

Н.П. КУНДЕНКО, канд. техн. наук, докторант, ХНТУСХ им.

Петра Василенка, Харьков

А.Н. МОРОЗ, д-р техн. наук, доц., ХНТУСХ им. П. Василенка,
Харьков

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ИЗМЕНЕНИЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ ЖИДКОЙ СРЕДЫ НА ЧАСТОТУ РЕЗОНАТОРА

На підставі теоретичного дослідження змін діелектричної проникності рідкого середовища на частоту оптичного резонатора отримано співвідношення, яке зв'язує зміну резонансної частоти зі зміною діелектричної проникності рідкого середовища, що знаходиться в кюветі.

На основании теоретического исследования изменений диэлектрической проницаемости жидкой среды на частоту оптического резонатора получено соотношение связывающее изменение резонансной частоты с изменением диэлектрической проницаемости жидкой среды, находящейся в кювете.

Введение. При исследовании биологических объектов широкое применение получили электромагнитные технологии, развитие которых не возможно без точных диэлектрических характеристик биологических сред. Эффективными устройствами для определения диэлектрических характеристик биологических объектов в миллиметровом диапазоне волн являются оптические резонаторы, которые моделируется идеально проводящими зеркалами сферической и цилиндрической форм. Для решения задачи о собственных частотах и колебаниях такого резонатора используется метод Галеркина [1] с выбором пробных функций, удовлетворяющих граничному условию на зеркалах резонатора (равенство нулю тангенциальных компонент электрического поля на поверхности зеркал). Важной задачей является исследование резонансных частот, как пустого резонатора, так и резонатора, содержащего кювету с жидкой средой.

Цель, задание исследования. Цель исследования является определение соотношений связывающих изменение диэлектрической проницаемости жидкой среды, помещенной в резонатор, с изменением резонансных частот.

Основной текст. Рассмотрим двухзеркальный резонатор, образованный сферическим зеркалом с радиусом кривизны R и апертурой $2a_1$

и зеркалом в виде отрезка круглого цилиндрического волновода с диаметром $2a$ и высотой h . Предполагаем, что зеркала резонатора являются идеально проводящими (т.е. пренебрегаем омическими потерями), а также что резонатор симметричен относительно оси проходящей через центр сферического зеркала (верхнее зеркало) и совпадающей с осью отрезка волновода (нижнее зеркало). Введем цилиндрическую систему координат r, φ, z с осью z , совпадающей с осью симметрии резонатора. Для практических приложений, интерес представляет колебания рассматриваемого резонатора симметричные относительно оси z и, следовательно, независящие от азимутальной координаты φ ($\frac{\partial}{\partial \varphi} \equiv 0$).

С математической точки зрения задача о собственных частотах и колебаниях состоит в следующем. Требуется определить частоты, при которых существуют нетривиальные решения однородной системы уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot} \vec{H} = -ik \vec{E}; \operatorname{rot} \vec{E} = -ik \vec{H}, \quad (1)$$

где $k = \omega/c$ – волновое число; ω – искомая частота; c – скорость света в вакууме. На зеркалах резонатора тангенциальная компонента электрического поля должна обращаться в нуль. На больших расстояниях от резонатора для \vec{E} – электрического и \vec{H} – магнитного полей должно выполняться условие излучения Мюллера – Рейхардта [2]:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \vec{E}_n H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(kP) e^{in\varphi}, \\ \vec{H} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \vec{H}_n H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(kP) e^{in\varphi}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $P = \sqrt{z^2 + r^2}$, $H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(\dots)$ – функция Ханкеля первого рода.

Представим уравнения (1) в цилиндрической системе координат с учетом, что векторные функции \vec{E} и \vec{H} не зависят от азимутальной координаты φ . Тогда получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} &= ik E_r & \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} &= ik E_r \\ \frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} &= -ik E_\varphi & \frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} &= ik H_\varphi \end{aligned} \quad (3)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r H_\varphi) = -i k E_z \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_\varphi) = i k H_z$$

Здесь

$\vec{E} = E_r \vec{e}_r + E_\varphi \vec{e}_\varphi + E_z \vec{e}_z$, $\vec{H} = H_r \vec{e}_r + H_\varphi \vec{e}_\varphi + H_z \vec{e}_z$, \vec{e}_r , \vec{e}_φ , \vec{e}_z – орты цилиндрической системы координат.

