МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Методичні вказівки і варіанти індивідуальних домашніх завдань
для студентів економічних спеціальностей

Харків
2018

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Методичні вказівки і варіанти індивідуальних домашніх завдань

для студентів економічних спеціальностей

Затверджено
редакційно-видавничою
радою університету,
Протокол №2 від 24.12.2014 р.

Харків
НТУ «ХПІ»
2018

Методичні вказівки і варіанти індивідуальних домашніх завдань для студентів економічних спеціальностей / укл. Т. Л. Корніль, Л. С. Тимченко, Г. О. Голотайстрова. – Х. : НТУ «ХПИ», 2018. – 68 с.

Укладачі: Т.Л. Корніль
Л.С. Тимченко
Г.О. Голотайстрова

Рецензент Є.Л. Піротті

Кафедра комп'ютерної математики і аналізу даних

ВСТУП

Математична статистика – розділ математики, що вивчає математичні методи збору, систематизації, обробки та інтерпретації результатів спостережень з метою виявлення статистичних закономірностей. Математична статистика спирається на теорію ймовірностей. Якщо теорія ймовірностей вивчає закономірності випадкових явищ на основі абстрактного опису дійсності (теоретичної ймовірнісної моделі), то математична статистика оперує безпосередньо результатами спостережень над випадковими явищами, що становлять вибірку з деякої кінцевої або гіпотетично нескінченної сукупності. Використовуючи результати, отримані теорією ймовірностей, математична статистика дозволяє не тільки оцінити значення шуканих характеристик, але й виявити ступінь точності отриманих при обробці даних висновків. Математична статистика за спостережуваними значеннями оцінює ймовірності подій або здійснює перевірку припущень щодо їх ймовірностей. Вивчення ймовірнісних моделей дає можливість зрозуміти різні властивості випадкових явищ на абстрактному і узагальненому рівні не вдаючись до експерименту. У математичній статистиці, навпаки, дослідження пов'язане з конкретними даними і йдуть від практики (спостереження) до гіпотези та її перевірки.

В методичних вказівках приведені основні задачі математичної статистики. Для зручності використання методичних вказівок на початку кожного розділу розміщена теоретична частина у вигляді довідок. Детально розібрані типові задачі. Приведені варіанти індивідуальних домашніх робіт.

Данні методичні вказівки спрямовані на набуття практичних навичок використання методів математичної статистики.

Математична статистика

Індивідуальні домашні завдання та зразки виконання

ЗАВДАННЯ 1, 2

ДОВІДКА. Первинна обробка і графічне подання вибіркових даних. Числові характеристики вибіркової сукупності

Генеральною сукупністю в математичній статистиці називається множина однотипних об'єктів, кількісна чи якісна ознака яких підлягає вивченню. Підмножина об'єктів, вибраних випадковим способом із генеральної сукупності, називається ***вибірковою сукупністю*** або ***вибіркою***. Вважаємо, що ознака, яка вивчається, є випадковою величиною X із функцією розподілу $F(x)$. Результати вибірки є послідовністю незалежних, однаково розподілених випадкових величин $X_1, X_2, \dots, X_n$. Закон розподілу для всіх X_i визначається тією ж функцією $F(x)$. Результати вибірки позначатимемо відповідно через $x_1, x_2, \dots, x_n$ – це буде простий статистичний ряд, а x_i – називають варіантами статистичного ряду. Розмістивши числа $X_i = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ в *порядку зростання* (ранжирувавши) і записавши частоти n_i (сума усіх частот дорівнює об'єму вибірки $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$) з якими зустрічаються ці значення, або відносні частоти w_i (сума усіх відносних частот дорівнює одиниці $\sum_{i=1}^{k} w_i = 1$), отримуємо ***дискретний статистичний*** ряд (k – кількість варіант):

x_i	x_1	x_2	…	x_k
Частоти	n_1	n_2	…	n_k
Відносні частоти	$w_1 = \frac{n_1}{n}$	$w_2 = \frac{n_2}{n}$	…	$w_k = \frac{n_k}{n}$

На підставі такого ряду можна побудувати ***емпіричну функцію розподілу*** $\tilde{F}(x) = w(X < x) = \sum w_i$. Якщо $n \to \infty$, то емпірична функція розподілу $\tilde{F}(x)$ збігається до теоретичної функції розподілу $F(x)$.

Простий статистичний ряд графічно подається ***полігоном розподілу***. Щоб побудувати його, на осі абсцис відкладають значення x_i, а на осі ординат – відповідні їм частоти n_i (або відносні частоти w_i). Отримані точки з'єднують відрізками прямих.

У разі, коли X – неперервна величина і обсяг вибірки великий, результати вибірки подають ***інтервальним статистичним рядом***. Для цього область (x_{min}, x_{max}) розбивають на k інтервалів і для кожного інтервалу визначають частоти. Кількість інтервалів приблизно $k \le 5 \cdot \lg n$, а їх довжини Δx_i найчастіше беруть однаковими. Отриманий ряд графічно подається ***гістограмою***. Для побудови її на осі абсцис відкладають інтервали, а на них як на основах будують прямокутники, висота яких пропорційна частоті (відносній частоті) інтервалу. Гістограма дає певне уявлення про графік щільності розподілу.

Для вибіркової сукупності обчислюють точкові **числові характеристики**: вибіркову середню або вибіркове математичне сподівання $\tilde{x}$ вибіркову дисперсію $\widetilde{D}$, виправлену вибіркову дисперсію $\tilde{s}^2$, вибіркове середнє квадратичне відхилення $\tilde{s}$ тощо. Вигляд формул для обчислення числових характеристик залежить від того, в якій формі подано вибіркові дані. Якщо вибіркові дані не згруповано, то

$$\tilde{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\,;\ \widetilde{D} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \tilde{x})^2 \text{ або } \widetilde{D} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 - (\tilde{x})^2.$$

Якщо вибіркові дані зведено у ***дискретний статистичний ряд*** з числом варіант k, то

$$\tilde{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i n_i\,;\ \ \widetilde{D} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \tilde{x})^2 \cdot n_i \text{ або } \widetilde{D} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i^2\, n_i - (\tilde{x})^2.$$

Виправлена вибіркова дисперсія і виправлене вибіркове середнє квадратичне відхилення:

$$\tilde{s}^2 = \frac{n}{n-1}\widetilde{D};\ \tilde{s} = \sqrt{\tilde{s}^2}\,.$$

Виправлення дисперсії та середнього квадратичного відхилення важливе, якщо n не дуже велике ($n = 50 \div 100$), а якщо $n \to \infty$ то $\frac{n}{n-1} \to 1$ і $\tilde{s}^2 = \widetilde{D}$.

Якщо дані подаються ***інтервальним рядом*** з числом інтервалів k, то перехід до статистичного ряду виконують, *обчислюючи для кожного інтервалу його середину* $-\hat{x}_i$.

$$\tilde{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} \hat{x}_i n_i ; \ \tilde{D} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} (\hat{x}_i - \tilde{x})^2 \cdot n_i \ \text{або} \ \tilde{D} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} \hat{x}_i^{\,2} n_i - (\tilde{x})^2.$$

Мода ($\widetilde{M_o}$) – для ***дискретного ряду*** це значення випадкової величини, що спостерігається з найбільшою частотою. Для ***інтервального ряду*** використовуємо формулу:

$$\widetilde{M_o} = x_{mod} + \Delta \cdot \frac{n_{mod} - n_{mod-1}}{2 \cdot n_{mod} - n_{mod-1} - n_{mod+1}},$$

де x_{mod} – ліва границя модального інтервалу, модальний інтервал – інтервал з найбільшою частотою; Δ – довжина інтервалів; n_{mod}, n_{mod-1}, n_{mod+1} – частоти відповідно модального, предмодального і післямодального інтервалів.

Медіана ($\widetilde{M_e}$) – значення випадкової величини, що буде розділяти ряд на дві однакові за числом спостережень частини. У ***дискретному статистичному ряді*** обчислення медіани залежить від числа спостережень. Якщо воно непарне, то медіаною буде значення $x_{\frac{n}{2}+1}$ ранжованого ряду. Якщо число спостережень парне, то $\widetilde{M_e} = \frac{1}{2}\left(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}\right)$. Для ***інтервального ряду*** використовуємо формулу:

$$\widetilde{M_e} = x_{med} + \Delta \cdot \frac{0{,}5 \cdot n - n_{\text{нак}}}{n_{med}},$$

де x_{med} – ліва границя медіанного інтервалу, медіанний інтервал – інтервал, що вміщає медіану простого статистичного ряду; Δ – довжина інтервалів; n_{med} – частота медіанного інтервалу; n – число спостережень; $n_{\text{нак}}$ – накопичена частота, тобто сума всіх частот *до* медіанного інтервалу.

