	0,92	2,14	2,31	5,43	23,95	44,92	46,05
y_T	0	0	0	0	0	0	12,12	-3,32	-7,07	0	0
y_1^M	0	0	0	0	0	0	3,75	13,86	0,14	0	0
y_2^M	0	0	0	0	0	0	11,93	-3,02	-7,56	0	0
y_K	12,85	0	0	-6,5	0	0	0	0	0	0	0
y_C	6,5	0	0	12,85	0	0	0	0	0	0	0
y_{II}	0	-0,29	0,29	0	0,29	14	0	0	0	0	-3,18
y_3^M	0	0	0	0	0	2,31	0	0	0	10,1	10,1
y_4^M	0	0	0	0	0	2,31	0	0	0	-10,3	9,81
y_1^P	0	-14,4	0	0	0	-0,29	0	0	0	0	0
y_2^P	0	0	14,43	0	0	-0,29	0	0	0	0	0
y_3^P	0	0	0	0	14,43	-0,29	0	0	0	0	0

Таблиця 4.6 – Реальні значення складових власної форми при коливальному процесі для напівпричіпної цистерни

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ν	0,18	0,34	0,69	0,79	0,92	1,7	2,06	5,53	11,5	11,56	24,01
y_T	0	0,14	0,14	0	0,14	5,92	9,67	-5,2	0	0	-7,22
y_1^M	0	0	0	0	0	1,73	5,92	12,99	0	0	0,14
y_2^M	0	0,14	0,14	0	0,14	5,32	9,63	-5,03	0	0	7,41
y_K	12,85	0	0	-6,5	0	0	0	0	0	0	0
y_C	6,5	0	0	12,85	0	0	0	0	0	0	0
y_{II}	0	0,29	0,29	0	0,29	12,56	-6,93	1,59	0	-1,59	0,14
y_3^M	0	0	0	0	0	0,87	-0,58	0,14	-10,25	10,1	0
y_4^M	0	0	0	0	0	0,87	-0,58	0,14	10,25	10,1	0
y_1^P	0	14,43	-0,14	0	0	-0,43	0	0	0	0	0
y_2^P	0	0	14,43	0	0	-0,43	0	0	0	0	0
y_3^P	0	0	0	0	14,43	-0,43	0	0	0	0	0

Результатом перетворення (4.6) є дані в табл. 4.5, 4.6. Значення табл. 4.3 і 4.5 та табл. 4.4 і 4.6 отримані при динамічному аналізі вільних коливань. Відмітимо, що при аналізі табл. 4.3 – 4.6 помітно, що максимальні значення різняться; це свідчить про вагомість впливу мас при динамічному аналізі. Знак «-» в табл. 4.3 – 4.6 свідчить про те, що компонента знаходиться в протифазі основному руху коливальної системи.

Як помітно з табл. 4.5, 4.6, компоненти y_T та y_2^M мають майже однакову величину та фазу коливань, тому одним з цих компонентів при подальших розрахунках можна знехтувати. Таке ж явище спостерігається і в компонентах y_3^M та y_4^M . В процесі розрахунку отримуємо залежності власних (резонансних) частот від рівня рідини H (рис. 4.4, 4.5).

Аналізуючи отримані залежності, зробимо висновок про те, що рівень рідини H має істотний вплив на власні (резонансні) частоти вільних коливань МТА

Окремо слід виділити те, що графіки частот на рис. 4.4, 4.5 – перетинаються та мають монотонну залежність. До того, при наближенні спектральних значень одне до одного, спостерігається своєрідна «взаємодія» відповідних гармонік. Це свідчить про такі особливості руху спектру у пучках лінійних операторів.

Таким чином, на основі проведеного динамічного аналізу вдалося отримати спектральні ефекти, що дозволяють розширити теорію коливань, адже вони містять глибоку наукову значимість. Отож, встановлено:

- ефект відштовхування спектральних траєкторій, який приводив до відсутності кратних резонансів;
- ефект обміну координат у власних формах при проходженні зони наближеного резонансу.

Окрім того, на основі аналізу результатів динамічного аналізу встановлено можливість і доречність цілої низки спрощень математичної моделі. Так, маса заднього моста об'єднується з остовом трактора (як і прийнято робити при вирішенні класичних коливальних задач в тракторі), а мостів причіпного агрегату з його платформою. При цьому жорсткість мостів приводиться до жорсткості шин за *правилом обернених величин*.

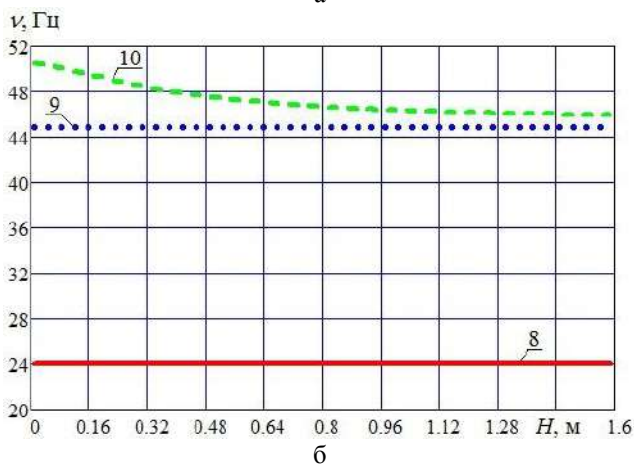
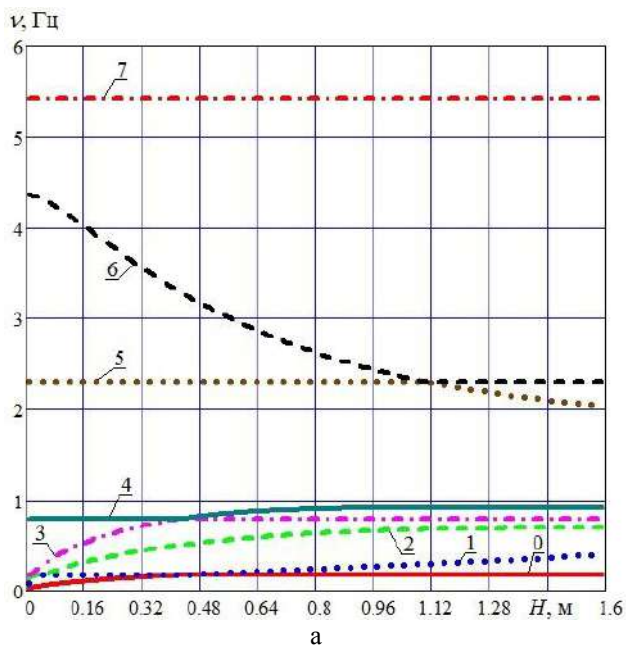


Рисунок 4.4 – Залежність власних частот від рівня рідини H в агрегаті з причіпною цистерною:

а – діапазон частот $0 \div 6$ Гц; б – діапазон частот $20 \div 52$ Гц; 0 – 10 – номер гармоніки

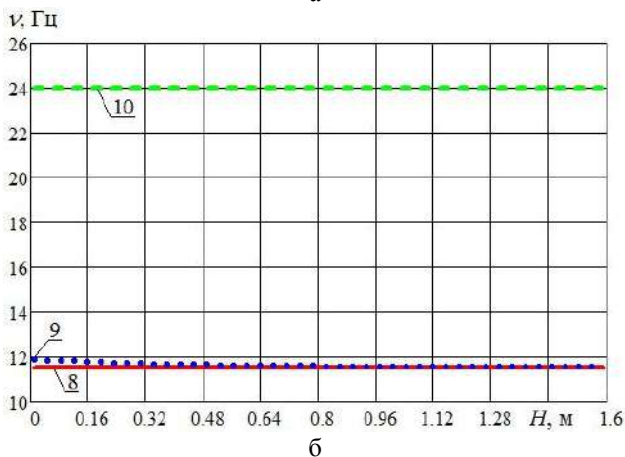
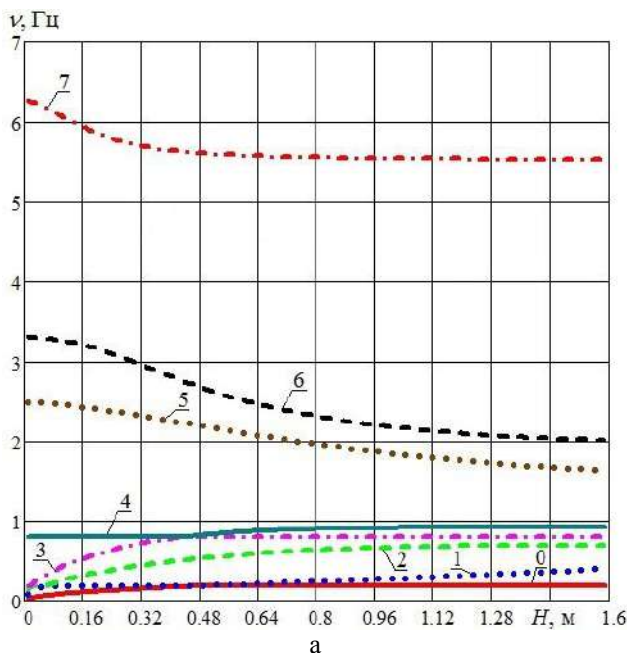


Рисунок 4.5 – Залежність власних частот від рівня рідини H в агрегаті з напівпричіпною цистерною:
а – діапазон частот $0 \div 7$ Гц; б – діапазон частот $10 \div 26$ Гц; 0 – 10 – номер гармоніки

Крім того, коливання остова трактора та цистерни (разом з їхніми мостами) у горизонтальному напрямку вважаються синфазними, тобто поздовжня піддатливість тягово-зчіпного пристрою приймається нескінченно великою, і відповідний силовий зв'язок змінюється на кінематичний. У моделі рідини третім поверхневим шаром, в наслідок його малої маси (рис. 2.12 *а*), можна знехтувати, і об'єднати відповідну масу із масою оболонки цистерни. У випадку дослідження МТА з напівпричіпною цистерною коефіцієнт жорсткості c_y^0 можна вважати нескінченно великим, і у математичній моделі замінити відповідний силовий зв'язок на кінематичний.

Як наслідок зроблених та втілених рекомендацій, кількість динамічних параметрів, що моделюються диференціальними рівняннями другого порядку, скорочується з 11 до 8, і це число добре відповідає кількості низькочастотних гармонік, які були наведені у табл. 4.3, 4.4. Зауважимо, що динамічний аналіз спрощеної моделі можливо проводити за допомогою тих самих матриць (4.3), якщо відповідні коефіцієнти жорсткості зв'язку між масами, що об'єднуються, збільшити на декілька порядків. Дослідження довело, що після вказаної трансформації група низьких частот практично не змінюється.

4.3. Спектральні явища та теореми про властивості пучка симетричних матриць

При русі транспортного засобу значення реакції у тягово-зчіпному пристрої постійно та неперервно змінюється, а чинники, які збуджують коливання внаслідок нерівностей шляху, через зміни у швидкості руху можуть мати довільну частоту. І тому усі точки, які наведено на рис. 4.4, 4.5, можуть призвести до резонансних явищ. У механіці такий резонанс називають *зовнішнім*. Крім нього вивчають й так звані *внутрішні резонанси*, коли співпадають дві або більше власних частот. Уважне вивчення зазначених графіків показало, що на них такі резонанси не спостерігаються.

Замість цього спостерігаємо явище, яке можна трактувати як *відш-*

товхування частот одне від одного в разі їх наближення. Зауважимо, що аналогічне відштовхування, спостерігалось у роботі [257], де вивчався вплив крайових умов на спектр власних коливань циліндричної пружини. Проте та задача була складніша і розв'язувалася за допомогою теорії лінійних диференційних операторів, які описували пружний континуум. В нашому випадку йдеться про задачу лінійної алгебри, і зазначена властивість формулюється у вигляді наступної теореми.

Теорема 1 (про збереження простого спектру).

Припустимо, що матриці $A[n \times n]$, $B[n \times n]$ не мають спільних власних векторів, а спектр матриці A простий. Тоді спектральні траєкторії $\lambda_j(k)$, $j = 1, \dots, n$ матричного пучка $A + kB$, $k \in \mathbb{R}$ перетинаються тільки у випадку спеціального вибору елементів a_{ij} , b_{ij} матриць A і B .

Оскільки у відомій літературі [258 – 263], де викладається теорія матриць, такого твердження немає, ми були вимушені у тексті цієї статті надати своє доведення цього нетривіального результату. На рис. 4.4 можна спостерігати каскад потенційних зіткнень спектральних траєкторій, які, у наслідок дії **теореми 1**, так і не відбулися.

Зауважимо, що коли у системі диференційних рівнянь спостерігається зовнішній та внутрішній резонанс одночасно, то амплітуда коливань зростає додатково. Тут співпадіння трьох частот немає, проте на окремих ділянках спектральні траєкторії суттєво наближуються, і це все рівно призводить до додаткового зростання коливань.

Щоб систематизувати дослідження цього явища, ми ввели наступні визначення. Будемо пару чисел $\lambda_{j,1}(k_0)$, $\lambda_{j,2}(k_0)$ називати *наближено кратним спектром*, якщо відстань між траєкторіями $\lambda_{j,1}(k)$ і $\lambda_{j,2}(k)$ є мінімальною за значеннями параметра k . При цьому значення параметра k_0 називатимемо *резонансним*, а власні форми $\vec{X}_{j,1}(k)$, $\vec{X}_{j,2}(k)$ назвемо *резонуючою парою*.

Наступна теорема, яка не потребує формального доведення, фіксує особливість зміни власних форм у цьому випадку.

Теорема 2 (про спільне обертання резонуючої пари власних форм).

В околі резонансного значення k_0 резонуюча пара власних ортонор-

мованих форм $\vec{X}_{j,1}(k)$, $\vec{X}_{j,2}(k)$ спільно обертається у багатовимірному просторі та при значеннях $k = k_0 - \Delta k$ і $k = k_0 + \Delta k$, де значення Δk є малим числом, ці форми фактично обмінюються координатами, тобто

$$\begin{aligned}\vec{X}_{j,1}(k_0 - \Delta k) &\approx \pm \vec{X}_{j,2}(k_0 + \Delta k); \\ \vec{X}_{j,2}(k_0 - \Delta k) &\approx \pm \vec{X}_{j,1}(k_0 + \Delta k),\end{aligned}$$

де вибір знаку в правих частинах не є принциповим і залежить від налаштування програми пошуку власних векторів матриці.

Для матриць, які сформовані в підрозділі 4.2, більшість власних векторів були наближені до однокомпонентної форми (яка, як відомо, відповідає діагональній матриці). В результаті чого вимушені коливання, які збуджувалися по деякій координаті, залишалися локалізованими і суттєвого зв'язку між різними рухами вузлів транспортного засобу не спостерігалось. Проте, ця закономірність порушувалася в околі резонансного значення k_0 , де власні форми мали найбільшу кількість координат, значення яких суттєво відрізнялися від нуля (табл. 4.3, 4.4). Тому при динамічному аналізі пов'язаних коливань, насамперед, необхідно вивчати поведінку системи при всіх резонансних значеннях параметра k .

До сказаного необхідно додати наступне. Якщо у задачі, що розглядається, крім зміни рівня H рідини у цистерні й інший параметр, то задача на власні значення зводиться до пошуку спектра двопараметричного пучка вигляду

$$A(H) + kB, \quad k \in \mathbb{R}, \quad H \in [0; D_y],$$

де D_y – це діаметр цистерни.

Формули, які описують нелінійні залежності елементів матриці A від рівня H , а також графіки відповідних спектральних траєкторій наведено у підрозділі 4. В цьому випадку при зміні параметра H спостерігаються перетини траєкторій, і точки наближено кратного спектру перетворю-

ються у точки кратного спектру. У цьому ж контексті діє тертя, яке згладжує резонанси та зближує результати розрахунку кратного та наближено кратного спектрів.

Доведення теореми 1 (про збереження простого спектру). Матриця B у своєму власному базисі має діагональну структуру D , а матриця A приймає недіагональний симетричний вид $\hat{A}$. У подальшому доведенні ми не використовуватимемо тильду у позначенні цієї матриці.

Припустимо, що для деякого значення параметру $k = k_0$ матриця $A + k_0 D$ має кратне власне значення λ_0 .

Тоді у матриці

$$C = A + k_0 D - \lambda_0 E, \quad (4.7)$$

ранг не перевищує числа $n - 2$.

Відмітимо, що матриця C відмінна від матриці A тільки у елементах головної діагоналі. Позначимо ці елементи $x_1, x_2, \dots, x_n$, тобто

$$x_1 = c_{11}, \quad x_2 = c_{22}, \dots, \quad x_n = c_{nn}.$$

Для мінорів вказаних елементів використовуватимемо позначення

$$C_{11}, C_{22}, \dots, C_{nn}.$$

Зазначимо, що через ущербність рангу зазначені визначники дорівнюють нулю.

Отримаємо систему n рівнянь для n невідомих $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$\begin{cases} C_{11}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0; \\ C_{22}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0; \\ \dots; \\ C_{nn}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0. \end{cases} \quad (4.8)$$

Кожне із рівнянь системи (4.8) при довільному виборі недіагональ-

них елементів є незалежним від інших. У просторі $\mathbb{R}^n$ воно описує циліндричну поверхню, яка по сукупності змінних має $n - 1$ порядок, та зменшує кількість вільних параметрів на 1 одиницю. Тобто, розв'язком системи (4.8) відповідатиме скінченне число $m \geq 0$ точок у просторі $\mathbb{R}^n$.

Так, для випадку $n = 2$ для недіагональної матриці отримаємо значення $m = 0$, і ця задача розв'язків не має зовсім, а для випадку $n = 3$ при ненульових недіагональних елементах a, b, c матриця C може приймати лише два значення:

$$C = \begin{bmatrix} (ac)/b & a & c \\ a & (ab)/c & b \\ c & b & (bc)/a \end{bmatrix} \text{ та } C = \begin{bmatrix} -(ac)/b & a & c \\ a & -(ab)/c & b \\ c & b & -(bc)/a \end{bmatrix},$$

тобто тут $m = 2$.

Отже, нам вдалося за елементами матриці A , що лежать поза її головною діагоналлю, знайти лише m матриць C , тобто матриці $C_1, C_2, \dots, C_m$. Відповідні до них діагональні матриці позначимо $D_1, D_2, \dots, D_m$; причому зауважимо, що матриці D_j залежать від недіагональних елементів матриці A .

З (4.7) витікає, що діагональ D_A матриці A задовольняє умові:

$$D_A = D_j + k_0 D + \lambda_0 E, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (4.9)$$

В правій частині (4.9) використовуються дві константи k_0, λ_0 , значеннями яких можна розпоряджатися довільно. Отже, за умови $n \geq 3$ рівняння (4.9) можна виконати лише за рахунок узгодженого вибору елементів матриць A і D , що і потрібно було довести.

У випадку $n = 1$ наявна тільки одна спектральна траєкторія, а значить задача о перетині не є актуальною.

Випадок $n = 2$ ми розглянемо окремо. Характеристичне рівняння матричного пучка тут має вигляд:

$$\begin{vmatrix} a_{11} + kd_{11} - \lambda & a_{21} \\ a_{21} & a_{22} + kd_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

звідки отримуємо квадратне рівняння:

$$\lambda^2 - \lambda(a_{11} + a_{22} + k(d_{11} + d_{22})) + [(a_{11} + kd_{11}) \cdot (a_{22} + kd_{22}) - a_{21}^2] = 0$$

У випадку кратного спектру

$$\begin{cases} (a_{11} + kd_{11}) + (a_{22} + kd_{22}) = 0; \\ (a_{11} + kd_{11}) + (a_{22} + kd_{22}) = a_{21}^2. \end{cases}$$

Позначимо $y_1 = a_{11} + kd_{11}$, $y_2 = a_{22} + kd_{22}$ та отримаємо систему:

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = 0; \\ y_1 \cdot y_2 = a_{21}^2, \end{cases}$$

звідки $y_1^2 = -a_{21}^2$. Що можливо лише за умови $a_{21} = 0$, тобто коли матриця A є діагональною, а значить має спільну власну базу з матрицею B .
Отримане протиріччя завершує доведення теореми.

Зауваження. Якщо матриця A є діагональною, то система (4.8) має нескінченну множину розв'язків:

$$x_j = 0, \text{ для } j \neq l, \quad x_l \in \mathbb{R}.$$

Цей випадок за умов теореми не вивчається.

Зазначене вище справедливо і для випадку кусково-діагональної матриці A , оскільки вона має спільні з матрицею B власні вектори, локалізовані всередині діагонального блоку.

Доведення теореми 2 (про спільне обертання резонуючої пари власних форм). Аналогічно доведенню теореми 1, у власному базисі матриці B пучок набуває вигляду:

$$A + kD, \quad (4.10)$$

де D – діагональна матриця, $d_{ij} \geq 0$.

Запишемо характеристичне рівняння пучка (4.10):

$$\det(A + kD - \lambda E) = 0. \quad (4.11)$$

Нехай рівняння (4.11) виконано для деяких $k = k_0$, $\lambda = \lambda_0$, тобто власне значення λ_0 відповідає значенню параметра k_0 і $\det(A + k_0D - \lambda_0E) = 0$. Підставимо в (4.11) $k = k_0 + \Delta k$, $\lambda = \lambda_0 + \Delta \lambda$ і обчислимо визначник у лівій частині (4.11), лишаючи доданки першого порядку малості за Δk і $\Delta \lambda$. Як результат перетворень, отримаємо:

$$\sum_{j=1}^n (\Delta k d_{jj} C_{jj} - \Delta \lambda C_{jj}) = 0, \quad (4.12)$$

де C_{jj} – мінори елемента c_{jj} матриці $C = A + k_0D - \lambda_0E$. Наслідком (4.12) є наступне рівняння:

$$\frac{\Delta \lambda}{\Delta k} = \frac{\sum_{j=1}^n d_{jj} C_{jj}(\lambda_0)}{\sum_{j=1}^n C_{jj}(\lambda_0)}. \quad (4.13)$$

Доведемо, що права частина (4.13) у точках спектру матриці C : $\lambda_0 \in \sigma(C)$, є додатною (принаймні, невід'ємною).

Нехай $\lambda_0 = \min \sigma(C)$. Тоді $C \geq 0$, і всі мінори цієї матриці є додатними. Зокрема, $C_{jj}(\lambda_0) \geq 0$, що доводить твердження.

Нехай $\lambda_0 = \max \sigma(C)$. Розглянемо матрицю

$$-C = \lambda_0 E - A - k_0 D.$$

Матриця $-C \geq 0$ і всі її мінори є додатними. Усі мінори елементів матриці $-C$ або співпадають із мінорами відповідних елементів матриці C , або відрізняються від них лише за знаком. Тому формула (4.13) зберігає свій вигляд для матриці $-C$ і її права частина є додатною, що завершує доказ нашого твердження у цьому випадку.

Таким чином для випадку розмірності матриць $n = 2$ ми довели *теорему 2*. Припустимо, розмірність матриць, що утворюють пучок, $n \geq 3$. Тоді існує власне значення λ_0 : $\min \sigma(C) \leq \lambda_0 \leq \max \sigma(C)$, і матриця C є невизначеною у сенсі квадратичних форм. Доведення *теорему 2* у цьому випадку базується на наступній нетривіальній лемі.

Лема (про знаки кутових мінорів). Нехай матриця A є симетричною і число $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ належить її спектру $\sigma(A)$. Тоді матриця $C = A - \lambda_0 E$ є виродженою і всі її мінори $C_{ij}(\lambda_0)$ мають один знак (або дорівнюють нулю, але це окремий випадок, оскільки є характерним для діагональних матриць).

Доведення лемі для випадку $n = 3$. У цьому випадку проведемо пряме доведення, яке не спирається на складні теореми інших авторів. Задля зручності запису, позначимо елементи матриці $C = A - \lambda_0 E$ наступним чином:

$$C = \begin{pmatrix} x & a & c \\ a & y & b \\ c & b & z \end{pmatrix}.$$

Матриця C є виродженою, тобто

$$\det C = xyz - b^2x - c^2y - a^2z + 2abc = 0. \quad (4.14)$$

Обчислимо мінори матриці C :

$$C_{11} = \begin{vmatrix} y & b \\ b & z \end{vmatrix} = yz - b^2;$$

$$C_{33} = \begin{vmatrix} x & a \\ a & y \end{vmatrix} = xy - a^2.$$

Доведемо, що $C_{11} \cdot C_{33} \geq 0$, тобто

$$(xy - a^2) \cdot (yz - b^2) \geq 0. \quad (4.15)$$

Доведення проведемо методом від супротивного. Припустимо, що

$$(xy - a^2) \cdot (yz - b^2) < 0 \quad (4.16)$$

Тоді, за неперервності, умова (4.16) виконуватиметься при $x, z \neq 0$, а рівність (4.14) можна зберегти за рахунок корегування c . Тому, не обмежуючи спільності міркувань, вважатимемо, що $x, z \neq 0$, і, задля визначеності,

$$\frac{a^2}{x} \leq \frac{b^2}{z}.$$

а) нехай $x > 0, z > 0$. Тоді значення y , що задовольняє (4.16), лежить у проміжку

$$\frac{a^2}{x} \leq y \leq \frac{b^2}{z}, \quad (4.17)$$

тобто

$$y = \frac{a^2}{x} \cdot \theta + \frac{b^2}{z} \cdot (1 - \theta), \text{ де } \theta \in (0; 1).$$

Підставляючи такий вираз для u в співвідношення (4.14) і спрощуючи отримане рівняння, находимо:

$$\begin{aligned}
 & \left(xz - c^2 \right) \left(\frac{a^2}{x} \theta + \frac{b^2}{z} (1 - \theta) \right) - b^2 x - a^2 z + 2abc = \\
 & = \left(xz - c^2 \right) \left(\frac{a^2}{x} \theta + \frac{b^2}{z} (1 - \theta) \right) - b^2 x [\theta + (1 - \theta)] - \\
 & \quad - a^2 z [\theta + (1 - \theta)] + 2abc [\theta + (1 - \theta)] = \\
 & = \left\{ \left(xz - c^2 \right) \frac{a^2}{x} - b^2 x - a^2 z + 2abc \right\} \cdot \theta + \\
 & \quad + \left\{ \left(xz - c^2 \right) \frac{a^2}{x} - b^2 x - a^2 z + 2abc \right\} \cdot (1 - \theta) = \\
 & = -\frac{1}{x} \left\{ a^2 c^2 - 2abcx + b^2 x^2 \right\} \cdot \theta - \frac{1}{z} \left\{ b^2 c^2 - 2abcz + b^2 x^2 \right\} \cdot (1 - \theta) = \\
 & = -\frac{(ac - bx)^2}{x} \cdot \theta - \frac{(bc - az)^2}{z} \cdot (1 - \theta).
 \end{aligned}$$

Останній вираз дорівнює нулю, якщо

$$\begin{cases} ac - bx = 0; \\ bc - az = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = ac/b; \\ z = bc/a. \end{cases}$$

Але у цьому випадку

$$\frac{a^2}{x} = \frac{a^2}{ac/b} = \frac{ab}{c}, \quad \frac{b^2}{z} = \frac{b^2}{bc/a} = \frac{ab}{c},$$

і, приймаючи до уваги (4.17), проміжок для u вироджується в одну точку, а ліва частина (4.16) дорівнює нулю.

Таким чином, випадок **а)** призводить до протиріччя.

б) випадок $x < 0, z < 0$ зводиться до попереднього після переходу до матриці $-C$.

в) у випадку $x > 0, z > 0$ маємо наступну нерівність для y :

$$\left[(-x)y + a^2\right] \cdot \left[yz - b^2\right] > 0, \text{ що можливо, якщо } y < \frac{a^2}{x} \text{ або } y > \frac{b^2}{z}.$$

Очевидно, що

$$\frac{a^2}{x} < 0 < \frac{b^2}{z} \text{ і } y = \frac{a^2}{x} \cdot \theta + \frac{b^2}{z} \cdot (1 - \theta), \text{ де } \theta \in (0; 1).$$

Повторюючи викладки доведення пункту **а)**, отримуємо рівність:

$$-\frac{(ac - bx)^2}{x} \cdot \theta - \frac{(bc - az)^2}{z} \cdot (1 - \theta),$$

звідки

$$\theta \cdot \left[\frac{(cb - az)^2}{z} + \frac{(ca + (-x))^2}{(-x)} \right] = \frac{(cb - az)^2}{z}. \quad (4.18)$$

Із рівності (4.18) маємо умову $\theta \in (0; 1)$, тобто і в цьому випадку ми прийшли до протиріччя.

г) випадок $x > 0, z < 0$ зводиться до попереднього заміною матриці C на протилежну їй матрицю $-C$.

Таким чином, для випадку розмірності матриці $n = 3$ лема доведена.

Відзначимо, що із леми впливає чергування знаку мінору $C_{jj}(\lambda_k)$ на послідовних власних значеннях

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3.$$

Доведення леми у загальному випадку. Непряме доведення базується на **твердженні 231** про спектр *проектора* [263], яке є не менш не-

тривіальним, ніж сама лема. З твердження витікає, що власні значення матриці $C = A - \lambda_0 E$ і її мінорів $C_{jj}(\lambda_0)$ перемежуються для будь-якого $j = 1, 2, \dots, n$:

$$\lambda_1^C \geq \lambda_1^{C_{jj}} \geq \lambda_2^C \geq \lambda_2^{C_{jj}} \geq \dots \geq \lambda_{n-1}^C \geq \lambda_n^{C_{jj}},$$

де λ_k^C , $k = 1, 2, \dots, n$, $\lambda_k^{C_{jj}}$, $k = 1, 2, \dots, (n-1)$ – це власні значення C і $C_{jj}(\lambda_0)$, відповідно.

Матриця C є виродженою, отже принаймні одне з її власних значень дорівнює нулю. Нехай $\lambda_s^C = 0$, а, значить, маємо для будь-якого мінору $C_{jj}(\lambda_0)$:

$$\lambda_1^C \geq \lambda_1^{C_{jj}} \geq \lambda_2^C \geq \lambda_2^{C_{jj}} \geq \dots \geq \lambda_s^C \geq \lambda_{s-1}^C \geq \dots \geq \lambda_{n-1}^{C_{jj}} \geq \lambda_n^C,$$

тобто кількість додатних та від'ємних власних значень однакове для будь-якого $C_{jj}(\lambda_0)$. Оскільки кожен мінор дорівнює добутку своїх власних значень, то всі мінори $C_{jj}(\lambda_0)$ матриці C мають один знак. Таким чином, лему, а разом з нею і теорему 2, доведено. Зауважимо, що із доведення леми витікає наступне твердження.

Теорема 3 (про чергування знаків кутового мінору характеристичної матриці).

Знаки кутового мінору матриці $C = A - \lambda_0 E$, де λ_0 послідовно приймає значення $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_k$, а λ_k – це власні значення симетричної матриці A , чергуються. Тобто, якщо об'єднати твердження леми та теорему 3, то прийдемо до наступного. При числі λ_j всі кутові мінори деякого порядку у матриці C є від'ємними або позитивними одночасно, а при переході до числа λ_{j+1} всі вони змінюють знак на протилежний.

4.4. Дослідження енергетичних властивостей на основі динамічного аналізу в поздовжньо-вертикальній площині руху

Отже, завдяки розвиненню алгоритму динамічного аналізу коливної системи МТА при транспортуванні цистерни, можна не тільки вра-

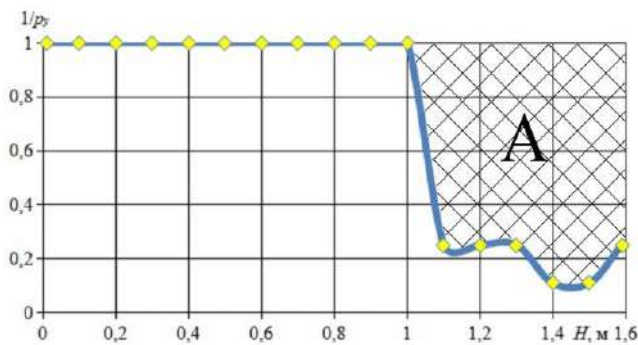
ховувати вклад кожних складових до загальної енергії коливань, а й оцінювати енергетичну складову за рахунок визначення часток від коливального процесу. Як видно з результатів табл. 4.3, 4.4 за вертикальною складовою найбільш враженою від перерозподілу мас рідини в цистерні є напівпричіпна цистерна, тому оцінимо енергетичну складову такого МТА (на прикладі ХТЗ-150К з МЖТ-10).

Оскільки значення в табл. 4.4 енергетично нормовані, тобто $\sum_{j=0}^{10} (\vec{Y}_j^*)^2 = 1$, то можливо виконати оцінювання співвідношення запасу механічної енергії для різних видів руху при дослідженні конкретних гармонік. Отримане співвідношення показуватиме долю (частку) від максимальної енергії коливань. Зауважимо, що при різному рівні наповненні напівпричіпна цистерна може здійснювати вплив лише за умови $m_{\text{ТР}} < m_{\text{ПР}}$, при недотриманні цієї умови домінантним за вертикальною складовою є колісний трактор. Розглянемо такі співвідношення

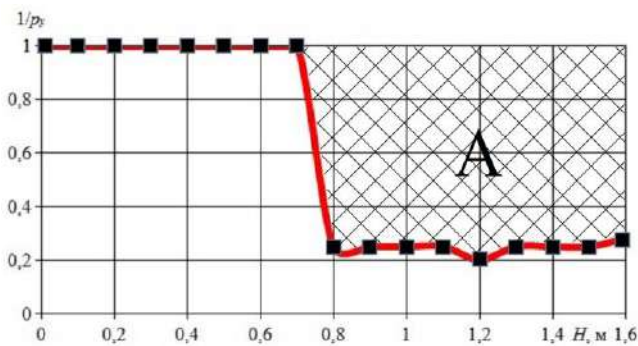
$$p_y = \frac{(y_{\text{П}}^*)^2}{(y_{\text{Т}}^*)^2}, \quad (4.19)$$

де p_y – доля від максимальної енергії компонент вертикальних коливань мас цистерни та трактора.