Как следует из (3) существует два типа решений (собственных колебаний). Первый тип колебаний характеризуется тем, что $H_\varphi \equiv 0$, $E_\varphi \neq 0$. Вектор напряженности магнитного поля имеет компоненты H_r и H_z , а вектор напряженности электрического поля компоненты E_φ , $E_r = E_z = 0$.

Для второго типа собственных колебаний имеем: $H_\varphi \neq 0$, $E_\varphi \equiv 0$ и соответственно $H_r = H_z = 0$, E_r, E_z . Для измерения диэлектрической проницаемости жидких сред с помощью рассматриваемого резонатора более предпочтительны колебания второго типа. Для этого типа колебаний характерно равенство нулю азимутальной компоненты магнитного поля на оси резонатора и максимальное значение E_z – компоненты электрического поля на оси резонатора. В этом случае естественно размещать кювету с жидкой средой в области, где электрическое поле принимает максимальное значение (т.е. в окрестности оси резонатора). Поскольку только тогда можно эффективно контролировать незначительные изменения диэлектрической проницаемости. Для этого типа колебаний из (3) получим

$$E_r = \frac{1}{i k} \frac{\partial H_\varphi}{\partial z}, \quad E_z = -\frac{1}{i k r} \frac{\partial}{\partial r} (r H_\varphi). \quad (4)$$

Компонента H_φ магнитного поля должна удовлетворять уравнению Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 H_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_\varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 H_\varphi}{\partial z^2} + \left(k^2 - \frac{1}{r^2} \right) H_\varphi = 0 \quad (5)$$

Сформулируем в терминах компоненты H_φ граничные условия на зеркалах резонатора. Пусть функция $r = b(z)$ является образующей для зеркал резонатора, т.е. зеркала резонатора образуются путем вращения линии, задаваемой уравнением $r = b(z)$ вокруг оси z .

Легко видеть, что такая функция имеет вид

$$b(z) = \begin{cases} a, & 0 \leq z \leq h \\ \sqrt{R^2 - (z + R - h - L)^2}, & L + h - \delta \leq z \leq h + L, \end{cases} \quad (6)$$

где L – расстояние между зеркалами резонатора;
 $\delta = R \left(1 - \sqrt{1 - a_1^2 / R^2} \right)$.

С помощью (6) представим вектор \vec{E} – напряженности электрического поля на поверхности зеркал в виде

$$\vec{E} = \frac{\vec{r}}{\sqrt{1 + \dot{b}^2}} \left(\dot{b} E_r + E_z \right) + \frac{\vec{n}}{\sqrt{1 + \dot{b}^2}} \left(E_r - \dot{b} E_z \right). \quad (7)$$

Здесь \vec{r} – орт касательной и \vec{n} – орт нормали к линии $r = b(z)$, а точка обозначает операцию дифференцирования.

Из (7) следует, что в силу граничного условия на зеркалах резонатора (равенство нулю тангенциальной компоненты напряженности электрического поля), должно выполняться равенство при $r = b(z)$

$$\dot{b} E_r + E_z = 0. \quad (8)$$

Подставляя (4) в (8) имеем

$$\dot{b} \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} - \frac{\partial H_\varphi}{\partial r} - \frac{H_\varphi}{z} = 0. \quad (9)$$

при $r = b(z)$, $0 \leq z \leq L + h$.

Для составления алгоритма расчета резонансных частот и колебаний резонатора рассмотрим уравнение (5) для магнитной компоненты $U = H_\varphi$ и представим его в следующем виде

$$-LU + k^2 U = 0, \quad (10)$$

здесь L – дифференциальный оператор

$$L = -\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2}.$$

Как следует из (9), функция U должна удовлетворять на зеркалах резонатора граничному условию

$$\left[\dot{b} \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rU) \right] \Big|_{r=b(z)} = 0. \quad (11)$$

Следуя методу Галеркина [1], введем систему линейно - независимых функций $\{U_n\}_{n=0}^{\infty}$, удовлетворяющих граничному условию (11). В качестве таких функций $U_n(r, z)$, $n=0, 1, 2, \dots$, выберем следующие функции

$$U_n(r, z) = \eta(z) J_1\left(\frac{\mu r}{b(z)}\right) \cos \frac{\pi n}{L_1} z. \quad (12)$$

Здесь $\eta(z)$ – некоторая функция, указанная ниже; $L_1 = L + h$, L – расстояние между зеркалами резонатора; h – высота цилиндрического зеркала; $J_1(\dots)$ – функция Бесселя первого порядка; μ – наименьший корень функции Бесселя $J_0(\dots)$, $J_0(\mu) = 0$.