Моду і медіану в інтервальному ряду можна визначити графічно: моду – по гістограмі; медіану – по кумуляті. Кумулята (емпірична функція розподілу) – крива накопичених відносних частот. Ламана, що з'єднує точки, абсциси яких відповідають кінцям інтервалів, а ординати дорівнюють накопиченим частотам (див. рис. с.16).

Для визначення моди вибирається найвищий прямокутник, який є модальним. Потім праву вершину модального прямокутника з'єднують з правим верхнім кутом попереднього прямокутника, а ліву – з лівим верхнім кутом наступного прямокутника. З точки їх перетину опускають перпендикуляр на вісь абсцис. Абсциса точки перетину цих прямих і буде модою (див. рис. с.15).

Медіана розраховується за кумулятою. Для її визначення з точки на шкалі накопичених частот, що відповідає 50%, проводиться пряма, паралельна осі абсцис, до перетину з кумулятою. Потім з точки перетину зазначеної прямої і кумуляти опускається перпендикуляр на вісь абсцис. Абсциса точки перетину є медіаною (див. рис. с.16).

ЗАВДАННЯ 1

Частина 1.

1.1. Представити результати спостережень як дискретний статистичний ряд.

1.2. Знайти точкові числові характеристики: вибіркову середню ($\tilde{x}$), вибіркову дисперсію ($\widetilde{D}$), виправлену вибіркову дисперсію ($\tilde{s}^2$), середнє квадратичне відхилення ($\tilde{s}$), моду ($\widetilde{M_o}$), медіану ($\widetilde{M_e}$).

1.3. Побудувати графічні характеристики: полігон частот, емпіричну функцію розподілу.

1.4. Знайти інтервальні характеристики ряду: довірчі інтервали для оцінки математичного сподівання і середнього квадратичного відхилення випадкової величини (розміру взуття) з надійністю 0,95.

Частина 2.

2.1. Представити результати спостережень інтервальним рядом з числом інтервалів $k = 4$.

2.2. Знайти його точкові числові характеристики: вибіркову середню ($\tilde{x}$), вибіркову дисперсію ($\widetilde{D}$), виправлену вибіркову дисперсію ($\tilde{s}^2$), середнє квадратичне відхилення ($\tilde{s}$), моду ($\widetilde{M_o}$), медіану ($\widetilde{M_e}$).

2.3. Побудувати графічні характеристики: гістограму, статистичну функцію розподілу, кумуляту.

Приклад виконання завдання 1

Для визначення обсягів виробництва взуття певних розмірів було проведено вибіркове спостереження за розмірами взуття, що продається у фірмової крамниці. Одержано 100 результатів, які подані у таблиці за порядком одержання.

36	38	36	39	38	46	39	40	41	45
39	39	38	40	38	40	38	42	39	43
40	40	41	38	39	41	36	39	39	40
36	39	40	40	42	39	37	40	43	42
36	43	41	40	37	41	40	39	41	43
43	40	37	39	40	37	37	39	39	38
37	44	38	39	39	43	38	42	39	36
44	39	39	37	38	40	43	42	42	37
35	39	40	41	41	43	36	45	39	45
44	39	37	40	41	44	36	41	41	40

Частина 1.

1.1. *Дискретний статистичний ряд.*

Дискретний статистичний ряд будуємо за результатами спостережень, розташовуючи значення випадкової величини в порядку зростання і підраховуючи кількість кожного значення.

Зауважимо, що таблиці можна будувати як горизонтально, так і вертикально. На разі, кількість значень випадкової величині досить велика, тому побудуємо вертикальну таблицю.

Для зручності подальших рахувань у таблицю добавимо стовпчики з добутками $x_i \cdot n_i$ та $x_i{}^2 \cdot n_i$.

Перевірка: сума частот повинна дорівнювати 100, а сума відносних частот повинна дорівнювати одиниці.

№	x_i	n_i	w_i	$x_i \cdot n_i$	${x_i}^2 \cdot n_i$
1	35	1	0,01	35	1225
2	36	8	0,08	288	10368
3	37	9	0,09	333	12321
4	38	10	0,1	380	14440
5	39	22	0,22	858	33462
6	40	17	0,17	680	27200
7	41	11	0,11	451	18491
8	42	6	0,06	252	10584
9	43	8	0,08	344	14792
10	44	4	0,04	176	7744
11	45	3	0,03	135	6075
12	46	1	0,01	46	2116
	Суми	100	1	3978	158818

1.2. *Точкові числові характеристики*.

Вибіркова середня:

$$\tilde{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i \cdot n_i.$$

Користуємось стовпчиком з добутком $x_i \cdot n_i$

$$\tilde{x} = \frac{1}{100} \cdot 3978 = 39{,}78.$$

Вибіркова дисперсія $\widetilde{D} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \tilde{x})^2 \cdot n_i$, але більш зручна інша формула:

$$\widetilde{D} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} {x_i}^2 \cdot n_i - \tilde{x}^2.$$

Користуємось стовпчиком з добутком ${x_i}^2 \cdot n_i$

$$\widetilde{D} = \frac{158818}{100} - 39{,}78^2 = 5{,}7316.$$

Виправлена вибіркова дисперсія:

$$\tilde{s}^2 = \frac{n}{n-1} \cdot \widetilde{D} = \frac{100}{99} \cdot 5{,}7316 = 5{,}7895.$$

Виправлена вибіркова дисперсія, на відміну від вибіркової дисперсії, є *незміщеною* точковою оцінкою дисперсії.

Середнє квадратичне відхилення:

$$\tilde{s} = \sqrt{\tilde{s}^2} = 2{,}4061.$$

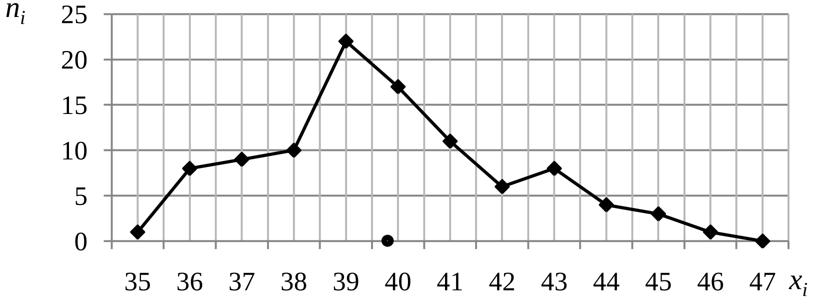
Вибіркова мода $\widetilde{M_o} = 39$, тому що 39 розмір спостерігався найбільше число разів, тобто з найбільшою частотою.

Вибіркова медіана $\widetilde{M_e} = \frac{39+40}{2} = 39{,}5$, тому що число спостережень парне, у ранжованому ряду визначаємо номера $\frac{n}{2} = 50$ і $\frac{n}{2} + 1 = 51$ – значення випадкової величини: $x_{50} = 39$, $x_{51} = 40$. Їх середнє арифметичне значення буде розділяти ряд на дві однакові за числом спостережень частини, що за означенням є медіаною ряду.

1.3. *Графічні характеристики*.

Великою точкою на графіках позначено вибіркову середню $\tilde{x}$.

