

В.В. РОМАНЮК, канд. техн. наук, доц. ХНУ (м. Хмельницький)

**ЧИСЕЛЬНИЙ МЕТОД ЗНАХОДЖЕННЯ
ОДНОГО УЗАГАЛЬНЕНОГО ФУНКЦІОНАЛЬНОГО
ІНТЕГРАЛА НА НЕВІД'ЄМНІЙ ГРАНИЦІ
ОДИНИЧНОЇ КУЛІ З НУЛЬОВИМ ЦЕНТРОМ**

Поставлено задачу знаходження функціонального (континуального) інтегралу на невід'ємній границі кулі одиничного радіуса з центром у початку координат нормованого простору $\mathbb{L}_1[0; 1]$. Для чисельного методу його визначення побудовано інтегральну суму з відповідною нормою для диференціала точки досліджуваного підпростору простору $\mathbb{L}_1[0; 1]$.

Ключові слова: функціональний (континуальний) інтеграл, нормований простір $\mathbb{L}_n[0; 1]$, одинична куля з нульовим центром.

Постановка проблеми. Континуальне інтегрування займає одне з центральних місць у математичному апараті теоретичної фізики [1]. Уперше використані у квантовій механіці Р. Фейнманом у 1948 р., континуальні інтеграли (або, як їх ще називають, функціональні інтеграли) стали стрижнем для досліджень у квантовій фізиці [2], у квантовій теорії поля, а також в інших галузях. Наближене континуальне інтегрування є одним із найбільш перспективних засобів обчислень [3]. Функціональні інтеграли також знаходять своє місце у теорії керування, де у фазовому просторі розглядається результат від складання усіх траєкторій, по яким фазова точка могла б із початкового положення потрапити у кінцеве [4]. Але виявляється, що континуальний інтеграл може мати прикладне значення не тільки для квантової фізики чи теорії керування. Наприклад, в теорії антагоністичних ігор у роботі [5] згадується про задачу визначення глобального наслідку застосування гравцем його оптимальної стратегії, котра, зокрема, для першого гравця, полягає в обчисленні інтеграла

$$\int_{q(y) \in \mathcal{A}} \left(\int_{x \in X} \int_{y \in Y} K(x, y) p(x) q(y) dx dy \right) d[q(y)] = \\ = \int_{q(y) \in \mathcal{A}} v[p(x), q(y)] d[q(y)] \quad (1)$$

по множині \mathcal{A} усіх змішаних стратегій другого гравця, кожен елемент $q(y)$ якої ми, не обмежуючи загальності, ототожнюємо зі щільністю розподілу імовірностей на борелевій підмножині $Y \subset \mathbb{R}$ ненульової міри:

$$\int_{y \in Y} q(y) dy = 1, \quad \int_{x \in X} p(x) dx = 1. \quad (2)$$

Звичайно, в (1) і (2) $x \in X$ та $y \in Y$ є чистими стратегіями першого і другого гравців відповідно, $p(x)$ є щільністю розподілу імовірностей на X , де $X \subset \mathbb{R}$ є борелевою підмножиною ненульової міри, а поверхня $K(x, y)$ є ядром антагоністичної гри. Підінтегральна функція $v[p(x), q(y)]$ є математичним сподіванням виграшу першого гравця у ситуації у змішаних стратегіях $\{p(x), q(y)\}$. Знання інтегралу (1) може бути корисним при порівнянні глобальних наслідків використання першим гравцем двох його різних оптимальних стратегій [5].

Аналіз досліджень і публікацій по континуальному інтегруванню.