Покажем, что функции (12) удовлетворяют условию (11), если в качестве функции $\eta(z)$ выбрать функцию $\eta(z) = b(z)^{-1}$. Действительно имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r}(rU_n) &= U_n + r \frac{\partial U_n}{\partial r} = \frac{1}{b(z)} J_1\left(\frac{\mu r}{b(z)}\right) \cos \frac{\pi n}{L_1} z + \\ &+ \frac{r \mu}{b^2(z)} J_1'\left(\frac{\mu r}{b(z)}\right) \cos \frac{\pi n}{L_1} z = \frac{\mu r}{b^2} J_0\left(\frac{\mu r}{b(z)}\right) \cos \frac{\pi n}{L_1} z. \end{aligned} \quad (13)$$

Из (13) следует, что при $r = b(z)$ $\frac{\partial}{\partial r}(rU_n) = 0$.

Далее имеем

$$\frac{\partial U_n}{\partial z} = -\frac{\dot{b} \mu r}{b^3(z)} J_0\left(\frac{\mu r}{b(z)}\right) \cos \frac{\pi n}{L_1} z - \frac{1}{b} J_1\left(\frac{\mu r}{b(z)}\right) \frac{\pi n}{L_1} \sin \frac{\pi n}{L_1} z.$$

Тогда получаем

$$\frac{\partial U_n}{\partial z} = -\frac{1}{b} J_1(\mu) \frac{\pi n}{L_1} \sin \frac{\pi n}{L_1} z. \quad (14)$$

Поскольку, радиус кривизны сферического зеркала и расстояние между зеркалами резонатора достаточно большие по сравнению с резонансной длиной волны, то можно считать, что приближенно

$$\dot{b} \frac{\partial U_n}{\partial z} \cong 0. \quad (15)$$

Для цилиндрического зеркала $\dot{b} = 0$ и следовательно равенство (15) выполняется точно. Таким образом, мы показали, что для исследуемого резонатора

двумого резонатора пробные функции (12) удовлетворяют граничному условию (11) на зеркалах резонатора.

Будем искать решение дифференциального уравнения (10) в виде следующего ряда

$$U = \sum_{n=0}^P C_n U_n. \quad (16)$$

Тогда на основании метода Галеркина заменим (10) цепочкой проекционных соотношений

$$\int_0^{L_1} dz \int_0^{b(z)} \left(-LU + k^2 U \right) U_n r dr = 0 \quad (n=1, 2, \dots, P). \quad (17)$$

Теперь подставим (16) в уравнения (17). После ряда эквивалентных преобразований получим

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^P C_n \int_0^{L_1} dz \int_0^{b(z)} \left(\nabla U_n \cdot \nabla U_m + \frac{U_m U_n}{r^2} \right) r dr = \\ = k^2 \sum_{n=1}^P C_n \int_0^{L_1} dz \int_0^{b(z)} U_n U_m r dr \quad (m=1, 2, \dots, P). \end{aligned} \quad (18)$$

Соотношение (18) представляет собой однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов C_n .

Представим (18) в матричной форме

$$AC = k^2 BC, \quad (19)$$

где $C = (C_n)_{n=1}^P$ – P – мерный вектор неизвестных коэффициентов разложения решения уравнения (10) в ряд (16), а матрицы

$A = \|A_{mn}\|_{m,n=1}^P$ и $B = \|B_{mn}\|_{m,n=1}^P$ имеют следующий вид

$$A_{mn} = \int_0^{L_1} dz \int_0^{b(z)} \left(\nabla U_n \cdot \nabla U_m + \frac{U_n U_m}{r^2} \right) r dr, \quad (20)$$

$$B_{mn} = \int_0^{L_1} dz \int_0^{b(z)} U_n U_m r dr. \quad (21)$$

Таким образом исходная задача о собственных частотах и колебаниях (5), (9) сведена к поиску таких значений волнового числа k ($k = \omega/c$, ω – резонансная частота) при которых существуют нетривиальные решения однородной системы линейных алгебраических уравнений (19). Как известно [1], условием существования нетривиальных реше-

ний является равенство нулю определителя матрицы $A - k^2 B$, т.е.

$$\det (A - k^2 B) = 0. \quad (22)$$

Корни уравнения (22) являются искомыми волновыми числами k , а, следовательно $\omega = kc$ – искомые резонансные частоты.