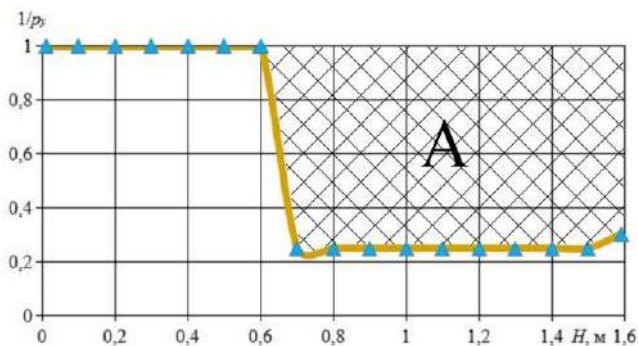
Відмітимо, що змінюючи величину рівня рідини в напівпричіпній цистерні H не всі гармоніки змінюються в наведеному діапазоні частот, а лише № 1, 2, 4 – 7, в яких найбільший вплив, на основі табл. 4.4, здійснюють: перший парціальний осцилятор рідини (гармоніка №1); другий парціальний осцилятор рідини (гармоніка №2); третій парціальний осцилятор рідини (гармоніка №4); вертикальне переміщення рами цистерни $u_{\text{П}}$ (гармоніка №5); вертикальне переміщення остову трактора $u_{\text{Т}}$ (гармоніка №6); вертикальне переміщення переднього моста трактора $u_{1^{\text{м}}}$ (гармоніка №5). Наведемо на рис. 4.6, 4.7 залежності змін доль від максимальної енергії компонент вертикальних коливань мас цистерни та трактора. Дані залежності будуються для кожної з гармонік.



а

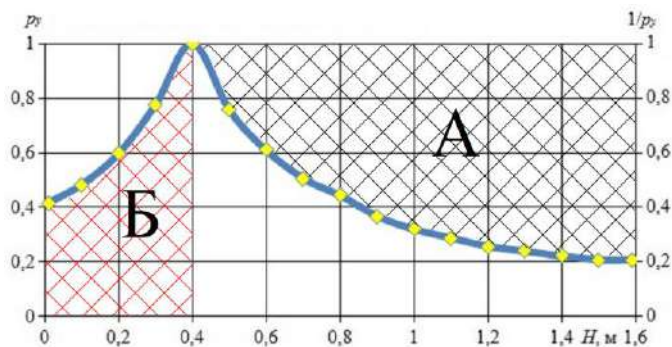


б

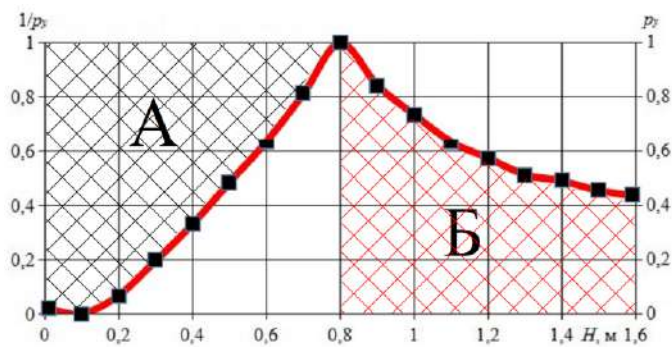


в

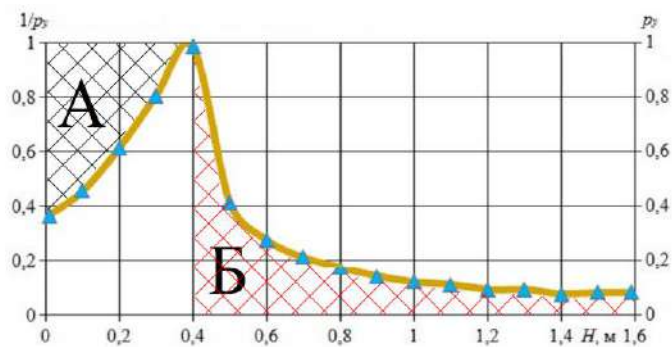
Рисунок 4.6 – Залежності змін часток від максимальної енергії компонент вертикальних коливань мас цистерни та трактора:
а – гармоніка №1; б – гармоніка №2; в – гармоніка №4



а



б



в

Рисунок 4.7 – Залежності змін часток від максимальної енергії компонент вертикальних коливань мас цистерни та трактора:
а – гармоніка №5; б – гармоніка №6; в – гармоніка №7

На рис. 4.6 виокремлено зону А, в якій спостерігається вплив коливальних рухів напівпричіпної цистерни на вертикальні коливання остова трактора. Як помітно, діапазон впливу вертикальних коливань парціальних осциляторів зростає зі зменшенням їх маси, що дає змогу підтвердити таке твердження, що рух першого осцилятора є визначальним, а інших коректувальним. Окрім того, необхідно звернути увагу на те, що зміна часток від максимальної енергії компонент коливального руху рідини залежать від масових характеристик осциляторів.

Аналізуючи результати з рис. 4.7 необхідно відмітити, що окрім наявності зони А з'являється зона Б, яка свідчить про вплив коливальних рухів остова трактора на вертикальні коливання напівпричіпної цистерни. Помітно чергування цих зон при рівнях наповнення напівпричіпної цистерни $H = 0,8$ м (умова вирівнювання мас трактора та цистерни), а також при рівні $H = 0,4$ м (умова деформації підвіски цистерни).

Таким чином, запропоновано новий метод оцінки енергетичної складової колісного трактора з напівпричіпною цистерною. Метод базується на дослідженні власних (резонансних) частот системи за допомогою динамічного аналізу лінійної (лінеаризованої) моделі. На основі запропонованого методу оцінки встановлено резонансні зони впливу доль (часток) від максимальної енергії при певному рівні рідини в цистерні.

4.5. Аналіз вільних коливань системи «трактор – цистерна» в поперечно-вертикальній площині

Дослідження вільних коливань в поперечно-вертикальній площині базується на побудові розрахункової схеми (рис. 4.8, 4.9).

При моделюванні складові величини коливального процесу об'єднуються у вигляді вектора – стовпця

$$\vec{Y} = \begin{pmatrix} \psi_T & \psi_1 & \psi_2 & \psi_K & \psi_3 & \psi_4 & \psi_{II} & z_1^P & z_2^P & z_3^P \end{pmatrix}^T, \quad (4.20)$$

де $\psi_T, \psi_1, \psi_2, \psi_K$ – поперечні кути нахилу остову (рами), переднього та заднього мостів, кабіни трактора; $\psi_{II}, \psi_3, \psi_4$ – поперечні кути нахилу, пла-

тформи цистерни, першого та другого мостів; z_1^p, z_2^p, z_3^p , – рухи парціальних шарів рідини, які приймають участь в поперечному русі.

Діагональна інерційна матриця, яка складена із мас та моментів інерції, враховує наступні чинники

$$M = \text{diag} \left(J_T^\Pi, J_1^\Pi, J_2^\Pi, J_K^\Pi, J_3^\Pi, J_4^\Pi, J_\Pi^\Pi + J_V^\Pi, m_1^p, m_2^p, m_3^p \right), \quad (4.21)$$

де $J_T^\Pi, J_K^\Pi, J_\Pi^\Pi$ – моменти інерції при обертанні трактора (разом із мостами), кабіни (разом з трактористом) та цистерни (разом із рамою, мостами і рідиною (J_V^Π)) на кути ψ_T, ψ_K, ψ_Π відносно їх центрів мас; J_1^Π, J_2^Π та J_3^Π, J_4^Π – моменти інерції при обертанні мостів трактора та платформ цистерн; m_1^p, m_2^p, m_3^p – маси поверхневих шарів рідини в поперечній площині руху, де відбуваються низькочастотні коливання.

Матриці жорсткостей C для МТА з причіпною цистерною (з індексом «а»), а для агрегату з напівпричіпною цистерною (з індексом «б») можуть бути зведені в блочному вигляді:

$$C = \begin{bmatrix} [C_T] & [\Theta_1] \\ [\Theta_1^T] & [C_{\Pi a}] \end{bmatrix} + F_Z \cdot \begin{bmatrix} [C_T^\Psi] & [C_{\Pi\Pi}] \\ [\Theta_{\Pi\Pi}^T] & [C_\Pi^\Psi] \end{bmatrix}; \quad (4.22 \text{ а})$$

$$C = \begin{bmatrix} [C_T] & [\Theta_1] \\ [\Theta_1^T] & [C_{\Pi б}] \end{bmatrix} + C^\Pi \cdot \begin{bmatrix} [C_T^\Psi] & [C_{\Pi\Pi}] \\ [\Theta_{\Pi\Pi}^T] & [C_\Pi^\Psi] \end{bmatrix}, \quad (4.22 \text{ б})$$

де квадратні блоки C_T, C_T^Ψ – це матриці коефіцієнтів жорсткості, які відносяться до трактора і мають однаковий розмір $[4 \times 4]$; C_Π, C_Π^Ψ – матриці коефіцієнтів жорсткості, які відносяться до цистерни, а також мають однаковий розмір $[6 \times 6]$; $C_{\Pi\Pi}$ – матриці зв'язку узагальнених координат, які узгоджують коливальний рух трактора та цистерн, мають розмір $[4 \times 6]$; Θ_1 – нульові матриці розмірів $[4 \times 4]$, які вказують на відсутність силового зв'язку між відповідними групами елементів.

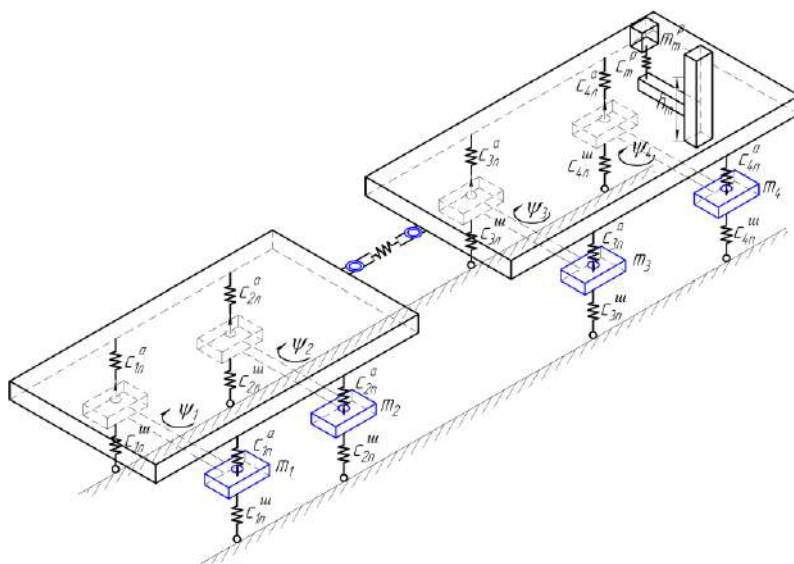


Рисунок 4.8 – Розрахункова схема трактора з причіпною цистерною у поперечно-вертикальній площині

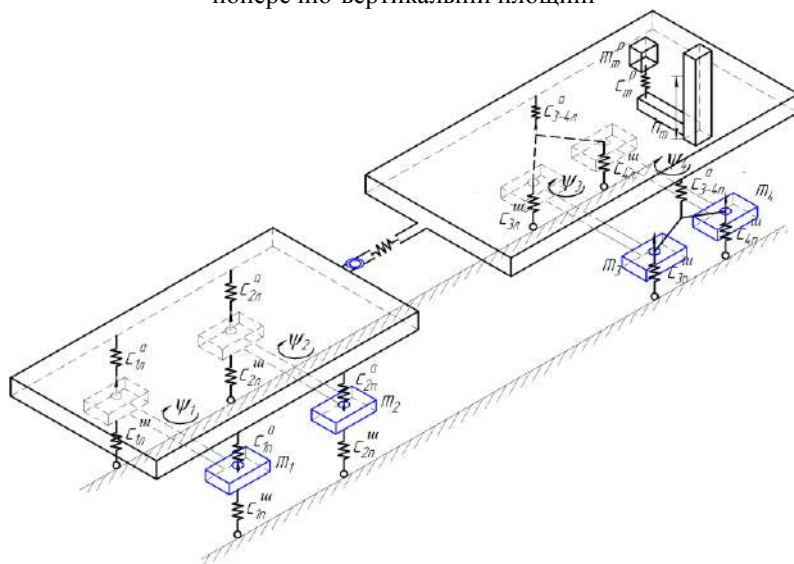


Рисунок 4.9– Розрахункова схема трактора з напівпричіпною цистерною у поперечно-вертикальній площині

$$\begin{aligned}
C_T = & \begin{bmatrix} (c_1^a + c_2^a) d_T^2 + & -c_1^a \cdot d_1^2 & -c_2^a \cdot d_2^2 & -c_5^a \cdot d_{k1}^2 - c_6^a \cdot d_{k2}^2 \\ c_5^a \cdot d_{k1}^2 + c_6^a \cdot d_{k2}^2 & & & \\ -c_1^a \cdot d_1^2 & c_1^a \cdot d_T^2 + & 0 & 0 \\ & +c_1^u \cdot d_1^2 & & \\ -c_2^a \cdot d_2^2 & 0 & c_2^a \cdot d_T^2 + & 0 \\ & & +c_2^u \cdot d_2^2 & \\ -c_5^a \cdot d_{k1}^2 - c_6^a \cdot d_{k2}^2 & 0 & 0 & c_5^a \cdot d_{k1}^2 + c_6^a \cdot d_{k2}^2 \end{bmatrix} ; \\
C_{Па} = & \begin{bmatrix} c_3^a \cdot d_{0П}^2 + & 0 & -c_3^a \cdot d_3^2 & 0 & 0 & 0 \\ +c_3^u \cdot d_3^2 & & & & & \\ 0 & c_4^a \cdot d_{0П}^2 + & -c_4^a \cdot d_4^2 & 0 & 0 & 0 \\ & +c_4^u \cdot d_4^2 & & & & \\ -c_3^u \cdot d_3^2 & -c_4^u \cdot d_4^2 & (c_3^a + c_4^a) \cdot d_{0П}^2 + & -c_1^p / 2S\rho g & -c_2^p / 2S\rho g & -c_3^p / 2S\rho g \\ & & + \sum_{m=1}^3 (c_m^p / 2S\rho g) & & & \\ 0 & 0 & -c_1^p / 2S\rho g & c_1^p / 2S\rho g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c_2^p / 2S\rho g & 0 & c_2^p / 2S\rho g & 0 \\ 0 & 0 & -c_3^p / 2S\rho g & 0 & 0 & c_3^p / 2S\rho g \end{bmatrix} ; \\
C_{Пб} = & \begin{bmatrix} \frac{c_{3-4}^a}{2} \cdot d_{0П}^2 + & 0 & -\frac{c_{3-4}^a}{2} \cdot d_3^2 & 0 & 0 & 0 \\ +c_3^u \cdot d_3^2 & & & & & \\ 0 & \frac{c_{3-4}^a}{2} \cdot d_{0П}^2 + & -\frac{c_{3-4}^a}{2} \cdot d_4^2 & 0 & 0 & 0 \\ & +c_4^u \cdot d_4^2 & & & & \\ -c_3^u \cdot d_3^2 & -c_4^u \cdot d_4^2 & c_{3-4}^a \cdot d_{0П}^2 + & -c_1^p / 2S\rho g & -c_2^p / 2S\rho g & -c_3^p / 2S\rho g \\ & & + \sum_{m=1}^3 (c_m^p / 2S\rho g) & & & \\ 0 & 0 & -c_1^p / 2S\rho g & c_1^p / 2S\rho g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c_2^p / 2S\rho g & 0 & c_2^p / 2S\rho g & 0 \\ 0 & 0 & -c_3^p / 2S\rho g & 0 & 0 & c_3^p / 2S\rho g \end{bmatrix} ;
\end{aligned}$$

де h_m – це відстань між центрами мас m – го шару рідини та цистерни;

$$C_{\Pi\Pi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad C_{\Gamma}^{\Psi} = \text{diag}(1, 0, 0, 0);$$

$$C_{\Pi}^{\Psi} = \text{diag}(0, 0, 1, 0, 0, 0).$$

У матрицях з літери «с» починаються позначення коефіцієнтів жорсткості. А саме, c_1^p , c_2^p , c_3^p – коефіцієнти жорсткості зв'язку між шаром рідини та оболонкою цистерни в поперечній площині руху. Ці коефіцієнти використовуються у рівняннях низькочастотних коливань рідини

$$m_m^p \cdot \frac{d^2 z_m^p}{dt^2} + c_m^p \cdot z_m^p = c_m^p \cdot z_{\Pi} + G_m^p \cdot \psi_{\Pi}, \quad m = 1, 2, 3,$$

де m_m^p – маса m – го шару рідини (рис. 4.10); G_m^p – сила ваги цього шару.

В рівняннях (4.22 а) та (4.22 б) присутні наступні позначення: d_{Γ} , d_1 та d_2 – відстані від центру мас трактора, переднього та заднього мостів до пружних елементів лівого або правого бортів трактора; $d_{0\Pi}$, d_3 та d_4 – відстані від центру мас цистерни, переднього та заднього мостів до пружних елементів лівого або правого бортів агрегату.

$$F_Z = \frac{0,5 \cdot r_{kr} \cdot (m_{\Pi} + m_p^{\Pi})}{1 + \frac{0,5 \cdot r_{kr} \cdot (m_p^{\Pi} + m(H))}{C^{\Pi}}}; \quad (4.23 \text{ а})$$

$$C^{\Pi} = \frac{r_{kr}^2}{l_{\Pi}^2} \cdot W \cdot G, \quad (4.23 \text{ б})$$

r_{kr} – радіус шарніру тягово-зчіпного пристрою (рис. 4.11); m_{Π} – маса платформи цистерни; m_p^{Π} – маса рідини в горизонтальній ємності, яка зале-

жить від рівня H рідини в цистерні; W – об’єм матеріалу, який використовується в зіпному пристрої; G – модуль здвигу ($G = 8 \cdot 10^{10}$ Н/м²).

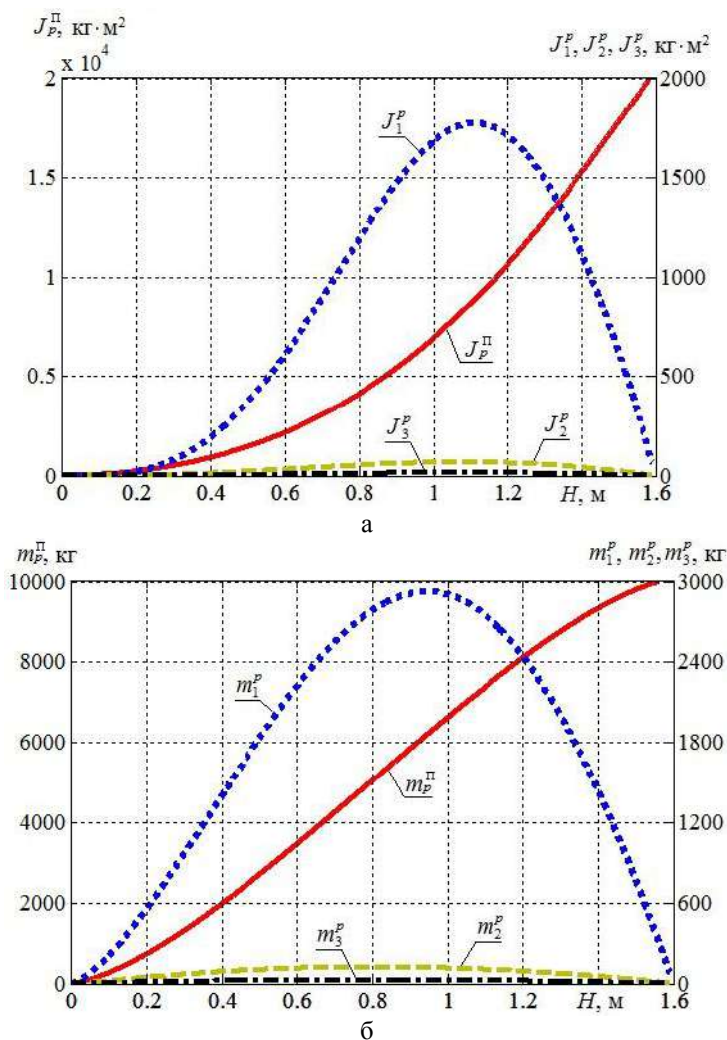


Рисунок 4.10 – Характеристики перерозподілу рідини в поперечній площині в залежності від висоти рівня рідини H (на прикладі МЖТ-10):

a – момент інерції руху рідини в цистерні; $б$ – маса рідини

З рис. 4.10 б, шари рідини, які приймають участь в поперечному коливальному процесі, мають максимальну масу при рівні наповненні $H = 0,95$ м, тому подальший динамічний аналіз буде проводитися саме при цьому рівні наповненості. З рис. 4.11 встановлено, що радіус шарніру тягово-зчіпного пристрою становить 0,09 м.



Рисунок 4.11 – Зображення тягово-зчіпного пристрою трактора та агрегатів перемінної маси

Використовуючи, як зразок, алгоритм динамічного аналізу транспортного засобу у поздовжній площині, проведемо динамічний аналіз в поперечній площині руху МТА. Кожній частоті із табл. 4.7 відповідає форма вільних коливань; форми для низьких частот наведено у табл. 4.8, 4.9. Жирним шрифтом в табл. 4.8, 4.9 показані максимальні значення, які свідчать про найбільший вплив складової на загальний коливальний процес.

Таблиця 4.7 – Значення резонансних частот МТА в поперечній площині

Номер гармоніки	Частоти ν , Гц		Групи частот
	Причипна (Stapell)	Напівпричипна (МЖТ-10)	
0	0	0	I
1	0,28	0,28	
2	0,69	0,68	II
3	1,38	1,38	
4	2,09	2,09	III
5	4,29	4,21	
6	10,47	4,3	
7	25,54	12,02	
8	35,77	12,12	
9	36,03	27,26	IV

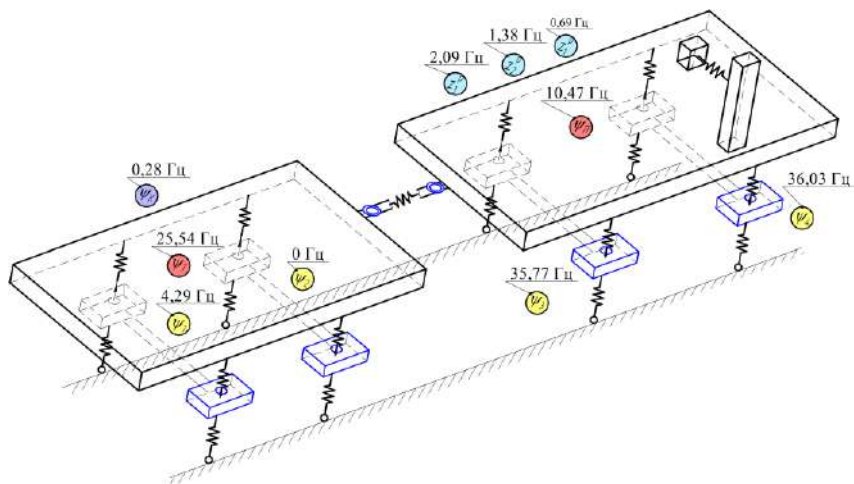
Таблиця 4.8 – Компоненти нормованих форм вільних коливань МТА з причипною цистерною в поперечній площині

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ν	0	0,28	0,69	1,38	2,09	4,29	10,47	25,54	35,77	36,03
ψ_T	0,69	0	0	-0	-0	0	-0	0,72	0	-0
ψ_1	0,03	0	0	-0	-0	-1	0	-0,02	0	0
ψ_2	0,72	0	0	-0	-0	0,03	0	-0,69	0	0
ψ_K	0	-1	-0	0	0	-0	0	-0	0	0
ψ_3	0	0	-0	0	0	0	-0,34	-0	0,71	-0,71
ψ_4	0	0	-0	0	0	0	-0,34	-0	-0,71	-0,71
ψ_{II}	0	0	-0	0	0	0	-0,88	-0	0	0,03
z_1^P	0	0	-1	-0	-0	-0	0	0	0	-0
z_2^P	0	0	-0	1	-0	-0	0	0	0	-0
z_3^P	0	0	-0	0	1	-0	0	0	0	-0

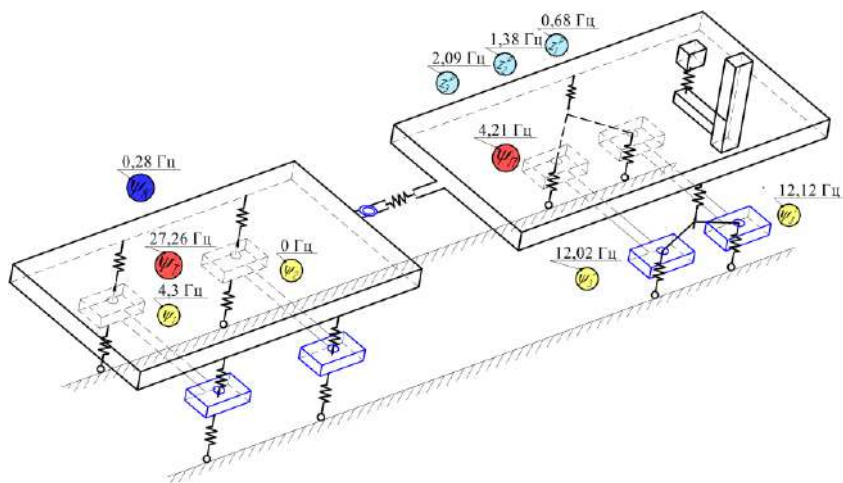
Таблиця 4.9 – Компоненти нормованих форм вільних коливань МТА з напівпричіпною цистерною в поперечній площині

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ν	0	0,28	0,68	1,38	2,09	4,21	4,3	12,02	12,12	27,26
ψ_T	-0,64	-0	-0	-0	-0	-0,01	-0,01	0	0	0,77
ψ_1	-0,03	-0	-0	-0	-0	-0,38	0,93	0	-0	-0,02
ψ_2	-0,76	-0	-0	-0	-0	-0,09	-0,07	0	-0,02	-0,64
ψ_K	-0	1	0	0	0	0	0	0	-0	-0
ψ_3	-0	-0	0	0	0	0,05	0,02	0,71	-0,69	0
ψ_4	-0	-0	0	0	0	0,05	0,02	-0,71	-0,69	0
ψ_{II}	-0,1	-0	0,02	0,01	0,01	0,92	0,37	0	0,23	-0,06
z_1^p	-0	-0	1	-0	-0	-0,02	-0,01	0	-0	0
z_2^p	-0	-0	0	1	-0	-0,01	-0	0	-0	0
z_3^p	-0	-0	0	0	1	-0,01	-0,01	0	-0	0

Жирним шрифтом в табл. 4.8, 4.9 показані максимальні значення, які свідчать про найбільший вплив цієї складової на загальний коливальний процес. Для більшої інформативності на рис. 4.12 зобразимо схеми МТА з наявними резонансними частотами систем «трактор–цистерна».



а



б

Рисунок 4.12 – Карти власних частот МТА в умовах максимального перерозподілу мас рідини при рівні $H = 0,95$ м у поперечній площині:
а – ХТЗ-150К зі Stapell; б – ХТЗ-150К з МЖТ-10

В процесі розрахунку отримуємо залежності вільних частот від значення рівня наповненості рідини H (рис. 4.13, 4.14) при дослідженні коливань в поперечно-вертикальній площині.

Проводячи динамічний аналіз руху колісного трактора з цистерною відмітимо, що графіки частот, які спостерігаються на рис. 4.13 (для причіпної цистерни) не перетинаються, а на рис. 4.14 (для напівпричіпної цистерни) перетинаються.

Окрім того, при наближенні спектральних значень одне до одного, спостерігається ефект відштовхування спектральних траєкторій (наприклад, гармоніки 5, 6 у табл. 4.9), який приводив до відсутності кратних резонансів. Це свідчить про ефект обміну координат у власних формах при проходженні зони наближеного резонансу. Що дає передумови до ствердження про те, що в зоні обміну координат спостерігається несприятливий рух в поперечній площині.

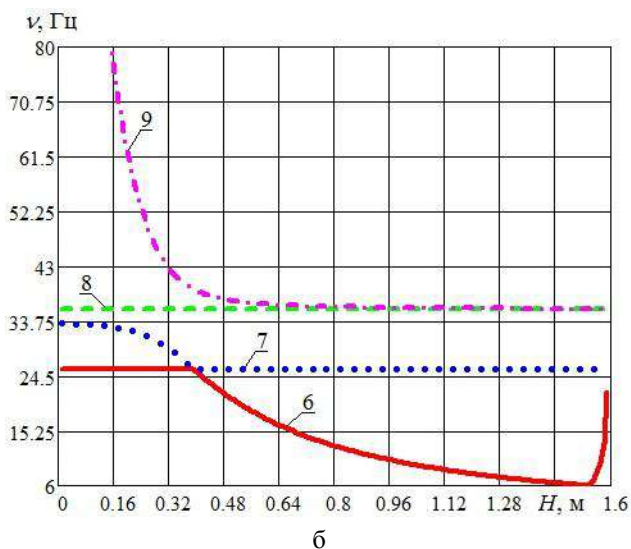
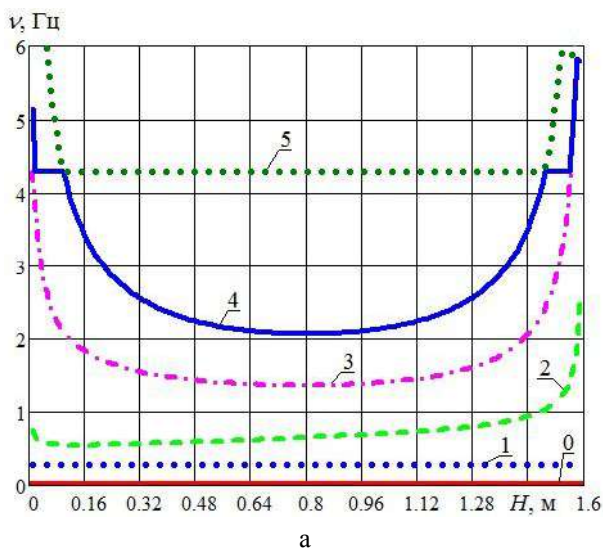


Рисунок 4.13 – Залежність власних частот від рівня рідини H в агрегаті з причіпною цистерною в поперечній площині:
а – діапазон частот $0 \div 6$ Гц; б – діапазон частот $6 \div 80$ Гц; 0 – 9 – номер гармоніки

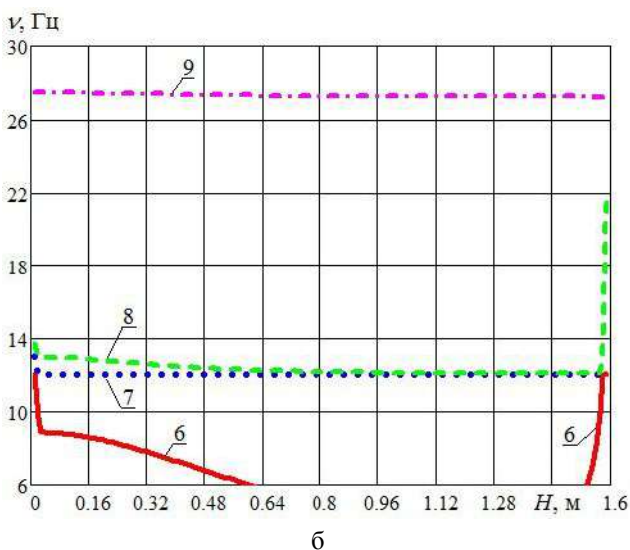
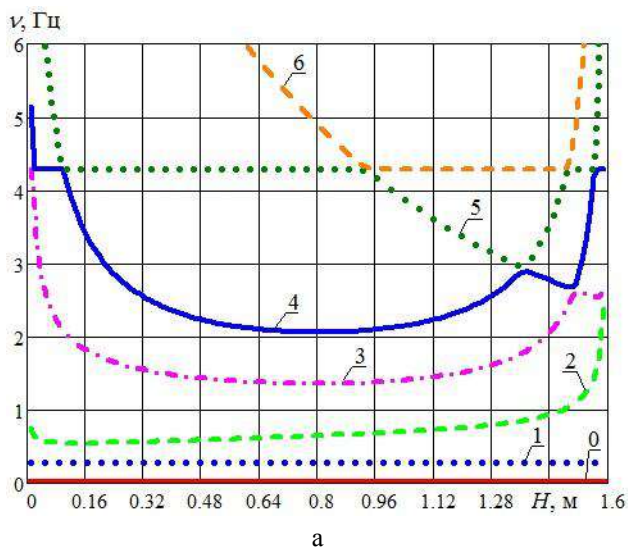


Рисунок 4.14 – Залежність власних частот від рівня рідини H в агрегаті з напівпричіпною цистерною в поперечній площині:

а – діапазон частот $0 \div 6$ Гц; б – діапазон частот $6 \div 30$ Гц; 0 – 9 – номер гармоніки

Аналізуючи лінеарізовану модель коливань МТА в поперечно-вертикальній площині при транспортуванні цистерни з рідиною встановлено, що напівпричіпна цистерна більш стійка за причіпну. Адже при динамічному аналізі встановлено ефект відштовхування спектральних траєкторій, наявність якого свідчить про те, що в зоні обміну координат спостерігається несприятливий рух в поперечній площині, який може сформувати параметричні коливання.