Окремі види континуального інтеграла можуть знаходитись як аналітично, так і чисельно [6]. Аналітичні методи обчислення континуальних інтегралів розглянуті у [1, 4, 7], але там досліджується окремий клас функціональних інтегралів по мірі Вінера, по мірі Гауса, а також по умовній мірі Вінера з вагою. Чисельні методи, запропоновані у [1, 2], дозволяють брати широкий клас континуальних інтегралів, але всі вони так чи інакше пов'язані з імовірнісними мірами, множина яких задається на деяких кореляційних властивостях. Одним з найбільш відомих шляхів обчислення функціонального інтеграла у квантовій фізиці, котрий являє собою також і регуляризацию для усунення розбіжностей, є уведення просторово-часової решітки [2]. Цей прийом дозволяє замінити знаходження континуальних інтегралів обчисленням звичайних ріманових інтегралів високої кратності, для чого зазвичай використовується метод Монте-Карло. Але надзвичайно високі витрати машинного часу для виконання таких обчислень зумовлюють розвиток непертурбативної регуляризації каліброваної квантової теорії на континуальному рівні і проведення досліджень безпосередньо на континуальному рівні [2, 3]. Одним з перспективних підходів є побудова наближених формул, які є точними на заданому класі функціоналів. У рамках цього підходу авторами робіт [2, 3] для континуальних інтегралів по гаусовим мірам були побудовані нові наближені формули, котрі виявились точними на класі функціональних багаточленів довільного степеня. Отримані формули у частинному випадку умовної міри Вінера у роботах [2, 8] були використані для обчислення деяких величин в евклідовій квантовій механіці за допомогою наближеного обчислення інтегралів Фейнмана без дискретизації часу, де квадратурні формули дали суттєву економію машинного часу та необхідну точність. У [2] отримані наближені формули для кратних континуальних інтегралів по умовній мірі Вінера з вагою, досліджена міра континуального інтегрування у двомірній евклідовій квантовій теорії поля з поліноміальними взаємодіями бозонних полів. У нашому ж випадку з інтегралом (1) необхідно брати функціональний інтеграл виду

$$\int_{\rho(t) \in P} \left(\int_{t \in T} \varphi[\rho(t), t] dt \right) d[\rho(t)] \quad (3)$$

на множині

$$P = \left\{ \rho(t) \in \mathbb{L}_1(T) : \rho(t) \geq 0 \forall t \in T \subset \mathbb{R}, \int_{t \in T} \rho(t) dt = 1 \right\} \quad (4)$$

усіх можливих щільностей розподілів, котрі задаються на борелевій підмножині $T \subset \mathbb{R}$ ненульової міри. Ця множина є обмеженою у просторі $\mathbb{L}_1(T)$ і, більш того, (4) є границею невід'ємної одиничної кулі $\mathbb{B}[0, 1]$ з центром у нулі $\rho(t) = 0 \forall t \in T \subset \mathbb{R}$ й одиничним радіусом. Також припускаємо, що функція $\varphi[\rho(t), t]$ є інтегровною на $T \subset \mathbb{R}$ у смислі метрики простору $\mathbb{L}_2(T)$.

Формулювання мети і постановка завдань статті. Не обмежуючи загальності, надалі покладатимемо підмножину $T = [0; 1]$. На цьому одиничному сегменті треба знайти підінтегральний функціонал

$$\int_0^1 \varphi[\rho(t), t] dt \quad (5)$$

при

$$\int_0^1 (\varphi[\rho(t), t])^2 dt < \infty. \quad (6)$$

Для того, щоб знаходити інтеграл (3), необхідно спочатку для нього записати відповідну інтегральну суму. Для цього потрібно визначитись із диференціалом $d[\rho(t)]$ та множиною (4) під знаком граничного переходу. Далі необхідно обґрунтувати метод обчислення цієї інтегральної суми, визначивши таким чином чисельний метод знаходження функціонального інтеграла типу (3) при кожному $\rho(t) \in P \subset \mathbb{B}[0, 1] \subset \mathbb{L}_1[0; 1]$.