В общем случае система уравнений (19) и уравнение (22) могут быть решена только численными методами. Однако, для основного типа колебаний, имеющего осцилляции поля (магнитной компоненты $U = H_\varphi$) только вдоль оси резонатора и ограниченного каустиками, можно получить приближенную формулу для резонансной частоты.

С этой целью вычислим матричные элементы (20) и (21). Подставим (12) в (20) и (21). Тогда после ряда преобразований будем иметь

$$A_{mn} = J_1^2(\mu) \left[\mu^2 \int_0^{L_1} b^{-2}(z) (1 + \dot{b}^2(z)) \cos Nz \cos Mz dz + \right. \\ \left. + NM \int_0^{L_1} \sin Nz \sin Mz dz \right]; \quad (23)$$

$$B_{mn} = J_2^1(\mu) \int_0^{L_1} \cos Nz \cos Mz dz, \quad (24)$$

где $M = \frac{m\pi}{L_1}$, $N = \frac{n\pi}{L_1}$, $m, n = 1, 2, \dots, P$.

Рассмотрим интеграл (24), воспользовавшись формулой

$$\cos^2 Nz = \frac{1 - \cos^2 Nz}{2};$$

тогда получим

$$B_{mn} = \frac{L_1}{2} J_2^1(\mu) \delta_{mn}, \quad (25)$$

где $\delta_{mn} = \begin{cases} 1, & m = n, \\ 0, & m \neq n \end{cases}$ – символ Кронекера.

Рассмотрим теперь интеграл (23). Из (6) легко получить следующее выражение для $\dot{b}(z)$, а именно

$$\dot{b}(z) = \begin{cases} 0, & 0 \leq z \leq h \\ -\frac{z + R - h - L}{\sqrt{R^2 - (z + R - h - L)^2}}, & L + h - \delta < z < h + L \end{cases} \quad (26)$$

Подставляя (6) и (26) в (23) и делая необходимые преобразования, получим

$$A_{mn} = J_1^2(\mu) \left[\frac{\mu^2 h}{a^2} \int_0^{L_1} \cos Nz \cos Mz dz + \frac{\mu^2}{a_1^2} \int_h^{L_1-\delta} \cos Nz \cos Mz dz + \right. \\ \left. + NM \frac{L_1}{2} \delta_{mn} + R^2 \mu^2 \int_{L_1-\delta}^{L_1} \frac{(z+R-h-L)^2}{[R^2-(z+R-h-L)^2]^2} \cos Nz \cos Mz dz \right]. \quad (27)$$

Из свойств интегралов от быстро осциллирующих функций следует, что матричные элементы A_{mn} при $m \neq n$ и $m \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$ быстро убывают. Поэтому достаточно ограничиться диагональными матричными элементами A_{mm} . Тогда из (27) получаем

$$A_{mm} = J_1^2(\mu) \left[\frac{\pi^2 m^2}{2 L_1} + \frac{\mu^2 h}{2 a^2} + \frac{\mu^2 (L-\delta)}{2 a_1^2} + \frac{R^2 \mu^2}{2} \int_{R-\delta}^R \frac{x^2}{(R^2-x^2)^2} dx \right]. \quad (28)$$

Подинтегральная функция в интеграле (28) имеет сильную особенность при $x = R$. Поэтому этот интеграл следует понимать в смысле Адамара [3].

Вычисляя интеграл в (28) окончательно имеем

$$A_{mm} = J_1^2(\mu) \left[\frac{\pi^2 m^2}{2 L_1} + \frac{\mu^2 h}{2 a^2} + \frac{\mu^2 (L-\delta)}{2 a_1^2} + \frac{\mu^2}{2 R} \ell n \frac{2 R}{2R-\delta} \right], \quad (29)$$

Для получения приближенной формулы для резонансной частоты, достаточно подставить (25) и (29) в уравнение (22). Поскольку матрицы A и B являются диагональными, то условие равенства нулю определителя матрицы $A - k^2 B$ запишется в следующем виде

$$A_{mm} - k^2 B_{mm} = 0. \quad (30)$$

Из (30) получаем выражение для резонансной частоты

$$f_m = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\frac{m^2 \pi^2}{L_1^2} + \mu^2 P}, \quad (31)$$

где

$$P = \frac{2h}{a^2 L_1} + \frac{2(L-\delta)}{L_1 a_1^2} + \frac{1}{RL_1} \ln \frac{2R}{2R-\delta}. \quad (32)$$

Таким образом, зная геометрические параметры зеркал резонато-

ра и задавая количество осцилляций поля собственного колебания вдоль оси резонатора можно согласно формулам (31), (32) рассчитать резонансную частоту.