Зважаючи на вище сказане, підкреслимо те, що запропоновано методику пасивного принципу захисту від низькочастотних коливань мас трактора при перевезенні цистерни з рідиною, яка дає змогу знайти спектр коливань у низькочастотному діапазоні частот, а також проаналізувати відповідні власні форми взаємопов'язаних рухів мас МТА, амплітуди яких нормовані за їх вкладом до загальної енергії коливань. Сформовано детальні лінеарізовані моделі пов'язаних коливань колісного трактора з причіпною та напівпричіпною цистернами в поздовжньо-вертикальній та поперечно-вертикальній площинах, що дало змогу на попередньому етапі оцінювати коливальний рух МТА на основі матричного динамічного аналізу.

За результатами матричного динамічного аналізу, зважаючи на діапазон частот, виконано структурне укрупнення розрахункової моделі, а також встановлено спектральні ефекти, які розширюють та поглиблюють класичну теорію коливань. В лінеарізованих моделях МТА фізична величина – рівень рідини в цистерні – розглядається як довільний параметр задачі, що відповідає її сенсу, але суттєво ускладнює аналіз. З'ясовано, що при варіюванні рівнем рідини траєкторії різних частот не перетинаються та мають зламанний вигляд. А у випадку зближення частот, спостерігається обмін координатами між різними формами коливань, що негативно впливає на динаміку МТА, причому, щодо цього погіршення, напівпричіпна цистерна більш стійка за причіпну.

РОЗДІЛ 5. АКТИВНИЙ ПРИНЦИП ЗАХИСТУ ВІД НИЗЬКО- ЧАСТОТНИХ КОЛИВАНЬ МАС ТРАКТОРА ПРИ ПЕРЕВЕЗЕНІ ЦИСТЕРНИ З РІДИНОЮ

Активний принцип захисту від низькочастотних коливань мас транспортного засобу зводиться до відстроювання системи від резонансів, що досягається шляхом математичного моделювання нелінійної моделі та наукового дослідження динамічних процесів, які виникають в складних механічних системах. Якісна побудова імітаційної моделі з достатніми припущеннями здатна, ще на етапі проектування, надати вичерпні висновки щодо змін техніко-експлуатаційних показників, розкрити питання надійності та оприлюднити апріорні судження щодо безпеки руху транспортного засобу, тощо. Як і у випадку аналізу коливальних процесів (пасивного принципу), математичне моделювання відбувається при умові прямолінійного руху транспортного засобу, тому досліджуються вимушені коливання, які діють в поздовжньо-вертикальній та поперечно-вертикальній площинах руху.

5.1. Формування нелінійної математичної моделі коливань мас системи «трактор – цистерна» в поздовжньо-вертикальній площині

Для комплексного формування математичної моделі вертикальних, поздовжніх та кутових переміщень мас колісного трактора з цистерною необхідно побудувати розрахункові схеми з виділенням основних складових, які діють при русі по нерівній поверхні. Зауважимо, що як наслідок конструктивних особливостей, тягово-зчіпного пристрою трактора, нерівності профілю дороги у поперечному напрямі призводять до відокремлених коливань трактора або цистерни, тобто коливання рідини в поперечній площині на низькочастотні коливання мас трактора (яку розуміють у сенсі збереження здоров'я тракториста) не впливають. Тому під нерівностями шляху розуміється їх миттєві середні значення для лівого та правого колеса на кожному із чотирьох мостів окремо; саме ці фактори збуджують пов'язані коливання системи, і для їх аналізу достатньо застосовувати «велосипедні» схеми, які й показано на рис. 5.1, 5.2.

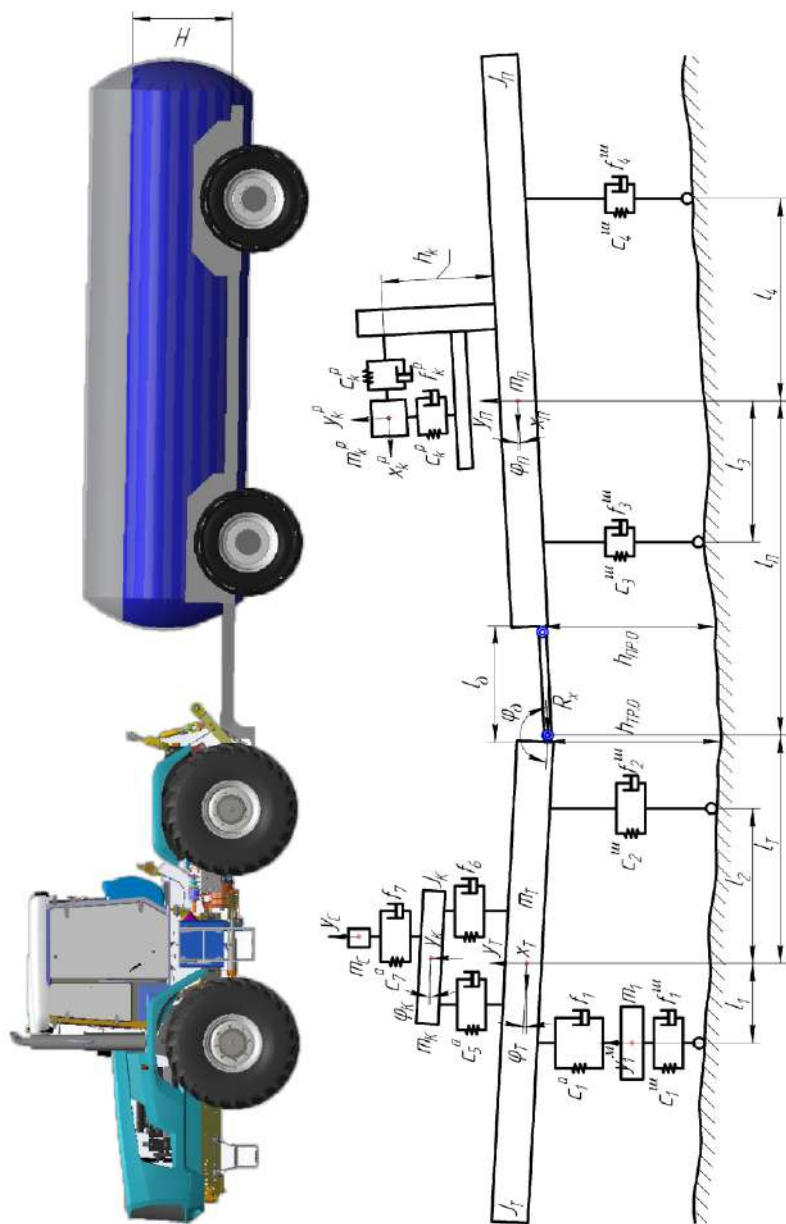


Рисунок 5.1 – Розрахункова схема трактора ХТЗ-150К та цистерни Starcell з двома колісними парами

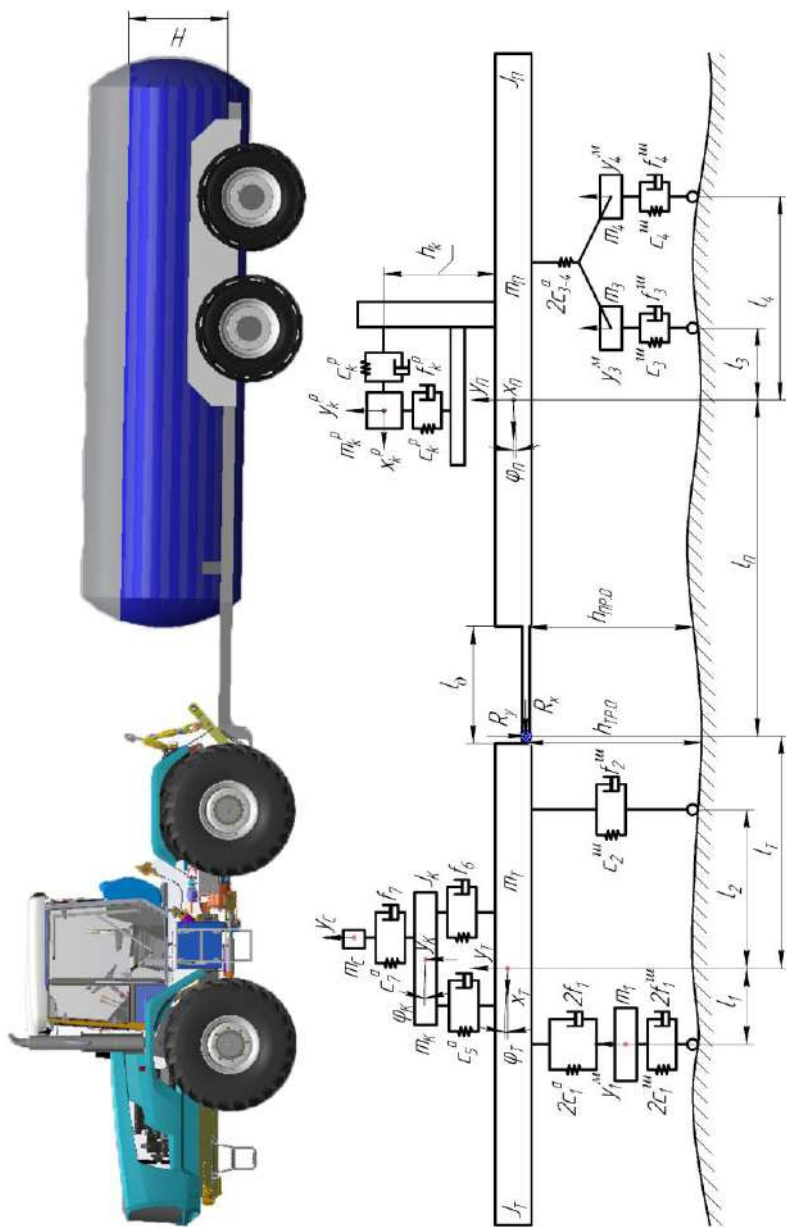


Рисунок 5.2 – Розрахункова схема трактора ХТЗ-150К та цистерни МЖТ-10 з двома колісними парами

Оскільки при формуванні комплексної оцінки пов'язаних коливань колісного трактора та цистерни необхідно детально окреслювати рух кожних складових, то цілком доцільно наводити математичний апарат, розбивши всі складові на групи. Тобто, розглядати окремо вертикальні, позовжні та кутові переміщення остова, кабіни, сидіння трактора, а також платформу цистерни та рідини, що знаходиться в ній. При цьому, оскільки кути передачі зусилля між трактором і цистерною є малими, тоді коливання в позовжній площині більшості зосереджених мас (колісного трактора і цистерни, мостів і шин, але не рідини у цистерні або кабіни з сидінням) припустимо вважати синфазними.

В рівняннях, що наведено нижче, для опису динамічних характеристик у більшості випадків зберегли ті ж самі позначення, що вище було застосовано у елементах матриць (розділ 4). Надані у тексті підстрочні пояснення, головним чином, стосуються наступних позначень:

- для окремо діючих сил, які у лінеарізованій моделі не конкретизувалися (розділ 4);
- для коефіцієнтів тертя, які у лінеарізованій моделі не використовувалися (розділ 4);
- для чинників, які збуджують коливання.

Рівняння з додатковим позначенням «а» у його номері дійсне для трактора в поєднанні з причіпною цистерною (рис. 5.1), а з позначенням «б» – для трактора з напівпричіпною цистерною (рис. 5.2).

5.1.1 Вертикальні переміщення трактора

Вертикальні переміщення корпусу, переднього моста, кабіни та сидіння відповідають диференціальним рівнянням руху, складеним для відповідної маси:

$$m_T \cdot \ddot{y}_T = \sum P_{TP} ; \quad (5.1 \text{ а})$$

або

$$m_T \cdot \ddot{y}_T = \sum P_{TP} - R_y ; \quad (5.1 \text{ б})$$

$$m_1 \cdot \ddot{y}_1^M = P_1^M - P_1 ; \quad (5.2)$$

$$m_K \cdot \ddot{y}_K = \sum_{l=5}^6 P_l - P_C ; \quad (5.3)$$

$$m_C \cdot \ddot{y}_C = P_C , \quad (5.4)$$

де похідна за часом позначена крапкою, а діючі сили визначаються за формулами

$$\sum P_{TP} = \sum_{i=1}^2 P_i^M - \sum_{l=5}^6 P_l + R_x \cdot (\varphi_0 - \psi_T \cdot \text{sign}(\dot{\varphi}_T - \dot{\varphi}_T)) ; \quad (5.5)$$

$$P_1 = c_1^a \cdot (y_1^M - y_{T1}) + f_1 \cdot (\dot{y}_1^M - \dot{y}_{T1}) ;$$

$$P_l = c_l^a \cdot ((y_T \mp l_l \cdot \varphi_T) - (y_K \mp l_l \cdot \varphi_K)) + f_l \cdot ((\dot{y}_T \mp l_l \cdot \dot{\varphi}_T) - (\dot{y}_K \mp l_l \cdot \dot{\varphi}_K)) , l = 5, 6 ;$$

$$P_1^M = c_1^u \cdot (y_{TP1} - y_1^M) + f_1^u \cdot (\dot{y}_{TP1} - \dot{y}_1^M) + G_1^M ;$$

$$P_2^M = c_2^u \cdot (y_{TP2} - y_{T2}) + f_2^u \cdot (\dot{y}_{TP2} - \dot{y}_{T2}) + G_2^M ;$$

$$P_{GTP} = \sum_{i=1}^2 P_i^M \dot{y}_{TPi} + \dot{x}_T \psi_{TP} \sum_{i=1}^2 P_i^M ;$$

$$y_{Ti} = y_T \mp l_i \cdot \varphi_T , i = 1, 2 ;$$

$$P_C = c_7^a \cdot (y_K + l_7 \cdot \varphi_K - y_C) + f_7 \cdot (\dot{y}_K + l_7 \cdot \dot{\varphi}_K - \dot{y}_C) .$$

5.1.2 Поздовжні переміщення трактора і цистерни

Зазначені переміщення трактора (крім кабіни) і цистерни (крім верхневих шарів рідини) відбуваються із однаковою швидкістю та прискоренням, що відповідає рівнянню поступального руху центра мас:

$$(m_T + m_1 + m_{II} + m_P + m_{DV}) \cdot \ddot{x}_T = \frac{(M_{кр} \cdot i_{тр})}{r_K} - P_{B\Sigma} - P_{GTP} - P_{GPP} + P_K , \quad (5.6)$$

де сила опору цистерни об'єднує вплив тертя та кута нахилу дороги,

$$\begin{aligned}
P_{ГПП} &= \sum_{i=3}^4 P_i^M \cdot \dot{y}_{ГPi} + \dot{x}_T \cdot \psi_{TP} \cdot \sum_{i=3}^4 P_i^M, \\
P_i^M &= c_i^{uu} \cdot (y_{ГPi} - y_{Pi}) + f_i^{uu} \cdot (\dot{y}_{ГPi} - \dot{y}_{Pi}) + G_i^M; \\
y_{Pi} &= y_{\Pi} \mp l_i \cdot \varphi_{\Pi}, i = 3, 4; \\
P_K &= c_x^K \cdot (x_K - x_T) + f_x^K \cdot (\dot{x}_K - \dot{x}_T).
\end{aligned}$$

5.1.3 Поздовжні переміщення кабіни і сидіння

Описуються диференційним рівнянням

$$(m_K + m_C) \cdot \ddot{x}_T = -P_K.$$

5.1.4 Кутові переміщення корпусу і кабіни трактора

Визначаються із диференціальних рівнянь обертального руху:

$$J_T \cdot \ddot{\varphi}_T = \sum M_{TP} + R_x (H_T - h_{T,0} + l_T \cdot (\varphi_{\partial} - \varphi_T)); \quad (5.7 \text{ а})$$

або

$$J_T \cdot \ddot{\varphi}_T = \sum M_{TP} + R_x (H_T - h_{T,0} - l_T \cdot \varphi_T); \quad (5.7 \text{ б})$$

$$J_K \cdot \ddot{\varphi}_K = P_6 l_6 - P_5 l_5 - P_7 l_7, \quad (5.8)$$

де

$$\begin{aligned}
\sum M_{TP} &= P_2^M l_2 - P_1 l_1 + P_5 l_5 - P_6 l_6 + R_x (h_T - \psi_{TP} R_T \text{sign}(\dot{\varphi}_{\Pi} - \dot{\varphi}_T)) - \\
&- H_T \left(\frac{(M_{кр} i_{TP})}{r_K} - P_{ГПТ} - (1 - \Delta l) P_{ГПП} \right) + R_y l_T; \\
h_T &= h_{T,0} + l_T \cdot \varphi_{\partial}.
\end{aligned}$$

В формулах та рівняннях, що наведені в розділах (5.1.1 – 5.1.4), використано наступні позначення: m_{DV} – складова інерційної маси трактора, яка визначається параметрами двигуна та трансмісії,

$$m_{DV} = J_m^{\partial\theta} \cdot \frac{I_{TP}^2}{r_K^2};$$

$J_m^{\partial\theta}$ – момент інерції маховика та валів двигуна; $m_{\Sigma TP}$ – гравітаційна маса, яка дорівнює сумарній масі складових частин трактора (остову, кабіни, сидіння, мостів); P_i, P_b, P_7 – динамічні складові пружних сил, що діють на підресорені маси остова трактора, кабіни, сидіння; P_l^M – динамічна складова сумарної радіальної сили, що діє на мости трактора з боку шин; P_K – сила взаємодії кабіни та рами трактора; R_x, R_y – поздовжня та вертикальна складова сили, які прикладені до тягово-зчіпного пристрою з боку гаку трактора; $P_{ГРТР}, P_{ГРПР}$ – сумарна сила, що діє на трактор чи цистерну з боку ґрунту у горизонтальному напрямку; $\ddot{x}_T, \dot{x}_T, x_T$ – поздовжнє прискорення, швидкість, переміщення трактора і цистерни; $P_{B\Sigma}$ – сила, що створюється коливанням рідини в цистерні; $M_{кр}$ – крутний момент двигуна [173, 264]; J_T, J_K – момент інерції трактора та кабіни відносно поперечній вісі, що проходить крізь центр мас остова трактора або його кабіни; H_T – відстань від осей мостів до центру мас трактора; $h_{T,0}$ – відстань (по вертикалі) від осі мостів до гаку трактора; ψ_T – коефіцієнт сухого тертя у гаку (та шарнірі дишла у випадку причіпної цистерни); R_T – радіус, на якому діє сила сухого тертя; Δl – сумарний коефіцієнт розкладання сил між мостами цистерни і гаком трактора.

На рис. 5.3 наведено результат моделювання зовнішньо-швидкісної характеристики двигуна прототипу, яка розраховувалась на основі роботи [173, 264], при цьому на рис. 5.4 наведено залежності зміни сумарної інерційної маси трактора (разом з інерційністю двигуна) від зміни передаточного числа трансмісії. Слід зауважити, що при максимальному передаточному числі трансмісії інерційна маса трактора більше ніж в 2 рази за гравітаційну.

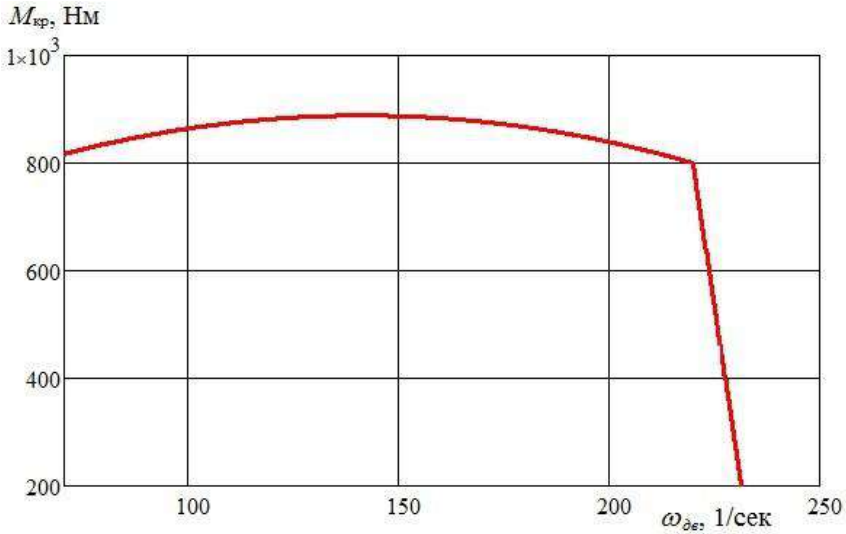


Рисунок 5.3 – Зовнішньо-швидкісна характеристика двигуна внутрішнього згоряння типу ЯМЗ-236

Встановити зміну коефіцієнту в'язкого тертя в залежності від якості дорожнього покриття можливо, розв'язавши наступні рівняння

$$\psi_{TP} \cdot \dot{x}_{Tmax} \cdot m_T \cdot g = \frac{(M_{кр} \cdot i_{TP})}{r_K};$$

$$i_{TP} = \frac{\omega_{дв}}{\omega_K} = \frac{\omega_{дв}}{(\dot{x}_{Tmax}/r_K)} = \frac{(\omega_{дв} \cdot r_K)}{\dot{x}_{Tmax}},$$

де ω_K – кутова швидкість колеса.

Виконавши перетворення, отримаємо

$$\psi_{TP} = \frac{M_{кр} \cdot \omega_{дв}}{m_T \cdot g \cdot \dot{x}_{Tmax}^2}. \quad (5.9)$$

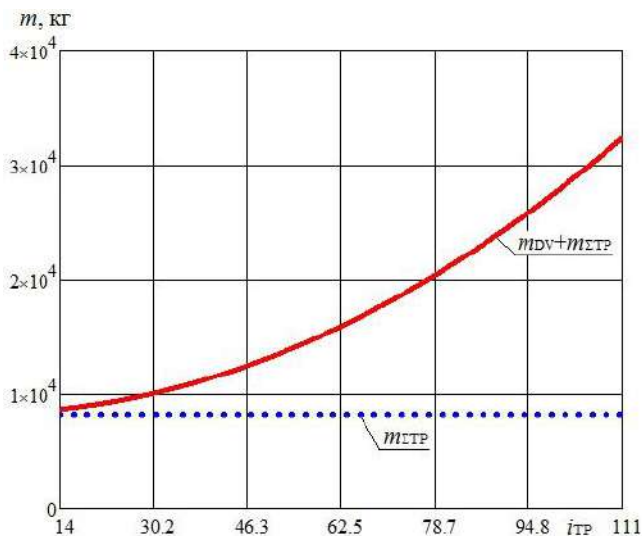


Рисунок 5.4 – Гравітаційна та інерційна маси колісного трактора в залежності від передавального числа трансмісії

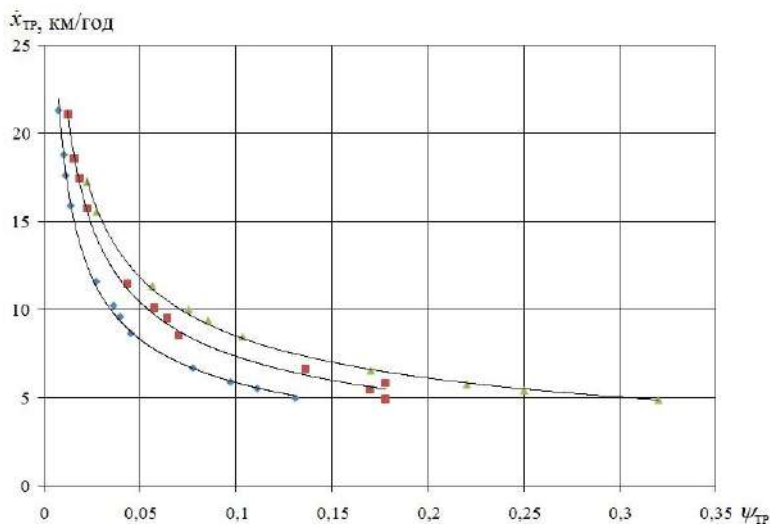


Рисунок 5.5 – Залежність коефіцієнту в'язкого тертя від швидкості руху для колісного трактора ХТЗ-150К:

1 – асфальтобетон; 2 – ґрунтова поверхня; 3 – стерня колосових

Завдяки теоретичним значенням швидкості руху трактора ХТЗ-150К, отримуємо шукану зміну коефіцієнту в'язкого тертя в залежності від швидкості (рис. 5.5).

Таким чином, наведено математичний апарат для опису коливального руху колісного трактора.

5.1.5 Вертикальні переміщення платформи цистерни разом з мостами

Ці переміщення знаходимо з диференціальних рівнянь

$$(m_{\Pi} + m_p) \cdot \ddot{y}_{\Pi} = \sum P_{\Pi p} + R_y; \quad (5.10 \text{ a})$$

або

$$(m_{\Pi} + m_p) \cdot \ddot{y}_{\Pi} = \sum P_{\Pi p}, \quad (5.10 \text{ б})$$

де діючі сили

$$\sum P_{\Pi p} = \sum_{i=3}^4 P_i^M - R_x \cdot (\varphi_{\partial} - \psi_{\Gamma} \cdot \text{sign}(\dot{\varphi}_{\Pi} - \dot{\varphi}_{\Gamma})). \quad (5.11)$$

5.1.6 Поздовжні переміщення корпусу цистерни

Визначаються за формулою

$$x_{\Pi} = x_{\Gamma} + h \cdot \varphi_{\Pi}. \quad (5.12)$$

5.1.7 Кутові переміщення корпусу цистерни

Визначаються із рівнянь обертального руху

$$J_{\Pi} \cdot \ddot{\varphi}_{\Pi} = \sum M_{\Pi p} + R_x \cdot ((h_{\Pi} - \Delta h) - l_{\Pi} \cdot (\varphi_{\partial} - \varphi_{\Pi})); \quad (5.13 \text{ a})$$

або

$$J_{\Pi} \cdot \ddot{\varphi}_{\Pi} = \Sigma M_{\Pi\Pi} + R_x \left((h_{\Pi} - \Delta h) + l_{\Pi} \cdot \varphi_{\Pi} \right) - (l_{\Pi} + l_{\partial}) \cdot R_y, \quad (5.13 \text{ б})$$

де

$$\begin{aligned} \Sigma M_{\Pi\Pi} &= P_4^M l_4 - P_3^M l_3 - M_{B\Sigma} + \Delta l \cdot P_{\Gamma\Pi\Pi} \cdot (H_{\Pi} + \Delta h) + \\ &+ R_x \cdot \psi_{\Gamma} R_{\Gamma} \operatorname{sign}(\dot{\varphi}_{\Gamma} - \dot{\varphi}_{\Pi}); \\ h_{\Pi} &= h_{\Pi 0} - \Delta h - l_{\Pi} \cdot \varphi_{\partial}; \\ \Delta h &= \frac{m_B}{(m_{\Pi} + m_B)} \cdot \left(H - \frac{h}{2} \right), \end{aligned} \quad (5.14)$$

J_{Π} – момент інерції цистерни; L – відстань від центру до краю цистерни; R_{Π} – радіус цистерни; Δh – зміщення центру мас цистерни в залежності від рівня рідини; $h_{\Pi 0}$ – відстань (по вертикалі) від осі мостів до точок з'єднання зчіпного пристрою, які розташовані на цистерні; H_{Π} – відстань від осі мостів до центру мас цистерни; H – рівень рідини в цистерні; S – площа вільної поверхні рідини, яка відповідає відомій висоті H за формулою (2.15); h – еквівалентний рівень рідини (у цистерні прямокутної форми та того ж самого об'єму, формула (2.16)).

5.1.8 Модель тягово-зчіпного пристрою

Розглядати тягово-зчіпний пристрій необхідно як комбінацію гідролізованого крюка з вушком напівпричіпної або причіпної цистерни. При цьому ввівши допущення, що роботу тягово-зчіпного пристрою можна представити, як роботу шарніра. Саме таким чином автор в роботі [152] досліджує плавність ходу та динамічне навантаження на ходову систему колісного трактора при виконанні транспортної роботи з перевезення твердого вантажу. Але врахування коливань, які виникають в причіпній та напівпричіпній цистернах з вільною поверхнею рідини, повинно поглибити дослідження за рахунок впливу перерозподілу мас рідини на динаміку руху трактора.

Силу, що виникає в шарнірі, можна описати наступним рівнянням:

$$R_{\text{zavor}} = C_{1\Delta} \cdot \Delta + C_{2\Delta} \cdot \Delta^2 + K_{\Delta} \cdot \frac{d\Delta}{dt}, \quad (5.15)$$

де $C_{1\Delta}$ та $C_{2\Delta}$ – сталі коефіцієнти, які отримано при апроксимації досліджень з робіт [152] і для зчіпки колісного трактора ХТЗ - 150К дорівнюють $C_{1\Delta} = 45080$ Н/мм та $C_{2\Delta} = 604800$ Н/мм²; Δ – деформація, яка виникає в шарнірі; K_{Δ} – коефіцієнт, який характеризує процес демпфірування в шарнірі.

Визначення деформації, яка виникає в шарнірі, базується на врахуванні координат вушок тягово-зчіпних пристроїв [152] за формулою

$$\Delta = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2}, \quad (5.16)$$

де x_a та x_b – це координати горизонтального положення вушок зчіпного пристрою трактора та вушка зчіпного пристрою напівпричепа в повздовжній вертикальній площині, відповідно; y_a та y_b – координати вертикального положення вушка зчіпного пристрою трактора та вушка зчіпного пристрою напівпричепа в вертикальній площині, відповідно, причому

$$x_a = x_T + l_T \cdot \cos(\varphi_{T0} + \varphi_T); \quad (5.17)$$

$$x_b = x_{\Pi} - l_{\Pi} \cdot \cos(\varphi_{\Pi0} + \varphi_{\Pi}); \quad (5.18)$$

$$y_a = y_T - l_T \cdot \sin(\varphi_{T0} + \varphi_T); \quad (5.19)$$

$$y_b = y_{\Pi} + l_{\Pi} \cdot \sin(\varphi_{\Pi0} + \varphi_{\Pi}), \quad (5.20)$$

φ_{T0} – кут між повздовжньою віссю трактора та прямою, проведеною через центр ваги трактора та точкою взаємодії вушка зчіпного пристрою трактора з вушком дишла напівпричепа; $\varphi_{\Pi0}$ – кут нахилу повздовжньої вісі напівпричепа відносно центру ваги в повздовжній вертикальній площині.

Кут взаємодії в шарнірі зчіпного пристрою трактора з напівпричепом визначається положенням суміжних вушок [152] за формулами

$$\gamma_{zazor} = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(\frac{y_a - y_b}{x_a - x_b}\right), & \text{якщо } x_a - x_b > 0 \text{ та } y_a - y_b > 0; \\ \pi + \operatorname{arctg}\left(\frac{y_a - y_b}{x_a - x_b}\right), & \text{якщо } x_b - x_a < 0 \text{ та } y_a - y_b > 0; \\ \pi + \operatorname{arctg}\left(\frac{y_a - y_b}{x_a - x_b}\right), & \text{якщо } x_b - x_a < 0 \text{ та } y_a - y_b < 0; \\ \operatorname{arctg}\left(\frac{y_a - y_b}{x_a - x_b}\right), & \text{якщо } x_a - x_b > 0 \text{ та } y_a - y_b < 0; \\ \frac{\pi}{2}, & \text{якщо } x_b - x_a = 0 \text{ та } y_b - y_a > 0; \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{якщо } x_b - x_a = 0 \text{ та } y_b - y_a < 0. \end{cases} \quad (5.21)$$

Тоді сили, які діють в шарнірі тягово-зчіпного пристрою, матимуть вигляд:

– горизонтальна реакція,

$$R_x = R_{zazor} \cdot \cos(\gamma_{zazor}); \quad (5.22)$$

– вертикальна реакція,

$$R_y = R_{zazor} \cdot \sin(\gamma_{zazor}). \quad (5.23)$$

5.1.9 Вимушені коливання рідини у цистерні

Розрахунок цих коливань базується на застосуванні методології визначення коливального руху рідини в ємності з вільною поверхнею, яка наведена в розділі 2. Відмітимо, що дана методологія базується на визначенні вільних коливань в умовах нерухомої ємності, але при русі транспортного засобу по шляху із складним рельєфом в рідині збуджуються не лише поздовжні, поперечні та крутильні коливання, але й вертикальні зміщення, які призводять до періодичної зміни її ваги. Тому виникає не-

обхідність відкоригувати рівняння (2.25) для частот коливань k -того парціального осцилятора в поздовжній площині руху з урахуванням вертикальних прискорень центру мас цистерни

$$\nu_k = \frac{1}{2\pi} \sqrt{(g + \ddot{y}_k^p + \ddot{y}_\Pi) \cdot \beta_k \cdot th(\beta_k h)} ; \quad (5.24)$$

або

$$\nu_k = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(g + \ddot{y}_k^p + \ddot{y}_\Pi) \cdot \frac{0,5+k}{\pi L} \cdot th\left[\pi \cdot (0,5+k) \cdot \frac{h}{L}\right] \cdot \left(1 + \frac{\sigma}{\rho g} \cdot \left[\frac{\pi \cdot (0,5+k)}{L}\right]^2\right)},$$

звідки

$$G_k^p = m_k^p \cdot (g + \ddot{y}_k^p + \ddot{y}_\Pi).$$

В результаті континуальну модель коливального руху рідини для області низькочастотних коливань замінюємо дискретною моделлю, яка з достатньою для практики точністю описується наступними рівняннями:

$$m_k^p \cdot \ddot{x}_k^p + f_k^p \cdot (\dot{x}_k^p - \dot{x}_\Pi) + c_k^p \cdot (x_k^p - x_\Pi) = G_k^p \cdot \varphi_\Pi, \quad k = 1, 2, 3; \quad (5.25)$$

$$P_{B\Sigma} = \sum_{k=1}^3 \left[f_k^p \cdot (\dot{x}_\Pi - \dot{x}_k^p) + c_k^p \cdot (x_\Pi - x_k^p) + G_k^p \cdot \varphi_\Pi \right]; \quad (5.26)$$

$$M_{B\Sigma} = \sum_{k=1}^3 \left[f_k^p \cdot (\dot{x}_\Pi - \dot{x}_k^p) + c_k^p \cdot (x_\Pi - x_k^p) + G_k^p \cdot \varphi_\Pi \right] \cdot h_k^p, \quad (5.27)$$

де $P_{B\Sigma}$ та $M_{B\Sigma}$ – сумарна сила та момент сили, які діють на платформу цистерни з боку рідини.