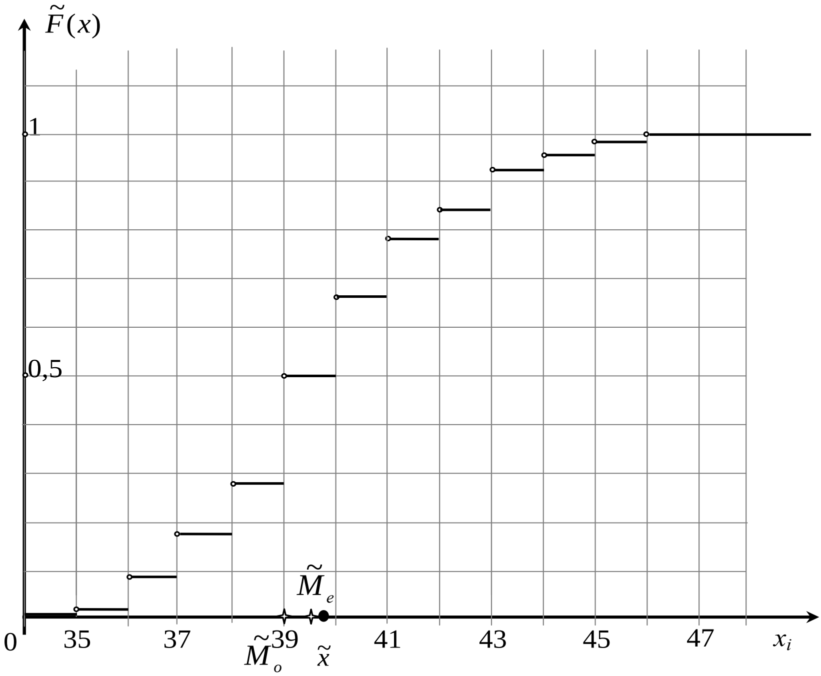
Полігон частот



Емпірична функція розподілу

$$\tilde{F}(x) = \begin{cases} 0; & x \le 35; \\ 0+0{,}01=0{,}01; & 35<x\le 36; \\ 0{,}01+0{,}08=0{,}09; & 36<x\le 37; \\ 0{,}09+0{,}09=0{,}18; & 37<x\le 38; \\ 0{,}18+0{,}1=0{,}28; & 38<x\le 39; \\ 0{,}28+0{,}22=0{,}5; & 39<x\le 40; \\ 0{,}5+0{,}17=0{,}67; & 40<x\le 41; \\ 0{,}67+0{,}11=0{,}78; & 41<x\le 42; \\ 0{,}78+0{,}06=0{,}84; & 42<x\le 43; \\ 0{,}84+0{,}08=0{,}92; & 43<x\le 44; \\ 0{,}92+0{,}04=0{,}96; & 44<x\le 45; \\ 0{,}96+0{,}03=0{,}99; & 45<x\le 46; \\ 0{,}99+0{,}01=1; & x>46. \end{cases}$$

Графік емпіричної функції розподілу



1.4. *Інтервальні числові характеристики ряду*.

Довірчий інтервал дає можливість оцінити точність та надійність оцінки $\tilde{a}$ невідомого параметра a. Невідомим параметром a може бути математичне сподівання, дисперсія, середнє квадратичне відхилення.

Довірчий інтервал визначається рівністю:

$$P(\tilde{a} - \varepsilon < a < \tilde{a} + \varepsilon) = \gamma,$$

де P – ймовірність, ε – точність та γ – надійність. Надійність задана γ=0,95.

Позначимо m, σ – невідомі істині значення математичного сподівання і середнього квадратичного відхилення відповідно.

Довірчий інтервал для оцінки математичного сподівання знаходимо за формулою:

$$m\epsilon(\tilde{x} - \delta;\ \tilde{x} + \delta);$$

де розмір половини інтервалу $\delta = \frac{t \cdot \bar{s}}{\sqrt{n}}$. Пояснення потребує лише величина $t = t(n;\gamma)$, що знаходиться з таблиць розподілення Стьюдента (додаток 3) в залежності від числа спостережень n і надійності γ.

За таблицею $t = t(100; 0{,}95) = 1{,}984$.

Тоді $\delta = \frac{1{,}984 \cdot 2{,}4061}{\sqrt{100}} = 0{,}4774$.

Довірчий інтервал для оцінки математичного сподівання:

$$m\ \epsilon\ (39{,}78 - 0{,}4774;\ 39{,}78 + 0{,}4774),$$

$$m\ \epsilon\ (39{,}3026;\ 40{,}2574).$$

Довірчий інтервал для оцінки середнього квадратичного відхилення за формулою:

$$\sigma\ \epsilon\ \left(\tilde{s} \cdot (1 - q);\ \tilde{s} \cdot (1 + q)\right),$$

де $q = q(n;\gamma)$ також визначається за таблицею (додаток 4): $q = q(100; 0{,}95) = 0{,}143$.

$$\sigma\ \epsilon\ (2{,}4061 \cdot 0{,}857;\ 2{,}4061 \cdot 1{,}143),$$

$$\sigma\ \epsilon\ (2{,}0620;\ 2{,}7502).$$

Частина 2.

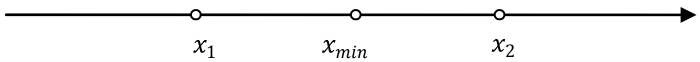
2.1. *Інтервальний ряд*.

Представимо результати тих самих спостережень як інтервальний ряд з числом інтервалів $k = 4$.

$x_{max} = 46, x_{min} = 35$. Довжина інтервалу $\Delta = \frac{x_{max} - x_{min}}{k-1} = \frac{11}{3} = 3{,}67$.

Для зручності подальших розрахунків треба округлити довжину інтервалу до парного числа з однією цифрою після коми. Ми приймаємо $\Delta = 4$, $\frac{\Delta}{2} = 2$.

Перший інтервал починаємо з $x_{min} - \frac{\Delta}{2} = 35 - 2 = 33$. При такому способі побудови інтервалів у першому інтервалі $(x_1; x_2]$ серединою завжди буде $\hat{x}_1 = x_{min}$, а x_{max} обов'язково потрапить в останній інтервал, але не обов'язково буде його серединою. З огляду на невелику кількість інтервалів побудуємо таблицю горизонтально.



N	1	2	3	4	Суми
$(x_i; x_{i+1}]$	$(33; 37]$	$(37; 41]$	$(41; 45]$	$(45; 49]$	
$\hat{x}_i$	35	39	43	47	
n_i	18	60	21	1	100
w_i	0,18	0,60	0,21	0,01	1
$\hat{x}_i \cdot n_i$	630	2340	903	47	3920
$\hat{x}_i^{\,2} \cdot n_i$	22050	91260	38829	2209	154348

де $\hat{x}_i$ – середина відповідного інтервалу.

Перевірка: сума частот повинна дорівнювати об'єму вибірки, а сума відносних частот повинна дорівнювати одиниці.

Для зручності подальших розрахунків у таблицю добавимо рядки з добутками $\hat{x}_i \cdot n_i$ та $\hat{x}_i^{\,2} \cdot n_i$.

2.2. *Точкові числові характеристики інтервального ряду*.

Вибіркова середня:

$$\tilde{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} \hat{x}_i \cdot n_i.$$

Користуємось рядком з добутком $\hat{x}_i \cdot n_i$

$$\tilde{x} = \frac{1}{100} \cdot 3920 = 39{,}20.$$

Вибіркова дисперсія:

$$\widetilde{D} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} {\hat{x}_i}^2 \cdot n_i - \tilde{x}^2.$$

Користуємось рядком з добутком ${\hat{x}_i}^2 \cdot n_i$

$$\widetilde{D} = \frac{154348}{100} - 39{,}20^2 = 6{,}84.$$

Виправлена вибіркова дисперсія:

$$\tilde{s}^2 = \frac{n}{n-1} \cdot \widetilde{D} = \frac{100}{99} \cdot 6{,}84 = 6{,}9091.$$

Середнє квадратичне відхилення:

$$\tilde{s} = \sqrt{\tilde{s}^2} = 2{,}6285.$$

Вибіркова мода:

$$\widetilde{M_o} = x_{mod} + \Delta \cdot \frac{n_{mod} - n_{mod-1}}{2 \cdot n_{mod} - n_{mod-1} - n_{mod+1}}.$$

Модальний інтервал N=2, з найбільшою частотою $n_2 = 60$. Тоді $x_{mod} = 37$, Δ= 4, $n_{mod} = 60$, $n_{mod-1} = 18$, $n_{mod+1} = 21$.

$$\widetilde{M_o} = 37 + 4 \cdot \frac{37 - 18}{2 \cdot 37 - 18 - 21} = 39{,}0741.$$

Вибіркова медіана:

$$\widetilde{M_e} = x_{med} + \Delta \cdot \frac{0{,}5 \cdot n - n_{\text{нак}}}{n_{med}}.$$