Как следует из выше изложенного, компонента магнитного поля H_φ собственного колебания имеет вид

$$H_\varphi^m = C_m b^{-1}(z) J_1\left(\frac{\mu r}{b(z)}\right) \cos\left(\frac{\pi m}{L_1} z\right), \quad (33)$$

где C_m – произвольная постоянная величина; $L_1 = L + h$.

С помощью (33) из (4) можно получить следующие выражения для компоненты электрического поля собственного колебания

$$E_r^m = \frac{c C_m}{i 2 \pi f_m b(z)} \left[\frac{\pi m}{L_1} J_1\left(\frac{\mu r}{b(z)}\right) \sin \frac{\pi m}{L_1} z - \frac{\dot{b} r}{b^2} J_0\left(\frac{\mu r}{b(z)}\right) \cos \frac{\pi m}{L_1} z \right], \quad (34)$$

$$E_z^m = - \frac{c C_m}{i 2 \pi f_m b^2(z)} J_0\left(\frac{\mu r}{b(z)}\right) \cos \frac{\pi m}{L_1} z. \quad (35)$$

Из (35) и свойств функции Бесселя нулевого порядка следует, что модуль E_z^m – компоненты электрического поля принимает максимальное значение на оси резонатора ($r=0$). При этом модуль E_r^m – компоненты электрического поля обращается в нуль при $r=0$ (т.е. на оси резонатора).

Такое распределение электрического поля собственного колебания позволяет утверждать, что кювету с однородной изотропной жидкой средой с относительной диэлектрической проницаемостью ϵ следует помещать вдоль оси резонатора и внутри цилиндрического зеркала, где колебания амплитуды напряженности электрического поля принимают максимальное значение на оси резонатора. Это позволяет контролировать незначительные ($\Delta\epsilon \sim 10^{-3}$) изменения диэлектрической проницаемости жидкой среды, находящейся в кювете. С электродинамической точки зрения, задача состоит в определении изменения резонансной частоты Δf вызываемого изменением $\Delta\epsilon$ диэлектрической проницаемости жидкой среды. Поскольку геометрические размеры кюветы малы по сравнению с размерами резонатора, то для решения этой задачи можно воспользоваться теорией возмущения [4].

Пусть ε_1 и ε_2 – значения относительных диэлектрических проницаемостей жидкой среды, а соответствующие им резонансные частоты f_1 и f_2 , f_m – резонансная частота резонатора без кюветы с жидкой средой. Тогда согласно теории возмущений будем иметь

$$\frac{f_1 - f_m}{f_m} = -V_0 \frac{\gamma_1 4\pi E_{cp}}{\int_V (|E_m|^2 + |H_m|^2) dV}. \quad (36)$$

$$\frac{f_2 - f_m}{f_m} = -V_0 \frac{\gamma_2 4\pi E_{cp}}{\int_V (|E_m|^2 + |H_m|^2) dV}. \quad (37)$$

Здесь $V_0 = \pi R_1^2 h_1$ – геометрический объем кюветы,

$$\gamma_1 = \frac{3}{4\pi} \frac{\varepsilon_1 - 1}{\varepsilon_2 + 2}, \quad (38)$$

$$\gamma_2 = \frac{3}{4\pi} \frac{\varepsilon_2 - 1}{\varepsilon_2 + 2}, \quad (39)$$

электрические поляризуемости кюветы с жидкой средой в однородном электрическом поле,

$$E_{cp} = \frac{1}{V_0} \int_{V_0} |\bar{E}_m|^2 dV, \quad (40)$$

\bar{E}_m , \bar{H}_m – напряженности электрического и магнитного полей собственного колебания резонатора без кюветы; V – область резонатора ограниченная зеркалами и каустическими поверхностями собственного колебания.