Рівняння для визначення коефіцієнтів демпфірування має вигляд:

$$f_k^p = 2\delta \cdot \nu_k \cdot m_k^p. \quad (5.28)$$

У формулі (5.28) залежність від прискорення $\ddot{y}_{\Pi}$ не враховується, бо декремент загасання δ є малим.

Відстані h_k^p між центрами мас поверхневого шару та цистерни розраховується по отриманим для цієї задачі аналітичним залежностям, як відомі функції від рівня рідини та геометричних розмірів цистерни.

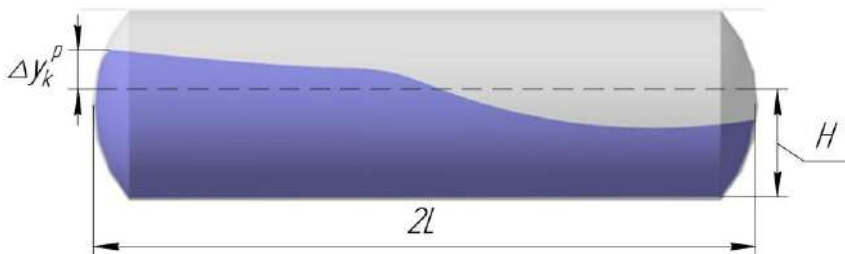


Рисунок 5.6 – Приклад підняття рівня рідини в цистерні при розгоні або гальмуванні МТА

Для сприйняття коливань рідини в цистерні доречно проаналізувати візуалізацію підняття рівня рідини при розгоні або гальмуванні МТА (рис. 5.6). Відповідна величина під час розрахунку коливань обчислюється за формулою

$$\Delta y_k^p = -\frac{P_{B\Sigma}}{2 \cdot S \cdot \rho \cdot g} . \quad (5.29)$$

Таким чином, на основі математичного апарату, який наведено в п. 5.1.1 – 5.1.9, сформовано нелінійну динамічну модель пов'язаних коливань МТА при прямолінійному русі в поздовжньо-вертикальній площині з причіпними та напівпричіпними цистернами, частково заповненими рідиною.

Відмітимо, що для якісного моделювання руху МТА необхідно, окрім сталого руху, привести перехідні процеси, тобто змоделювати розгін та гальмування. Проте, оскільки це окремі процеси і вони потребують

подальшого наукового опису (разом з динамікою двигуна та роботи трансмісії і гальмівної системи), то в даному розділі наведемо імітаційний опис процесів розгону і гальмування, які будуть відрізнятися від дійсних. Це робиться для якісного сприйняття отриманих результатів.

Рівняння, яке дозволить імітувати розгін та гальмування має вигляд:

$$\sigma_t = \begin{cases} \frac{t}{t_{\text{розг}}}, & \text{якщо } t < t_{\text{розг}}; \\ 1, & \text{якщо } t < t_{\text{розг}} + t_{\text{стал}}; \\ 0, & \text{якщо } t > t_{\text{розг}} + t_{\text{стал}} + t_{\text{гальм}}; \\ 1 - \frac{t - t_{\text{розг}} - t_{\text{стал}}}{t_{\text{гальм}}}. & \end{cases} \quad (5.30)$$

Коефіцієнт σ_t необхідно додати в рівняння, де відбувається опис позовжнього руху колісного трактора, як штучний множник для крутного моменту двигуна.

5.1.10 Вибір метода і шага інтегрування

У правих частинах формул (5.21), (5.22) використовується значення старшої похідної $\ddot{y}_{\Pi}$, тому диференціальні рівняння моделі, перш за все, потребують приведення до так званого «нормального вигляду». Зробити нормалізацію не складно, оскільки складові із похідною $\ddot{y}_{\Pi}$ входять до вказаних частин адитивне. Фактично нормалізації підлягає лише рівняння (5.13 а, б), а у інших випадках значення $\ddot{y}_{\Pi}$ використовується, як вже відома величина. Після нормалізації система диференціальних рівнянь набуває вигляду

$$\begin{cases} \frac{d\vec{X}}{dt} = \vec{V}; \\ \frac{d\vec{V}}{dt} = f(\vec{X}, \vec{V}, t). \end{cases}$$

і для її інтегрування обрано схему *модифікованого метода Ейлера*, а для проведення розрахунків застосовано програмне – діалогове середовище MathCAD. Такий вибір пов'язано із забезпеченням найбільш простого і прозорого програмування, а також врахуванням вірогідності подальшого розвитку і уточнення нелінійної моделі. Якщо таке уточнення буде моделювати удари, які відбуваються у тягово-зчіпному пристрої під час пере-кладання зазорів, то використовувати для інтегрування відому схему Рунге-Кутта четвертого порядку є недоречним.

Модифікований метод Ейлера має наступні рекурентні формули:

$$\begin{cases} \vec{V}(t + \Delta t) = \vec{V}(t) + f(\vec{X}(t), \vec{V}(t), t) \cdot \Delta t; \\ \vec{X}(t + \Delta t) = \vec{X}(t) + 0,5 \cdot (\vec{V}(t + \Delta t) + \vec{V}(t)) \cdot \Delta t. \end{cases}$$

Такий метод добре зарекомендував себе при розрахунках систем пневмоавтоматики ракетної техніки [265]. Якщо права частина $f(\vec{X}, \vec{V}, t)$ фактично не містить залежності від вектора швидкостей $\vec{V}$ (тобто силими тертя знехтували), то цей метод має другий порядок точності і еквівалентний відомій схемі, де сітки за часом для переміщень $\vec{X}(t)$ і швидкостей $\vec{V}(t)$ зсунуті одна відносно іншої на половину розрахункового кроку Δt . Після врахування тертя порядок метода знижується, але якщо тертя є слабким, то цей порядок наближається до другого. Нагадаємо що стандартний (не модифікований) метод Ейлера має перший порядок точності, і сучасним вимогам з ефективності алгоритму він не задовольняє.

Крок інтегрування $\Delta t = 0,007$ сек було обрано з урахуванням досягнення необхідної точності розрахунку і стійкості алгоритму. Для цього за допомогою методів [266] були зроблені наступні оцінки.

За результатами аналізу коливальних процесів після спрощення математичної моделі максимальна частота вільних коливань становила $\nu_M \approx 4,2$ Гц, тобто на одному періоді цих коливань розташовується 60 кроків розрахунку (при мінімально допустимій кількості 12), а для групи низькочастотних коливань та для вимушених коливань цей п'ятикратний

запас подвоюється.

Стійкість модифікованого алгоритму Ейлера залежить від співвідношення кроку інтегрування і так званого «показника коливальності» системи $d_{\text{кол}}$, тобто для забезпечення стійкості необхідно задовольнити умову

$$\Delta t < d_{\text{кол}}.$$

Величина «показника коливальності» $d_{\text{кол}}$ приблизно дорівнює мінімуму відношення f_i / c_i по усіх коливальних масах, тобто

$$d_{\text{кол}} \approx \min_j \frac{f_j}{c_j},$$

де f_i , c_i – це коефіцієнти демпфірування та жорсткості, які використовуються при моделюванні руху j -тої маси.

Для системи, що досліджується, виходячи з вихідних даних отримаємо оцінку $d_{\text{кол}} \approx 0,01$ с, і, як бачимо, саме ця умова, а не точність розрахунку, лімітує вибір кроку інтегрування.

5.1.11 Розвиток опису мікропрофілю дорожньої поверхні

Задля формування математичної моделі для дослідження пов'язаних вимушених коливань МТА при його експлуатації необхідно окреслити зміну вертикальних переміщень ґрунту. В запропонованому описі нерівностей дорожньої поверхні застосовується дві гармонійні складові, які описують зміну мікро- та макропрофілю дороги, а саме:

$$y_{\text{ГРj}} = A_{\lambda} \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot (x_{\text{Г}} - \Delta L_j)}{L_{\lambda}}\right) + A_{\Lambda} \cdot \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi \cdot (x_{\text{Г}} - \Delta L_j)}{L_{\Lambda}}\right)\right), j = 1, 2, 3, 4, \quad (5.26)$$

де A_{λ} – амплітуда мікроколивань ґрунту (нерівностей); L_{λ} – довжина хвилі мікроколивань; A_{Λ} – амплітуда макроколивань поверхні (бугри та впадини); L_{Λ} – довжина хвилі макроколивань; ΔL_j – фазові зсуви, які визначаються відстанню між мостами транспортного засобу,

$$\Delta L_1 = 0 ; \quad (5.27)$$

$$\Delta L_2 = l_1 + l_2 ; \quad (5.28)$$

$$\Delta L_3 = l_1 + l_T + l_o + l_{\Pi} \pm l_3 ; \quad (5.29)$$

$$\Delta L_4 = l_1 + l_T + l_o + l_{\Pi} + l_4 . \quad (5.30)$$

Співвідношення (5.27 – 5.30) виконуються, як для причіпної цистерни, так і для напівпричіпної; у першому випадку значення розміру l_3 використовується зі знаком « – » (рис. 5.1), а у другому – зі знаком « + » (рис. 5.2).

Хвилі мікроколивань у випадку резонансу спроможні призвести до високоамплітудних коливань, що є шкідливими для здоров'я водія. За допомогою хвилі макроколивань стає можливим дослідити дію центробіжних сил на опуклих ділянках дороги, а також виникнення галопуючого резонансу на крутих спусках.

Відстані між мостами та їх співвідношення з довжиною L_λ мікрохвилі суттєво впливає на характер і амплітуди коливань трактора і цистерни. Так, якщо

$$\Delta L_2 \approx L_\lambda \quad \text{або} \quad \Delta L_2 \approx \frac{L_\lambda}{2} ,$$

то у тракторі, головним чином, збуджуються зсувні коливання центру мас у вертикальному напрямку або кутові коливання корпусу і кабіни.

Аналогічні умови для цистерни мають вигляд

$$\Delta L_4 - \Delta L_3 \approx L_\lambda \quad \text{та} \quad \Delta L_4 - \Delta L_3 \approx \frac{L_\lambda}{2} .$$

При виконанні умов:

$$0,5 \cdot (\Delta L_4 + \Delta L_3) - 0,5 \cdot \Delta L_2 \approx L_\lambda$$

або

$$0,5 \cdot (\Delta L_4 + \Delta L_3) - 0,5 \cdot \Delta L_2 \approx (0,5 + k)L_\lambda, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

центри мас трактора та цистерни під дією збурюючих чинників будуть зсуватися синфазне або у протифазі, проте на цей рух накладаються пов'язані коливання, які передаються через тягово-зчіпний пристрій.

Тому остаточні висновки про характер та амплітуди коливань можна зробити за результатами динамічних розрахунків.

На основі вище зазначеного робимо висновок, що представлено математичний опис нерівностей дорожньої поверхні, який можна використовувати, як при дослідженні динаміки складного руху (адже використання синусоїдальної функції при описі нерівностей є найбільш навантаженою для підвіски транспортного засобу).

5.1.12 Результати розрахунків динаміки трактора та цистерни

На рис. 5.7, 5.8 показано результати моделювання руху МТА з причіпною цистерною (типу Stapell) та напівпричіпною (типу МЖТ-10) при максимальному рівні рідини в цистернах 1,6 м; передавальне число трансмісії трактора – 25,8; інші параметри трактора і цистерни було надано в табл. 3.1. Зміни крутного моменту двигуна внутрішнього згоряння та коефіцієнтів тертя на етапах розгону та гальмування у цьому розрахунку задано наближеними аналітичними залежностями, адже головна мета дослідження – це моделювання сталого процесу руху МТА.

Амплітуда мікроколивань нерівностей (A_λ) становила 0,008 м (асфальтна дорога) та 0,02 м (грунтова дорога); а довжина хвилі мікроколивань (L_λ) – 2 м та 3 м [130], відповідно.

Оскільки найбільший інтерес викликає дослідження впливу різного рівня рідини на експлуатаційні показники МТА при транспортуванні цистерн, тоді доцільно проаналізувати показники вертикального та горизонтального прискорення остову трактора та цистерн; поздовжньої та вертикальної складових сили, які прикладені до тягово-зчіпного пристрою (ТЗП), та інше залежно від швидкості руху МТА.

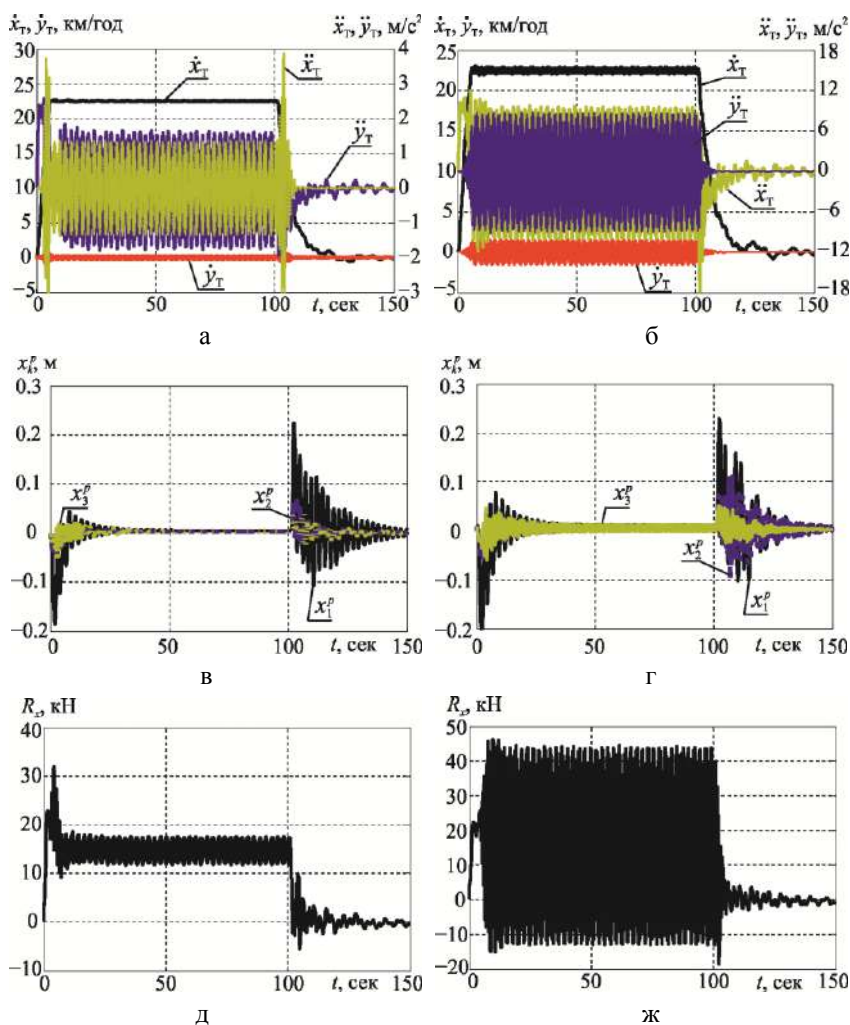


Рисунок 5.7 – Експлуатаційні показники руху МТА з причіпною цистерною Stapell по дорогам:

а, в, д – асфальтна; б, г, ж – ґрунтова; а, б – швидкість та прискорення трактора; в, г – поздовжнє переміщення шарів рідини; д, ж – поздовжня складова сили, яка прикладена до ТЗП

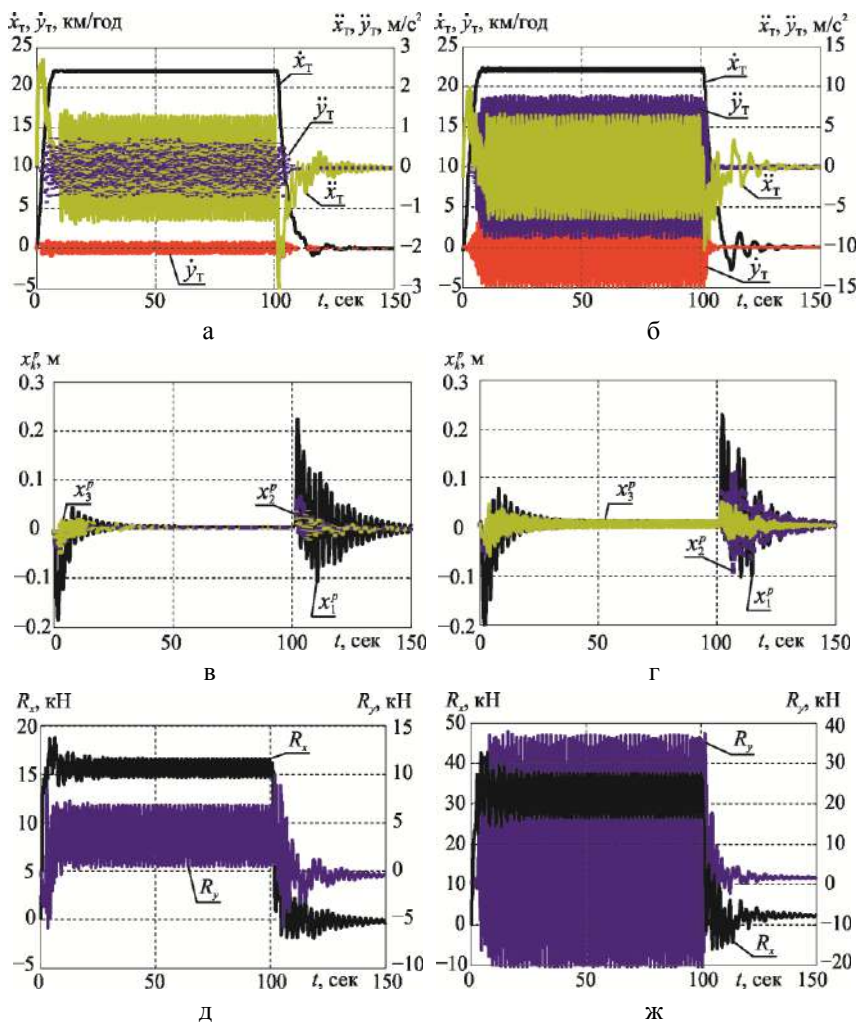


Рисунок 5.8 – Експлуатаційні показники руху МТА з напівпричіпною цистерною МЖТ-10 по дорогам:

а, в, д – асфальтна; б, г, ж – ґрунтова; а, б – швидкість та прискорення трактора; в, г – поздовжнє переміщення шарів рідини; д, ж – поздовжня та вертикальна складові сили, які прикладені до ТЗП

Оцінюючи результати на рис. 5.7 та 5.8 необхідно відзначити, що при русі по ґрунтовій дорозі збільшуються амплітуди коливань усіх експлуатаційних показників МТА. Відмітимо, що для МТА з причіпною цистерною збільшуються амплітуди коливань горизонтальних коливань мас МТА, а для МТА з напівпричіпної – горизонтальних та вертикальних. Помітно, що амплітуди горизонтальних коливань мас МТА з причіпною цистерною більші за такі ж коливання мас МТА з напівпричіпної цистерною. Окрім того, помітно збільшення амплітуди коливань позовжнього переміщення третього шару рідини (рис. 5.7 г та 5.8 г), але наведені результати на рис. 5.7 та 5.8 не є визначальними адже в ході моделювання рівень рідини був максимальний. Більшого інтересу викликають результати при моделюванні руху МТА при частково заповненій цистерні. Так, виникає необхідність дослідити показники: горизонтального прискорення трактора (рис. 5.9 – для причіпної; рис. 5.13 – для напівпричіпної); вертикальні прискорення трактора (рис. 5.10 а, б – для причіпної; рис. 5.12 – для напівпричіпної); вертикальні прискорення цистерни (рис. 5.10 в, г – для причіпної; рис. 5.15 а, б – для напівпричіпної); позовжньої складової сили, яка прикладена до ТЗП (рис. 5.10 з, к – для причіпної; рис. 5.15 в, г – для напівпричіпної); вертикальної складової сили, яка прикладена до ТЗП (рис. 5.14 – для напівпричіпної); кут взаємодії в шарнірі ТЗП (рис. 5.10 д, ж – для причіпної; рис. 5.15 л, м – для напівпричіпної); кут нахилу ТЗП (рис. 5.11 – для причіпної); сумарна сила, яка діє на платформу цистерни з боку рідини (рис. 5.15 д, ж – для напівпричіпної).

З результатів помітно виникнення коливань мас трактора при швидкості $10 \div 20$ км/год при русі по асфальтній дорозі та при $20 \div 30$ км/год при русі по ґрунтовій дорозі. При русі по ґрунтовій дорозі амплітуди вертикальних прискорень остова збільшуються майже в два рази в порівнянні з рухом по асфальтній дорозі, що може нашкодити здоров'ю водія (проте задля визначення конкретного впливу на стан водія проводяться дослідження на плавність ходу і вібраційну безпеку). За рахунок встановлення вертикальної сили ТЗП при транспортуванні напівпричіпної цистерни визначено, що при врахуванні зазору в ТЗП простежується вплив мас цистерни на показники трактора, що при певному рівні наповнення цистерни збільшує амплітуду вертикальної складової сили (рис. 5.15 д, ж).

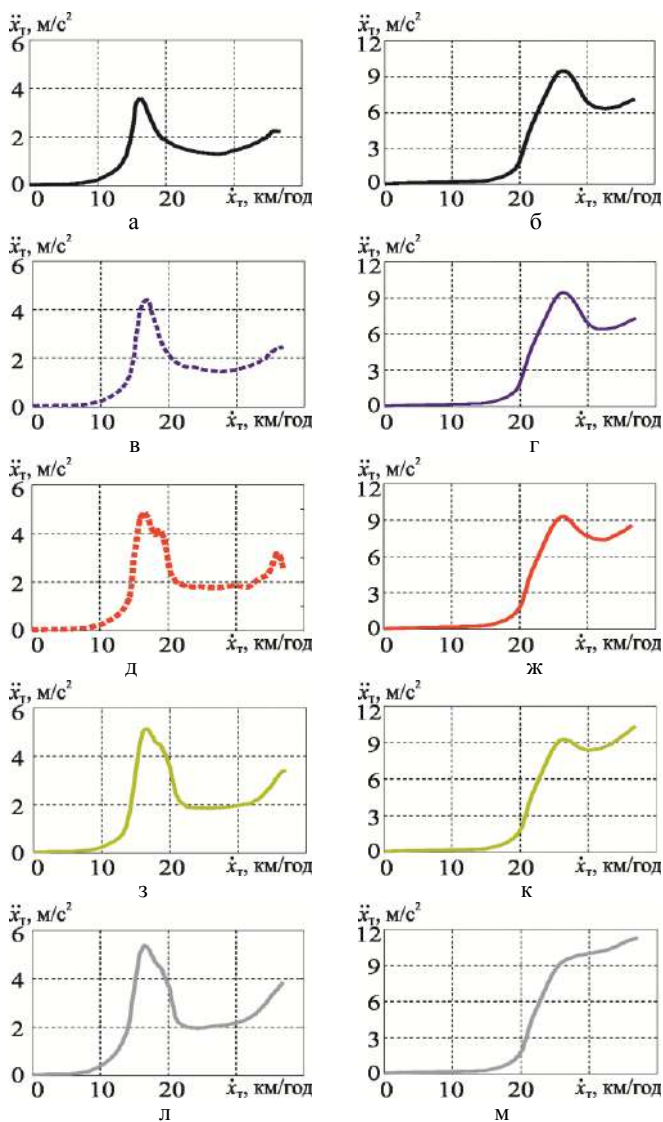


Рисунок 5.9 – АЧХ горизонтальних прискорень остову трактора при транспортуванні Starpell при різному рівні наповненості цистерни:
а, в, д, з, л – асфальтна; б, г, ж, к, м – ґрунтова; а, б – $H = 1,6$ м;
в, г – $H = 1,2$ м; д, ж – $H = 0,8$ м; з, к – $H = 0,4$ м; л, м – $H = 0$ м

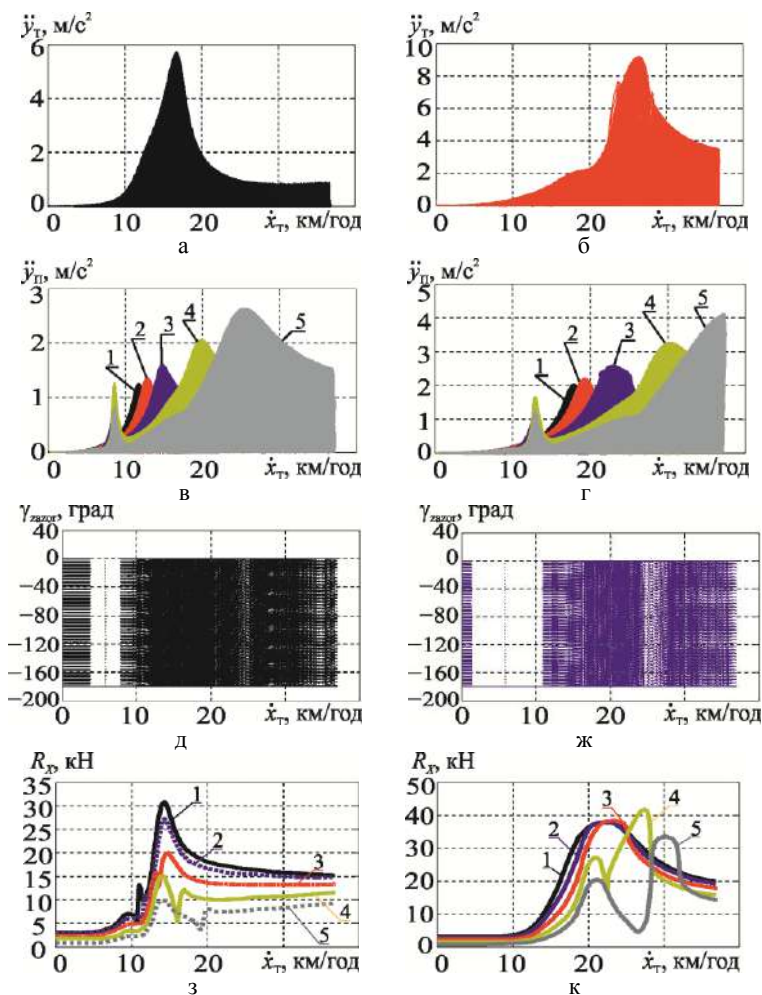


Рисунок 5.10 – Показники трактора при транспортуванні Stapell при різному рівні наповненості цистерни:

а, в, д, з, л – асфальтна; б, г, ж, к, м – ґрунтова; а, б – вертикальне прискорення трактора; в, г – вертикальне прискорення цистерни; д, ж – кут γ_{zazor}

ТЗП (при $H = 1,6$ м); з, к – сила R_x ;

1 – $H = 1,6$ м; 2 – $H = 1,2$ м; 3 – $H = 0,8$ м; 4 – $H = 0,4$ м; 5 – $H = 0$ м

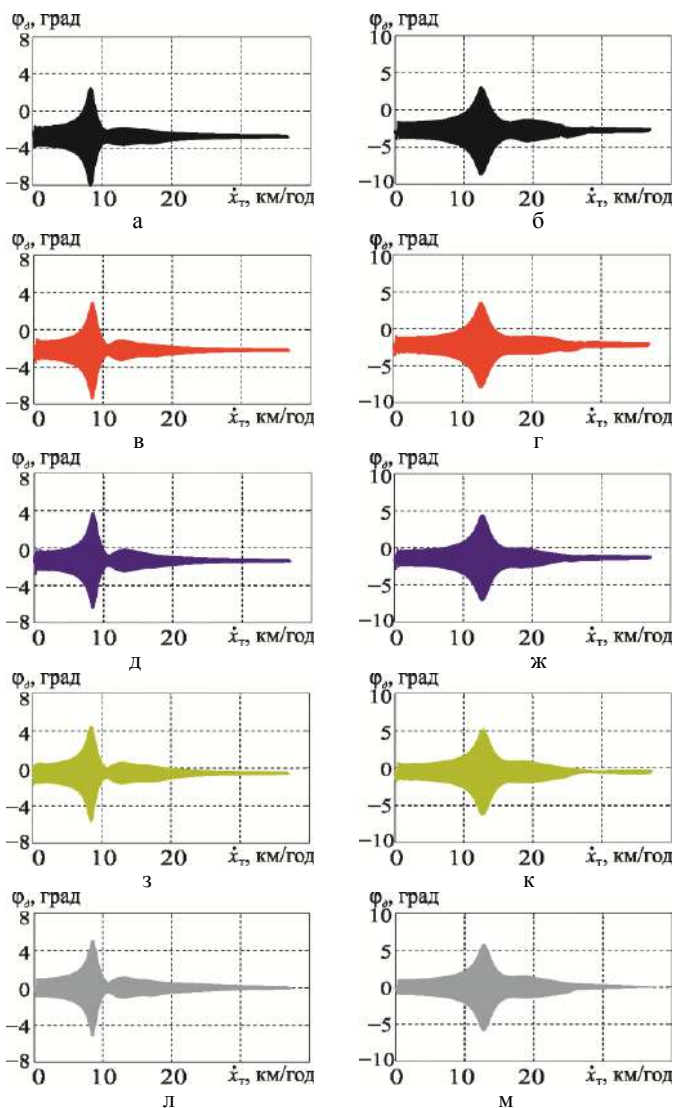


Рисунок 5.11 – АЧХ куту нахилу ТЗП (φ_0) при транспортуванні Stapell при різному рівні наповненості цистерни:

а, в, д, з, л – асфальтна; б, г, ж, к, м – ґрунтова; а, б – $H = 1,6$ м;

в, г – $H = 1,2$ м; д, ж – $H = 0,8$ м; з, к – $H = 0,4$ м; л, м – $H = 0$ м

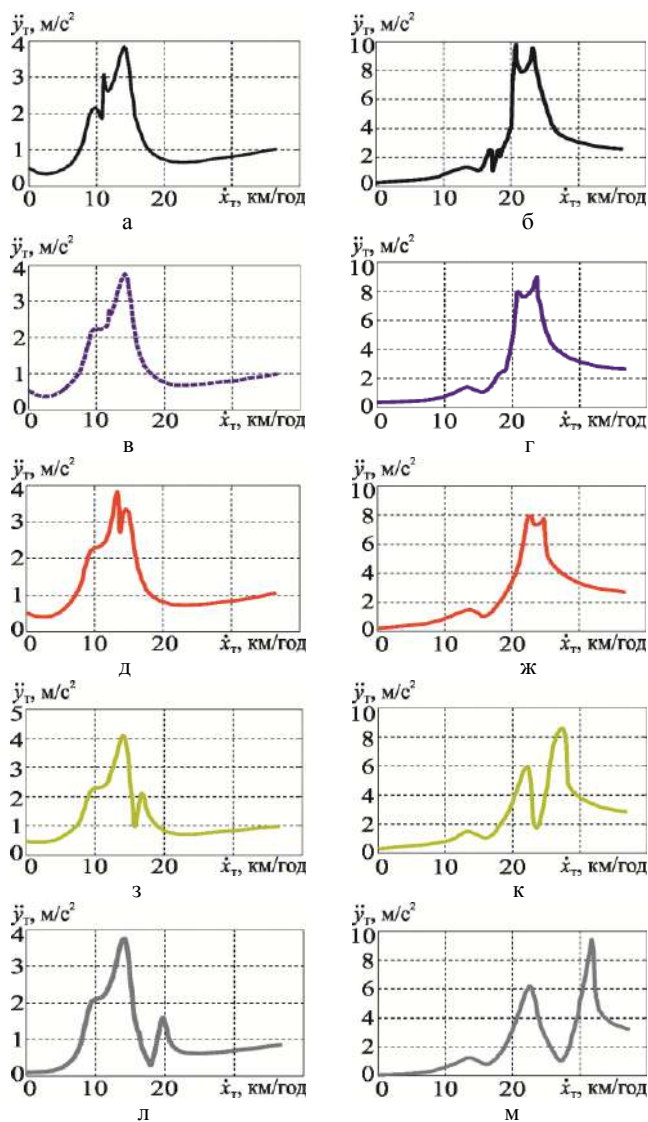


Рисунок 5.12 – АЧХ вертикальних прискорень остову трактора при транспортуванні МЖТ-10 при різному рівні наповненості цистерни:
а, в, д, з, л – асфальтна; б, г, ж, к, м – ґрунтова; а, б – $H = 1,6$ м;
в, г – $H = 1,2$ м; д, ж – $H = 0,8$ м; з, к – $H = 0,4$ м; л, м – $H = 0$ м

