

Были выбраны такие моменты времени полупериода, которые показывают развитие контактных напряжений. Из рис. 4 следует, что контактные напряжения возникают сначала в связанных узлах бандажной полки и они максимальны. На рис. 5 показано возникновение динамического контакта в паре узлов нижней кромки бандажной полки при снижении уровня интенсивности напряжений.

По результатам исследования можно сделать следующие выводы:

- разработан алгоритм решения задачи о вынужденных колебаниях с учетом контактного взаимодействия в межлопаточном соединении.
- показано, что в процессе колебаний возникает динамический контакт в бандажной полке.
- получены перемещения контактирующих узлов под действием стационарной гармонической нагрузки, которые показали, что процесс колебаний со временем носит установившийся квазигармонический характер.

**Список литературы:** 1. *А.В.Петров, А.В. Шереметьев* Методика расчета динамических характеристик лопаток авиадвигателей при вынужденных нелинейных колебаниях // Вібрації та технології. – 2004. – № 6. 2. *Я.Д.Демуз, В.А.Жовдак, А.Ф.Кабанов, А.С.Степченко* Исследование влияния контакта в бандажном соединении на собственные частоты лопаточного аппарата на основе трехмерных моделей // Вестник НТУ «ХПИ». – Харьков. – 2005. – № 21.

*Поступило в редакцию 28.04.2006*

УДК 539.3

*Г.М.ИВАНЧЕНКО*, канд.техн.наук, КНУСА, Киев

## **ВЛИЯНИЕ ПАРАМЕТРОВ АНИЗОТРОПИИ УПРУГОЙ ЛИНЗЫ НА ЕЕ ФОКУСИРУЮЩИЕ СВОЙСТВА**

Розглядаються випадки фокусування плоскої нестационарної розривної хвилі в трансверсально-ізотропному середовищі поверхнями плоско-випуклої трансверсально-ізотропної пружної лінзи. Досліджується залежність положення зон фокусування хвилі від величин параметрів анізотропії середовища лінзи.

The cases of focusing of a plane unstationary discontinuous wave by the surfaces of a plane-convex transversally isotropic elastic lens in a transversally isotropic medium are examined. Dependence of position of focusing zones of the wave on the values of parameters of anisotropy of the lens medium is explored.

Явления фокусировки световых лучей оптическими приборами – линзами и зеркалами – широко используются для локального увеличения освещенности и концентрации световой энергии. Аналогичные эффекты проявляются и при распространении нестационарных разрывных волн в упругих средах. Для количественного описания таких явлений, а также для исследования их

особенностей применимы методы геометрической оптики [1-3].

Задача актуальна при исследовании особенностей распространения нестационарных разрывных волн в земной коре, порождаемых взрывами, землетрясением, где практический интерес представляют вопросы геометрического построения движущихся поверхностей разрывов первых производных полевых функций, которые часто называют ударными волнами или волнами сильного разрыва.

Для постановки и решения таких задач в теории упругости применимы методы геометрической оптики, в частности, нулевое приближение лучевого метода, который обеспечивает хорошее количественное описание многих волновых явлений различной физической природы [2, 3].

Лучевой метод предполагает выделение функции оптического пути волны, или эйконала, и построение с помощью уравнения эйконала системы лучей и фронтов ударной волны. Эта задача достаточно легко решается для изотропных сред, однако и там возникают некоторые осложнения, связанные с исследованием взаимодействия волны с поверхностями раздела сред, обладающими различными механическими свойствами (упругие отражатели, линзы, слоистые среды и др.), в результате чего образуются каустики, где фокусируется энергия и значительно возрастает интенсивность поля.

При исследовании распространения волн сильных разрывов в упругих анизотропных средах физическая картина динамических явлений резко усложняется, поскольку в этих случаях векторная полевая функция для каждого направления имеется три вида волн, отличающихся поляризацией; фазовые скорости волн зависят как от поляризации волны, так и от направления ее распространения; лучи, в общем случае, не ортогональны поверхности волнового фронта, а лучевые скорости отличаются от фазовых скоростей и между их направлениями не всегда имеется однозначное соответствие.