Резонансная частота f_m может быть определена либо в результате эксперимента, либо согласно формуле (31).

Вычислим интегралы, входящие в (36) и (37). Прежде всего, отметим, что смещения частот (36), (37) можно представить в виде

$$\frac{f_1 - f_m}{f_m} = -\frac{\varepsilon_1 - 1}{\varepsilon_2 + 2} A_m, \quad (41)$$

$$\frac{f_2 - f_m}{f_m} = -\frac{\varepsilon_2 - 1}{\varepsilon_2 + 2} A_m, \quad (42)$$

где

$$A_m = \frac{3 \int_{V_0} |\bar{E}_m|^2 dV}{\int_V (|\bar{E}_m|^2 + |\bar{H}_m|^2) dV}. \quad (43)$$

При вычислении интегралов из (43) учтем следующее. Компоненты E_r и H_ϕ являются малыми в окрестности оси резонатора (т.е. при $r \cong 0$) и быстро убывают с увеличением r . Это следует непосредственно из (33) и (34). Поэтому при расчете интегралов из (43) этими компонентами электромагнитного поля собственного колебания можно пренебречь (как показали численные оценки, относительная погрешность не превышает 5%). Учитывая выше сказанное, будем иметь

$$\int_{V_0} |\vec{E}_m|^2 dV = 2\pi \int_0^{h_1} dz \int_0^{R_1} |E_z^m|^2 r dr = \frac{c^2 C_m^2 h_1}{2\pi f_m^2 a^4} \int_0^{L_1} \cos^2 \frac{\pi m}{L_1} z dz \times \\ \times \int_0^{R_1} J_0^2 \left(\frac{\mu r}{a} \right) r dr. \quad (44)$$

Далее, получаем

$$\int_0^{h_1} \cos^2 \frac{\pi m}{L_1} r dr = \frac{h_1}{2} \left(1 + \frac{L_1}{2\pi m h_1} \sin \frac{2\pi m h_1}{L_1} \right). \quad (45)$$

Для вычисления интеграла, содержащего функцию Бесселя, воспользуемся формулой [5]

$$\int_0^R J_0^2(r) r dr = \frac{R^2}{2} \left(J_1^2(R) + J_0^2(R) \right).$$

Тогда будем иметь

$$\int_0^{R_1} J_0^2 \left(\frac{\mu r}{a} \right) r dr = \frac{R_1^2}{2} \left(J_1^2 \left(\frac{\mu R_1}{a} \right) + J_0^2 \left(\frac{\mu R_1}{a} \right) \right). \quad (46)$$

Подставляя (45) и (46) в (44) окончательно получаем

$$\int_{V_0} |\vec{E}_m|^2 dV = \frac{c^2 C_m^2 h_1 R_1^2}{8\pi f_m^2 a^4} \left(1 + \frac{L_1}{2\pi m h_1} \sin \frac{2\pi m h_1}{L_1} \right) \times \\ \times \left(J_1^2 \left(\frac{\mu R_1}{a} \right) + J_0^2 \left(\frac{\mu R_1}{a} \right) \right). \quad (47)$$

Рассмотрим теперь интеграл

$$\int_V |\vec{E}_m|^2 + |\vec{H}_m|^2 dV = 2\pi \int_0^{h_1} dz \int_0^a |E_z^m|^2 r dr = \\ = \frac{c^2 C_m^2 L_1}{2\pi f_m^2 a^4} \int_0^{L_1} \cos^2 \frac{\pi m z}{L_1} dz \int_0^a J_0^2 \left(\frac{\mu r}{a} \right) r dr =$$

$$= \frac{c^2 C_m^2 L_1}{8 \pi f_m^2 a^2} J_1^2(\mu). \quad (48)$$

После подстановки (47) и (48) в выражение для величины A_m и ряда преобразований имеем

$$A_m = \frac{3h_1 R_1^2 \left(1 + \frac{L_1}{2\pi m h_1} \sin \frac{2\pi m h_1}{L_1}\right) \left(J_1^2\left(\frac{\mu R_1}{a}\right) + J_0^2\left(\frac{\mu R_1}{a}\right)\right)}{L_1 a^2 J_1^2(\mu)} \quad (49)$$

Далее, из (41) и (42) получаем

$$f_2 - f_1 = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) f_m A_m. \quad (50)$$

Таким образом, получено соотношение связывающее изменение резонансной частоты с изменением диэлектрической проницаемости жидкой среды, находящейся в кювете. Легко видеть, что увеличение диэлектрической проницаемости жидкой среды приводит к уменьшению резонансной частоты, поскольку величина $A_m > 0$.