Чисельне інтегрування функціонала-інтегранта. Вибераємо точки $t_i \in [0; 1]$ для $i = \overline{0, N}$ так, що $t_i - t_{i-1} = \frac{1}{N} \forall i = \overline{1, N}$. Таким чином виконуємо розбиття одиничного сегменту $T = [0; 1]$ на сегменти

$$\{[t_{i-1}; t_i]\}_{i=1}^N = \left\{ \left[\frac{i-1}{N}; \frac{i}{N} \right] \right\}_{i=1}^N. \quad (7)$$

Тоді інтеграл (5) наближено обчислюватимемо так:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \varphi[\rho(t), t] dt &\approx \sum_{i=1}^N \varphi[\rho(t_i), t_i](t_i - t_{i-1}) = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varphi[\rho(t_i), t_i] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varphi\left[\rho\left(\frac{i}{N}\right), \frac{i}{N}\right]. \end{aligned} \quad (8)$$

Співвідношення (8) надалі буде покладено в чисельний метод знаходження функціонального інтеграла типу (3).

Визначення диференціала $d[\rho(t)]$. Як для першого наближення, спочатку природно покладемо, що

$$d[\rho(t)] = \lim_{\substack{\Delta\rho(t) \geq 0 \forall t \in [0; 1] \\ \Delta\rho(t) \rightarrow 0 \forall t \in [0; 1]}} \|\rho(t) - [\rho(t) + \Delta\rho(t)]\| = \lim_{\substack{\Delta\rho(t) \geq 0 \forall t \in [0; 1] \\ \Delta\rho(t) \rightarrow 0 \forall t \in [0; 1]}} \|\Delta\rho(t)\|, \quad (9)$$

де функція $\Delta\rho(t)$ є деяким приростом точки $\rho(t)$ у просторі

$$P = \left\{ \rho(t) \in \mathbb{L}_1[0; 1] : \rho(t) \geq 0 \forall t \in [0; 1], \int_0^1 \rho(t) dt = 1 \right\}, \quad (10)$$

і при цьому функція $\rho(t) + \Delta\rho(t)$ залишається у просторі (10):

$$\int_0^1 [\rho(t) + \Delta\rho(t)] dt = 1. \quad (11)$$

Тут нам слід виконати скінченне розбиття простору (10) на кусково-неперервні сходинокві функції, котрі є неперервними зліва і кожна з яких

задана N значеннями на N напівінтервалах $\left\{ \left[\frac{i-1}{N}; \frac{i}{N} \right] \right\}_{i=1}^N$. Щодо розбиття

по вісі ординат, то розмірковуватимемо наступним чином. Нехай по вісі ординат функція $\rho(t)$ має M рівнів квантування. Тоді, по-перше, кожна повністю квантована функція $\rho(t)$ представлятиметься у формі $M \times N$ -матриці зі значеннями 0 й 1, де сума елементів i -го стовпчика, поділена на відношення суми усіх елементів цієї матриці до N , буде дорівнювати значенню функції $\rho(t)$ на напівінтервалі $\left[\frac{i-1}{N}; \frac{i}{N} \right]$. По-друге, для того, щоб скласти скінченне розбиття множини (10), треба його спершу упорядкувати.

Нехай скінченне розбиття множини (10) містить J елементів – квантованих функцій $\rho(t)$. Після упорядкування цих квантованих функцій перший елемент може мати, зокрема, найменшу норму, а останній –

найбільшу. Очевидно, що тут не можна брати норму простору $\mathbb{L}_1[0; 1]$, оскільки у ньому всі елементи розбиття множини (10) мають одиничну норму. Тоді прийдеться узяти норму простору $\mathbb{L}_2[0; 1]$. Але у цьому просторі виникає ще одна складність. Справа у тому, що якщо мова йде про одиничну імовірність (чисту стратегію одного з гравців в антагоністичній грі) при $t = h$, то $\rho(t) = \delta(t - h)$, причому інтеграл $\int_0^1 \delta^2(t - h) dt$ не існує, адже це можна

показати наступним чином. Якщо $\delta(t - h) \approx N \quad \forall t \in \left[h; h + \frac{1}{N} \right] \subset [0; 1]$, то

$$\int_0^1 \delta^2(t - h) dt = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} N^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} N = \infty. \quad (12)$$

Тому за норму візьмемо таку функцію:

$$\|\rho(t)\| = \frac{\sqrt{\int_0^1 \rho^2(t) dt}}{\max_{\rho(t) \in \mathcal{P} \subset \mathbb{B}[0, 1] \subset \mathbb{L}_2[0; 1]} \sqrt{\int_0^1 \rho^2(t) dt}} = \frac{\sqrt{\int_0^1 \rho^2(t) dt}}{\sqrt{\int_0^1 \delta^2(t) dt}}, \quad (13)$$

яка є відношенням норми функції $\rho(t)$ у просторі $\mathbb{L}_2[0; 1]$ до максимальної норми цієї функції у цьому ж просторі. Далі має місце таке твердження.