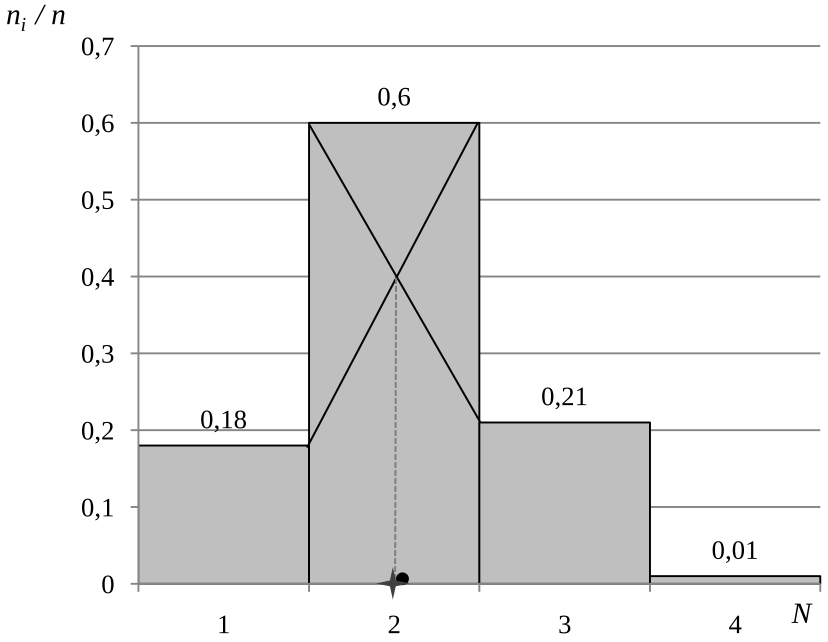
Медіанний інтервал N=2, у нього попадає $\frac{n}{2}$ =50 значення простого ранжованого ряду; $x_{med} = 37$; Δ= 4 ; $n_{med} = 60$; $n = 100$; $n_{\text{нак}} = 18$.

$$\widetilde{M_e} = 37 + 4 \cdot \frac{0{,}5 \cdot 100 - 18}{60} = 39{,}1333.$$

2.3. *Графічні характеристики інтервального ряду*.

Великою точкою на гістограмі позначено вибіркову середню $\tilde{x}$, а зіркою – моду $\widetilde{M_o}$.

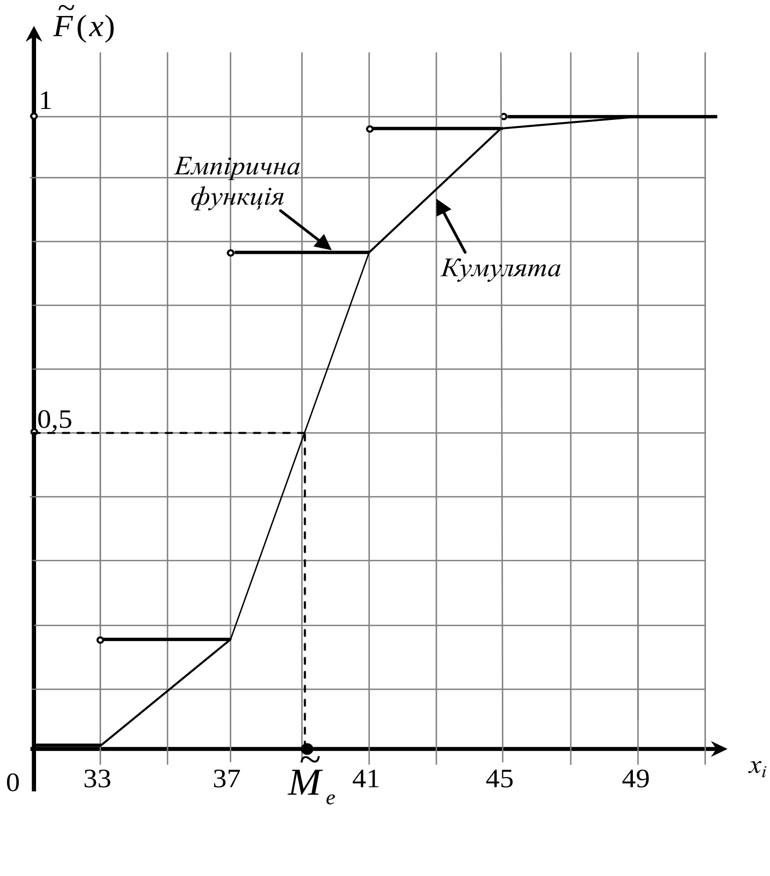
Гістограма



Емпірична функція розподілу

$$\tilde{F}(x) = \begin{cases} 0; & x \leq 33; \\ 0 + 0{,}18 = 0{,}18; & 33 < x \leq 37; \\ 0{,}18 + 0{,}60 = 0{,}78; & 37 < x \leq 41; \\ 0{,}78 + 0{,}21 = 0{,}99; & 41 < x \leq 45; \\ 0{,}99 + 0{,}01 = 1; & 45 < x \leq 49; \\ 1; & x > 49. \end{cases}$$

Графік емпіричної функції розподілу



ВАРІАНТИ ЗАВДАННЯ 1

Варіант 1. Для визначення обсягів виробництва взуття певних розмірів було проведено вибіркове спостереження за розмірами взуття, що продається у фірмової крамниці. Одержано 100 результатів, які подані у таблиці за порядком одержання. X – розмір взуття.

36	38	36	39	38	46	39	40	41	45
39	39	38	40	38	40	38	42	39	43
40	40	41	38	39	36	36	39	39	40
36	39	40	40	42	39	37	40	43	42
36	43	41	40	37	41	40	39	41	43
43	43	37	39	40	37	37	39	39	38
37	44	38	39	39	43	38	42	39	36
42	39	39	37	38	42	43	42	42	37
35	39	38	41	41	39	36	45	39	45
41	39	37	40	41	44	36	41	41	40

Варіант 2. Для визначення середньої заробітної плати на приватних підприємствах міста М було проведено вибіркове спостереження. Одержано 100 результатів, які подані у таблиці за порядком одержання. X – місячна заробітна плата мешканця міста М (у тис. грн.).

5	4	5	7	3	1	6	5	8	6
3	2	4	3	4	7	5	6	7	6
5	2	7	6	3	3	4	6	7	5
7	4	5	6	4	4	5	4	5	3
7	4	5	8	5	6	5	4	5	7
8	2	4	5	5	6	6	7	6	5
2	4	8	4	5	6	5	3	5	4
5	4	6	6	8	6	4	3	3	4
7	5	9	4	2	3	8	6	2	4
3	4	4	6	4	3	6	6	6	4

Варіант 3. Для визначення середньої кількості угод на фондовій біржі було проведено вибіркове спостереження за 100 інвесторами, що укладали угоди протягом кварталу. Кількість укладених угод подано у таблиці. X – кількість зроблених угод протягом кварталу.

6	3	3	9	3	6	9	10	0	4
6	5	3	10	3	2	8	2	10	4
10	3	10	8	3	1	6	3	3	4
6	3	0	1	2	9	7	10	4	3
6	4	1	10	3	6	8	9	4	3
3	3	5	9	0	7	3	3	3	8
7	4	8	9	3	3	3	4	10	3
4	5	9	6	8	10	4	3	4	3
2	2	0	4	4	6	3	4	3	4
4	3	7	0	10	4	6	5	4	3

Варіанти 4. Для визначення обсягів виробництва взуття певних розмірів було проведено вибіркове спостереження за розмірами взуття, що продається у фірмової крамниці. Одержано 100 результатів, які подані у таблиці за порядком одержання. X – розмір взуття.

36	38	36	39	38	46	39	40	40	45
38	39	39	40	38	41	38	40	39	43
40	41	41	39	35	41	36	39	39	40
36	39	41	40	42	39	37	40	44	42
39	43	41	40	37	41	39	39	41	43
43	40	39	39	40	36	37	39	39	38
37	43	38	39	39	43	38	40	39	36
41	39	39	38	38	40	38	42	42	37
35	37	41	41	40	43	36	45	39	45
44	39	39	40	41	36	36	35	42	40

Варіант 5. Для визначення середньої заробітної плати на приватних підприємствах міста М було проведено вибіркове спостереження. Одержано 100 результатів, які подані у таблиці за порядком одержання. X – місячна заробітна плата мешканця міста М (у тис. грн.).

8	7	11	6	4	9	9	8	9	11
11	9	11	10	9	7	8	10	9	6
6	10	9	9	7	3	8	10	6	3
13	8	11	6	10	10	9	9	6	6
10	10	13	10	8	8	9	4	6	6
8	6	12	10	11	5	8	7	5	8
6	8	6	5	3	9	7	5	9	8
7	7	6	7	12	8	10	10	7	10
7	7	9	5	7	6	12	6	7	8
6	8	9	8	8	5	8	10	9	10

Варіант 6. Для визначення середньої кількості угод на фондовій біржі було проведено вибіркове спостереження за 100 інвесторами, що укладали угоди протягом кварталу. Кількість укладених угод подано у таблиці. X – кількість зроблених угод протягом кварталу.