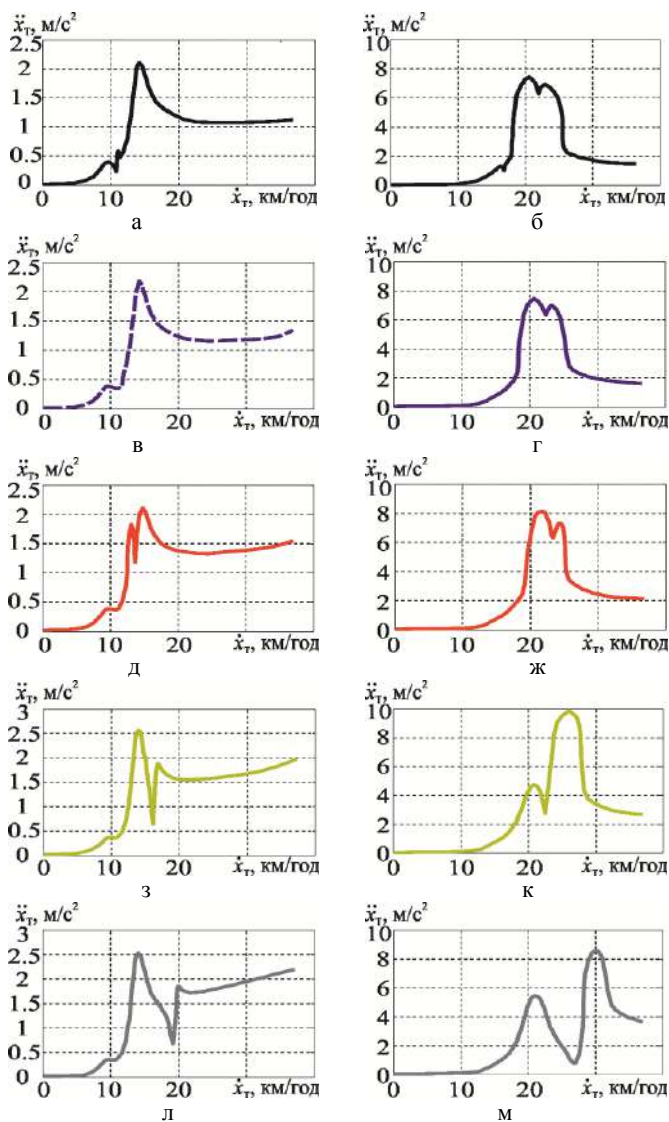


Рисунок 5.13 – АЧХ горизонтальних прискорень остову трактора при транспортуванні МЖТ-10 при різному рівні наповненості цистерни:

а, в, д, з, л – асфальтна; б, г, ж, к, м – ґрунтова; а, б – $H = 1,6$ м;
в, г – $H = 1,2$ м; д, ж – $H = 0,8$ м; з, к – $H = 0,4$ м; л, м – $H = 0$ м

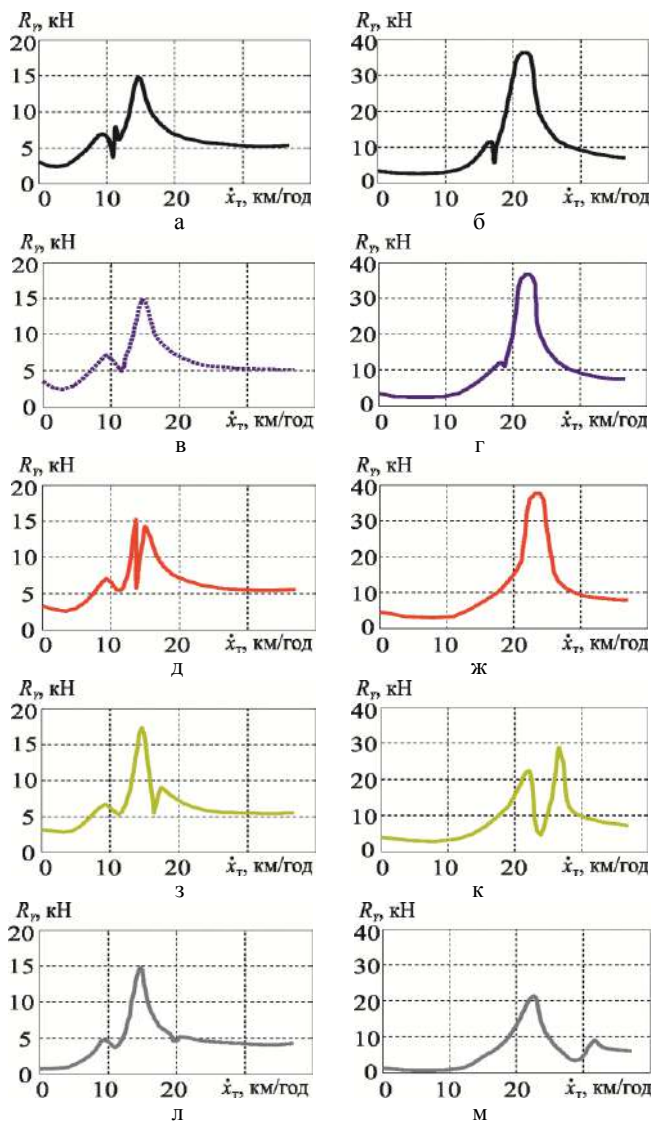


Рисунок 5.14 – Вертикальна складова сили, яка прикладена до ТЗП при транспортуванні МЖТ-10 при різному рівні наповненості цистерни:

а, в, д, з, л – асфальтна; б, г, ж, к, м – ґрунтова; а, б – $H = 1,6$ м;
в, г – $H = 1,2$ м; д, ж – $H = 0,8$ м; з, к – $H = 0,4$ м; л, м – $H = 0$ м

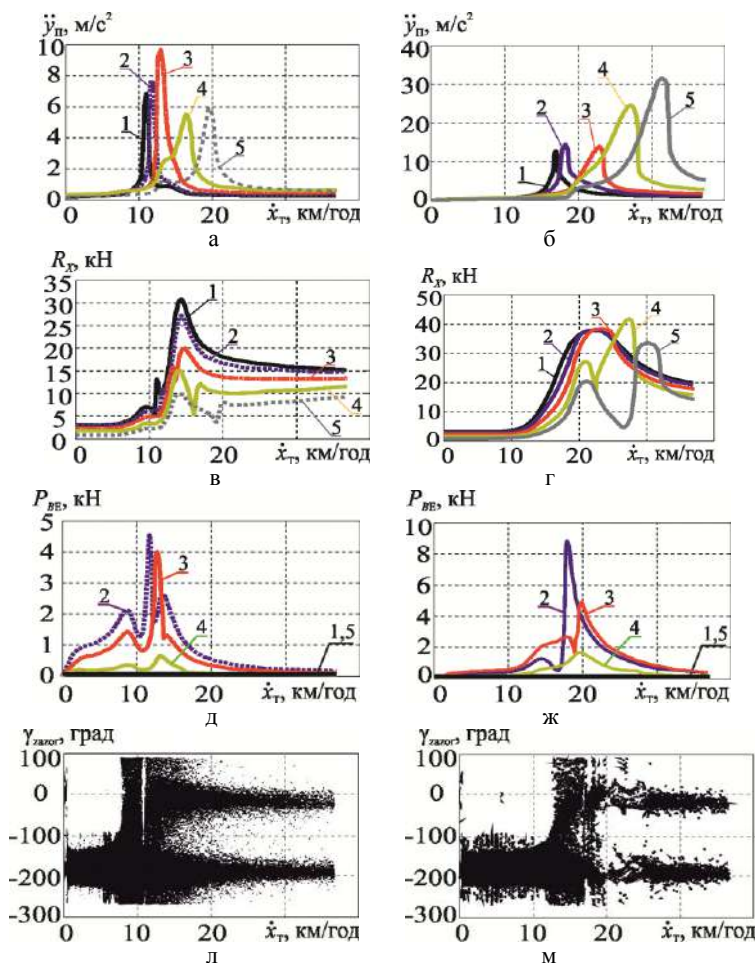


Рисунок 5.15 – Показники трактора при транспортуванні МЖТ-10 при різному рівні наповненості цистерни по дорогах:

а, в, д, з, л – асфальтна; б, г, ж, к, м – ґрунтова;

а, б – вертикальне прискорення цистерни; в, г – сила R_x ; д, ж – сила $P_{B\Sigma}$;
л, м – кут $\gamma_{загол}$ ТЗП (при $H = 1,6$ м);

1 – $H = 1,6$ м; 2 – $H = 1,2$ м; 3 – $H = 0,8$ м; 4 – $H = 0,4$ м; 5 – $H = 0$ м

З рис. 5.15 встановлено, що різний рівень наповнення рідиною ($1,6 \div 0$ м) по різному впливає на вертикальні прискорення рами напівпричіпної

цистерни, так при русі по асфальтній дорозі резонансні коливання мас агрегату змінюються за квадратичною залежність, а по ґрунтовій мають монотонну залежність.

Подальшим кроком дослідження необхідно встановити небезпечний рівень наповнення цистерни, для цього визначимо енергетичність системи «трактор – цистерна» при впливі різного рівня наповнення рідиною цистерни на сталий рух колісного трактора.

Розрахунок кінетичної енергії зводиться до вирішення елементарного рівняння

$$T = (m \cdot V^2) / 2. \quad (5.31)$$

Відмітимо, що в результаті коливального процесу системи потенційна енергія перетворюється в кінетичну і навпаки – це обумовлено законами збереження енергії (математична модель замкнена). Таким чином, задля дослідження загального запасу механічної енергії коливального процесу достатньо знайти максимальне значення кінетичної енергії (при цьому значення потенційної буде дорівнювати мінімальному значенню).

Кінетична енергія для вертикальних та горизонтальних переміщень мас МТА описуються наступними рівняннями

$$T_{\text{УТР}} = \left(m_T \cdot \dot{y}_T^2 + m_K \cdot \dot{y}_K^2 + m_S \cdot \dot{y}_S^2 + m_1 \cdot (\dot{y}_1^M)^2 + m_2 \cdot (\dot{y}_2^M)^2 \right) / 2; \quad (5.32)$$

$$T_{\text{УПР}} = \left((m_{\Pi} + m_p) \cdot \dot{y}_{\Pi}^2 + m_3 \cdot (\dot{y}_3^M)^2 + m_4 \cdot (\dot{y}_4^M)^2 + m_k^p \cdot (\Delta \dot{y}_K)^2 \right) / 2; \quad (5.33)$$

$$T_{\text{ХТР}} = \left(\left(m_T + \sum_{i=1}^2 m_i + m_{\text{DV}} \right) \cdot \dot{x}_T^2 + (m_K + m_S) \cdot \dot{x}_K^2 \right) / 2; \quad (5.34)$$

$$T_{\text{ХПР}} = \left(\left(m_{\Pi} + \sum_{i=3}^4 m_i + m_p \right) \cdot \dot{x}_{\Pi}^2 + m_k^p \cdot (\Delta \dot{x}_K^p)^2 \right) / 2. \quad (5.35)$$

Результати обчислення запасу механічної енергії від горизонтальних переміщень мас МТА наведено на рис. 5.16, а від вертикальних – на рис 5.17.

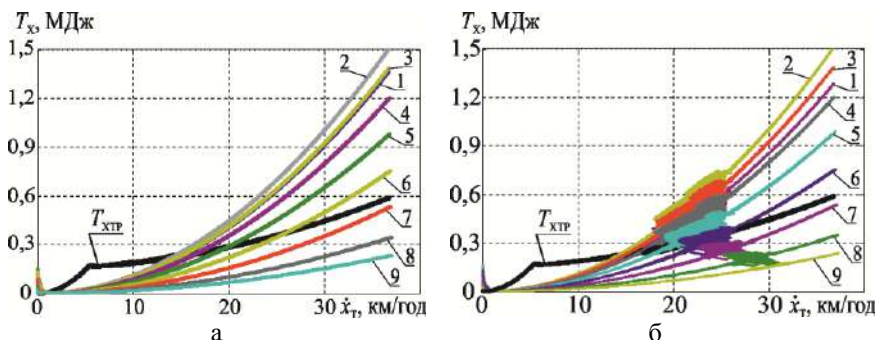


Рисунок 5.16 – Залежності зміни загального запасу механічної енергії від горизонтальних переміщень мас МТА від рівня рідини в МЖТ-10:

а – асфальтна дорога; б – ґрунтова дорога;

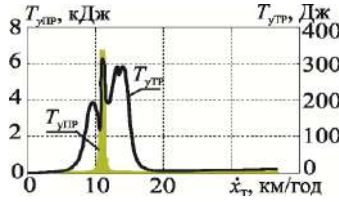
1 – $H = 1,6$ м; 2 – $H = 1,4$ м; 3 – $H = 1,2$ м; 4 – $H = 1,0$ м; 5 – $H = 0,8$ м;

6 – $H = 0,6$ м; 7 – $H = 0,4$ м; 8 – $H = 0,2$ м; 9 – $H = 0$ м

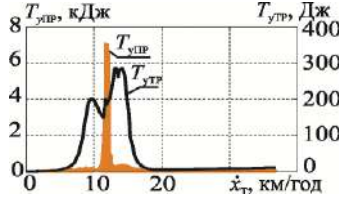
Аналіз результатів з рис. 5.16 показав, що незважаючи на рух по поверхні, енергетична складова поздовжнього руху напівпричіпної цистерни значно більша за ту ж складову колісного трактора. Вирівнювання енергетичних складових відбувається на рівні заповнення цистерни $H = 0,4$ м, що свідчить про вирівнювання мас трактора та напівпричіпної цистерни МЖТ-10. Відмітимо, що максимальна величина запасу механічної енергії від горизонтальних переміщень мас МТА досягається не при максимальному рівні наповненості цистерни, а при $H = 1,4$ м (тобто при 12,5% зменшенні рівня рідини).

Що стосується результатів з рис. 5.17, то з впевненістю можна стверджувати, що вертикальна складова коливального руху рідини в напівпричіпній цистерні передається на озов трактора. З метою встановлення величини передачі енергії провадимо енергетичний коефіцієнт передачі (рис. 5.18), який обчислюється за наступними рівняннями

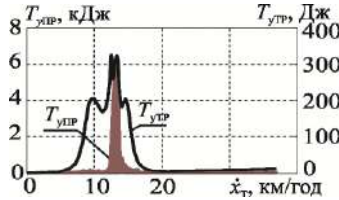
$$k_y = \frac{T_{y\text{ПР}}(H)}{T_{y\text{ТР}}(H)}.$$



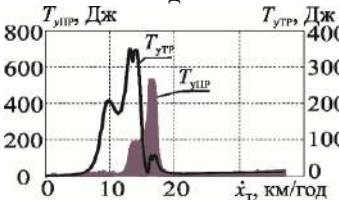
а



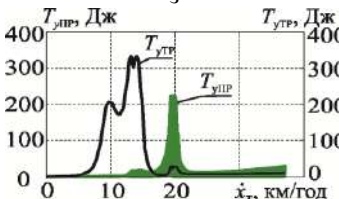
в



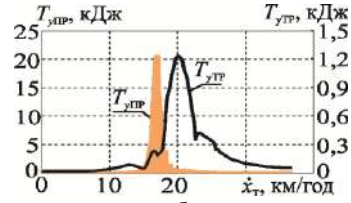
д



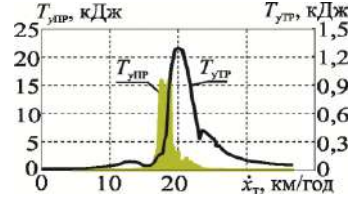
з



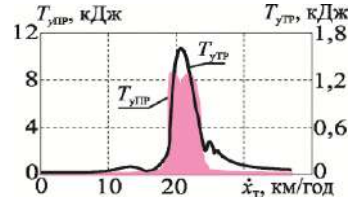
л



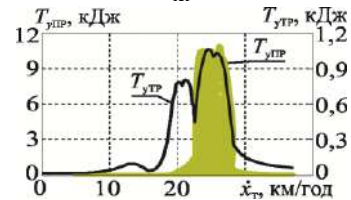
б



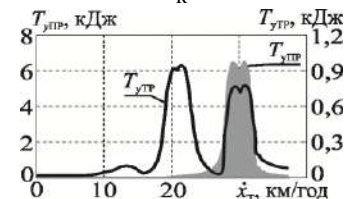
г



ж



к



м

Рисунок 5.17 – Залежності зміни загального запасу механічної енергії від вертикальних переміщень мас МТА від рівня рідини в МЖТ-10:
а, в, д, з, л – асфальтна дорога; б, г, ж, к, м – ґрунтова дорога; а, б – $H = 1,6$ м; в, г – $H = 1,2$ м; д, ж – $H = 0,8$ м; з, к – $H = 0,4$ м; л, м – $H = 0$ м

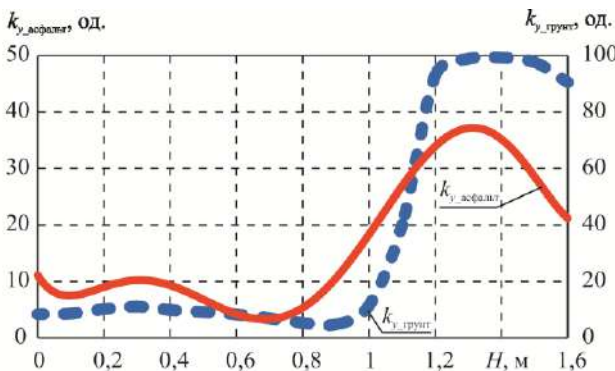


Рисунок 5.18 – Залежність енергетичного коефіцієнту передачі вертикальних переміщень мас МТА від рівня рідини в МЖТ-10

Аналізуючи результати з рис. 5.18, встановимо, що максимальна передача енергетичної складової вертикального руху напівпричіпної цистерни значно більша за ту ж складову колісного трактора в межах заповнення цистерни рідиною від 1,0 м до 1,6 м. При цьому максимальна передача енергії спостерігається при 12 ÷ 18 % зменшенні рівня рідини від максимальної величини заповнення.

Таким чином, можна стверджувати, що найбільш несприятливим є рівень заповнення напівпричіпної цистерни 82 ÷ 88 % (величини стосуються лише цистерни МЖТ-10). Саме при такому рівні є небезпека створення дорожньо-транспортних пригод або створення несприятливих умов для роботи водія.

5.2 Параметричні коливання в системі «трактор – цистерна» в поздовжньо-вертикальній площині

При прямолінійному русі коливання в поздовжньо-вертикальній площині небезпечні, адже при дії певних зовнішніх факторів можливо спостереження явища *параметричного резонансу*. Моделювання руху в поздовжньо-вертикальній площині, яке визначає наявність *параметричних коливань*, виконується лише для трактора з причіпною цистерною. Такий вибір обумовлено конструктивними особливостями причіпних

агрегатів, рух яких за результатами роботи [267] може потрапити в зону динамічної нестійкості.

На рис. 5.19 надано графіки власних частот коливань для перших чотирьох парціальних шарів рідини, а також власної частоти вертикальних коливань цистерни. Зауважимо, що цистерна має ще одну частоту вертикальних коливань, яка пов'язана із відносним рухом рами та мосту, проте вона велика і на результати цього дослідження не впливає. Поступове зниження резонансної частоти пояснюється зростанням ваги цистерни відповідно до її наповненості рідиною.

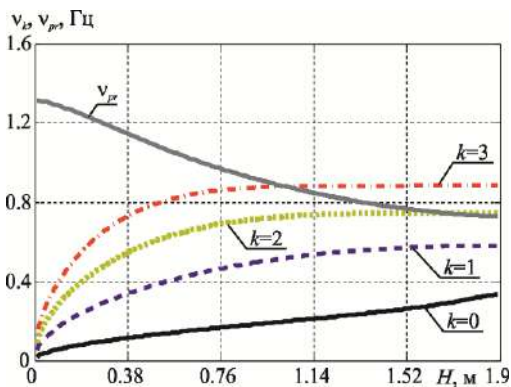


Рисунок 5.19 – Залежності власних частот k -го шару рідини та половинна частота коливань підвіски цистерни від рівня наповнення рідиною H

Аналізуючи залежності з рис. 5.19 відмітимо, що для цього МТА виникнення параметричного резонансу при поздовжньому русі колісного трактора з цистерною на частоті першого осцилятора не можливо, тому що резонансна частота ν_{pr} та довжина хвилі L_d занадто великі, але на частоті третього шару рідини це стає можливим. Проте, оскільки масові-інерційні показники третього шару рідини достатньо малі, то й утворення параметричних коливань при прямолінійному русі колісного трактора з причіпною цистерною в поздовжньо-вертикальній площині не спостерігається (див. рис. 5.20).

Також на утворення параметричних коливань в поздовжньо-вертикальній площині великий вплив здійснює величина розміру цистерни і тому власні частоти парціальних осциляторів не наближені (окрім

третього шару рідини) до резонансної частоти вертикальних коливань цистерни. Але ситуація змінюється при застосуванні поперечних перегородок (рис. 5.21).

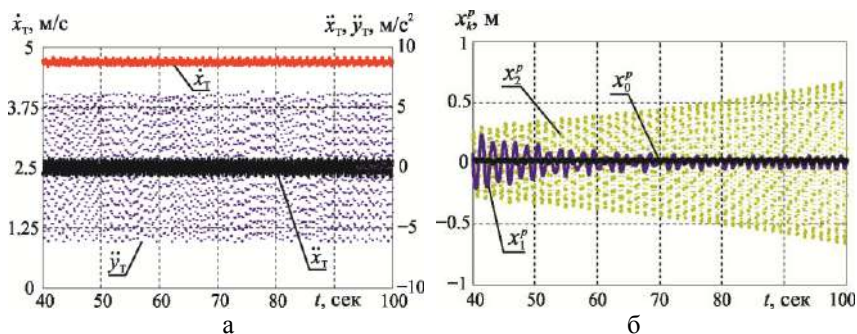


Рисунок 5.20 – Результати сталого руху трактора з цистерною (без перегородок) при рівні наповнення $H = 1,25$ м:

а – залежності курсової швидкості ($\dot{x}_T$), горизонтального прискорення ($\ddot{x}_T$), вертикального прискорення ($\ddot{y}_T$) рами трактора від часу; б – залежності горизонтальних зсувів рідини першого шару (x_0^p), другого шару (x_1^p), третього шару (x_2^p) від часу

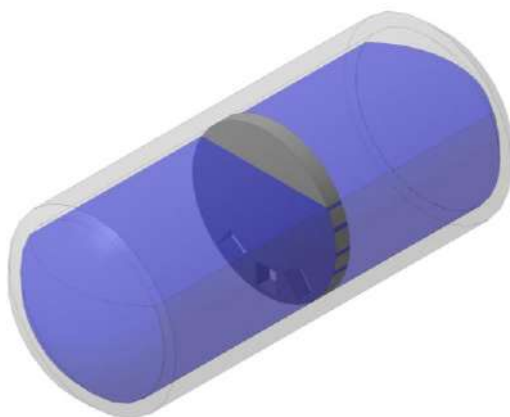


Рисунок 5.21 – Цистерна з перегородкою модельної форми

При впровадженні в цистерну внутрішніх перегородок необхідно зазначити, що вони мають різну форму виконання: поздовжні, поперечні,

оригінальної конструкції (лабіринтної, сферичної, із гофрованими хвилерізами, тощо) [268]. В досліджувану цистерну впроваджується перегородка модельної форми, яка розподіляє ємність на дві частини з можливістю контрольованого перетікання рідини між частинами. Такий вибір обумовлено тим, що для потреб сільського господарства, а також військових потреб, виникає необхідність в транспортуванні двох секційних цистерн з різними видами рідин (наприклад, дизельне паливо та бензин або керосин). Якщо перевезення відбувається з одним видом рідини, тоді в такій цистерні відкривається частина перегородки, утворюючи тим самим єдиний рівень наповнення загальної рідини в цистерні (тобто між секціями відбувається своєрідний «перелив» рідини). Зважаючи на таке впровадження змінюється підхід до визначення поздовжніх коливань парціального осцилятора, а саме у випадку визначення хвильового числа

$$\beta_k = \pi \cdot (2k - 1) / \left(a \cdot (1 + i^p) \right), \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (5.36)$$

де a – довжина цистерни; i^p – число перегородок.

Така зміна призводить до зменшення довжини хвилі (одна перегородка зумовлює зменшення довжини хвилі в 2 рази). Відмітимо, що таке рішення не можна вважати найкращим в контексті зменшення резонансних явищ у динаміці руху; доцільніше було б виконувати такі секції різної довжини. Але, проти такої пропозиції з'являться свої контраргументи, тому розглянемо найпростіший варіант.

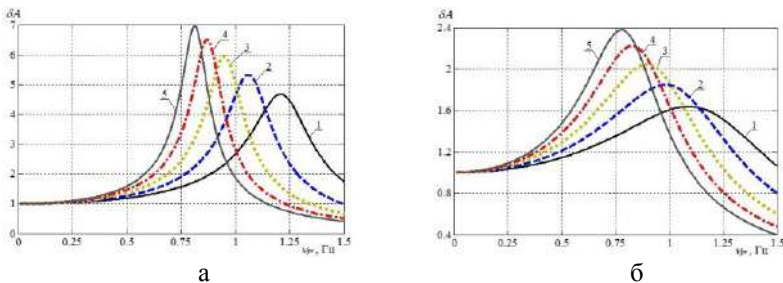


Рисунок 5.22 – Амплітудно-частотна характеристика підвіски цистерни залежно від рівня наповнення рідиною H :

1 – $H = 0,5$ м; 2 – $H = 0,75$ м; 3 – $H = 1,0$ м; 4 – $H = 1,25$ м; 5 – $H = 1,5$ м;
а – підвіска без амортизатора; б – підвіска з амортизатором

Інформацію про коефіцієнти резонансного підсилення можна знайти на графіках з рис. 5.22. Як бачимо, в разі використання амортизаторів про коефіцієнт підсилення можна забути і небезпеку параметричного резонансу теж. Проте, такі пристрої на цистернах для сільського господарства не встановлюються.

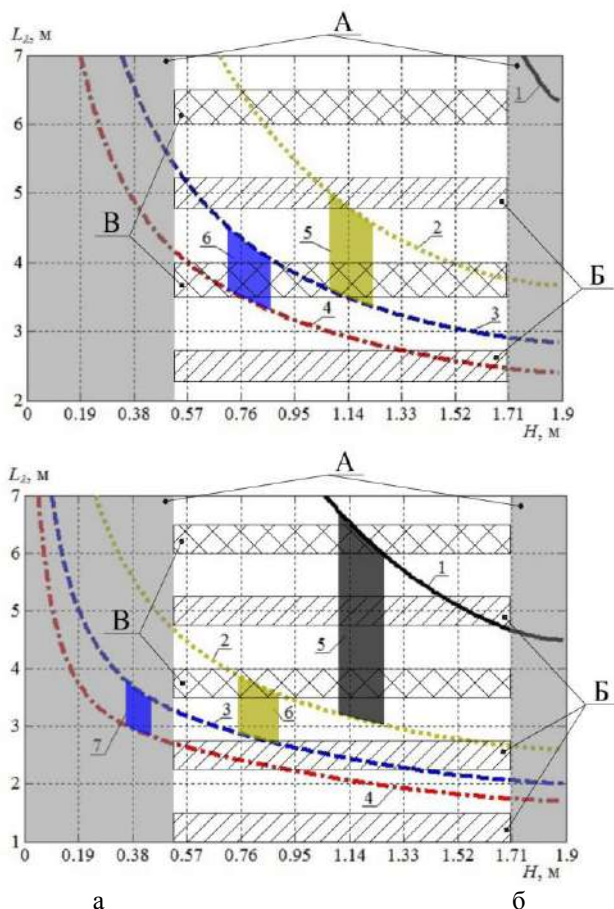


Рисунок 5.23 – Залежність довжина хвилі мікроколивань від рівня рідини H в цистерні:

а – без перегородок; б – з однією перегородкою; 1 – для першого ($k = 0$), 2 – для другого ($k = 1$), 3 – для третього ($k = 2$), 4 – для четвертого ($k = 3$) шарів рідини; 5 – 7 – зони утворення параметричного резонансу

На рис. 5.23 проілюстровано зв'язок між частотами парціальних осциляторів та довжиною резонансної хвилі мікропрофілю дороги (при роботі трактора на режимах зовнішньої характеристики).

У «сіру зону» на рис. 5.23 потрапляють рівні рідини, при яких амплітуда коливань обмежується близькістю до верхнього чи нижнього днища цистерни.

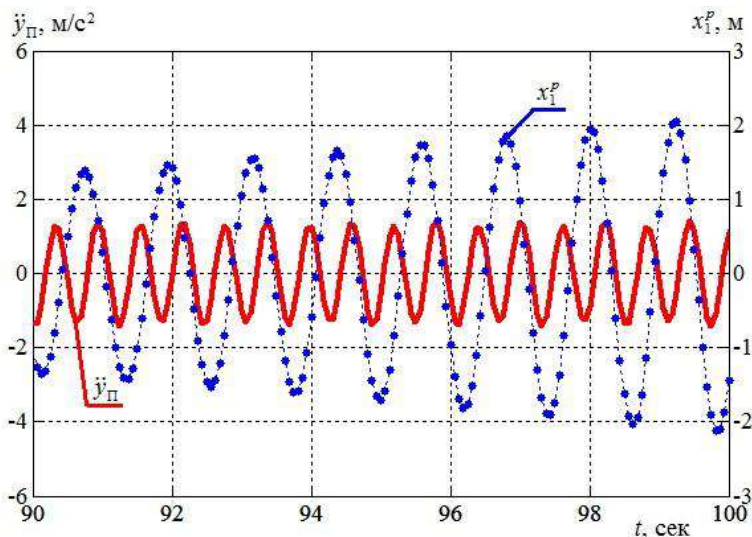


Рисунок 5.24 – Залежність вертикального прискорення рами цистерни та зсуву другого шару рідини ($k = 1$) від часу

З рис. 5.24 помітно, що параметричний резонанс при русі транспортного засобу утворюється горизонтальним зсувом другого поверхневого шару рідини, який коливається з частотою, що в двічі менша за частоту зміни вертикального прискорення. Це співвідношення відповідає так званому головному параметричному резонансу, але, як відомо, рівняння Мат'є має й інші резонансні рішення. Проте, для їх збудження умова резонансного підсилення з боку підвіски цистерни не виконується, тому на них можна не зважати. В той же час з'ясована на рис. 5.25 і проілюстрована на рис. 5.26 можливість і небезпека утворення параметричного резонансу при транспортуванні рідини колісним трактором з цистерною (яка

має поперечну перегородку) вимагає провести додаткове теоретичне і розрахункове дослідження, направлене на надання рекомендацій з уникання цього явища.

Виконаємо дослідження щодо встановлення впливу властивості рідини (її в'язкості) на прояви параметричного резонансу в ході коливань цистерни в поздовжньо-вертикальній площині. Для цього на рис. 5.27 наведемо результати впливу величини декременту загасань рідини на утворення параметричного резонансу при поздовжньому русі трактора з цистерною.

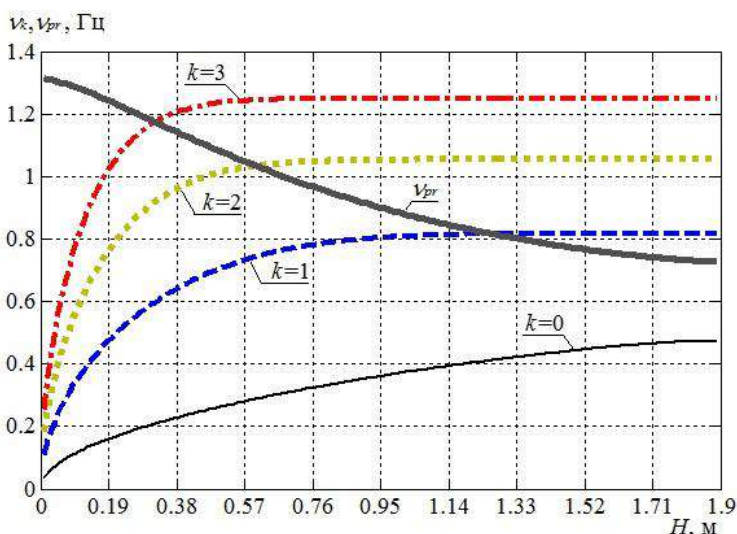


Рисунок 5.25 – Залежності власних частот k -го шару рідини та половинна частота коливань підвіски цистерни (з однією поперечною перегородкою) від рівня наповнення рідиною H

Порівнюючи результати рис. 5.26 (отримані при перевезенні води) з рис. 5.27 а, відмітимо, що при зменшенні величини декременту затухань рідини амплітуда параметричного резонансу збільшується, а при підвищенні величини декременту (рис. 5.27 б) явище параметричного резонансу не спостерігається.

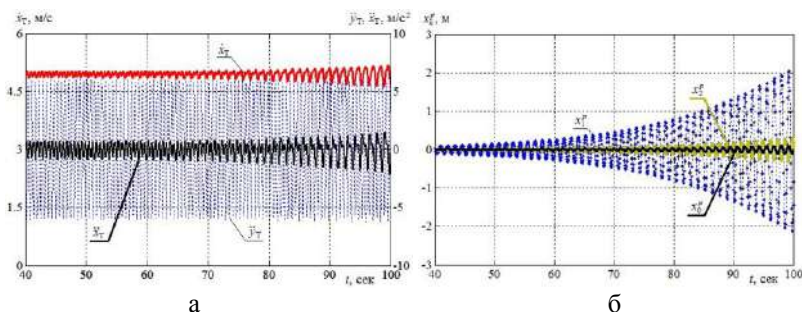


Рисунок 5.26 – Результати розрахунку сталого руху трактора з цистерною (1 перегородка) при рівні наповнення $H = 1,25$ м:

а – залежності курсової швидкості ($\dot{x}_T$), горизонтального прискорення ($\ddot{x}_T$), вертикального прискорення ($\ddot{y}_T$) рами трактора від часу; б – залежності горизонтальних зсувів рідини першого шару (x_0^p), другого шару (x_1^p), третього шару (x_2^p) від часу

Оскільки в сільському господарстві доводиться перевозити рідину різної в'язкості, то практична рекомендація з цього питання може бути така: зрозуміло, що декремент залежить від амплітуди коливань, і потрібно визначити цю залежність та використовувати її при розрахунках цистерни. І тоді, що можливе, параметричний резонанс не буде виглядати таким небезпечним явищем, як на рисунках цього розділу.