**Постановка задачи.** Состояние динамического равновесия упругой среды в декартовой системе координат  $x_1, x_2, x_3$  определяется системой трех дифференциальных уравнений

$$\sum_{k,p,q=1}^3 \lambda_{ik,pq} \frac{\partial^2 u_q}{\partial x_k \partial x_p} - \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = 0 \quad (i = 1,2,3), \quad (1)$$

где  $\lambda_{ik,pq} = c_{ik,pq} / \rho$ ;  $c_{ik,pq}$  – параметры упругости среды;  $\rho$  – ее плотность;  $u_1, u_2, u_3$  – компоненты вектора упругих смещений,  $t$  – время.

Учитывая то, что в анизотропных средах лучи в общем случае не ортогональны поверхностям волновых фронтов, будем различать векторы фазовой  $v$  и лучевой  $\xi$  скоростей, считая, что фронтом волны является поверхность постоянной фазы  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - v t = \text{const}$ , где каждая элементарная площадка фронта движется вдоль местной единичной нормали  $\mathbf{n}$  со скоростью  $v$ . Здесь  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор точки фронта.

Фазовые скорости  $v$  волны и векторы ее поляризации  $\mathbf{A}$  для выбранного направления  $\mathbf{n}$  можно построить из однородной системы алгебраических

уравнений [2, 4]

$$\sum_{k,p,q=1}^3 \lambda_{ik,pq} n_k n_p A_q - v^2 A_i = 0 \quad (i = 1,2,3) \quad (2)$$

как собственные числа и векторы матрицы ее коэффициентов.

Не нулевые решения системы (2) имеют место при выполнении условия

$$\left| \sum_{k,p=1}^3 \lambda_{ik,pq} n_k n_p - v^2 \delta_{iq} \right| = 0, \quad (3)$$

при помощи которого для каждого направления нормали  $\mathbf{n}$  можно определить и расположить в порядке убывания три скорости различно поляризованных волн.

Придавая величине  $v^2$  в системе (2) поочередно одно из найденных значений  $v_r^2(\mathbf{n})$  ( $r = 1,2,3$ ), можно определить компоненты векторов поляризации  $\mathbf{A}^{(r)}$  трех волн, движущихся в рассматриваемом направлении  $\mathbf{n}$  со своими фазовыми скоростями  $v_r(\mathbf{n})$ . Поверхность фронта ударной волны определяется соотношением

$$\tau(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) - t = 0, \quad (4)$$

в котором функция  $\tau$  должна удовлетворять дифференциальному уравнению в частных производных первого порядка [2]

$$\sum_{i,k,p,q=1}^3 \lambda_{ik,pq} p_k p_p A_q^{(r)} A_i^{(r)} = 1, \quad (5)$$

обобщающему уравнение эйконала геометрической оптики для упругих анизотропных волн.

Величины  $p_k$  ( $k = 1,2,3$ ), входящие у уравнение (5), представляют собой компоненты вектора рефракции  $p_k \equiv \partial \tau / \partial x_k = n_k / v_r(\mathbf{n})$  ( $k = 1,2,3$ ).

Волновой фронт (4) ударной волны в анизотропной среде постоянной плотности строится после нахождения решения уравнения (5), которое методом характеристик приводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} dx_k / d\tau &= \xi_k = \sum_{i,p,q=1}^3 \lambda_{ik,pq} p_p A_q^{(r)} A_i^{(r)}, \\ dp_k / d\tau &= 0, \quad (k = 1,2,3). \end{aligned} \quad (6)$$

В системе (6) первая группа уравнений характеризует распространение волны вдоль луча с лучевой скоростью  $\xi = \xi^{(r)}(\mathbf{n}, x_k)$ , а вторая – указывает на прямолинейность лучей в анизотропной среде с постоянной плотностью.