С помощью формулы (50) были проведены численные расчеты смещения резонансной частоты $\Delta f = f_2 - f_1$ в зависимости от изменения относительной диэлектрической проницаемости $\Delta\varepsilon = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$ жидкой среды, находящейся в кювете цилиндрической формы, расположенной в резонаторе. Геометрические параметры резонатора были выбраны следующие: радиус кривизны $R = 110$ мм и апертура $2a_1 = 60$ мм сферического зеркала; радиус $a = 12$ мм и высота $h = 12,3$ мм цилиндрического зеркала; расстояние между зеркалами $L = 63,69$ мм. Этим параметрам отвечает резонансная частота $f_m = 74,278$ ГГц. Геометрические параметры кюветы: $R_1 = 2,5$ мм – радиус цилиндра, $h_1 = 3$ мм – высота цилиндра.

Результаты расчетов представлены на рис.1. Анализ этих результатов позволил установить следующее. При увеличении относительной диэлектрической проницаемости жидкой среды на величину $\Delta\varepsilon$, изменяющуюся в пределах $10^{-3} \leq \Delta\varepsilon \leq 5 \cdot 10^{-3}$, резонансная частота уменьшается на величину Δf , изменяющуюся в пределах $7,8 \text{ МГц} \leq \Delta f \leq 39 \text{ МГц}$. Это позволяет надежно контролировать изменения диэлектрической проницаемости жидкой среды.

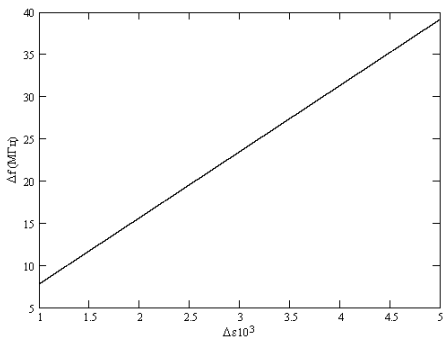


Рис. 1. Изменение резонансной частоты при увеличении относительной диэлектрической проницаемости жидкой среды.

Выводы. Анализ соотношения связывающего изменение резонансной частоты с изменением диэлектрической проницаемости жидкой среды, находящейся в кювете, позволяет утверждать, что увеличение диэлектрической проницаемости жидкой среды приводит к уменьшению резонансной частоты.

Список литературы: 1. Ильинский А.С. Колебания и волны в электродинамических системах с потерями / Ильинский А.С., Слепян Г.Я. – М.: Изд-во МГУ, 1983. – С. 232. 2. Шестопалов В.П. Спектральная теория и возбуждение открытых структур / Шестопалов В.П. – Киев : Наук. думка, 1987. – С. 288. 3. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Корн Г., Корн Т. – М.: Наука, 1970. – С. 720. 4. Гинзтон Э.Л. Измерения на сантиметровых волнах / Гинзтон Э.Л. – М.: ИЛ, 1960. – С. 620. 5. Анго А. Математика для электро- и радиоинженеров / Анго А. – М.: Наука, 1965. – С. 778.



Кунденко Микола Петрович, доцент, канд. техн. наук. Закінчив Харківський державний технічний університет сільського господарства у 1995 р. за фахом інженер-електрик. Захистив дисертацію кандидата технічних наук у 2002 р. в Харківському Державному університеті харчування та торгівлі. Наукові інтереси пов'язані з процесами впливу електромагнітних полів на біологічні об'єкти.



Мороз Олександр Миколайович, доцент, доктор техн. наук. Закінчив Харківський інститут механізації і електрифікації сільського господарства у 1984 р. за фахом інженер-електрик. Захистив дисертацію доктора технічних наук у 2011 р. в Харківському національному технічному університеті сільського господарства. Директор навчально-наукового інституту енергетики і комп'ютерних технологій ХНТУСГ з 2009 р. Наукові інтереси пов'язані з процесами впливу електромагнітних полів на біологічні об'єкти.

*Поступила в редколлегию 28.09.2011
Рецензент д.т.н., проф. Лутиков В.С.*