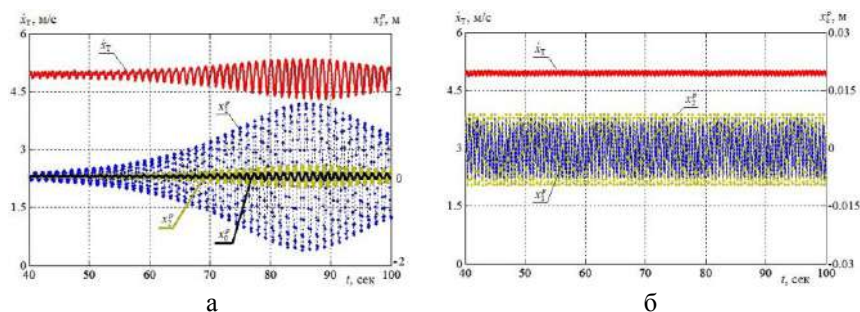


Рисунок 5.27 – Параметри сталого руху трактора з цистерною (1 перегородка) при рівні наповнення $H = 1,25$ м рідиною:
а – 20-ти % розчин цукру у воді; б – рослинна олія

Також з цим пов'язаний вплив амплітуди коливань на частоту парціальних осциляторів, про що йдеться у роботі [251]. У роботі також представлена формула для коефіцієнту зміни частоти, яка має такий вигляд:

$$\Delta\nu = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Delta A}{8}\right)^2 \Delta H^2 \left(2y^2 + 3 + \frac{12}{y^2} - \frac{9}{y^4}\right)}, \quad (5.37)$$

де

$$\Delta A = \varepsilon_k / h; \quad \Delta H = \beta_k h / \pi; \quad y = th(\pi \Delta H),$$

де β_k – хвильове число для k - того парціального осцилятора; ε_k – амплітуда коливань цього осцилятора.

Зазначену амплітуду знаходимо з розв'язку диференційного рівняння

$$\frac{1}{\nu_k} \frac{d(\varepsilon_k^2)}{dt} + \varepsilon_k^2 = [x_k^p(t)]^2. \quad (5.38)$$

Залежностям (5.37) відповідають графіки, що зображено на рис. 5.28. Як бачимо, всі вони мають корені при значенні $\Delta H \approx 0,33$, тобто коли рівень рідини втричі менше за довжину хвилі парціального осцилятора. Саме при такому співвідношенні параметричний резонанс, що розвивається, залишається стійким.

Зони стійкого резонансу було виокремлено на рис. 5.23. Як помітно, для цієї коливальної системи вони розташовані далеко від потенційних параметричних резонансів. Тому ті резонанси, що розвиваються, виявляються нестійкими: при збільшенні амплітуди коливань власна частота осцилятора, що резонує, зменшується, і ця обставина обмежує подальший розвиток резонансу в бік необмеженого зростання амплітуди.

Дію описаного вище механізму відстроювання від резонансу проілюстровано на рис. 5.29, 5.30. Помітно, як на початку процесу зростає амплітуда коливань другого парціального шару рідини і зменшується власна частота цього парціального осцилятора (бо величина $\Delta H > 0,33$, і тому коефіцієнт $\Delta\nu$ на рис. 5.29 зменшується). Що обмежує розвиток резонансу на рис. 5.30.

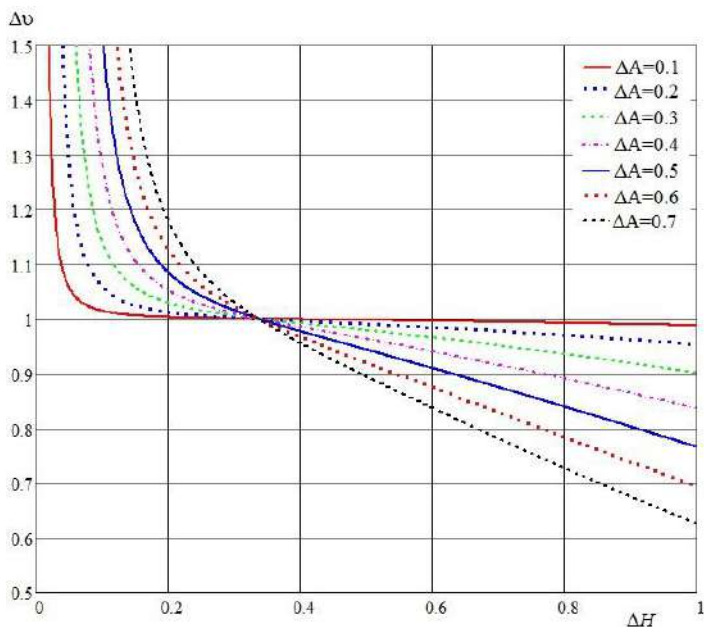


Рисунок 5.28 – Графіки коефіцієнта $\Delta\nu$ зміни частоти в залежності від відносного рівня рідини ΔH і відносної амплітуди коливань ΔA

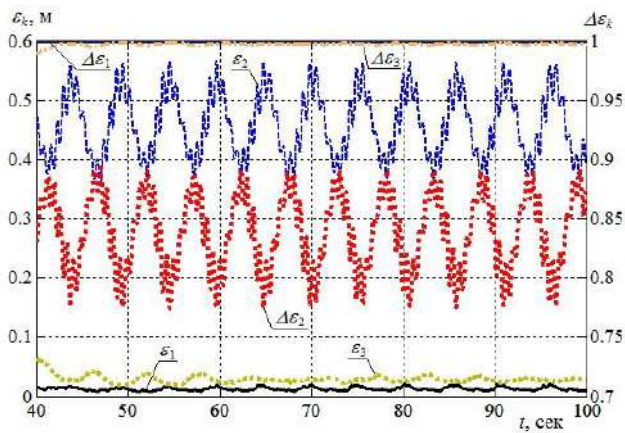


Рисунок 5.29 – Зміни амплітуд коливань і коефіцієнтів коректування частоти для парціальних осциляторів в процесі сталого руху трактора з цистерною

Оскільки на утворення параметричного резонансу значним чином впливає величина довжини хвилі мікроколивань, тоді наведемо результати моделювання при зміні колісної бази транспортного засобу. На рис. 5.20, 5.23 величина колісної бази трактора ХТЗ-242К дорівнює 2,86 м, для аналізу збільшимо цю величину до 3,05 м (як у колісного трактора John Deere 8R). Результати наведено на рис. 5.31. Відмітимо, що при збільшенні колісної бази трактора збільшується швидкість наростання амплітуди параметричного резонансу, що обумовлено збігом величини колісної бази з довжиною хвилі мікроколивань. Результати з рис. 5.31 є дослідними, адже при збільшенні величини колісної бази необхідно змінювати пружні та дисипативні характеристики трактора.

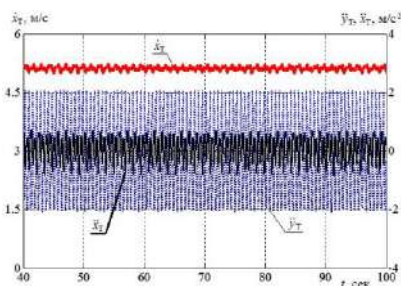


Рисунок 5.30 – Параметри сталого руху трактора з цистерною після врахування зміни частот парціальних осциляторів

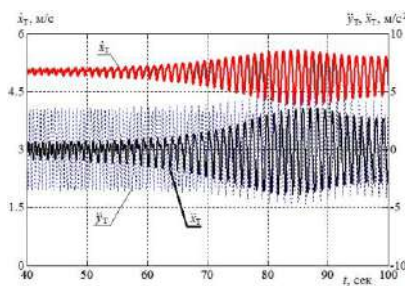


Рисунок 5.31 – Параметри сталого руху трактора з цистерною (одна перегородка) при рівні рідини $H = 1,25$ м; колісна база 3,05 м

Але більше значення має вибір колісної бази цистерни; у цистерни BSA KTW 20 вона дорівнює 2,5 м. Якщо цю базу можна збільшити до 4,5 м або зменшити до 1,5 м, то при довжині хвилі $L_\lambda = 3$ м вертикальні коливання будуть відсутніми, і параметричний резонанс, показаний на рис. 4.22, не відбудеться. Ясно, що виконати таку умову буде складно, тому, зберігаючи наявну колісну базу 2,5 м, на рис. 5.23 ми виокремили зони Б, в яких параметричний резонанс неможливий в принципі.

На противагу зоні Б, там же відмічена зона В, у якій амплітуда вертикальних прискорень є найбільшою, а горизонтальні прискорення (з боку нерівностей дороги) відсутні. В цій зоні коливання парціального осцилятора, що резонує, описується однорідним диференціальним рівнянням Мат'є.

Зміна пружних та дисипативних властивостей підресорених і непідресорених мас впливає на загальну коливальну схему будь-якого транспортного засобу. На рис. 5.32 представлено результати моделювання при зменшенні на 17% пружних характеристик непідресорених мас цистерни. З рис. 5.32 помітно, що розвиток параметричного резонансу зберігається, але його дія на поздовжній рух трактора нівелюється.

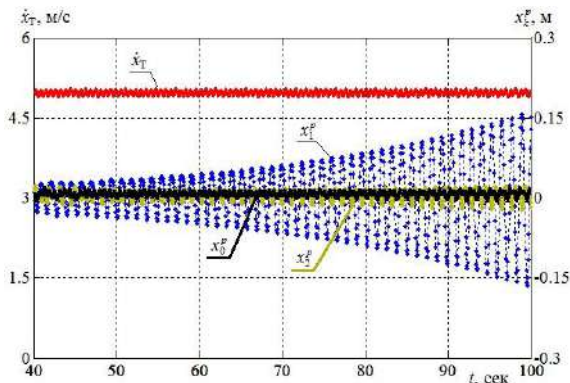


Рисунок 5.32 – Результати сталого руху трактора з цистерною (1 перегородка, рівень $H = 1,25$ м) при зменшенні пружних властивостей непідресорених мас цистерни

Таким чином, підсумовуючи матеріал цього пункту, можна стверджувати, що у розробників тракторних цистерн є широкий арсенал методів, які унеможливають або уповільнюють та обмежують розвиток параметричного резонансу. Свій вклад в обмеження параметричного резонансу вносить трактор, який в умовах інтенсивних поздовжніх коливань зменшує середню швидкість в наслідок зростання сил опору руху з боку дорожнього покриття. Аналізуючи такий процес, за графіками швидкостей руху можна відмітити (рис. 5.31), як трактор з цистерною, умовно кажучи, «в'їжджає» в резонансну зону, та згодом «виїжджає» з неї, утворюючи модульовані за амплітудою коливання низької частоти.

Залишилось роз'яснити користь від уповільнення розвитку параметричного резонансу. Як помітно, цей резонанс розвивається за умови збереження відповідної довжини хвилі коливань мікропрофілю дороги, яка утворюється, наприклад, при застосуванні дорожніх плит відповідного

розміру або від систематичного проїзду вантажівок по ґрунтовій дорозі. Зрозуміло, що на протяжних ділянках дороги ця умова порушується, і подальший розвиток параметричного резонансу закінчується при невеликих амплітудах коливань.

Отже, для аналізу параметричного резонансу, що досліджується, доречно долучити теорію головного резонансу для однорідного рівняння Мат'є [217]. Відповідно до другого парціального осцилятора таке рівняння має вигляд

$$\ddot{x}_1^p + \frac{\delta}{\pi} \omega_1 \dot{x}_1^p + \omega_1^2 (1 + \eta \cdot \cos(2(\omega_1 \delta \omega) t)) x_1^p = 0, \quad (5.39)$$

де

$$\eta = A_\lambda (2\omega_1)^2 \frac{\delta A}{g}; \quad (\omega_1)^2 = g \beta_1 t h (\beta_1 h) \approx g \beta_1; \quad \delta \omega \approx 0.$$

Мінімальне значення безрозмірної амплітуди η , що веде до резонансу, становить

$$\eta_* = \frac{4\delta}{3\pi},$$

звідки отримаємо умову на амплітуду мікропрофілю:

$$A_\lambda \cdot \delta A > \frac{g}{\omega_1^2} \frac{\delta}{3\pi} \approx 0,04\delta. \quad (5.40)$$

Якщо декремент $\delta = 0,03 - 0,05$, що відповідає слабо в'язкій рідині при малій амплітуді коливань, умова (5.40) легко виконується і без резонансного підсилення δA . Але, при наявному рівні вертикальних прискорень цистерни $0,3 \div 0,5 \text{ м/с}^2$ резонанс розвивається дуже повільно, і з цієї причини втрачає стійкість. Інша річ, коли ці прискорення стають більшими $1,5 \text{ м/с}^2$. Тому переходимо в район точки перетину ліній на рис. 5.23 і сформуємо наступну умову *стійкості*: при рівні $h = 0,5H$, тобто при 50% навантаження цистерни,

$$v_{pr} > v_1. \quad (5.41)$$

Звідки, використовуючи наближені рівності

$$v_{pr} = \frac{0,5}{2\pi} \sqrt{\frac{c_{pr}}{m_{pr}}} = \frac{0,5}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{\Delta_{pr}}} ; \quad v_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{\sqrt{g\beta_1}}{2\pi},$$

отримуємо (при встановленні поперечної перегородки):

$$\Delta_{pr} < 0,025a, \quad (5.42)$$

де Δ_{pr} – це усадка цистерни при 50% навантаженні.

Для цистерни BSA KTW 20 довжина $a = 7$ м, тож максимальна допустима усадка складе $\Delta_{pr} = 0,175$ м. Проте, діючи аналогічно, отримуємо умову параметричної стійкості при поперечних коливаннях:

$$\Delta_{pr} < 0,05b, \quad (5.43)$$

де у іншому коефіцієнті враховано відсутність поздовжньої перегородки.

У цистерни BSA KTW 20 ширина $b = 1,9$ м, і тому допустима усадка цистерни при її 50% навантаженні становитиме $\Delta_{pr} = 0,095$ м. Зрозуміло, що з двох отриманих значень допустимої усадки Δ_{pr} для подальшого дослідження (і уточнення з використанням розроблених моделей) треба вибрати мінімальне.

5.3 Формування нелінійної математичної моделі коливань мас системи «трактор – цистерна» в поперечно-вертикальній площині

При складанні нелінійних моделей руху в поперечній площині необхідно враховувати те, що поперечно-кутові коливання мають великий вплив при виконанні повороту. Але невідомим залишається вплив рідини у цистерни на коливання поперечній площині при прямолінійному русі. Тому сформуємо розрахункові схеми відповідних систем (рис. 5.33).

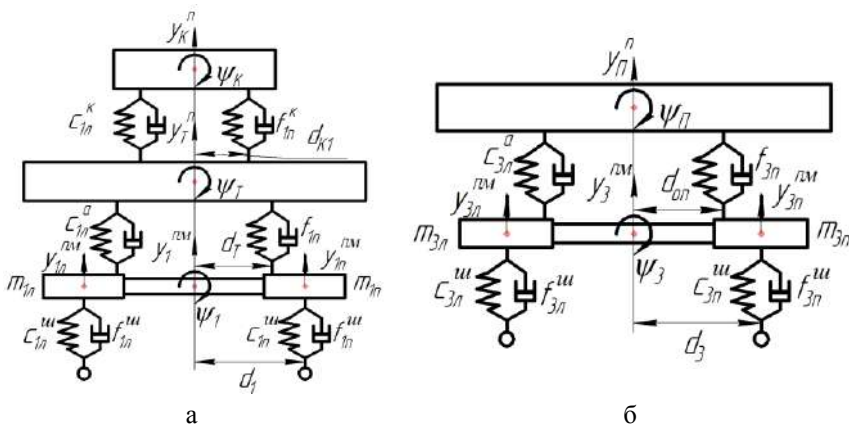


Рисунок 5.33 – Розрахункові схеми коливань в поперечній площині:
а – передній міст колісного трактора; б – передній міст цистерни

Математична модель коливань рухомих вузлів трактора в поперечній площині описується наступними рівняннями. Попережно-кутові переміщення рами, переднього та заднього мостів і кабіни відповідають диференціальним рівнянням руху, складеним для відповідної маси:

$$\begin{aligned}
 & J_T^{\Pi} \ddot{\psi}_T + 2(f_1 + f_2) d_T^2 \dot{\psi}_T + 2(c_1^a + c_2^a) d_T^2 \psi_T - 2(f_1 d_{\kappa 1}^2 + f_2 d_{\kappa 2}^2) \dot{\psi}_K - \\
 & - 2(c_1^{\kappa} d_{\kappa 1}^2 + c_2^{\kappa} d_{\kappa 2}^2) \psi_K - 2d_T^2 (f_1 \dot{\psi}_1 - c_1^a \psi_1) - 2d_T^2 (f_2 \dot{\psi}_2 - c_2^a \psi_2) = 0; \\
 & J_1^{\Pi} \ddot{\psi}_1 + 2(f_1 d_T^2 + f_1^w d_1^2) \dot{\psi}_1 + (2c_1^a d_T^2 + 2c_1^w d_1^2) \psi_1 - 2f_1 d_1^2 \dot{\psi}_T - 2c_1^a d_1^2 \psi_T = \\
 & = c_1^w d_1 (y_{\Gamma P 1}^n - y_{\Gamma P 1}^n) + f_1^w d_1 (\dot{y}_{\Gamma P 1}^n - \dot{y}_{\Gamma P 1}^n); \\
 & J_2^{\Pi} \ddot{\psi}_2 + 2(f_2 d_T^2 + f_2^w d_2^2) \dot{\psi}_2 + 2(c_2^a d_T^2 + c_2^w d_2^2) \psi_2 - 2f_2 d_2^2 \dot{\psi}_T - 2c_2^a d_2^2 \psi_T = \\
 & = c_2^w d_2 (y_{\Gamma P 2}^n - y_{\Gamma P 2}^n) + f_2^w d_2 (\dot{y}_{\Gamma P 2}^n - \dot{y}_{\Gamma P 2}^n); \\
 & J_K^{\Pi} \ddot{\psi}_K + 2(f_1 d_{\kappa 1}^2 + f_2 d_{\kappa 2}^2) \dot{\psi}_K + 2(c_1^{\kappa} d_{\kappa 1}^2 + c_2^{\kappa} d_{\kappa 2}^2) \psi_K - \\
 & - 2(f_1 d_{\kappa 1}^2 + f_2 d_{\kappa 2}^2) \dot{\psi}_T - 2(c_1^{\kappa} d_{\kappa 1}^2 + c_2^{\kappa} d_{\kappa 2}^2) \psi_T = 0,
 \end{aligned}$$

звідки

$$2c_1^a = c_{1L}^a + c_{1n}^a; \quad (5.44)$$

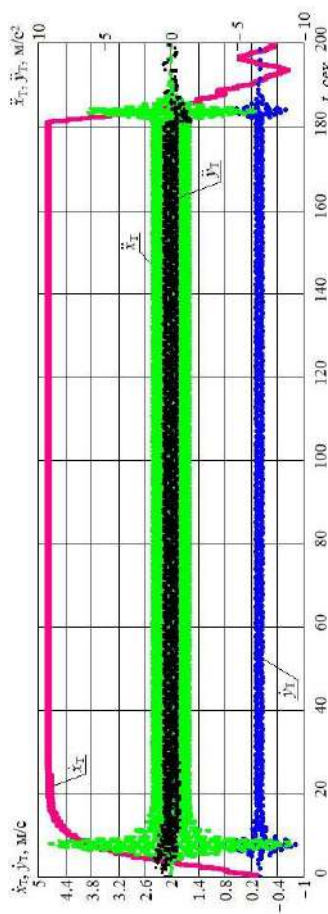
$$\psi_1 = \frac{(y_{1n}^{nm} - y_{1n}^{nm})}{2d_1} \rightarrow y_1^{nm} = \frac{\psi_1}{d_1}, \quad (5.45)$$

де y_1^{nm} – вертикальне переміщення переднього моста внаслідок дії поперечного кута нахилу ψ_1 .

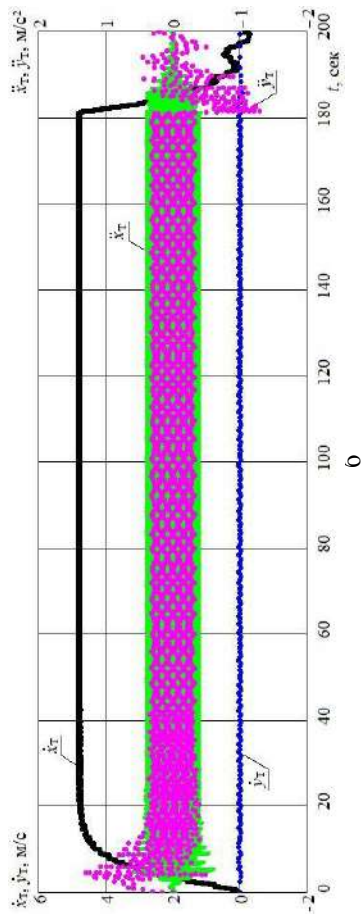
Вирази (5.44) та (5.45) мають таку ж математичну природу, як і при визначенні інших жорсткостей та вертикальних переміщень інших рухомих елементів колісного трактора в поперечній площині руху. Математична модель коливань рухомих вузлів цистерни в поперечній площині описується наступними рівняннями. Поперечно-кутові переміщення плаформи цистерни разом з мостами знаходимо з диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} & J_{\Pi}^{\Pi} \ddot{\psi}_{\Pi} + 2(f_3 + f_4) d_{on}^2 \dot{\psi}_{\Pi} + 2(c_3^a + c_4^a) d_{on}^2 \psi_{\Pi} - \\ & - 2f_3 d_3^2 \dot{\psi}_3 - 2c_3^a d_3^2 \psi_3 - 2f_4 d_4^2 \dot{\psi}_4 - 2c_4^a d_4^2 \psi_4 = 0; \\ & J_3^{\Pi} \ddot{\psi}_3 + (2f_3 d_{on}^2 + 2f_3^u d_3^2) \dot{\psi}_3 + (2c_3^a d_{on}^2 + 2c_3^u d_3^2) \psi_3 - \\ & - 2f_3 d_3^2 \dot{\psi}_{\Pi} - 2c_3^a d_3^2 \psi_{\Pi} = c_3^u d_3 (y_{\Gamma P3}^n - y_{\Gamma P3}^n) + f_3^u d_3 (\dot{y}_{\Gamma P3}^n - \dot{y}_{\Gamma P3}^n); \\ & J_4^{\Pi} \ddot{\psi}_4 + (2f_4 d_{on}^2 + 2f_4^u d_4^2) \dot{\psi}_4 + (2c_4^a d_{on}^2 + 2c_4^u d_4^2) \psi_4 - \\ & - 2f_4 d_4^2 \dot{\psi}_{\Pi} - 2c_4^a d_4^2 \psi_{\Pi} = c_4^u d_4 (y_{\Gamma P4}^n - y_{\Gamma P4}^n) + f_4^u d_4 (\dot{y}_{\Gamma P4}^n - \dot{y}_{\Gamma P4}^n); \\ & J_3^{*\Pi} \ddot{\psi}_3^* + (2f_{3-4} d_{on}^2 + 4f_3^u d_3^2) \dot{\psi}_3^* + (2c_{3-4}^a d_{on}^2 + 4c_3^u d_3^2) \psi_3^* - 2f_{3-4} d_3^2 \dot{\psi}_{\Pi} - 2c_{3-4}^a d_3^2 \psi_{\Pi} = \\ & = c_3^u d_3 (y_{\Gamma P3}^n - y_{\Gamma P3}^n) + f_3^u d_3 (\dot{y}_{\Gamma P3}^n - \dot{y}_{\Gamma P3}^n) + c_4^u d_4 (y_{\Gamma P4}^n - y_{\Gamma P4}^n) + f_4^u d_4 (\dot{y}_{\Gamma P4}^n - \dot{y}_{\Gamma P4}^n). \end{aligned}$$

Як і у випадку з моделюванням поздовжнього руху, для коливань в поперечній площині бралися однакові умови для дії зовнішніх збурюючих сил. Результати моделювання наведені на рис. 5.34 та 5.35.



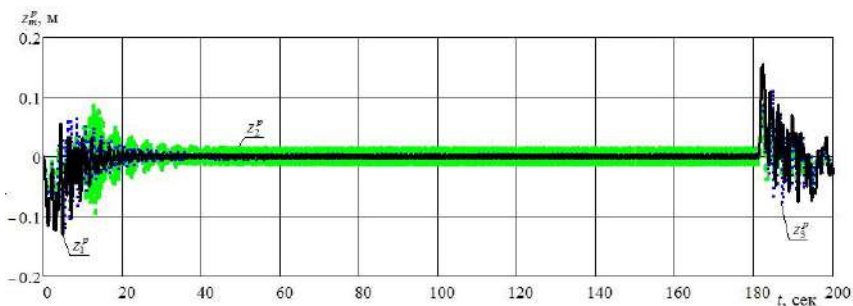
а



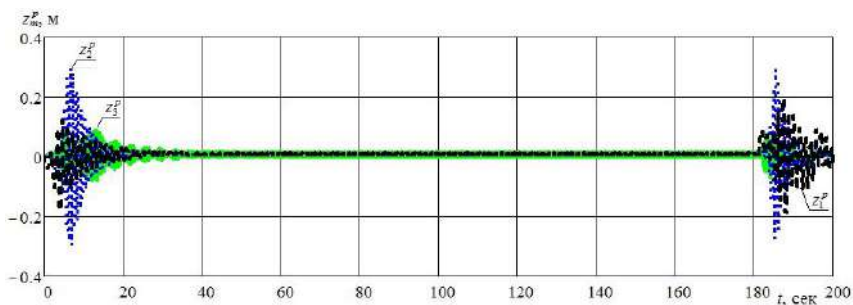
б

Рисунок 5.34 – Графіки зміни курсової швидкості та прискорення остова ХТЗ-242К під впливом коливань в поперечно-вертикальній площині:

а – причіпна цистерна BSA KTW 20; б – напівпричіпна цистерна ВНЦ-20



а



б

Рисунок 5.35 – Графіки поперечних зсувів поверхневих шарів рідини:

а – ХТЗ-242К, цистерна BSA KTW 20; б – ХТЗ-242К, цистерна ВНЦ-

20

5.4 Параметричні коливання в системі «трактор – цистерна» в поперечно-вертикальній площині

Утворення параметричних коливань в поперечно-вертикальній площині руху колісного трактора з цистерною обумовлено тим, що поперечний розмір цистерни є відносно невеликим, і тому власні частоти парціальних осциляторів наближені до резонансної половинної частоти вертикальних коливань цистерни. Як помітно з рис. 5.36, зона динамічної нестійкості виникає при рівні рідини $H = 1,25$ м. Рівень $H = 1,22$ м характеризується, як до резонансний, а рівень $H = 1,28$ м – після резонансний. Значний вплив на формування параметричного резонансу здійс-

нюють властивості рідини, що транспортуються, зокрема, логарифмічний декремент загасання δ , який залежить від її в'язкості.

На рис. 5.36 показані результати при транспортуванні води, а на рис. 5.37 – 20-ти % водного розчину цукру. Порівнюючи ці результати звернемо увагу на те, що зниження величини декременту призводить до збільшення зони параметричного резонансу, а також збільшення частоти параметричних коливань. Однак, збільшення величини декременту при транспортуванні, наприклад рослинної олії, виключає появу параметричного резонансу.

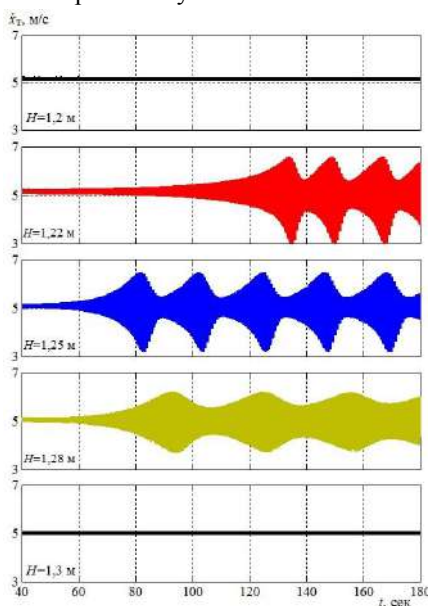


Рисунок 5.36 – Залежність курсової швидкості руху транспортного засобу від рівня рідини H (вода)

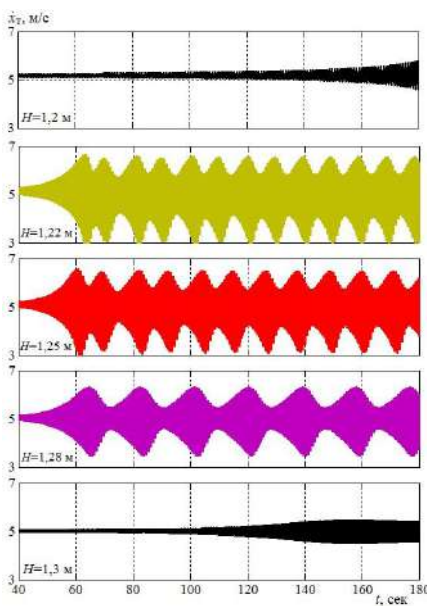


Рисунок 5.37 – Залежність курсової швидкості руху транспортного засобу від рівня рідини H (розчин цукру у воді)

Виникнення параметричного резонансу обумовлено зростанням амплітуди коливань другого шару рідини (так само, як і при поздовжньо-вертикальних коливаннях). З рис. 5.38 помітно, що частота коливання другого шару рідини в 2 рази вища, ніж частота коливання вертикальних

прискорень рами трактора, і це є ознакою саме параметричного резонансу.

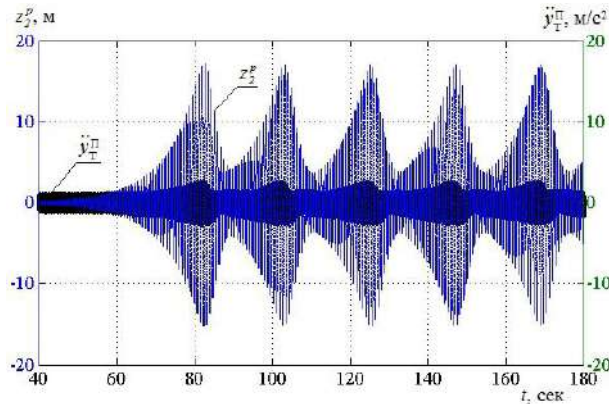


Рисунок 5.38 – Залежності поперечних зсувів слою рідини z_2^p і вертикального прискорення остову $\ddot{y}_T^{II}$ в режимі сталого руху при $H = 1,25$ м

При виникненні параметричного резонансу, що спостерігається, значну роль відіграють зовнішні кінематичні чинники та збурювальні сили. Зокрема, таким чинником виступає довжина хвилі мікроколивань рельєфу на дорожньому полотні. Зміна середньої швидкості трактора, що відбувається під впливом тертя, підвищеного за рахунок резонансу, дозволяє системі на деякий проміжок часу відстроюватися від умов виникнення резонансу, але згодом цей режим повертається знов і знов. Схоже явище спостерігається і на рис. 5.31, проте при дослідженні руху в поперечній площині результати подібні до проявів автоколивань або прояв ефектів *биття частот*.

Проведемо аналіз зміни зони параметричного резонансу при варіюванні довжини хвилі мікроколивань L_λ . Відмітимо, що на рис. 5.36 дослідження проводиться при $L_\lambda = 2$ м.

Збільшуючи довжину хвилі на 5% (тобто до значення $L_\lambda = 2,1$ м), відмічаємо, що зона динамічної нестійкості зміщується в бік зменшення висоти рівня наповнення (рис. 5.39); приблизно на 8% в порівнянні з результатами при довжині $L_\lambda = 2$ м.

При зменшенні довжини хвилі на 5% ($L_\lambda = 1,9$ м) зона динамічної

нестійкості зміщується в бік збільшення висоти рівня наповнення (рис. 5.40); приблизно на 7% в порівнянні з результатами при довжині $L_\lambda = 2$ м.

Відмітимо, що при зменшенні довжини хвилі мікронерівностей звужується і зона динамічної нестійкості агрегату.