**Методика решения.** Будем рассматривать две трансверсально-изотропные среды в которых оси симметрии упругих параметров совпадают с осью  $Ox_2$  декартовой системы координат. Благодаря свойствам симметрии, компоненты  $c_{ik,pq}$  тензора упругих постоянных каждой среды можно представить в форме квадратной матрицы

$$(C_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda - l & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu - p & \lambda - l & 0 & 0 & 0 \\ \lambda - l & \lambda - l & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu - m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu - m \end{pmatrix}, \quad (7)$$

где  $\lambda$  и  $\mu$  – параметры Ламе,  $l, m, p$  – константы, отличающие среду от изотропной (параметры анизотропии).

Пусть в среде  $\bar{I}$  возбуждена плоская продольная ударная волна, вектор поляризации которой направлен вдоль оси  $Ox_2$ . Исследуем дифракцию такой волны при ее взаимодействии с криволинейными осесимметричными границами  $G_1$  и  $G_2$  раздела сред, ось симметрии которой также совпадает с  $Ox_2$ . Задача является осесимметричной, поэтому достаточно рассмотреть явления перестройки и формирования следов ударных волн на одной из плоскостей, например на плоскости  $x_3 = 0$ , которая содержит ось симметрии. Примем «локально-плоское приближение» [2], в соответствии с которым в месте падения волны на элементарную площадку разделяющей поверхности  $G_i$  в плоскости падения  $x_3 = 0$ , все отраженные и преломленные волны также будут принадлежать этой плоскости, т.е. третьи компоненты всех векторов поляризации равны нулю. Это позволяет применять обобщенный закон Снеллиуса, выражаемый равенствами [2, 4, 5]

$$\frac{\sin(\gamma)}{v} = \frac{\sin(\Theta_v^{\bar{I}} - \gamma)}{v_v^{\bar{I}}(\Theta_v^{\bar{I}})} = \frac{\sin(\Theta_\mu^{\bar{II}} + \gamma)}{v_\mu^{\bar{II}}(\Theta_\mu^{\bar{II}})}, \quad v, \mu = 1, 2, \quad (8)$$

где  $\gamma$  – угол наклона касательной к поверхности  $G_1$  в точке падения луча на границу раздела сред,  $\Theta_v^{\bar{I}}, \Theta_\mu^{\bar{I}}$  – углы между осью  $Ox_2$  и направлениями векторов фазовых скоростей квазипродольной  $qP$  и квазипоперечной  $qS$  волн, отраженных в среде  $\bar{I}$ ;  $\Theta_v^{\bar{II}}, \Theta_\mu^{\bar{II}}$  – аналогичные углы для волн, преломленных в среду  $\bar{II}$  (в средний слой – линзу);  $v, v_v^{\bar{I}}, v_\mu^{\bar{II}}$  – величины фазовые скорость падающей продольной волны, отраженных и преломленных (нижний индекс 1 отвечает квазипродольной, 2 – квазипоперечной волнам).

Для случаев анизотропных сред соотношения (8) закона Снеллиуса характеризуются тем, что знаменатели и числители являются функциями соответствующих углов  $\Theta_v^{\bar{I}}, \Theta_\mu^{\bar{II}}$  и неявно функциями угла  $\gamma$ . Значения углов  $\Theta_v^{\bar{I}}, \Theta_\mu^{\bar{II}}$  ( $v, \mu = 1, 2$ ) отражения и преломления луча в некоторой точке границы, определяются решением системы нелинейных уравнений (8) методом Ньютона совместно с алгоритмом продолжения решения по параметру [3]. Здесь в качестве ведущего параметра удобно выбрать угол наклона касательной  $\gamma$ . Тогда, например, для первого