7	3	3	3	3	6	7	0	0	4
3	3	9	4	8	0	3	1	3	3
0	0	1	8	3	1	3	3	9	4
3	3	0	0	2	9	7	4	3	2
6	2	1	0	3	1	0	3	4	3
4	0	7	3	2	3	7	9	9	8
7	4	8	9	3	4	9	4	3	6
4	3	9	3	8	0	3	5	2	7
5	9	4	1	4	4	6	4	9	4
4	8	3	4	4	4	3	1	0	0

Варіанти 7. Для визначення обсягів виробництва взуття певних розмірів було проведено вибіркове спостереження за розмірами взуття, що продається у фірмової крамниці. Одержано 100 результатів, які подані у таблиці за порядком одержання. X – розмір взуття.

36	38	36	38	38	46	37	40	40	46
39	39	39	40	38	40	38	41	39	43
40	40	41	38	39	41	36	39	39	40
39	39	40	40	42	39	37	40	43	42
36	42	41	40	37	41	40	39	41	43
43	40	37	39	42	37	37	39	39	38
37	44	38	39	39	40	39	42	39	36
43	39	39	37	38	40	43	35	42	37
35	39	40	41	41	43	36	45	39	45
44	38	37	40	44	44	39	41	40	40

Варіант 8. Для визначення середньої заробітної плати на приватних підприємствах міста М було проведено вибіркове спостереження. Одержано 100 результатів, які подані у таблиці за порядком одержання. X – місячна заробітна плата мешканця міста М (у тис. грн.).

6	7	8	7	6	4	6	6	9	6
6	6	7	10	7	5	8	7	7	7
7	6	6	9	8	7	7	6	6	6
8	4	7	5	7	4	5	4	6	7
6	3	4	8	5	9	7	6	6	6
5	6	5	6	7	7	6	5	6	9
3	9	8	6	4	6	6	5	6	8
6	7	9	6	6	7	7	8	4	7
7	3	6	3	7	6	4	6	6	9
9	7	8	5	4	8	5	6	9	9

Варіант 9. Для визначення середньої кількості угод на фондовій біржі було проведено вибіркове спостереження за 100 інвесторами, що укладали угоди протягом кварталу. Кількість укладених угод подано у таблиці. X – кількість зроблених угод протягом кварталу.

6	3	3	9	3	6	9	10	0	4
9	3	3	0	3	0	8	2	0	4
0	3	1	8	3	1	6	3	3	4
6	3	0	1	2	9	7	0	4	3
6	4	1	0	3	1	8	9	4	3
3	3	7	9	0	7	3	3	3	8
7	4	8	9	3	3	3	4	10	3
4	0	9	6	8	0	4	3	4	3
5	0	0	1	4	6	3	4	3	4
4	3	7	0	10	4	6	5	4	3

Варіанти 10. Для визначення обсягів виробництва взуття певних розмірів було проведено вибіркове спостереження за розмірами взуття, що продається у фірмової крамниці. Одержано 100 результатів, які подані у таблиці за порядком одержання. X – розмір взуття.

36	38	36	39	38	46	39	40	39	45
39	39	38	40	38	40	38	42	39	43
40	40	41	38	39	41	36	39	39	40
36	39	40	41	42	39	37	40	43	38
36	43	41	40	37	41	38	39	41	43
43	38	37	39	40	37	37	39	39	38
37	44	38	39	39	43	38	42	39	36
44	39	39	36	38	40	43	38	42	37
35	39	40	41	41	36	36	45	39	45
44	37	37	40	41	44	36	35	41	37

Варіант 11. Для визначення середньої заробітної плати на приватних підприємствах міста М було проведено вибіркове спостереження. Одержано 100 результатів, які подані у таблиці за порядком одержання. X – місячна заробітна плата мешканця міста М (у тис. грн.).

6	9	13	5	9	12	10	12	8	6
8	5	8	9	8	10	12	10	11	2
10	10	12	8	7	8	11	5	8	9
7	9	10	8	12	6	10	7	8	13
10	5	17	9	6	11	6	8	8	6
10	7	8	13	9	12	8	6	11	12
9	10	13	11	9	10	7	12	9	11
4	8	7	6	13	13	5	8	10	8
6	15	10	10	6	7	10	11	14	9
10	12	7	7	14	10	8	11	6	11

Варіант 12. Для визначення середньої кількості угод на фондовій біржі було проведено вибіркове спостереження за 100 інвесторами, що укладали угоди протягом кварталу. Кількість укладених угод подано у таблиці. X – кількість зроблених угод протягом кварталу.

3	3	6	9	8	6	9	0	3	5
3	3	8	0	8	0	9	2	3	3
4	4	1	8	9	1	6	9	3	0
6	3	0	1	2	9	7	0	4	8
6	3	1	0	7	1	8	9	1	3
3	8	2	9	0	7	7	9	3	8
7	4	8	4	9	3	8	2	3	1
4	9	9	9	8	0	3	8	2	3
2	9	0	1	1	6	3	5	9	4
4	7	7	0	1	4	6	5	4	3

Варіанти 13. Для визначення обсягів виробництва взуття певних розмірів було проведено вибіркове спостереження за розмірами взуття, що продається у фірмової крамниці. Одержано 100 результатів, які подані у таблиці за порядком одержання. X – розмір взуття.

36	38	36	39	38	37	39	40	39	37
39	39	38	40	38	40	38	42	39	43
40	40	41	38	36	41	36	39	39	40
36	39	40	41	42	39	37	36	43	38
36	43	36	40	37	41	38	39	41	43
43	38	37	39	40	37	37	39	39	38
37	44	38	36	39	36	38	37	39	36
44	39	39	36	38	40	36	38	42	37
35	39	40	41	41	36	36	45	39	45
37	37	37	40	37	44	36	35	41	37

Варіант 14. Для визначення середньої заробітної плати на приватних підприємствах міста М було проведено вибіркове спостереження. Одержано 100 результатів, які подані у таблиці за порядком одержання. X – місячна заробітна плата мешканця міста М (у тис. грн.).

9	9	8	6	6	3	5	5	2	7
2	6	7	9	5	6	4	1	5	7
5	9	7	5	6	7	6	6	3	7
7	6	6	3	6	4	4	6	4	7
9	5	8	7	5	5	3	6	4	2
5	8	7	9	7	7	4	9	7	5
8	9	4	6	4	5	7	7	5	8
10	6	11	3	6	7	5	8	8	8
5	6	8	8	5	3	7	5	7	7
5	5	3	3	10	5	8	11	7	8

Варіант 15. Для визначення середньої кількості угод на фондовій біржі було проведено вибіркове спостереження за 100 інвесторами, що укладали угоди протягом кварталу. Кількість укладених угод подано у таблиці. X – кількість зроблених угод протягом кварталу.

3	3	6	9	3	6	3	0	3	5
6	3	3	9	3	6	9	10	0	4
9	3	3	0	3	0	8	2	0	4
0	3	1	8	3	1	6	3	3	4
6	3	10	1	2	9	7	0	4	3
6	4	1	10	3	1	8	9	4	3
3	3	7	9	0	7	3	3	3	8
7	4	8	9	3	3	3	4	10	3
4	10	9	6	8	10	4	3	4	3
5	10	0	1	4	6	3	4	3	4

Варіанти 16. Для визначення обсягів виробництва взуття певних розмірів було проведено вибіркове спостереження за розмірами взуття, що продається у фірмової крамниці. Одержано 100 результатів, які подані у таблиці за порядком одержання. X – розмір взуття.

36	38	40	39	38	46	39	40	39	45
39	39	38	40	38	40	38	42	39	43
40	40	41	38	39	41	40	39	39	40
36	39	40	41	42	39	37	40	43	38
36	43	41	40	37	41	38	39	41	43
43	38	37	39	40	37	37	40	39	38
37	44	38	40	39	43	38	42	39	36
44	39	39	36	38	40	43	38	42	40
35	40	40	41	41	36	36	45	39	45
44	37	37	40	41	44	36	40	41	37

Варіант 17. Для визначення середньої заробітної плати на приватних підприємствах міста М було проведено вибіркове спостереження. Одержано 100 результатів, які подані у таблиці за порядком одержання. X – місячна заробітна плата мешканця міста М (у тис. грн.).

5	4	3	4	1	3	4	5	4	7
3	3	3	5	6	4	7	5	4	2
2	5	1	2	3	6	7	5	6	5
5	3	3	6	5	4	2	4	4	4
5	3	2	5	3	4	5	3	3	1
4	5	4	3	3	3	6	3	6	3
8	4	6	4	3	5	5	2	3	5
4	3	5	5	4	8	2	5	2	4
6	5	7	5	6	2	3	4	5	5
4	3	7	6	3	2	2	6	4	2

Варіант 18. Для визначення середньої кількості угод на фондовій біржі було проведено вибіркове спостереження за 100 інвесторами, що укладали угоди протягом кварталу. Кількість укладених угод подано у таблиці. X – кількість зроблених угод протягом кварталу.