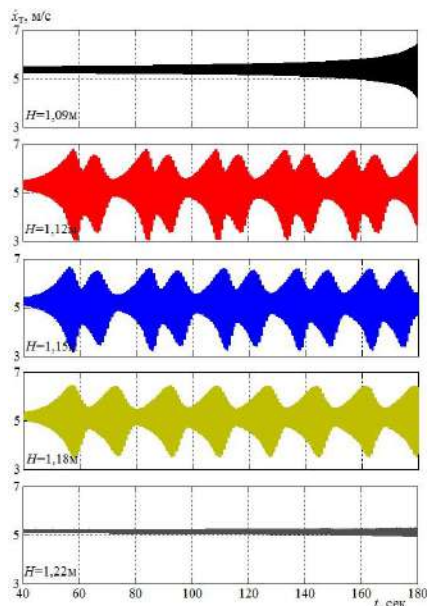


Рисунок 5.39 – Залежність курсової швидкості руху засобу (при $L_\lambda = 2,1$ м) від рівня рідини H

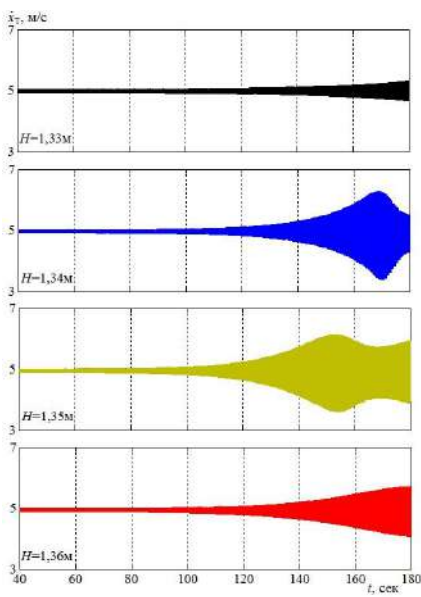


Рисунок 5.40 – Залежність курсової швидкості руху засобу (при $L_\lambda = 1,9$ м) від рівня рідини H

Таким чином, дослідження показали, що на ці параметричні коливання суттєво впливають властивості рідини та параметри кінематичного збурення системи. Проте, і в цьому випадку зберігається актуальність умови (5.43).

Підсумовуючи вище сказано виокремимо головні тези:

– встановлено, що при математичному моделюванні коливань трактора з цистерною в поздовжньо-вертикальній площині інколи виникають параметричні коливання. Ці коливання простежуються при русі третього

парціального шару рідини в цистерні, інерційні показники якого достатньо малі, і це не впливає на рух транспортного засобу. Проте впровадження поперечної перегородки в причіпну цистерну призводить до утворення резонансних зсувів другого шару рідини, масові характеристики якого значно більші, що дає можливість і небезпеку створення параметричного резонансу;

- при дослідженні коливань трактора з цистерною в поперечно-вертикальній площині виникнення параметричних коливань обґрунтовується тим, що поперечний розмір цистерни є відносно невеликим, і тому власні частоти парціальних осциляторів наближені до резонансної половинної частоти вертикальних коливань цистерни;

- значний вплив на утворення параметричних резонансів становлять властивості транспортованої рідини (рідина з малою в'язкістю є більш піддатливою), а також кінематичні збурюючі фактори (довжина і амплітуда хвилі мікропрофілю дорожньої поверхні), колісні бази і конструктивні особливості підвіски трактора та цистерни;

- визначено достатню умову для забезпечення стійкості колісного трактора з цистерною щодо параметричних резонансів, після наповнення цистерни рідиною рекомендовано щоб додаткове значення сумарної деформації підвіски і шин не перевищувало 10% від поперечного розміру (діаметру) цистерни.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Ребров А. Ю. Определение рациональной энергонасыщенности пахотного МТА на базе колесного сельскохозяйственного трактора / А. Ю. Ребров, В. Б. Самородов, В. В. Кучков // Механіка та машинобудування. — 2011. — № 1. — С. 136–140.

2. Клименко Н. П. Сравнительный анализ и перспективы использования колесных тракторов в сельском хозяйстве / Н. П. Клименко, В. Г. Кухтов, А. П. Лупандина // Теоретические и практические вопросы науки XXI : сб. ст. Междунар. научно–практ. конф., г. Уфа, 28 янв. 2015 г. — Уфа : Омега Сайнс, 2015. — С. 51–55. — Сведения доступны также по интернету: <https://os-russia.com/SBORNIKI/KON-33.pdf> (дата обращения: 05.05.2020).

3. Лебедев А. Т. Некоторые проблемы теории трактора тягово–энергетической концепции / Лебедев А. Т. // Вісник Харків. нац. техн. ун–ту сіл. госп–ва ім. Петра Василенка. — Харків, 2012. — Вип. 124, т. 2. — С. 5–13.

4. Трактори [Електронний ресурс] // Case in: agriculture : сайт. — Режим доступу: <https://www.caseih.com/emea/en-gb> (дата звернення: 05.05.2020).

5. CLAAS [Електронний ресурс]. — Режим доступу: <https://www.claas.ua/cl-pw-ru> (дата звернення: 05.05.2020).

6. Tractors [Електронний ресурс] // John Deere : сайт. — Режим доступу: <https://www.deere.ua/ru/%D1%82%D1%80%D0%B0%D0%BA%D1%82%D0%BE%D1%80%D1%8B/> (дата звернення: 05.05.2020).

7. Тракторы [Электронный ресурс] // Technotorg : сайт. — Режим доступа: <https://technotorg.com/catalogue/Tractory.html?b=30&70=170&44=> (дата обращения: 05.05.2020).

8. Трактори [Електронний ресурс] // Харківський тракторний завод : сайт. — Режим доступу: <http://xtz.ua/ua/tractory/> (дата звернення: 05.05.2020).

9. Шуляк М. Л. Формування функціональної стабільності тракторів на транспортних роботах : автореф. дис. ... д–ра техн. наук : 05.22.02 /

Шуляк Михайло Леонідович ; Харків. нац. автомоб.-дорож. ун-т. — Харків, 2017. — 40 с.

10. Ильченко В. Ю. Машиновикористання в землеробстві / Ильченко В. Ю., Нагірний Ю. П., Джолос П. А. — Київ : Урожай, 1996. — 384 с.

11. Капланович М. С. Справочник по сельскохозяйственным транспортным работам. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва : Росагропромиздат, 1988. — 366 с.

12. Пути дальнейшей модернизации транспортных средств для АПК / Н. В. Бышов, С. Н. Борычев, И. А. Успенский [и др.] // Научный журнал КубГАУ : политем. сетевой электрон. науч. журнал Кубанского гос. аграрного ун-та. — 2016. — № 123(09). — С. 142–168.

13. Гидравлическая мешалка [Электронный ресурс] // Meprozet. Kościan : сайт. — Режим доступа: http://meprozet.pl/Hydrauliczne_mieszadlo_slimakowe_ru.html (дата обращения: 20.10.2019).

14. Šíma V. Buquoy's Problem / V. Šíma, J. Podolský // European Journal of Physics, 2005. — № 26, pp. 1037 – 1045. doi: 10.1088/0143-0807/26/6/011

15. Домнышев А.А. Экспериментальное решение задачи Букуа / А.А. Домнышев // Политехнический молодежный журнал, 2019. — № 12. — С. 1 – 11. doi: 10.18698/2541-8009-2019-12-553

16. Romano G. On the role of control windows in continuum dynamics / G. Romano, R. Barretta, M. Diaco // Acta Mech, 2018. — № 4 (229). — pp. 1849 – 1868. doi: 10.1007/s00707-017-2050-x

17. Štys D. Georg de Buquoy – Founder of Mathematical Economy with South Bohemian Roots / D. Štys, M. Vlačíhová // arXiv preprint arXiv:1007.0472. – 2010.

18. Pesce, Celso Pupo, and Leonardo Casetta. "Variable mass systems dynamics in engineering mechanics education." 19th International Congress of Mechanical Engineering, November 5-9, 2007, Brasília, DF

19. von Buquoy G. Analytische Bestimmung des Gesetzes der virtuellen Geschwindigkeiten in mechanischer und statistischer Hinsicht / G. von Buquoy // Breitkopf und Härtel, 1812.

20. von Buquoy G. Weitere Entwicklung und Anwendung des Gesetzes

der virtuellen Geschwindigkeiten in mechanischer und statischer Hinsicht / G. von Buquoy // Breitkopf und Härtel, 1814. – № 1.

21. von Buquoy G. Exposition d'un nouveau principe général de dynamique, dont le principe des vitesses virtuelles n'est qu'un cas particulier / G. von Buquoy // Courcier, 1815. – № 13(2).

22. Мещерский И.В. Работы по механике тел переменной массы. – Москва: Изд. Техничко-теоретической литературы, 1949. – 275 с.

23. Космодемьянский А.А. Механика тел переменной массы / А.А. Космодемьянский. – М.: Военное издательство, 1949. – 215 с.

24. Циолковский К.Э. Исследование мировых пространств реактивными приборами. – «Научное обозрение», 1903. – № 5. – С. 45 – 75.

25. Поляков В.А. Рациональная реализация математической модели движения магнитолевитирующего поезда / В.А. Поляков; Н.М. Хачапуридзе // Наука и прогресс транспорта. Вестник Днепропетровского национального университета железнодорожного транспорта, 2007. – №19. – С. 183 – 189.

26. Belknap S.B. A general transport rule for variable mass dynamics / S.B. Belknap // AIAA Journal, 1972. – № 10(9). – P. 1137 – 1138. doi: 10.2514/3.50334

27. Чернявский Д.И. Механический импульс энергии материальной точки переменной массы / Д.И. Чернявский, Д.Д. Чернявская // Омский научный вестник, 2013. – № 2 (120). – С. 62-64.

28. Чернявский, Д. И. Расчет на прочность элементов горных машин при упругопластическом ударе / Д. И. Чернявский. – Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. – 2002. – № 1. – С. 88–94.

29. Чернявский, Д. И. Оценка эффективности горизонтальной забивки стрелы, свай и труб в грунт / Д. И. Чернявский // Вестник машиностроения. – 2002. – № 2. – С. 14–16.

30. Ольшанский В.П. Моделирование колебаний осциллятора линейнопеременной массы при импульсном нагружении / В.П. Ольшанский, С.В. Ольшанский // Вісник НТУ «ХПІ»: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ» – 2013. – №37(1010). – С. 125 – 130.

31. Ольшанский В.П. Нестационарные колебания осциллятора при экспоненциальном изменении его массы / В.П. Ольшанский, С.В. Ольшанский // Динамические системы. – Симферополь: ВНУ, 2014. – Т. 3 (31), № 3 – 4. – С. 321 – 326.
32. Леженкин А.Н. Дифференциальные уравнения движения уборочного агрегата с переменной массой / А.Н. Леженкин, С.М. Коломиец – Университетская наука, 2018. – № 2 (6). – С. 152 – 154.
33. Леженкин А.Н. Моделирование процесса движения агрегата с переменной массой / А.Н. Леженкин, С.М. Григоренко // Науковий вісник ТДАТУ. – Мелітополь, 2012. – № 2(2). – С. 80 – 86.
34. Леженкин А.Н. Определение скорости движения уборочного агрегата с переменной массой / А.Н. Леженкин, Н.А. Рубцов, С.М. Григоренко // Праці ТДАТУ. – Мелітополь, 2013. – № 13(3). – С. 79 – 85.
35. Свитачев А.И. Моделирование динамики тягово-транспортных машин с элементами конструкций переменной массы / А.И. Свитачев, А.С. Разуваева, А.Н. Чекаев // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование, 2012. – № 1(33). – С. 91 – 92.
36. Шуляк М.Л. Колебание скорости МТА переменной массы при установившемся режиме движения / М.Л. Шуляк // Motrol Commision of motorization and energetics in agriculture, 2015. – № 17(7). – С. 23 – 29.
37. Калінін Є.І. Формування системних властивостей транспортно-технологічних агрегатів змінної маси: автореф. дис. ... д-ра техн. наук: 05.22.20 / Калінін Євген Іванович; Харків. нац. автомоб.-дорож. ун-т. – Харків, 2019. – 40 с.
38. Иванов К.М. Прикладная теория пластичности: учебное пособие / К.М. Иванов [и др.]; под ред. К.М. Иванова. – СПб.: Политехника, 2011. – 375 с.
39. Седов Л. И. Механика сплошной среды. В 2-х томах. – М.: Наука – Физматлит, 1995. – Т.1. – 536 с., Т.2. – 576 с.
40. Слезкин Н. А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. – М.: Гос. изд-во физ.- тех. лит-ры, 1955. – 521 с
41. Жилин П. А. Рациональная механика сплошных сред : учеб. пособие / П. А. Жилин. — СПб. : Изд-во Политехн. ун-та, 2012. — 584 с.
42. Богачев В.Я. Моделирование процесса развития внутреннего

давления в котле цистерны и напряженного состояния днища при маневровом соударении: дис. ... канд. техн. наук: 05.22.07 / Богачев Вячеслав Иванович; МГУПС (МИИТ). – Москва, 2014. – 173 с.

43. Богачев В. Я. Моделирование процесса развития внутреннего давления в котле цистерны и напряженного состояния днища при маневровом соударении : дис. ... канд. техн. наук : 05.22.07 / Богачев Вячеслав Иванович ; МГУПС (МИИТ). — Москва, 2014. — 173 с.

44. Александров Д. В. Прикладная гидродинамика : учеб. пособие для вузов / Д. В. Александров, А. Ю. Зубарев, Л. Ю. Исакова. — Москва : Изд-во Юрайт, 2018. — 109 с.

45. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа / Лойцянский Л. Г. — Изд. 5-е, перераб. — Москва : Наука, 1978. — 736 с.

46. Шеретов Ю. В. Теорема о диссипации энергии и точные решения системы квазигидродинамических уравнений / Ю. В. Шеретов // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1994. — Т. 34, № 3. — С. 483–491.

47. Павленко Г. Е. Колебание жидкости в движущихся цистернах / Г. Е. Павленко // Известия АН СССР. VII серия. Отделение математических и естественных наук. — 1932. — Вып. 1. — С. 21–37. — Сведения доступны также по интернету: <http://www.mathnet.ru/links/b09dcd9727b5cd71add5c303a6aeb704/im5090.pdf> (дата обращения: 06.05.2020).

48. Микишев Г. Н. Динамика твёрдого тела с полостями, частично заполненными жидкостью / Г. Н. Микишев, Б. И. Рабинович. — Москва : Машиностроение, 1968. — 540 с.

49. Моисеев Н. Н. Динамика тел с полостями, содержащими жидкость / Н. Н. Моисеев, В. В. Румянцев. — Москва : Наука, 1965. — 440 с.

50. Мерзляков А. В. Аналитическое решение задачи о малых вынужденных колебаниях идеальной жидкости / А. В. Мерзляков, З. О. Матыева // Вестник Томского гос. ун-та. Математика и механика. — 2017. — № 48. — С. 70–81.

51. Linton C. M. Embedded trapped modes in water waves and acoustics / Linton C. M., McIver P. // Wave Motion. — 2007. — Vol. 45(1). — P.

16–29. — DOI: 10.1016/j.wavemoti.2007.04.009

52. Motygin O. V. On trapping of surface water waves by cylindrical bodies in a channel / Motygin O. V. // *Wave Motion*. — 2008. — Vol. 45(7). — P. 940–951.

53. Huang D. An analytical solution of fluid–structure coupling oscillation in one–dimensional ideal condition under small disturbance / Huang D., Guo W., Li X. // *Journal Sound and Vibration*. — 2002. — Vol. 255, no. 3. — P. 610–614.

54. Шеретов Ю. В. Динамика сплошных сред при пространственно–временном осреднении / Ю. В. Шеретов. — Москва–Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009. — 400 с.

55. Елизарова Т. Г. Квазигазодинамические уравнения и методы расчета вязких течений / Т. Г. Елизарова. — Москва : Научный мир, 2007. — 349 с.

56. Elizarova T. G. Quasi–Gas Dynamic Equations / T. G. Elizarova // Berlin–Heidelberg : Springer, 2009. — 286 p.

57. Балашов В. А. Численное исследование двумерной квазигидродинамической модели течения двухфазной изотермической жидкости с учетом поверхностных эффектов / В. А. Балашов, Е. Б. Савенков // *Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша*. — 2016. — № 13. — 20 с. — Сведения доступны также по интернету: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-13> (дата обращения: 06.05.2020).

58. Жериков А. В. Применение квазигидродинамических уравнений : математическое моделирование течений вязкой несжимаемой жидкости / А. В. Жериков. — Saarbrucken : Lambert Academic Publishing, 2010. — 124 с.

59. Метод численного решения уравнений Навье–Стокса в переменных скорость–давление / Е. В. Бруяцкий, А. Г. Костин, Е. И. Никифорович, Н. В. Розумнюк // *Прикладна гідромеханіка*. — 2008. — Т. 10, № 2. — С. 13–23.

60. Durmagambetov A. A. Navier–Stokes Equations–Millennium Prize Problems / A. A. Durmagambetov, L. S. Fazilova // *Natural Science. Scientific Research an Academic Publisher*. — 2015. — Т. 7, № 2. — P. 88–99. — DOI:

10.4236/ns.2015.72010

61. Выскребцов В. Г. О возможности найти общее решение уравнений Навье–Стокса / В. Г. Выскребцов // Известия Моск. гос. техн. ун-та МАМИ. — 2012. — Т. 2, № 2(14). — С. 270–277.

62. Tao T. Finite time blowup for an averaged three-dimensional Navier–Stokes equation / T. Tao // Journal of the American Mathematical Society. — 2016. — № 29(3). — P. 601–674. — DOI: 10.1090/jams/838

63. Guillod J. Numerical investigations of non-uniqueness for the Navier–Stokes initial value problem in borderline spaces [Electronic resource] / J. Guillod, V. Šverák // arXiv.org. — Mode of access: <https://arxiv.org/abs/1704.00560> (reference date: 05.05.2020).

64. Murawski K. Numerical methods of solving equations of hydrodynamics from perspectives of the code FLASH / K. Murawski, D. Lee // Bulletin of the Polish Academy of Sciences. Technical sciences. — 2011. — № 59(1). — P. 81–91. — DOI: 10.2478/v10175-011-0012-3

65. Румянцев Б. Н. О движении твердого тела, содержащего полости, заполненные вязкой жидкостью / Б. Н. Румянцев // Прикладная математика и механика. — 1964. — Т. 28, вып. 6. — С. 1127–1132.

66. Черноусько Ф. Л. Движение твердого тела с полостями, заполненными вязкой жидкостью при малых числах Рейнольдса / Ф. Л. Черноусько // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1965. — Т. 5, № 6. — С. 1049–1070.

67. Черноусько Ф. Л. Движение твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость / Ф. Л. Черноусько. — Москва : Вычислительный центр АН СССР, 1968. — 232 с.

68. Chorin A. J. Numerical solution of the Navier–Stokes equations / A. J. Chorin // Mathematics Computer. — 1968. — № 22. — P. 745–762.

69. Chorin A. J. A numerical method for solving incompressible viscous flow problems / A. J. Chorin // Journal Comp. Phys. — 1967. — № 1(2). — P. 12–26.

70. Harlow F. H. Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface / F. H. Harlow, J. E. Welch // Physics Fluids. — 1965. — Vol. 8, № 12. — P. 2182–2189. — DOI: 10.1063/1.1761178

71. Пейре Р. Вычислительные методы в задачах механики жидкости / Р. Пейре, Т. Д. Тейлор. — Ленинград : Гидрометеиздат, 1986. — 352 с.

72. Белоцерковский О. М. Численное моделирование в механике сплошных сред / О. М. Белоцерковский. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва : Физматлит, 1994. — 448 с.

73. Марчук Г. И. Методы расщепления / Марчук Г. И. — Москва : Наука, 1988. — 264 с.

74. Steger J. L. Flux vector splitting of the inviscid gasdynamic equations with application to finite-difference methods / J. L. Steger, R. F. Warming // Journal Comp. Phys. — 1981. — № 40. — P. 263–293.

75. Application of particle splitting method for both hydrostatic and hydrodynamic cases in SPH / W. T. Liu, P. N. Sun, F. R. Ming, A. M. Zhang // Acta Mechanica Sinica. — 2018. — № 34. — P. 601–613. — DOI: 10.1007/s10409-017-0739-7

76. Ковеня В. М. Алгоритмы расщепления при решении многомерных задач аэрогидродинамики / В. М. Ковеня. — Новосибирск : Изд-во СО РАН, 2014. — 280 с.

77. Гриднев С. Ю. Динамическое воздействие автоцистерн с отсеками на путь при учете гидроудара / С. Ю. Гриднев, А. Н. Будковой // Строительная механика и конструкции. — 2012. — Т. 2, № 4. — С. 116–121.

78. Кельрих М. Б. Теоретические основы упрощенного расчета давления гидроудара в железнодорожной цистерне / Кельрих М. Б., Криль С. И. // Збірник наук. пр. Донецького ін-ту залізничного транспорту Укр. держ. акад. залізничного транспорту. — Донецьк, 2011. — Вип. 25. — С. 162–170. — Відомості доступні також з Інтернету: http://zbirnyk.drtpi.donetsk.ua/ru/Archive/Issue_25.pdf (дата звернення: 06.05.2020).

79. Высоцкий М. С. Динамика автомобильных и железнодорожных цистерн / М.С. Высоцкий, Ю.М. Плескачевский, А.О. Шимановский. — ямн.: Белавтотракторостроение, 2006. — 320 с.

80. Островский А.М. Пути совершенствования транспортирования опасных грузов в условиях интенсификации перевозочного процесса : дис.. д-ра техн. наук: 05.22.08 / А.М. Островский; Новосибирский

институт инженеров железнодорожного транспорта. – Новосибирск, 1988. – 421 с.

81. Шимановский А. О. Колебания и устойчивость автомобильных и железнодорожных цистерн, перевозящих жидкие грузы : автореф. дис. ... д-ра техн. наук : 01.02.06 / А. О. Шимановский. — Минск, 2011. — 46 с.

82. Беспалько С. В. Исследования о распространении изменения давления жидкого груза в котле железнодорожной цистерны при гидроударе / С. В. Беспалько, В. И. Богачёв // Транспорт Российской Федерации : журнал о науке, практике, экономике. — 2013. — № 3(46). — С. 61–63.

83. Бороненко Ю. П. Особенности динамики вагона-цистерны с жидким грузом / Бороненко Юрий Павлович, Житков Юрий Борисович // Известия Петербург. ун-та путей сообщения. — 2017. — Т. 14, № 4. — С. 597–604.

84. Ковтун Е. Н. Оценка динамических характеристик вагонов-цистерн с разным уровнем недолива / Ковтун Е. Н., Малый В. В., Маркова О. М. // Наука и прогресс транспорта. Вестник Днепропетровского нац. ун-та железнодорожного транспорта. — Днепропетровск, 2008. — Вып. 23. — С. 33–37.

85. Ромен Ю. С. Влияние продольных сил в поездах на опасность схода вагонов в зависимости от их загрузки / Ромен Ю. С., Мугинштейн Л. А., Неверова Л. И. // Транспорт Российской Федерации : журнал о науке, практике, экономике. — 2013. — № 3(46). — С. 64–68.

86. Wang Z. Influence of partition location on directional stability performance of a partially-filled tank truck / Wang Z., Rakheja S., Cunzhen S. // Journal of Commercial Vehicles, Transactions of Society of Automotive Engineers. — 1995. — Section 2. — P. 592–601.

87. Rumold W. Modeling and Simulation of Vehicles Carrying Liquid Cargo / Rumold W. // Multibody System Dynamics. — 2001. — № 5. — P. 351–374.

88. Strandberg L. Lateral Stability of Road Tankers. Vol. 1. Main report : VTI Report № 138 A / Strandberg L. — Linköping (Sweden) : National Road & Traffic Research Institute, 1978. — 73 p.

89. Popov G. Dynamics of Liquid Sloshing in Baffled and

Compartmented Road Containers / Popov G., Sankar S., Sankar T. S. // *Journal of Fluids and Structures*. — 1993. — № 7(7). — P. 803–821.

90. Lloyd N. The effect of baffle design on longitudinal liquid movement in road tankers : An Experimental Investigation / Lloyd N., Vaiciurgis E., Langrish T. A. G. // *Transactions of the Institutions of Chemical Engineering*. — 2002. — Vol. 80, B 4. — P. 181–185.

91. Razaghi R. Investigating the effect of sloshing on the energy absorption of tank wagons crash / Razaghi R., Sharavi M., Feizi M. M. // *Transactions of the Canadian Society for Mechanical Engineering*. — 2015. — № 39(2). — P. 187–200.

92. Copaci I. On the resistance of tank wagons to the shock caused by collision / Copaci I., Tanasoiu A., Tanasoiu B. // *Proceedings of 3rd WSEAS International Conference on Finite Differences, Finite Elements, Finite Volumes, Boundary Elements, Bucharest, April 2010*. — Bucharest, 2010. — P. 23–27.

93. Nonlinear finite element analysis used at tank wagons / Mănescu T. S., Zaharia N. L., Avram D. S. [et al.] // *Proceedings of the 4th WSEAS International Conference on Finite Differences–Finite Elements–Finite Volumes–Boundary Elements, Paris, France, 2011, April*. — Paris, 2011. — P. 110–113.

94. Analysis of railroad tank car shell impacts using finite element method / Jeong D. Y., Gordon J. E., Tang Y. H. [et al.] // *Proceedings of the ASME/IEEE/ASCE Joint Rail Conference, JRC 2008, January*. — 2008. — P. 61–70. — doi: 10.1115/JRC2008-63014

95. On the resistance of tank wagons to the shock caused by collision / Copaci I., Tanasoiu A., Tanasoiu B. // *Proceedings of 3rd WSEAS International Conference on Finite Differences, Finite Elements, Finite Volumes, Boundary Elements, Bucharest, 2010, April*. — Bucharest, 2010. — P. 23–27.

96. Theoretical and experimental study of wheel spalling in heavy haul hopper cars / Stone D. H., Rajkumar B. R., Belpont S. M. [et al.] // *Proceedings of the 10th International Wheelset Congress, Sydney, 1992*. — Sydney, 1992. — P. 1–8.

97. Исследование динамики цистерн с полостями, частично или

полностью заполненными однородной несжимаемой жидкостью / Т. М. Мартыненко, С. А. Пронкевич, О. Н. Скляр, И. М. Мартыненко // Теоретическая и прикладная механика. — 2017. — № 32. — С. 191–196.

98. Короткевич С. Г. Исследование напряженно-деформированного состояния конструкций цистерн пожарных автомобилей / Короткевич С. Г., Ковтун В. А. // Современные проблемы гражданской защиты. — 2017. — № 4(25). — С. 45–51.

99. Modeling the effect of fluid–structure interaction on the impact dynamics of pressurized tank cars / Yu H., Tang Y. H., Gordon J. E., Jeong D. Y. // Proceedings of IMECE2009 2009 ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition November 13–19, Lake Buena Vista, Florida, USA. — Florida, 2009. — P. 59–69.

100. Improved Tank Car Safety Research / Tyrell D. C., Jeong D. Y., Jacobsen K., Martinez E. // Proceedings of the 2007 ASME Rail Transportation Division Fall Technical Conference, RTDF2007–46013, September 2007. — 2007.

101. Liquid slosh in articulated tank vehicles : image–based investigation in field test / Bottiglione F., Foglia M., Mantriota G., Mastrovito M. // International Journal of Heavy Vehicle Systems. — 2007. — Vol. 14(4). — P. 441.

102. Ibrahim R. A. Assessment of ground vehicle tankers interacting with liquid sloshing dynamics / Ibrahim R. A., Singh B. // International journal of heavy vehicle systems. — 2018. — Vol. 25(1). — P. 23–112.

103. Boronenko Y. P. Special considerations relating to dynamics of liquid cargo rail tank car / Boronenko Y. P., Zhitkov Y. B. // Dynamics of Vehicles on Roads and Tracks. — 2017. — Vol. 2. — P. 1249–1254.

104. Коркодинов Я. А. Обзор семейства к-ε моделей для моделирования турбулентности / Коркодинов Я. А. // Вестник Пермского нац. исследовательского политехн. ун-та. Машиностроение, материаловедение. — Пермь, 2013. — Т. 15(2). — С. 5–16.

105. Башлій І. Д. Коливання складних оболонкових конструкцій з рідиною в задачі про поздовжню стійкість ракети–носія : дис. канд. техн. наук : 01.02.04 / І. Д. Башлій. — Дніпропетровськ, 2015. — 197 с.

106. Яценко Н. Н. Плавность хода грузовых автомобилей / Н. Н.

Яценко, О. К. Пруткиков. — Москва : Машиностроение, 1968. — 220 с.

107. Задорожная В. В. Повышение безопасности использования колесных машин при выполнении транспортных работ на поперечном уклоне : автореф. дис. ... канд. техн. наук : 05.22.20 / В. В. Задорожная. — Харьков, 2014. — 20 с.

108. Вибрации в технике : справочник : в 6 т. / ред. В. Н. Челомей. — Москва : Машиностроение, 1980. — Т. 3 : Колебания машин, конструкций и их элементов / под ред. Ф. М. Диментберга, К. С. Колесникова. — 544 с.

109. Попович В. С. Сравнение численных методов расчета частот свободных крутильных колебаний / В. С. Попович, А. Е. Зимин // Ползуновский вестник. — Барнаул : АлтГТУ, 2008. — № 4. — С. 66–70.

110. Пановко Я. Г. Основы прикладной теории крутильных колебаний / Пановко Я. Г. — Москва : Гос. научно-техн. изд-во машиностроительной лит., 1957. — 320 с.

111. Штейнвольф Л. И. Динамические расчеты машин и механизмов / Л. И. Штейнвольф. — Москва : Машгиз, 1961. — 339 с.

112. Бабаков И. М. Теория колебаний / И. М. Бабаков. — Москва : Наука, 1965. — 560 с.

113. Филиппов А. П. Колебания деформируемых систем / А. П. Филиппов. — Москва : Машиностроение, 1970. — 734 с.

114. Терских В. П. Метод цепных дробей в применении к исследованию механических систем : в 3 т. / В. П. Терских. — Ленинград : Судпромгиз, 1955. — Т. 1 : Простые линейные и нелинейные системы. — 375 с.

115. Ефремов Л. В. Теория и практика исследований крутильных колебаний силовых установок с применением компьютерных технологий / Ефремов Л. В. — Санкт-Петербург : Наука, 2007. — 276 с.

116. Ларин А. А. Развитие методов расчета крутильных колебаний в Харьковском политехническом институте с 1930 по 1970 годы / А. А. Ларин // Вестник Нац. техн. ун-та «ХПИ». — Харьков, 2007. — № 22 : Динамика и прочность машин. — С. 90–97.

117. Канду В. В. Анализ нелинейных колебаний тонких пластинок, находящихся в условиях внутреннего и внешнего резонансов : дис. ...

канд. техн. наук : 05.23.17 / Канду Владимир Валерьевич ; Воронеж. гос. техн. ун-т. — Воронеж, 2019. — 164 с.

118. Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости / Р. Кристенсен. — Москва : Мир, 1974. — 338 с.

119. Григорьев А. Л. Матричный численно–аналитический метод интегрирования уравнений движения многомассовой цепной системы / А. Л. Григорьев, Ю. Л. Геворкян // Вестник Нац. техн. ун-та «ХПИ». — Харьков, 2011. — № 42 : Математическое моделирование в технике и технологиях. — С. 68–81.

120. Григорьев А. Л. Линейные и линеаризованные матричные модели для анализа динамики и устойчивости клапанных гидромеханических узлов / А. Л. Григорьев, Ю. Л. Геворкян // Вестник Нац. техн. ун-та «ХПИ». — Харьков, 2012. — № 2 : Математическое моделирование в технике и технологиях. — С. 74–87.

121. Божко А. Е. Структурно–аналитический метод определения резонансных частот колебательных систем / А. Е. Божко // Проблемы машиностроения. — 2011. — № 5(14). — С. 23–29.

122. Босяков С. М. Численный анализ собственных колебаний каркаса кабины трактора «Беларусь» / С. М. Босяков, Н. А. Докукова, С. А. Пронкевич // Теоретическая и прикладная механика. — 2006. — Вып. 20. — С. 166–168.

123. Гимадиев А. Г. LMS Imagine.Lab AMESim как эффективное средство моделирования динамических процессов в мехатронных системах : учеб. пособие / Гимадиев А. Г., Грешняков П. И., Синяков А. Ф. — Самара : Изд-во СамНЦ РАН, 2014. — 138 с.

124. Лихачев Д. С. Особенности вибронгруженности и пути снижения крутильных колебаний в трансмиссии автомобиля с комбинированной энергоустановкой : дис. ... канд. техн. наук : 05.05.03 / Лихачёв Дмитрий Сергеевич. — Москва, 2017. — 194 с.

125. Исследование резонансных режимов силовой передачи трактора ВТ–100 / В. В. Шеховцов, В. П. Шевчук, С. В. Зленко [и др.] // Тракторы и сельскохозяйственные машины. — 2002. — № 7. — С. 11–13.

126. Линник Д. А. Теоретические исследования колебаний масс колесного трактора с моделированием случайных возмущений на ПЭВМ

/ Д. А. Линник // Вестник Белорусско–Российского ун–та. — 2015. — № 2(47). — С. 23–33.

127. Динамические модели трансмиссии трактора типа Т–150 и эффективность их применения / И. Ш. Чернявский, О. И. Калногуз, И. В. Травкин, Д. С. Местецкая // Тракторы и сельскохозяйственные машины. — 1988. — № 12. — С. 8–10.

128. Чернявский И. Ш. Напряженность трансмиссий тракторов Т–150 и Т–150К / И. Ш. Чернявский // Тракторы и сельскохозяйственные машины. — 1974. — № 11. — С. 10–12.

129. Чупрынин Ю. В. Частотные свойства трансмиссии самоходного энергосредства / Ю. В. Чупрынин, В. А. Шуринов, В. А. Балакин // Тракторы и сельскохозяйственные машины. — 2000. — № 10. — С. 23–26.

130. Барский Н. Б. Динамика трактора / Н. Б. Барский, В. Я. Анилович, Г. М. Кутьков. — Москва : Машиностроение, 1973. — 281 с.

131. Анісімов В. Ф. Власні коливання керованого моста трактора без урахування згасання / В. Ф. Анісімов, Д. В. Борисюк, О. В. Черкевич // Вібрації в техніці та технологіях. — 2016. — № 2. — С. 66–68.

132. Гашение низкочастотных колебаний на сиденье водителя колесного трактора / И. С. Сазонов, В. А. Ким, Н. П. Амелъченко [и др.] // Вестник Белорусско–Российского ун–та. — 2014. — № 4(45). — С. 60–70.