уравнения системы (8) при некоторых известных величинах параметра  $\gamma = \gamma^n$  и векторов  $v_v = v_v^n$  малому приращению ведущего параметра  $\Delta\gamma$  будут отвечать приращения направляющих углов фазовых скоростей упругих волн отраженных в среду  $\bar{I}$

$$\Delta\bar{\Theta}_v^{\bar{I}} = \frac{\cos\gamma \cdot v_v^{\bar{I}}(\bar{\Theta}_v^{\bar{I}}) + \cos(\bar{\Theta}_v^{\bar{I}} - \gamma) \cdot v}{\cos(\bar{\Theta}_v^{\bar{I}} - \gamma) \cdot v - \sin(\gamma) \cdot dv_v(\bar{\Theta}_v^{\bar{I}}) / d\bar{\Theta}_v^{\bar{I}}} \cdot \Delta\gamma + r_v, \quad (9)$$

где  $r_v = \sin(\bar{\Theta}_v^{\bar{I}} - \gamma) \cdot v - \sin\gamma \cdot v_v^{\bar{I}}(\bar{\Theta}_v^{\bar{I}})$  – невязки на рассматриваемом шаге построения решения.

На поверхность раздела  $G_2$  падают лучи квазипродольной и квазипоперечной волн, исходящие из некоторой точки взаимодействия исходного луча с первой границей раздела сред. На второй границе раздела сред оба луча также подчинены соотношениям Снеллиуса

$$\frac{\sin(\Theta - \varphi)}{v(\Theta)} = \frac{\sin(\bar{\Theta}_v^{\bar{II}} + \varphi)}{v_v^{\bar{II}}(\bar{\Theta}_v^{\bar{II}})} = \frac{\sin(\bar{\Theta}_\mu^{\bar{I}} - \varphi)}{v_\mu^{\bar{I}}(\bar{\Theta}_\mu^{\bar{I}})}, \quad v, \mu = 1, 2, \quad (10)$$

где  $\varphi$  – угол наклона касательной к поверхности  $G_2$  в точке падения соответствующего луча квазипродольной или квазипоперечной волны,  $\bar{\Theta}_1^{\bar{I}}, \bar{\Theta}_2^{\bar{I}}$  – углы между осью  $Ox_2$  и направлениями векторов фазовых скоростей квазипродольной и квазипоперечной волн, преломленных в среде  $\bar{I}$ ;  $\bar{\Theta}_1^{\bar{II}}, \bar{\Theta}_2^{\bar{II}}$  – аналогичные углы для волн, отраженных в средний слой  $\bar{II}$ ;  $v, v_v^{\bar{I}}, v_\mu^{\bar{I}}$  – величины фазовых скоростей падающей волны на поверхность, преломленных в среде  $\bar{I}$  и отраженных в среде  $\bar{II}$  волн.

Решение системы (10) также формируется пошагово. Например, малое изменение угла наклона касательной к поверхности  $G_2$  на величину  $\Delta\varphi = \Delta\varphi^n$  повлечет приращения направляющих углов векторов фазовых скоростей отраженных волн обоих типов

$$\Delta\bar{\Theta}_v^{\bar{II}} = \frac{f_1 \cdot \Delta\Theta + f_2 \cdot \Delta\varphi}{f_3} + r_v. \quad (11)$$