6	3	6	9	3	3	9	0	9	7
9	9	8	10	8	0	8	2	3	4
0	10	1	8	6	4	6	9	9	0
6	9	4	1	2	3	7	3	4	3
6	3	6	10	3	1	8	3	1	4
3	8	3	9	0	3	3	9	3	3
3	4	8	6	3	6	3	7	9	6
4	9	3	3	3	0	6	3	2	0
3	3	0	1	1	6	3	4	3	5
3	3	3	0	7	4	3	5	1	7

Варіанти 19. Для визначення обсягів виробництва взуття певних розмірів було проведено вибіркове спостереження за розмірами взуття, що продається у фірмової крамниці. Одержано 100 результатів, які подані у таблиці за порядком одержання. X – розмір взуття.

36	41	36	39	38	46	39	40	39	45
39	39	38	40	41	40	38	42	39	43
40	40	41	38	39	41	36	39	39	40
36	39	40	41	42	39	41	40	43	38
41	43	41	40	37	41	38	39	41	43
43	38	37	39	40	37	37	39	39	38
37	44	38	39	39	43	38	42	39	36
44	39	41	36	38	40	43	38	42	41
35	39	40	41	41	36	41	45	39	45
44	37	37	40	41	44	36	35	41	37

Варіант 20. Для визначення середньої заробітної плати на приватних підприємствах міста М було проведено вибіркове спостереження. Одержано 100 результатів, які подані у таблиці за порядком одержання. X – місячна заробітна плата мешканця міста М (у тис. грн.).

9	6	11	10	6	10	6	12	8	7
9	12	10	9	12	12	6	7	9	4
4	9	6	8	7	1	7	3	7	8
6	8	3	5	7	9	9	2	6	10
1	3	10	6	10	4	3	8	9	6
6	6	5	5	4	3	11	5	8	5
7	7	12	9	7	8	8	6	6	7
4	8	3	7	10	6	6	9	13	5
7	7	8	6	9	7	8	4	6	7
9	9	1	5	7	9	6	9	9	6

Варіант 21. Для визначення середньої кількості угод на фондовій біржі було проведено вибіркове спостереження за 100 інвесторами, що укладали угоди протягом кварталу. Кількість укладених угод подано у таблиці. X – кількість зроблених угод протягом кварталу.

6	3	3	1	3	6	4	1	0	4
2	3	1	0	3	0	8	2	0	4
0	2	1	5	3	1	6	3	3	4
6	3	0	1	2	3	7	0	4	3
3	4	1	0	3	1	5	9	4	3
3	3	7	9	0	7	3	3	3	8
1	4	8	3	3	3	3	4	2	3
4	0	9	6	6	0	4	3	4	3
5	0	0	1	4	6	3	4	3	4
4	7	3	4	1	4	8	3	1	7

Варіанти 22. Для визначення обсягів виробництва взуття певних розмірів було проведено вибіркове спостереження за розмірами взуття, що продається у фірмової крамниці. Одержано 100 результатів, які подані у таблиці за порядком одержання. X – розмір взуття.

36	38	36	39	38	46	39	40	39	36
39	39	38	40	38	40	38	36	39	43
40	40	41	38	39	36	36	39	39	40
36	39	36	41	36	39	37	40	43	38
36	43	41	40	37	41	38	39	36	43
43	38	37	39	36	37	37	39	39	38
37	44	38	39	39	43	38	42	39	36
44	39	39	36	38	40	36	38	42	37
35	39	40	41	41	36	36	45	39	45
44	37	37	36	41	44	36	35	41	37

Варіант 23. Для визначення середньої заробітної плати на приватних підприємствах міста М було проведено вибіркове спостереження. Одержано 100 результатів, які подані у таблиці за порядком одержання. X – місячна заробітна плата мешканця міста М (у тис. грн.).

6	3	2	2	8	4	4	6	5	8
7	5	1	1	7	4	4	7	5	4
8	4	4	6	5	6	5	3	8	10
5	6	5	7	5	7	8	2	7	7
5	3	3	7	2	8	9	8	5	10
5	4	5	4	4	1	5	5	7	6
3	3	3	3	6	8	7	8	3	5
8	6	3	5	6	6	2	5	7	1
7	2	7	9	4	2	5	4	8	6
4	2	5	5	4	5	4	4	6	3

Варіант 24. Для визначення середньої кількості угод на фондовій біржі було проведено вибіркове спостереження за 100 інвесторами, що укладали угоди протягом кварталу. Кількість укладених угод подано у таблиці. X – кількість зроблених угод протягом кварталу.

6	3	3	9	3	6	9	10	0	4
9	3	3	0	3	0	8	2	0	4
0	3	1	8	3	1	6	3	3	4
6	3	0	1	2	9	7	0	4	3
6	4	1	0	3	1	8	9	4	3
3	3	7	9	0	7	3	3	3	8
7	4	8	9	3	3	3	4	10	3
4	0	9	6	8	0	4	3	4	3
5	0	0	1	4	6	3	4	3	4
4	3	7	0	10	4	6	5	4	3

Варіанти 25. Для визначення обсягів виробництва взуття певних розмірів було проведено вибіркове спостереження за розмірами взуття, що продається у фірмової крамниці. Одержано 100 результатів, які подані у таблиці за порядком одержання. X – розмір взуття.

36	38	36	39	38	46	39	39	39	45
39	39	38	40	38	40	38	42	39	43
40	39	41	38	39	41	36	39	39	40
36	39	40	41	42	39	37	40	43	38
36	43	41	40	37	41	38	39	41	43
43	38	37	39	40	37	37	39	39	38
37	44	38	39	39	43	38	42	39	36
44	39	39	36	38	40	43	38	42	37
35	39	40	41	41	36	36	45	39	45
44	37	37	40	39	44	36	35	41	37

Варіант 26. Для визначення середньої заробітної плати на приватних підприємствах міста М було проведено вибіркове спостереження. Одержано 100 результатів, які подані у таблиці за порядком одержання. X – місячна заробітна плата мешканця міста М (у тис. грн.).

7	6	8	7	7	10	4	6	11	7
10	4	12	6	7	5	5	10	8	7
7	8	8	9	9	8	8	5	5	11
7	9	9	6	8	8	8	10	7	8
7	7	13	6	7	6	7	8	7	8
7	5	4	4	2	7	8	7	10	6
6	8	8	5	7	9	8	9	6	6
7	7	7	7	4	8	5	6	5	5
6	5	7	5	11	6	4	9	6	10
6	9	8	10	12	5	8	5	9	8

Варіант 27. Для визначення середньої кількості угод на фондовій біржі було проведено вибіркове спостереження за 100 інвесторами, що укладали угоди протягом кварталу. Кількість укладених угод подано у таблиці. X – кількість зроблених угод протягом кварталу.

6	3	3	9	3	6	9	10	0	4
9	3	3	0	3	0	8	2	0	4
0	3	1	8	3	1	6	3	3	4
6	3	0	1	2	9	7	0	4	3
6	4	1	0	3	1	8	9	4	3
3	3	7	9	0	7	3	3	3	8
7	4	8	9	3	3	3	4	10	3
4	0	9	6	8	0	4	3	4	3
5	0	0	1	4	6	3	4	3	4
4	3	7	0	10	4	6	5	4	3

Варіанти 28. Для визначення обсягів виробництва взуття певних розмірів було проведено вибіркове спостереження за розмірами взуття, що продається у фірмової крамниці. Одержано 100 результатів, які подані у таблиці за порядком одержання. X – розмір взуття.

39	38	36	39	38	46	39	40	39	45
39	39	38	40	38	40	39	42	39	43
40	40	41	38	39	41	36	39	39	40
36	39	40	41	42	39	37	40	43	38
36	43	41	40	37	41	38	39	41	43
43	38	42	39	40	37	37	39	39	38
37	44	38	44	39	43	38	42	39	41
44	39	39	39	38	40	43	38	42	37
42	39	40	41	41	36	43	45	39	45
44	37	37	40	41	44	36	35	41	37

Варіант 29. Для визначення середньої заробітної плати на приватних підприємствах міста М було проведено вибіркове спостереження. Одержано 100 результатів, які подані у таблиці за порядком одержання. X – місячна заробітна плата мешканця міста М (у тис. грн.).