Теорема 1. Норма (13) у просторі функцій (10) задовольняє нерівності

$$0 \leq \|\rho(t)\| \leq 1, \quad (14)$$

причому мінімум

$$\min_{\rho(t) \in \mathcal{P} \subset \mathbb{B}[0, 1] \subset \mathbb{L}_2[0; 1]} \|\rho(t)\| = 0 \quad (15)$$

досягається на рівноімовірних розподілах, а максимум

$$\max_{\rho(t) \in \mathcal{P} \subset \mathbb{B}[0, 1] \subset \mathbb{L}_2[0; 1]} \|\rho(t)\| = 1 \quad (16)$$

досягається на розподілах з одиничною імовірністю.

Доведення. Для рівноімовірного розподілу буде $\rho(t) = \rho_0(t) = 1 \quad \forall t \in [0; 1]$. Це означає, взагалі кажучи, що його норма у просторі $\mathbb{L}_n[0; 1]$

$$\left(\int_0^1 |\rho_0(t)|^n dt \right)^{\frac{1}{n}} = \left(\int_0^1 |1|^n dt \right)^{\frac{1}{n}} = \left(\int_0^1 dt \right)^{\frac{1}{n}} = 1^{\frac{1}{n}} = 1 \quad \forall n \geq 1, \quad (17)$$

звідки

$$\|\rho_0(t)\| = \frac{1}{\sqrt{\int_0^1 \delta^2(t) dt}} = 0, \quad (18)$$

де використано (12), ϵ аргументом мінімуму (15). Для розподілу з одиничною імовірністю буде $\rho(t) = \delta(t-h)$ при $h \in [0; 1]$. Тоді максимум (16) досягається саме на таких розподілах, що доводить нерівність (14) і теорему загалом.

Отже, якщо (13) є нормою для сортування $\{\rho_j(t)\}_{j=1}^J$ елементів скінченного розбиття множини (10) за зростанням норми, то $\|\rho_{j-1}(t)\| \leq \|\rho_j(t)\| \forall j = \overline{2, J}$. Тоді замість припущеної раніше форми функціонального диференціала (9) використаємо іншу, зі звичайною нормою підпростору $[0; 1] \subset \mathbb{R}$ числової прямої під знаком границі та внутрішньою нормою (13) упорядкування скінченного розбиття множини (10):

$$\begin{aligned} d[\rho(t)] &= \lim_{\substack{\Delta\rho(t) \geq 0 \forall t \in [0; 1] \\ \Delta\rho(t) \rightarrow 0 \forall t \in [0; 1]}} \left(\|\rho(t)\| - \|\rho(t) + \Delta\rho(t)\| \right) = \\ &= \lim_{\substack{\Delta\rho(t) \geq 0 \forall t \in [0; 1] \\ \Delta\rho(t) \rightarrow 0 \forall t \in [0; 1]}} \frac{\left| \sqrt{\int_0^1 \rho^2(t) dt} - \sqrt{\int_0^1 [\rho(t) + \Delta\rho(t)]^2 dt} \right|}{\sqrt{\int_0^1 \delta^2(t) dt}} \end{aligned} \quad (19)$$

при справедливості (11). Звідси випливає наступне твердження.

Теорема 2. Інтеграл

$$\int_{\rho(t) \in P} d[\rho(t)] = 1 \quad (20)$$

із диференціалом (19), де множиною інтегрування є (10).