Здесь обозначены функции

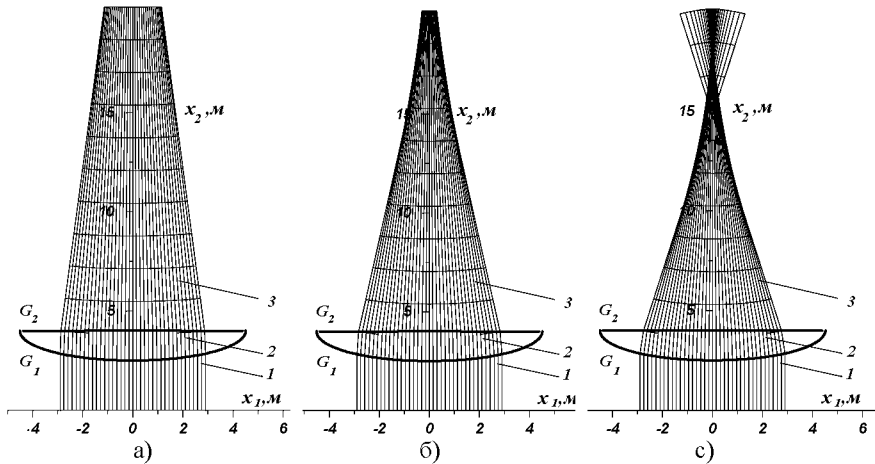
$$\begin{aligned} f_1 &= \sin\left(\bar{\Theta}_v^{\bar{II}} + \varphi\right) \cdot \frac{dv(\Theta)}{d\Theta} - \cos(\Theta - \varphi) \cdot v_v^{\bar{II}}(\bar{\Theta}_v^{\bar{II}}), \\ f_2 &= \cos(\Theta - \varphi) \cdot v_v^{\bar{II}}(\bar{\Theta}_v^{\bar{II}}) + \cos(\bar{\Theta}_v^{\bar{II}} + \varphi) \cdot v(\Theta), \\ f_3 &= \sin(\Theta - \varphi) \cdot \frac{dv_v^{\bar{II}}(\bar{\Theta}_v^{\bar{II}})}{d\bar{\Theta}_v^{\bar{II}}} - \cos(\bar{\Theta}_v^{\bar{II}} + \varphi) \cdot v(\Theta) \end{aligned}$$

и невязка уравнения (11)  $r_v = \sin(\Theta_v^{\bar{\Pi}} + \gamma) \cdot v(\Theta) - \sin(\Theta - \gamma) \cdot v_v^{\bar{\Pi}}(\Theta_v^{\bar{\Pi}})$ .

Вычисления по формулам вида (9), (11) возможны при наличии некоторого начального состояния  $\gamma^0, v^0, \left(\Theta_v^{\bar{I}}\right)^0, \left[v_v^{\bar{I}}(\Theta_v^{\bar{I}})\right]^0, \left(\Theta_v^{\bar{\Pi}}\right)^0, \left[v_v^{\bar{\Pi}}(\Theta_v^{\bar{\Pi}})\right]^0$ .

Для рассматриваемых случаев с осесимметричным средним слоем (линзой) удобно начинать построение семейства падающих, отраженных и преломленных лучей с луча, ориентированного вдоль оси  $Ox_2$ .

**Результаты исследований.** Рассмотрена задача об исследовании влияния параметров анизотропии  $l, m, p$  упругой плоско-выпуклой линзы на ее фокусирующую способность.



При решении задачи принято:  $\rho_1 = 2,650 \times 10^3 \text{ кг/м}^3$ ,  $\lambda_1 = 4,972 \times 10^{10} \text{ Па}$ ,  $\mu_1 = 3,906 \times 10^{10} \text{ Па}$  для среды  $\bar{I}$  и  $\rho_2 = 2,760 \times 10^3 \text{ кг/м}^3$ ,  $\lambda_2 = 3,409 \times 10^9 \text{ Па}$ ,  $\mu_2 = 1.364 \times 10^{10} \text{ Па}$  для среды  $\bar{\Pi}$  (линзы). Коэффициенты анизотропии для первой среды постоянны:  $m_1 = 0,1\mu_1$ ,  $l_2 = 0,3\lambda_2$  и  $p_1 = 0,1(\lambda_1 + 2\mu_1)$ , а для линзы они варьировались. Установлено, что степень и равномерность фокусирования или рассеивания дважды преломленных лучей зависят не только от геометрии поверхностей  $G_1, G_2$  и упругих характеристик сред, но и в значительной мере от параметров анизотропии. Это видно на рисунке, где показаны лучи падающей (1) и преломленной в линзу (2) квазипродольной волны а также лучи и эволюция фронта преломленной за линзой (3) квазипродольной волны. Для упругих линз одинаковой геометрии принимались  $m_2 = 0,3\mu_2$ ,  $l_2 = -0,4\lambda_2$ ,  $p_2 = -0,6(\lambda_2 + 2\mu_2)$  (рис. 1,а),  $m_2 = 0,1\mu_2$ ,  $l_2 = -0,2\lambda_2$ ,  $p_2 = -0,3(\lambda_2 + 2\mu_2)$  (рис. 1,б) и  $m_2 = 0,1\mu_2$ ,