12	6	12	8	4	5	8	9	9	8
11	11	8	12	4	8	6	7	9	9
13	9	13	10	10	7	10	6	4	9
9	9	6	8	12	8	8	9	6	11
15	9	10	8	5	4	11	8	3	6
10	7	8	8	4	8	12	10	10	6
6	6	7	6	13	6	9	8	9	7
8	8	5	14	13	9	8	13	6	7
11	8	8	10	9	9	8	11	7	11
5	10	8	6	7	9	8	11	1	11

Варіант 30. Для визначення середньої кількості угод на фондовій біржі було проведено вибіркове спостереження за 100 інвесторами, що укладали угоди протягом кварталу. Кількість укладених угод подано у таблиці. X – кількість зроблених угод протягом кварталу.

6	3	3	1	3	6	4	9	0	4
2	3	3	0	3	0	8	2	0	4
0	3	1	3	3	1	6	3	3	4
6	3	0	1	2	9	7	0	4	3
6	4	1	0	3	1	5	9	4	3
3	2	2	3	0	7	3	3	3	8
2	4	1	1	3	3	3	4	1	3
4	0	3	6	2	0	4	3	4	3
5	0	0	1	4	6	3	4	3	4
4	3	7	0	10	4	6	5	4	3

ЗАВДАННЯ 2

1. Побудувати інтервальний ряд, взявши k інтервалів (нехай $k = 8$).
2. Обчислити вибіркову середню: а) за простим статистичним рядом, б) за інтервальним рядом, пояснити розбіжність.
3. Обчислити вибіркову дисперсію, вибіркові моду і медіану лише за інтервальним рядом.
4. Обчислити незміщені та спроможні оцінки невідомих параметрів математичного сподівання, дисперсії і середнього квадратичного відхилення.
5. Побудувати довірчі інтервали для цих параметрів, що відповідають довірчий імовірності 0,95.
6. Побудувати гістограму і графік статистичної функції розподілу.
7. Висунути гіпотезу про закон розподілу випадкової величини X.

8. За допомогою критерію Пірсона і критерію Колмогорова перевірити погодженість статистичних даних висунутій гіпотезі при рівні значимості 0,05.

Приклад виконання завдання 2

Для простого статистичного ряду із 50 значень:

3,20	3,52	3,82	3,93	3,90	3,26	2,31	3,47	2,85	2,14
5,11	1,76	1,31	3,39	1,57	2,59	3,87	2,43	2,09	2,13
4,10	1,98	1,75	3,62	2,26	3,54	3,66	3,52	3,15	2,95
3,32	3,25	2,83	2,55	3,29	3,15	2,07	3,79	3,72	4,04
3,81	3,62	2,75	2,91	3,68	3,79	3,36	2,79	2,84	3,14

1. *Інтервальний ряд*

Побудувати статистичну сукупність, взявши k інтервалів.

Починаємо з перегляду всіх статистичних даних, ранжуємо їх і знаходимо $x_{min} = 1{,}31,\ x_{max} = 5{,}11.$

! Далі можна будувати інтервали так, як показано у завданні 1, частина 2. Можна також застосувати метод, наведений нижче.

Число інтервалів $k = 8$. Обчислимо так званий *розмах варіації*: $x_{max} - x_{min} = 5{,}11 - 1{,}31 = 3{,}80$. Для зручності подальших обчислень довжина інтервалу повинна бути парним числом, чого не буде, якщо $\frac{3{,}80}{8} = 0{,}475$, тому трохи розширяємо розмах варіації. Візьмемо $x_{min} = 1{,}29$, $x_{max} = 5{,}13$, тоді $x_{max} - x_{min} = 5{,}13 - 1{,}29 = 3{,}84$. Визначаємо довжину інтервалів $\Delta_i = \frac{3{,}84}{8} = 0{,}48$; $\frac{\Delta_i}{2} = \frac{0{,}48}{2} = 0{,}24$. Тепер можна будувати інтервальний ряд. Маємо досить велику кількість інтервалів, тому таблиця буде вертикальна. Для зручності рахування у таблицю добавимо стовпчики з добутками $\hat{x}_i \cdot n_i$ та $\hat{x}_i{}^2 \cdot n_i$.

N	$(x_i; x_{i+1}]$	$\hat{x}_i$	n_i	w_i	$\hat{x}_i \cdot n_i$	$\hat{x}_i{}^2 \cdot n_i$
1	$(1{,}29; 1{,}77]$	1,53	4	$4/50$	6,12	9,3636
2	$(1{,}77; 2{,}25]$	2,01	5	$5/50$	10,05	20,2005
3	$(2{,}25; 2{,}73]$	2,49	5	$5/50$	12,45	31,0005
4	$(2{,}73; 3{,}21]$	2,97	11	$11/50$	32,67	97,0299
5	$(3{,}21; 3{,}69]$	3,45	14	$14/50$	48,3	166,635
6	$(3{,}69; 4{,}17]$	3,93	10	$10/50$	39,3	154,449
7	$(4{,}17; 4{,}65]$	4,41	0	0	0	0
8	$(4{,}65; 5{,}13]$	4,89	1	$1/50$	4,89	23,9121
	Суми		50	1	153,78	502,5906

2. *Вибіркова середня.*

Обчислимо вибіркову середню (оцінку математичного сподівання):

а) за простим статистичним рядом,

б) за інтервальним рядом.

а) Обчислимо вибіркову середню за простим статистичним рядом $\tilde{x} = \frac{\sum_1^{50} x_i}{n}$:

$$\tilde{x} = \frac{3{,}2 + 3{,}52 + 3{,}82 + 3{,}93 + \cdots + 2{,}84 + 3{,}14}{50} = \frac{153{,}88}{50} = 3{,}0776.$$

б) За інтервальним рядом будемо мати $\tilde{x} = \frac{\sum_1^8 \hat{x}_i \cdot n_i}{n}$, де $\hat{x}_i$ – середина кожного інтервалу. Користуючись сумою із таблиці, одержимо:

$$\tilde{x} = \frac{153{,}78}{50} = 3{,}0756.$$

Вибіркова середня обчислена за формулою (а) більш точна, ніж за формулою (б), тому що $\hat{x}_i$ вже містить округлення.

3. *Вибіркова дисперсія, вибіркові мода і медіана.*

Вибіркову дисперсію обчислимо за скороченою формулою:

$$\widetilde{D} = \frac{\sum_1^n \hat{x}_i^2 \cdot n_i}{n} - \tilde{x}^2.$$

Користуючись сумою з таблиці, одержимо:

$$\widetilde{D} = \frac{502{,}5906}{50} - 3{,}0756^2 = 0{,}5925.$$

Обчислимо вибіркові моду і медіану інтервального ряду:

$$\widetilde{M_o} = x_{mod} + \Delta \cdot \frac{n_{mod} - n_{mod-1}}{2 \cdot n_{mod} - n_{mod-1} - n_{mod+1}} =$$

$$= 3{,}21 + 0{,}48 \cdot \frac{14 - 11}{2 \cdot 14 - 11 - 10} \approx 3{,}416,$$

$$\widetilde{M_e} = x_{med} + \Delta \cdot \frac{0{,}5 \cdot n - n_{\text{нак}}}{n_{med}} = 2{,}73 + 0{,}48 \cdot \frac{0{,}5 \cdot 50 - 14}{11} = 3{,}21.$$

4. *Незміщені та спроможні оцінки невідомих параметрів математичного сподівання, дисперсії і середнього квадратичного відхилення.*

Незміщені оцінки будуємо за формулами:

$$\widetilde{m} = \tilde{x}; \;\; \tilde{s}^2 = \frac{n}{n-1} \cdot \widetilde{D}; \;\; \tilde{s} = \sqrt{\tilde{s}^2}.$$

$$\widetilde{m} = 3{,}0756; \;\; \tilde{s}^2 = \frac{50}{49} \cdot 0{,}5925 = 0{,}6046; \; \tilde{s} = \sqrt{0{,}6046} = 0{,}7776.$$

5. *Довірчі інтервали для математичного сподівання і середнього квадратичного відхилення*.

Побудувати довірчі інтервали для цих параметрів (m) і (σ), що відповідають довірчий ймовірності $\gamma = 0{,}95$ (дивись завдання 1, пункт 1.4).