Доведення. Оскільки виконана нерівність (14), то звичайна лебегівська міра множини упорядкованих норм (13) дорівнює одиниці. Нескінченно малі (19) у сумі (20) будуються саме за такою мірою, тому їх сума повинна дорівнювати одиниці. Теорему доведено.

Інтегральна сума для функціонального інтеграла типу (3) на множині (10). Визначимо наближено норму функції $\rho_j(t)$ у просторі $\mathbb{L}_2[0; 1]$ наступним чином:

$$\begin{aligned} \|\rho_j(t)\| &= \sqrt{\int_0^1 \rho_j^2(t) dt} \approx \sqrt{\sum_{i=1}^N [\rho_j(t_i) - \rho_j(t_{i-1})]^2 (t_i - t_{i-1})} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[\rho_j\left(\frac{i}{N}\right) - \rho_j\left(\frac{i-1}{N}\right) \right]^2}. \end{aligned} \quad (21)$$

Тепер інтеграл (3) легко записати через його інтегральну суму, у якій інтегрування функціонала-інтегранта здійснюватиметься за (8), а диференціювання змінної інтегрування $\rho(t)$ відповідатиме (19) з відсортованими нормами $\{\|\rho_j(t)\|\}_{j=1}^J$ елементів скінченного розбиття множини (10):

$$\begin{aligned} \int_{\rho(t) \in \mathbf{R}} \left(\int_{t \in T} \varphi[\rho(t), t] dt \right) d[\rho(t)] &\approx \int_{\rho(t) \in \mathbf{R}} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varphi \left[\rho_j\left(\frac{i}{N}\right), \frac{i}{N} \right] \right) d[\rho(t)] \approx \\ &\approx \sum_{j=2}^J \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varphi \left[\rho_j\left(\frac{i}{N}\right), \frac{i}{N} \right] \right) \times \\ &\times \frac{\left| \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [\rho_{j-1}(t_i) - \rho_{j-1}(t_{i-1})]^2} - \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [\rho_j(t_i) - \rho_j(t_{i-1})]^2} \right|}{\sqrt{N}} = \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_{j=2}^J \left(\sum_{i=1}^N \varphi \left[\rho_j\left(\frac{i}{N}\right), \frac{i}{N} \right] \right) \times \\ &\times \left(\sqrt{\sum_{i=1}^N \left[\rho_j\left(\frac{i}{N}\right) - \rho_j\left(\frac{i-1}{N}\right) \right]^2} - \sqrt{\sum_{i=1}^N \left[\rho_{j-1}\left(\frac{i}{N}\right) - \rho_{j-1}\left(\frac{i-1}{N}\right) \right]^2} \right). \end{aligned} \quad (22)$$

Звісно ж, модуль у (22) опущено завдяки нерівності $\|\rho_{j-1}(t)\| \leq \|\rho_j(t)\|$ $\forall j = \overline{2, J}$.

Висновок та перспектива подальшого дослідження. Функціональний інтеграл виду (3) є корисним для оцінювання глобального наслідку використання стратегії гравцем в антагоністичній грі. При покладанні норми (13) та диференціала (19) цей інтеграл може бути наближено обчислений як (22). При цьому вклад невраховуваної складової зі значенням $\rho(0)$ буде "з'їдатися" інтегруванням на множині нульової міри. Похибка обчислень,

згідно з (12) і (18), є пропорційною величині $\frac{1}{\sqrt{N}}$. Тоді, зокрема, значення

інтегралу (20) буде не таким, а дорівнюватиме $1 - \frac{1}{\sqrt{N}}$. Тому при

наближеному інтегруванні (3) по множині (10) слід брати доволі велике число N сегментів (7). Звідси перспектива подальшого дослідження якраз і полягає в удосконаленні та адаптації розробленого чисельного методу функціонального інтегрування до негроміздких за об'ємом просторово-часових решіток, тобто метою продовження дослідження є вироблення менш невимогливого чисельного методу до великого числа N сегментів (7).