$l_2 = 0,2\lambda_2$ ,  $p_2 = 0,05(\lambda_2 + 2\mu_2)$  (рис. 1,в). При этом плотность и коэффициенты Ламе среды линзы оставались постоянными.

**Список литературы:** 1. *Кравцов Ю.А. Орлов Ю.И.* Геометрическая оптика неоднородных сред. – Г., Наука, 1980. – 304 с. 2. *Петрашень Г.И.* Распространение волн в анизотропных упругих средах. – Ленинград, Наука, 1980. – 280 с. 3. *Подильчук Ю.Н., Рубцов Ю.К.* Лучевые методы в теории распространения и рассеяния волн. – К., Наукова думка, 1988. – 220 с. 4. *Гуляев В.И., Луговой П.З., Иванченко Г.М., Яковенко Е.В.* Дифракция ударной волны на криволинейной поверхности раздела трансверсально-изотропных упругих сред // Прикл. математика и механика. – 2000. – Т. 64, № 3. – С. 394-402. 5. *Gulyayev V.I., Lugovoy P.Z., Ivanchenko G.M.* Discontinuous wave fronts propagation in anisotropic layered media // International Journal of Solids and Structures – 2003. – 40. – P. 237-247.

*Поступила в редакцию 27.12.2005*

УДК 534; 629.7

*Е.А.КУРИЛОВ*, НТУ «ХПИ»

## **ВЛИЯНИЕ ПРИСОЕДИНЕННЫХ МАСС НА ДИНАМИЧЕСКУЮ УСТОЙЧИВОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ**

Розглядається аеропружність стійкість циліндричної оболонки з приєднаними масами в надзвуковому потоці газу. Рівняння теорії пологих оболонок Донела-Муштарі-Власова використано для аналізу динаміки оболонки. Взаємодію потоку та оболонки описано за допомогою лінійної поршневої теорії. Дискретизацію проведено за допомогою методу Бубнова-Гальоркіна. Проаналізовано ефект віброгасіння.

The aeroelastic stability of simply supported cylindrical shell with localized masses in supersonic flow is investigated. The Donnell-Mushtari-Vlasov nonlinear shallow-shell theory is used to describe the shell dynamics. Linear piston theory is applied to describe the fluid-structure interaction. The system is discretized by the Bubnov-Galerkin procedure. The dumping effect is analyzed.

**Введение.** На протяжении последних десятилетий существует повышенный интерес к проблемам динамики цилиндрических оболочек в сверхзвуковом потоке газа. Причина этого заключается в том, что упругие оболочки являются важнейшими несущими элементами в конструкциях летательных аппаратов или других технических объектов, находящихся под действием интенсивных аэродинамических сил. Подавляющее большинство работ посвящено исследованию оболочек идеальной формы. Однако анализ динамического поведения реальных тонкостенных конструкций при обтекании их сверхзвуковым потоком свидетельствует о существенном влиянии на их устойчивость и прочность локальных неоднородностей типа присоединенных масс, представляющих собой в реальной конструкции различные датчики и другие элементы. При определенных условиях действие этих элементов экви-