133. Великодний В. М. Экспериментальные исследования параметров демпфирования пневморессорной подвески самоходной машины / В. М. Великодний, А. Г. Мамонтов // Вестник Нац. техн. ун–ту «ХПИ». — Харьков, 2010. — № 1 : Автомобиле– и тракторостроение. — С. 47–54.

134. Linear and nonlinear vibration characteristics of a farm tractor / L. Garciano, R. Torisu, J. Yeshida, J. Takeda // Journal of agricultural research. — 1984. — Vol. 30. — P. 1–4.

135. Cantisani G. Road roughness and whole body vibration : Evaluation tools and comfort limits / Cantisani G., Loprencipe G. // Journal of Transportation Engineering. — 2010. — Vol. 136, № 9. — P. 818–826.

136. Динамика системы дорога–шина–автомобиль–водитель / А. А. Хачатуров, В. Л. Афанасьев, В. С. Васильев [и др.] ; под ред. А. А.

Хачатурова. — Москва : Машиностроение, 1976. — 535 с.

137. Светлицкий В. А. Случайные колебания механических систем / Светлицкий В. А. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва : Машиностроение, 1991. — 320 с.

138. Методика описания неровностей профиля дороги при моделировании подвески автомобиля с рекуператором энергии колебаний / А. Н. Сергиенко, Н. Г. Медведев, Б. Г. Любарский [и др.] // Вестник Нац. техн. ун-та «ХПИ». — 2013. — № 37. — С. 185–192.

139. Белецкий А. В. Моделирование профиля дорожного основания в задаче анализа динамики трансмиссии колесной машины [Электронный ресурс] / Белецкий А. В. // DocPlayer. — Режим доступа: <https://docplayer.ru/90973643-Modelirovanie-profilya-dorozhnogo-osnovaniya-v-zadache-analiza-dinamiki-transmissii-kolesnoy-mashiny.html> (дата обращения: 10.05.2020).

140. Белецкий А. В. Математическое и имитационное моделирование профиля дорожного покрытия / А. В. Белецкий, С. С. Рекунов // Вестник евразийской науки. — 2014. — № 5(24). — С. 1–13. — Сведения доступны также по интернету: <https://cyberleninka.ru/article/n/matematicheskoe-i-imitatsionnoe-modelirovanie-profilya-dorozhnogo-pokrytiya> (дата обращения: 10.05.2020).

141. Александрова Т. Е. Имитационное моделирование внешних возмущений, действующих на танковую пушку / Т. Е. Александрова, И. Е. Александрова, С. Н. Беляев // Механіка та машинобудування. — 2011. — № 1. — С. 43–50.

142. Абрамов М. И. О способах определения уровня внешнего воздействия микропрофиля дороги на транспортное средство / М. И. Абрамов // Наука ЮУрГУ. Секции технических наук : материалы 66-й науч. конф. / Юж.-Урал. гос. ун-т. — Челябинск : Изд. центр ЮУрГУ, 2014. — С. 1575–1582.

143. Рыков С. П. Моделирование случайного микропрофиля автомобильных дорог / С. П. Рыков, Р. С. Бекирова, В. С. Коваль // Системы. Методы. Технологии. — 2010. — № 4(8). — С. 33–37.

144. Рекомендації щодо оцінки рівності дорожніх покриттів у відповідності з міжнародним індексом рівності IRI : РВ.2.3.–218–

02071168–385–2004. — [Чинний від 2004–01–01]. — Київ : Укравтодор, 2004. — 31 с.

145. Sayers M. W. The little Book of Profiling. Basic Information about Measuring and Interpreting Road Profiles / M. W. Sayers, S. M. Karamihas. — Michigan : The University of Michigan Transportation Research Institute, 1998. — 306 p.

146. Савенко В. Я. Международный опыт оценки ровности поверхности дорожных покрытий / В. Я. Савенко, Д. И. Кияшко, Р. В. Смолянюк // Автомобільні дороги і дорожнє будівництво. — 2011. — № 82. — С. 34–42.

147. Борисов Р. Б. Результаты оценки вертикальных перемещений и геометрических характеристик колесных движителей экспериментального подвижного агрегата транспортно–перегрузочного и транспортно–установочного оборудования ракетного комплекса с применением модульного принципа / Р. Б. Борисов // Автомобиль. Дорога. Инфраструктура. — 2014. — № 2(2). — С. 24–46.

148. Вольская Н. С. Корректировка расчетов на плавность хода колесных машин по их динамическим моделям / Н. С. Вольская, И. В. Чичекин // Известия Моск. гос. техн. ун–та МАМИ. — 2013. — Т. 1, № 2(16). — С. 241–248.

149. Попов В. Б. Математическое моделирование мобильного сельскохозяйственного агрегата в режиме транспортного переезда / В. Б. Попов // Вестник Гомельского гос. техн. ун–та им. П. О. Сухого. — Гомель, 2005. — № 3(22). — С. 13–18.

150. Whitney C. A. Random processes in physical systems / Whitney C. A. — New York : John Willey, 1990. — 320 p.

151. Чабунин И. С. Компьютерное моделирование случайного микропрофиля дороги по двум косям движения транспортной машины / И. С. Чабунин, В. И. Щербаков // Машиностроение и инженерное образование. — 2015. — № 1. — С. 74–83.

152. Мамонтов А. Г. Поліпшення показників плавності ходу та динамічної навантаженості ходових систем колісних тракторів на транспортних роботах : дис. ... канд. техн. наук : 05.22.02 / Анатолій Геннадійович Мамонтов ; наук. кер. Самородов В. Б. ; Нац. техн. ун–т

«Харків. політехн. ін-т». — Харків, 2019. — 175 с.

153. Вибрация. Определение параметров вибрационной характеристики самоходных машин. Тракторы сельскохозяйственные колесные и машины для полевых работ : ГОСТ 31323–2006. — [Взамен ГОСТ ИСО 5008–2004]. — Москва : Стандартинформ, 2008. — 19 с. — (Межгосударственный стандарт). — Сведения доступны также по интернету: <https://internet-law.ru/gosts/gost/44080/> (дата обращения: 10.05.2020).

154. Горячкин В. П. Собрание сочинений : в 3-х т. / Горячкин В. П. — Москва : Колос, 1965. — Т. 1 : Земледельческая механика. — С. 11–281.

155. Киртбая Ю. К. Исследование динамики тягового сопротивления сельскохозяйственных машин и орудий / Ю. К. Киртбая // Сельхозмашина. — 1952. — № 12. — С. 7–14.

156. Анохин В. И. Применение гидротрансформаторов на скоростных гусеничных сельскохозяйственных тракторах / В. И. Анохин. — Москва : Машиностроение, 1972. — 304 с.

157. Болтинский В. Н. Работа тракторного двигателя при неустановившейся нагрузке / Болтинский В. Н. — Москва : Сельхозгиз, 1949. — 216 с.

158. Кутьков Г. М. Тяговая динамика тракторов / Г. М. Кутьков. — Москва : Машиностроение, 1980. — 212 с.

159. Юшин А. А. Исследование характера нагрузок сельскохозяйственных тракторов при работе МТА на повышенных скоростях / А. А. Юшин, В. Г. Евтенко // Тракторы и сельскохозяйственные машины. — 1972. — № 4. — С. 13–16.

160. Особенности улучшения работы машинно–тракторного агрегата за счет снижения колебания загрузки / Д. Д. Нехорошев, П. В. Коновалов, А. Ю. Попов, Д. А. Нехорошев // Известия Нижневолжского агроуниверситетского комплекса. — Нижневолжск, 2019. — № 1(53). — С. 345–351.

161. Повышение тягово–сцепных свойств колесных машин / Горшков Ю. Г., Богданов А. В., Аверьянов Ю. И. [и др.] // Механизация и электрификация сельского хозяйства. — 2004. — № 12. — С. 20–22.

162. Гребнев В. П. Совершенствование тягово–цепных устройств сельскохозяйственных тракторов / Гребнев В. П., Ворохобин А. В. // Механизация и электрификация сельского хозяйства. — 2010. — № 10. — С. 3–5.

163. Тракторы и автомобили : учебник для студентов вузов обучающихся по спец. «Автомобиле– и тракторостроение» / В. М. Шарипов, М. К. Бирюков, Ю. В. Дементьев [и др.] ; под общ. ред. В. М. Шарипова. — Москва : Спектр, 2010. — 351 с.

164. Гапич Д. С. Стабилизация режимов нагружения колесных машинно–тракторных агрегатов : дис. ... д-ра техн. наук : 05.20.01 / Д. С. Гапич. — Волгоград, 2014. — 187 с.

165. Кравченко В. А. Исследование влияния жёсткости внешних связей колёсного трактора класса 1, 4 на разгон агрегата / Кравченко В. А. // Научный журнал КубГАУ : политем. сетевой электрон. науч. журн. Кубанского гос. аграрного ун-та. — 2017. — № 125(01). — С. 346–361. — Сведения доступны также по интернету: <https://cyberleninka.ru/article/n/issledovanie-vliyaniya-zhyostkosti-vneshnih-svyazey-kolyosnogo-traktora-klassa-1-4-na-razgon-agregata> (дата обращения: 11.05.2020).

166. Фролов Д. В. Устройство для повышения проходимости колёсных тракторов на транспортных работах / Д. В. Фролов, С. Н. Дроздов // Известия Оренбургского гос. аграрного ун-та. — Оренбург, 2014. — № 4(48). — С. 74–76.

167. Ворохобин А. В. Результаты исследований усовершенствованной конструкции тягово–цепного устройства трактора / Ворохобин А. В. // Вестник Воронежского гос. аграрного ун-та. — Воронеж, 2016. — № 4(51). — С. 129–139. — DOI: 10.17238/issn2071–2243.2016.4.129

168. Повышение тягово–цепных свойств мобильных энергетических средств в транспортно–технологическом обеспечении АПК Дальневосточного федерального округа : монография / Щитов С. В., Кривуца З. Ф., Сенникова Н. Н., Двойнова Н. Ф. — Южно–Сахалинск : СахГУ, 2017. — 176 с.

169. Павлюк А. С. Исследование влияния конструкции тягово–

цепного устройства на устойчивость движения машинно–тракторного агрегата / А. С. Павлюк, Ю. И. Шенкнехт // Ползуновский вестник. — 2014. — № 4(1). — С. 14–19.

170. Строганов Ю. Н. К вопросу о применении тягово–цепных устройств изменяемой длины тракторнотранспортных агрегатов и автопоездов / Строганов Ю. Н., Пампура Е. М. // Известия Междунар. акад. аграрного образования. — 2015. — № 15(1). — С. 79–86.

171. Калінін Є. І. Формування системних властивостей транспортно–технологічних агрегатів змінної маси : автореф. дис. ... д–ра техн. наук : 05.22.20 / Калінін Євген Іванович ; Харків. нац. автомоб.–дорож. ун–т. — Харків, 2019. — 40 с.

172. Фомин С. Д. Влияние характеристик трансмиссии на степень галлопирования и рыскания трактора / С. Д. Фомин // Известия Нижневолжского агроуниверситетского комплекса. — Нижневолжск, 2011. — № 2(22). — С. 218–224.

173. Кожушко А. П. Підвищення техніко–економічних показників колісних тракторів з безступінчастими трансмісіями раціональною зміною параметрів регулювання гідромашин в процесі розгону : автореф. канд. техн. наук : 05.22.02 / А. П. Кожушко. — Харків, 2016. — 24 с.

174. Щельцын Н. А. Современные бесступенчатые трансмиссии сельскохозяйственных тракторов / Н. А. Щельцын, Л. А. Фрумкин, И. В. Иванов // Тракторы и сельхозмашины. — 2011. — № 11. — С. 18–26.

175. Aitzetmüller H. Steyr S–Matic–The Future Continuously Variable Transmission for all Terrain Vehicles / H. Aitzetmüller // Proceedings of the International Conference–International Society for Terrain Vehicle Systems. — 1999. — Vol. 2. — P. 463–470.

176. Петров В. Г. Гидрообъемные трансмиссии самоходных машин / В. Г. Петров. — Москва : Машиностроение, 1988. — 248 с.

177. Бондаренко А. І. Наукове обґрунтування нових технічних рішень процесу гальмування колісних тракторів з безступінчастими гідрооб’ємно–механічними трансмісіями : дис. ... д–ра техн. наук : 05.22.02 / Бондаренко Анатолій Ігорович. — Харків, 2016. — 477 с.

178. Experimental confirmation of the rational change parameter of the hydraulic transmission during acceleration and braking of the hydrostatic

transmissions / V. Samorodov, A. Kozhushko, E. Pelipenko [et al.] // International Collection of scientific proceedings. — 2017. — Vol. 7(25). — P. 9–24.

179. Електронний регулятор дизеля : пат. UA94865 Україна : МПК F02D 1/08, F02D 1/18 / Головчук А. Ф., Габрієль Ю. І., Голодняк Р. І., Тищук О. П. ; власник Львів. нац. аграрний ун-т. — № u 201404304 ; заявл. 24.04.2014 ; опубл. 10.12.2014, Бюл. 23. — 5 с.

180. Богаевский А. Б. Компьютерная модель мощного транспортного дизель-генератора с электронной системой управления / А. Б. Богаевский // Открытые информационные и компьютерные интегральные технологии. — Харьков : Нац. аэрокосм. ун-т «ХАИ», 2008. — Вып. 38. — С. 150–169.

181. Богаевский А. Б. Исследование влияния технических средств управления на повышение эксплуатационной экономичности маневрового тепловоза / А. Б. Богаевский, А. В. Осичев, М. С. Войтенко // Вісник СНУ ім. В. Даля. — Луганськ, 2013. — № 18(207), ч. 2. — С. 177–182.

182. Богаевский А. Б. Оценка возможности снижения расхода топлива дизель-генератора маневрового тепловоза за счет совершенствования управления / А. Б. Богаевский, А. М. Борисенко, М. С. Войтенко // Двигатели внутреннего сгорания. — 2013. — № 1. — С. 105–109.

183. Розробка універсального електронного регулятора частоти обертання колінчастого валу дизеля / А. О. Прохоренко С. С. Кравченко, І. М. Карягін [та ін.] // Двигатели внутреннего сгорания. — 2017. — № 2. — С. 35–39.

184. Універсальний електронний регулятор дизеля на основі електричного сервоактуатора / А. О. Прохоренко, С. С. Кравченко, Д. Є. Самойленко [та ін.] // Двигатели внутреннего сгорания. — 2018. — № 1. — С. 31–39. — doi: 10.20998/0419–8719.2018.1.06. 30.

185. Андронов А. А. Теория колебаний / Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. — Москва : Физ-мат. лит., 1959. — 916 с.

186. Автоколебательные процессы при обтекании тел с изломами образующей / Е. Ю. Архиреева, Б. Н. Даньков, А. П. Дубень [и др.]. —

Москва : ИПМ им. М. В. Келдыша, 2015. — 100 с.

187. Ланда П. С. Автоколебания в распределенных системах / Ланда П. С. — 2-е изд. — Москва : Либроком, 2010. — 320 с.

188. Вибрации в технике : справочник : в 6 т. / ред. В. Н. Челомей. — Москва : Машиностроение, 1979. — Т. 2 : Колебания нелинейных механических систем / под ред. И. И. Блехмана. — 351 с.

189. Шаповалов И. Л. Исследование автоколебаний механических систем в переменных действие–угол : дис. ... канд. физ.–мат. наук : 01.02.01 / Шаповалов Иван Леонидович ; ФГБОУВО «МГУ им. М. В. Ломоносова». — Москва, 2016. — 90 с.

190. Геккер Ф. Р. Динамика машин, работающих без смазочных материалов в узлах трения / Геккер Ф. Р. — Москва : Машиностроение, 1983. — 168 с.

191. Вопросы долговечности муфт сцепления тракторов / С. Г. Борисов, С. А. Лапшин, В. Я. Юденко, В. Б. Захаров // Тракторы и сельхозмашины. — 1980. — № 3. — С. 22–24.

192. Автоколебательные процессы в сцеплениях автомобилей и тракторов / В. М. Шарипов, А. П. Маринкин, Н. Н. Шарипова [и др.] // Известия МГТУ. — 2013. — № 1(15). — С. 239–242.

193. Редчиц В. В. Усовершенствование модели автоколебаний управляемых колес автомобиля / Редчиц В. В., Головина Е. В., Редчиц С. В. // Вчені записки ТНУ ім. В. І. Вернадського. — 2019. — Т. 30(69), ч. 2, № 3. — С. 165–170. — DOI: 10.32838/2663–5941/2019.3–2/29

194. Fromm H. Brief Report on the History of the Theory of Shimmy / Fromm H. // NASA TM 1365. — 1954. — P. 181.

195. Смрчек А. В. Расчет и испытания ориентирующихся колес на шимми / Смрчек А. В. // Труды Центрального аэро–гидродинамического ин–та. — 1950. — С. 519.

196. Рокар И. Неустойчивость в механике. Автомобили. Самолеты. Висячие мосты / Рокар И. — Москва : Изд–во иностр. лит., 1959. — 288 с.

197. Greidanus J. H. Besturing en stabiliteit van het neuswielonderstel : rapport V 1038 / Greidanus J. H. ; Nationaal Luchtvaartlaboratorium. — Amsterdam, 1942.

198. Чудаков Е. А. Качение автомобильного колеса / Чудаков Е. А.

— Москва : Машгиз, 1947. — 72 с.

199. Гаспарянц Г. А. Боковой увод автомобильного колеса / Гаспарянц Г. А. // Сборник статей машиноведения. — Москва : Изд-во АН СССР, 1950.

200. Певзнер Я. М. Теория устойчивости автомобиля / Я. М. Певзнер. — Москва : Машгиз, 1947. — 156 с.

201. Von Schlippe B. Shimmiyng of a pneumatic wheel / Von Schlippe B., Dietrich R. // NASA Report TM 1365. — 1954.

202. Теория движения боевых колесных машин / Антонов Д. А., Беспалов С. И., Лазаренко В. П. [и др.]. — Москва : Изд-во акад. бронетанковых войск, 1993. — 385 с.

203. Маневренность и тормозные свойства колесных машин / Подригало М. А., Волков В. П., Кирчатый В. И., Бобошко А. А. — Харьков : Изд-во ХНАДУ, 2002. — 404 с.

204. Експлуатаційні властивості автотранспортних засобів : [навч. посіб.] : в 3 ч. / В. П. Сахно, В. М. Поляков, А. В. Костенко [та ін.]. — Донецьк : Ноулідж, 2014. — Ч. 3 : Маневреність. Керованість. Стійкість. — 400 с.

205. Pacejka H. B. Tyre and vehicle dynamics / H. B. Pacejka. — 2nd ed. — [s. l.] : SAE International, 2005. — 622 p. — Information is also available on the internet: <http://bookre.org/reader?file=464169&pg=620> (reference date: 17.05.2020).

206. Broulhiet G. The Suspension of the Automobile Steering Mechanism Shimmy and Tramp / Broulhiet G. // Bull Soc. Ing. Civ. Fr. — 1925. — Vol. 78. — P. 540–554.

207. Бидерман В. Л. Нестационарное качение пневматической шины / В. Л. Бидерман, В. В. Шумаев // Известия вузов. Машиностроение. — 1977. — № 12. — С. 85–90.

208. Исследование влияния дисбаланса колес на возникновение колебаний в системах подвески и рулевого управления различных моделей машин / И. М. Петрищев, Е. В. Кондрашова, А. В. Скрыпников, С. В. Дорохин // Вестник Воронежского гос. аграрного ун-та. — 2014. — № 1–2(40–41). — С. 68–76.

209. Нарбут А. Н. Теория автомобиля : учеб. пособие / Нарбут А. Н.

— Москва, 2002. — 71 с.

210. Конструкция и расчет автомобильных поездов / Я. Х. Закин, М. М. Шукин, М. Я. Марголис [и др.]. — Москва : Машиностроение, 1968. — 332 с.

211. Устойчивость движения прицепов лесовозных автопоездов / А. А. Камусин, Н. И. Казначеева, В. А. Борисов, Д. В. Акинин // Лесной вестник. — 2014. — № 18. — С. 143–145.

212. Литвинов А. С. Автомобиль. Теория эксплуатационных свойств : учебник для вузов по спец. «Автомобили и автомобильное хозяйство» / А. С. Литвинов, Я. Е. Фаробин. — Москва : Машиностроение, 1989. — 240 с.

213. Успенский И. А. Анализ теоретических исследований устойчивости движения транспортных средств в сельском хозяйстве / И. А. Успенский, Г. К. Рембалович, И. А. Юхин // Вестник Рязанского гос. агротехнологического ун-та им. П. А. Костычева. — Рязань, 2010. — № 1. — С. 58–60.

214. Бусаров Ю. П. Подавление автоколебаний прицепа / Ю. П. Бусаров, В. Б. Черкунов, А. Е. Татарченко // Автомобильная промышленность. — 1986. — № 10. — С. 17–19.

215. Melde F. Über erregung stehender wellen eines fadenformigen korpers / Melde F. // Annual Review of Physical Chemistry. — 1859. — Vol. 109. — P. 193–215.

216. Beliaev N. M. Stability of prismatic rods subjectd to variable longitudinal forces / Beliaev N. M. // Engineering Constructions and Structural Mechanics. — 1924. — P. 149–167.

217. Болотин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем / Болотин В. В. — Москва : Гостехиздат, 1956. — 500 с.

218. Шмидт Г. Параметрические колебания / Шмидт Г. — Москва : Мир, 1978. — 333 с.

219. Ibrahim R. A. Parametric vibration. Part I : Mechanics of linear problems / Ibrahim R. A., Barr A. D. S. // Shock Vib. Dig. — 1978. — Vol. 10(1). — P. 15–29.

220. Ibrahim R. A. Paranetric vibration. Part II : Mechanics of nonlinear problems // Ibrahim R. A., Barr A. D. S. // Shock Vib. Dig. — 1978. — Vol.

10(20). — Р. 9–24.

221. Бутиков Е. И. Параметрический резонанс / Бутиков Евгений Иванович // Компьютерные инструменты в образовании. — 2009. — № 3. — С. 18–36.

222. Nayfeh A. H. Mook Non-linear oscillations / Nayfeh A. H., D. T. — New York : Wiley, 1979. — 705 p.

223. Simites G. J. Instability of dynamically loaded structures / Simites G. J. // Applied mechanics reviews. — 1987. — Vol. 40(10). — P. 1403–1408.

224. Ruby L. Applications of the Mathieu equation / Ruby L. // American Journal of Physics. — 1996. — Vol. 64(1). — P. 39–44.

225. Кручинин П. А. Механика подавления параметрических колебаний управляемых колес транспортных машин : дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.02.01 / Кручинин Павел Анатольевич. — Москва, 1984. — 183 с.

226. Кручинин П. А. О возбуждении параметрических колебаний управляемых колес / П. А. Кручинин, С. И. Злочевский, А. Д. Дербаремдикер // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика. — 1987. — № 3. — С. 27–32.

227. Дербаремдикер А. Д. О подавлении параметрических колебаний управляемых колес / А. Д. Дербаремдикер, П. А. Кручинин // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика. — 1985. — № 3. — С. 56–61.

228. Щербаков В. И. Исследование параметрических колебаний автомобильного колеса / Щербаков В. И. // Известия Моск. гос. техн. ун-та. — 2014. — Т. 1, № 4(22). — С. 99–102.

229. Рейзина Г. Н. Математическое моделирование устойчивости систем подрессоривания / Г. Н. Рейзина // Вестник Белорусского нац. техн. ун-та. — 2002. — № 4. — С. 47–49.

230. Экспериментальное исследование динамической нагруженности приводов водометов амфибийных машин / В. Б. Держанский, А. А. Волков, А. И. Тараторкин, И. А. Тараторкин // Вестник Курганского гос. ун-та. — 2015. — № 3(37). — С. 41–45.

231. Морачковский О. К. Расчет крутильных колебаний силовых передач с карданным валом / О. К. Морачковский, Е. И. Дружинин,

А. С. Беломытцев // Вібрації в техніці та технологіях. — 2018. — № 2(89). — С. 22–28.

232. Параметрические колебания в планетарных колесных редукторах / В. П. Яглинский, С. С. Гутыря, А. Н. Чанчин, Ю. М. Хомяк // Вісник Нац. техн. ун-ту «ХПІ». Серія: Машинознавство та САПР. — Харків, 2018. — № 25(1301). — С. 156–162.

233. Вульфсон И. И. Влияние низкочастотных колебаний на нелинейные диссипативные силы / И. И. Вульфсон // Известия высших учеб. завед. Прикладная нелинейная динамика. — 2012. — Т. 20, № 4. — С. 51–65.

234. Тарг С. М. Динамика // Физическая энциклопедия : в 5 т. / под ред. А. М. Прохорова. — Москва : Советская энциклопедия, 1988. — Т. 1 : Ааронова–Длинные. — С. 616–617.

235. Кутьков Г. М. Вклад ученых кафедры «Тракторы и автомобили» в становление и развитие науки о тракторе / Г. М. Кутьков // Вестник ФГОУ ВО МГАУ. — 2010. — № 2. — С. 40–44.

236. Динамика транспортно-тяговых колесных и гусеничных машин / Е. Е. Александров, Д. О. Волонцевич, В. А. Карпенко [и др.] ; под ред. А. Н. Туренко. — Харьков : Изд-во ХГАДТУ (ХАДИ), 2001. — 642 с.

237. Рославцев А. В. Теория движения тягово-транспортных средств / А. В. Рославцев. — Москва : ТРИАДА, 2003. — 172 с.

238. Шепеленко И. Г. Динамика трехзвенного тракторного поезда в процессе торможения : дис. ... канд. техн. наук : 05.05.03 / Игорь Георгиевич Шепеленко. — Харьков, 1981. — 192 с.

239. Ксенович И. П. Ходовая система–почва–урожай / И. П. Ксенович, В. А. Скотников, М. И. Ляско. — Москва : Агропромиздат, 1985. — 304 с.

240. Артемов Н. П. Повышение устойчивости движения пахотного агрегата при изменении технических параметров системы управления : автореф. дис. ... канд. техн. наук : 05.05.11 / Н. П. Артемов ; ХНТУСХ им. П. Василенко. — Харьков, 2006. — 172 с.

241. Кюрчев В. М. Механіко-технологічні основи агрегування орно-просапних тракторів : дис. ... д-ра техн. наук : 05.05.11 / В. М. Кюрчев ; Нац. акад. аграр. наук України, Нац. наук. центр ІМКСГ. —

Глеваха, 2015. — 440 с.

242. Антощенко Р. В. Динаміка та енергетика руху багатоелементних машинно–тракторних агрегатів : монографія / Р. В. Антощенко. — Харків : Міськдрук, 2017. — 244 с.

243. Кутьков Г. М. Трактора и автомобили. Теория и технологические свойства : учебник / Г. М. Кутьков. — Москва : Колос, 2004. — 504 с.

244. Артемов М. П. Математична модель машинно–тракторного агрегату з використанням метода парціальних прискорень / М. П. Артемов // Збірник наук. пр. Вінницького нац. аграрного ун-ту. — 2012. — № 11, т. 1(65). — С. 34–40.

245. Метод парциальных ускорений и его приложение в динамике мобильных машин / Н. П. Артемов, А. Т. Лебедев, М. А. Подрыгало [и др.]. — Харьков : Міськдрук, 2012. — 220 с.

246. Артемов М. П. Метод парциальных ускорений и его применение при исследовании динамики мобильных машин / М. П. Артемов, А. Т. Лебедев, О. П. Алексеев [и др.] // Наукові нотатки. — 2010. — Вип. 28. — С. 32–36.

247. Моисеев Н. Н. Численные методы расчета собственных частот колебаний ограниченного объема жидкости / Н.Н. Моисеев, А.А. Петров. — Москва : Вычислительный центр АН СССР, 1966 — 269 с.

248. Суворов С. А. Обоснование конструктивно-режимных параметров смесителя для приготовления жидких органоминеральных удобрений : дис. ... канд техн. наук : 05.20.01 / Суворов Сергей Александрович ; Алтайского гос. техн. ун-та им. И. И. Ползунова. — Барнаул, 2017. — 175 с.

249. Ванін В. А. Елементи векторного аналізу : навч. посіб. / В. А. Ванін, Ю. Л. Геворкян, О. Л. Григор'єв. — Харків : Підручник НТУ «ХП», 2016. — 460 с.

250. Дьяченко М. И. Собственные колебания жидкого топлива в условиях перераспределения / М.И. Дьяченко, А.Н. Темнов // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение. — Москва, 2012. — № 3. — С. 31–38.

251. Лимарченко О.С. Нелинейные задачи динамики жидкости в

резервуарах нецилиндрической формы / О.С. Лимарченко. — Киев : Изд-во «Адверта», 2017. — 130 с.

252. Касымжанова А. Б. Исследование динамического коэффициента поверхностного натяжения водных растворов с различной концентрацией / А.Б. Касымжанова, Г.С. Бектасова, Е.П. Шевчук // Актуальные научные исследования в современном мире. — 2018. — № 2-1 (34). — С. 84-91.

253. Кузнецов А. Л. Изучение физико-химических свойств активированных растворов / А.Л. Кузнецов, В.А. Будаева, О.А. Суворов, И.О. Пугачёв, А.Л. Никифорова // Хранение и переработка сельхозсырья. — 2015. — № 8. — С. 25-27.

254. Игнатова Ю.И., Паю И. В. Исследование качества подсолнечного масла на основе определения коэффициента поверхностного натяжения [Электронный ресурс] / Ю.И. Игнатова, И. В. Паю. — Режим доступа: <https://bit.ly/3mgdTJj>. — Дата обращения : 12 октября 2020.

255. Нагорнов С.А., Дворецкий Д.С., Романцова С.В., Таров В.П. Техника и технологии производства и переработки растительных масел : учебное пособие / С.А. Нагорнов, Д.С. Дворецкий, С.В. Романцова, В.П. Таров. — Тамбов : Изд-во ГОУ ВПО ТГТУ, 2010. — 96 с.

256. Идельчик И.Е. Справочник по гидравлическим сопротивлениям // Под ред. М. О. Штейнберга. — 3-е изд., перераб. и доп. — М.: Машиностроение, 1992. — 672 с.

257. Григорьев А. Л. Алгебраический метод последовательной локализации и расчёта частот свободных колебаний винтового цилиндрического стержня / А. Л. Григорьев, А. И. Дериенко // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. — Харків: НТУ «ХПІ», 2014. — № 39 (1082). — С. 45-70.

258. Шевченко С. А. Моделирование пневмосистемы запуска ЖРД при учете теплообмена газа со стенками полостей и уточнении сил, действующих на клапаны регуляторов / С. А. Шевченко, А. Л. Григорьев, М. С. Степанов // Авиационно-космическая техника и технология. — 2015. — № 7(124). — С. 100–110.

259. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. — М. : Наука, 1967 — 575 с.
260. Ланкастер П. Теория матриц. — М. : Наука, 1978. — 280 с.
261. Головина Л. И. Линейная алгебра и некоторые ее приложения. — М. : Наука, 1979. — 392 с.
262. Воеводин В. В. Линейная алгебра. — М.: Наука, 1980. — 400 с.
263. Глазман И. М. Конечномерный линейный анализ / И. М. Глазман, Ю. И. Любич. — М. : Наука, 1969. — 477с.
264. Ребров А. Ю. Математическая модель дизельного двигателя в безразмерных величинах с учетом его загрузки и подачи топлива / А. Ю. Ребров, Т. А. Коробка, С. В. Лахман // Вісник Нац. техн. ун-ту «ХПІ». — Харків, 2012. — № 19 : Транспортне машинобудування. — С. 31–36.
265. Шевченко С. А. Моделирование пневмосистемы запуска ЖРД при учете теплообмена газа со стенками полостей и уточнении сил, действующих на клапаны регуляторов / С. А. Шевченко, А. Л. Григорьев, М. С. Степанов // Авиационно–космическая техника и технология. — 2015. — № 7(124). — С. 100–110.
266. Геворкян Ю. Л. Основы линейной алгебры и её приложений в технике : учебник / Ю. Л. Геворкян, А. Л. Григорьев. — Харьков : НТУ «ХПИ», 2002. — 542 с.
267. Тракторные поезда / П. П. Артемьев, Ю. Е. Атаманов, Н. В. Богдан [и др.] ; под ред. В. В. Гуськова. — Москва : Машиностроение, 1982. — 183 с.
268. Шимановский А. О. Конструктивные решения, обеспечивающие безопасность движения цистерн (обзор) / А.О. Шимановский // Проблемы машиностроения и автоматизации. — 2009. — № 1. — С. 44-59.

ДЛЯ НОТАТОК

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

Наукове видання

Укладач:
КОЖУШКО Андрій Павлович

**ТЕОРІЯ КОЛИВАНЬ ТРАКТОРА
ПРИ ТРАНСПОРТУВАННІ ЦИСТЕРН
СІЛЬСЬКОГОСПОДАРСЬКОГО
ПРИЗНАЧЕННЯ**

Монографія

ISBN 617-7618-94-1



В авторській редакції

Підписано до друку 16.11.21.
Формат 60×84 1/16. Папір офсетний.
Ум. друк. арк. 13,95. Гарнітура Times.
Наклад 100 прим.

Видавець: Мірошниченко Олег Анатолійович
61002, м. Харків, вул. Дарвіна, 16, кв. 25.
Свідоцтво Державного комітету телебачення
і радіомовлення України
серія ДК № 5818 від 28.11.2017 р.
ел. пошта: merash@i.ua

Надруковано у друкарні ТОВ «Цифра Прінт».
Свідоцтво про Державну реєстрацію А01 № 432705 від 03.08.2009 р.
Адреса: 61166, м. Харків, вул. Данилевського, 30