Список літератури: 1. Березин Ф.А. Континуальный интеграл по траекториям в фазовом пространстве / Ф.А. Березин // Успехи математических наук. – 1980. – Т. 132. – Вып. 3. – С. 497 – 548. 2. Жидков Е.П. Об одном методе вычисления континуальных интегралов без решёточной дискретизации / Е.П. Жидков, Ю.Ю. Лобанов, Р.Р. Шахбагян // Математическое моделирование. – 1989. – Т. 1. – № 8. – С. 139 – 157. 3. Жидков Е.П. Приближённое вычисление кратных континуальных интегралов в многомерных задачах квантовой физики / Е.П. Жидков, Ю.Ю. Лобанов, Р.Р. Шахбагян // Математическое моделирование. – 1990. – Т. 2. – № 10. – С. 110 – 119. 4. Далецкий Ю.Л. Континуальные интегралы, связанные с операторными эволюционными уравнениями / Ю.Л. Далецкий // Успехи математических наук. – 1962. – Т. XVII. – Вып. 5 (107). – С. 3 – 115. 5. Романюк В.В. Оцінювання глобального і локальних наслідків застосування гравцем оптимальної стратегії в антагоністичних іграх при чистій оптимальній стратегії в іншого гравця / В.В. Романюк // Вісник Донецького національного університету. Серія А. Природничі науки. – 2009. – № 2. – С. 431 – 436. 6. Методы вычислений на ЭВМ: Справочное пособие / Иванов В.В. – К.: Наук. думка, 1986. – 584 с. 7. Ладохин В.И. Вычисление континуальных интегралов от

функционалов $\Phi \left[\int_0^r \alpha_1(\tau) dx(\tau); \dots; \int_0^r \alpha_m(\tau) dx(\tau) \right]$ / В.И. Ладохин // Успехи математических наук.

– 1964. – Т. XIX. – Вып. 1 (115). – С. 155 – 159. 8. Gregus M. On the deterministic computation of functional integrals in application to quantum mechanical problems / M. Gregus, Yu.Yu. Lobanov, O.V. Sidorova, E.P. Zhidkov // J. Comp. Appl. Math. – 1987. – V. 20. – P. 247 – 256.

Стаття представлена д.т.н., проф. Національної академії державної прикордонної служби України імені Б. Хмельницького Катеринчуком І. С.

УДК 517.987.4

Численный метод нахождения одного обобщённого функционального интеграла на неотрицательной границе единичного шара с нулевым центром / В.В. Романюк // Вестник НТУ "ХПИ". Тематический выпуск: Информатика и моделирование. – Харьков: НТУ "ХПИ". – 2010. – № 31. – С. 153 – 161.

Поставлена задача нахождения функционального (континуального) интеграла на неотрицательной границе шара единичного радиуса с центром в начале координат нормированного пространства $\mathbb{L}_1[0; 1]$. Для численного метода его приближённого определения построена интегральная сумма с соответствующей нормой для дифференциала точки исследуемого подпространства пространства $\mathbb{L}_1[0; 1]$. Библиогр.: 8 назв.

Ключевые слова: функциональный (континуальный) интеграл, нормированное пространство $\mathbb{L}_n[0; 1]$, шар единичного радиуса с центром в начале координат.

UDC 517.987.4

Numerical method for finding a generalized functional integral on nonnegative boundary of the unit ball with zero center / V.V. Romanuke // Herald of the National Technical University "KhPI". Subject issue: Information Science and Modelling. – Kharkov: NTU "KhPI". – 2010. – №. 31. – P. 153 – 161.

The task of finding of functional (continual) integral is put on the non-negative border of ball of single radius with a center at the beginning of co-ordinates of the rationed space $\mathbb{L}_1[0; 1]$. For the numeral method of his close determination an integral sum is built with the proper norm for the differential of point of the probed subspace of space $\mathbb{L}_n[0; 1]$. Refs: 8 titles.

Key words: functional (continual) integral, rationed space $\mathbb{L}_n[0; 1]$, ball of single radius with a center at the beginning of co-ordinates.

Поступила в редакцию 23.05.2010