Довірчий інтервал для оцінки математичного сподівання знаходимо за формулою:

$$m \epsilon (\tilde{x} - \delta;\ \tilde{x} + \delta).$$

Для математичного сподівання половина довжини довірчого інтервалу:

$$\delta = \frac{t \cdot \tilde{s}}{\sqrt{n}},$$

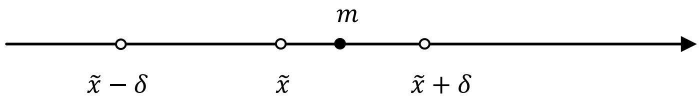
де $\tilde{s}$ – вибіркове середнє квадратичне відхилення, $t = t(n;\gamma)$ – функція, побудована на основі розподілу Стьюдента, знаходиться за таблицею (додаток 3) $t = t(50; 0{,}95) = 2{,}009$. Тоді

$$\delta = \frac{2{,}009 \cdot 0{,}7776}{\sqrt{50}} = 0{,}2209.$$

Довірчий інтервал для оцінки математичного сподівання:

$$m\ \epsilon\ (3{,}0756 - 0{,}2209;\ 3{,}0756 + 0{,}2209),$$

$$m\ \epsilon\ (2{,}8547;\ 3{,}2965).$$



Довірчий інтервал для оцінки середнього квадратичного відхилення будуємо за формулою:

$$\sigma\ \epsilon\ \left(\tilde{s}\ \cdot (1 - q);\ \tilde{s}\ \cdot (1 + q)\right),$$

де $q = q(n;\gamma)$ – таблично задана функція (додаток 4), $q = q(50; 0{,}95) = 0{,}210$.

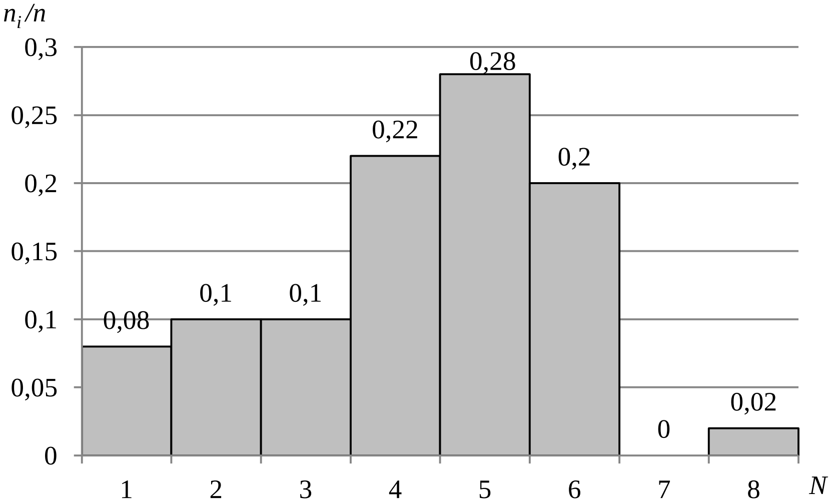
$$\sigma\ \epsilon\ (0{,}7776 \cdot 0{,}79;\ 0{,}7776 \cdot 1{,}21);$$

$$\sigma\ \epsilon\ (0{,}6143;\ 0{,}9409).$$

Знайдені довірчі інтервали з імовірністю 0,95 (або з надійністю 95%) накривають точки істинного значення відповідно математичного сподівання (m) і середнього квадратичного відхилення (σ).

6. *Гістограма та графік емпіричної функції розподілу*.

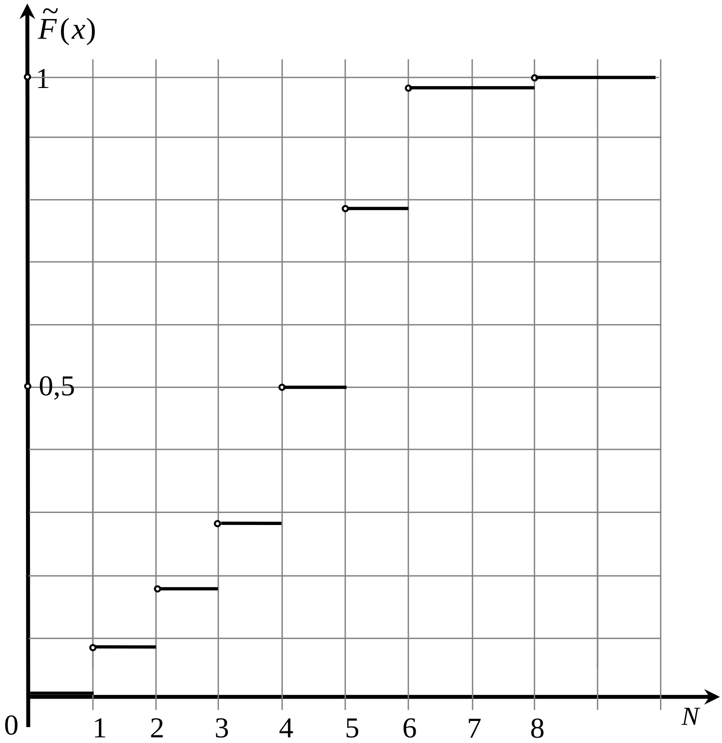
Гістограма



Емпірична функція розподілу

$$\tilde{F}(x) = \begin{cases} 0; & x \le 1{,}29; \\ 0 + 0{,}08 = 0{,}08; & 1{,}29 < x \le 1{,}77; \\ 0{,}08 + 0{,}1 = 0{,}18; & 1{,}77 < x \le 2{,}25; \\ 0{,}18 + 0{,}1 = 0{,}28; & 2{,}25 < x \le 2{,}73; \\ 0{,}28 + 0{,}22 = 0{,}5; & 2{,}73 < x \le 3{,}21; \\ 0{,}5 + 0{,}28 = 0{,}78; & 3{,}21 < x \le 3{,}69; \\ 0{,}78 + 0{,}2 = 0{,}98; & 3{,}69 < x \le 4{,}17; \\ 0{,}98 + 0 = 0{,}98; & 4{,}17 < x \le 4{,}65; \\ 0{,}98 + 0{,}02 = 1; & 4{,}65 < x \le 5{,}13; \\ 1; & x > 5{,}13. \end{cases}$$

Графік емпіричної функції розподілу



7. *Припущення про закон розподілу випадкової величини X (висування гіпотези).*

З вигляду гістограми можна зробити висновок про закон розподілу випадкової величини X, тобто висунути гіпотезу: X підпорядкована нормальному закону із щільністю розподілу: $f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2 \cdot \sigma^2}}$, де замість параметрів закону можна підставити знайдені у пункті 4 оцінки цих параметрів: $a = \widetilde{m} \cong 3{,}08$; $\sigma = \tilde{s} \cong 0{,}78$. Тоді отримаємо:

$$f(x) = \frac{1}{0{,}78 \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-3{,}08)^2}{1{,}22}}.$$

8. Перевірка гіпотези за допомогою критерію Пірсона і критерію Колмогорова.

Критерій χ^2 *Пірсона.*

Перевірити узгодженість статистичних даних висунутій гіпотезі при рівні значимості $\alpha = 0{,}05$.

Для перевірки узгодженості користуємось критерієм Пірсона, для чого треба:

а) обчислити спостережуване значення критерію $\chi^2_{\text{сп}} = \sum_i^k \frac{(n_i - n\cdot p_i)^2}{n\cdot p_i}$;

б) визначити число ступенів свободи $r = k - s - 1$, де k – число інтервалів, s – число параметрів, які оцінюються за вибіркою;

в) по визначеному r і заданому $\alpha = 0{,}05$, користуючись таблицею (додаток 5), знайти критичне значення критерію ${\chi^2}_{\text{кр}}$ і порівняти з ${\chi^2}_{\text{сп}}$. Якщо ${\chi^2}_{\text{сп}} < {\chi^2}_{\text{кр}}$ нема підстав відкидати гіпотезу про нормальний розподіл випадкової величини X, а якщо ${\chi^2}_{\text{сп}} > {\chi^2}_{\text{кр}}$, гіпотезу відкидають.

Виконуємо перевірку гіпотези поетапно (за заданою схемою):

а) Для обчислення χ^2 скористуємось таблицею (новою, або добавимо стовпчики у таблицю з пункту 1. Точність обчислень – два знаки після коми, окрім $\Phi(u_i)$, що за таблицею дає 5 знаків (додаток 1).

Пояснення до заповнення таблиці.

- $\Phi(u_i)$ – функція Лапласа, що визначається за таблицями з додатку 1.

Її аргумент $u_i = \frac{x_i - \tilde{m}}{\tilde{s}}$. У таблиці обчислено значення функції на границі зліва кожного інтервалу і лише в останньому (9) рядку – на границі справа останнього (8) інтервалу.

- Користуємось властивістю $\Phi(-u_i) = -\Phi(u_i)$.
- p_i – ймовірність потрапляння в інтервал обчислюється за формулою:

$$p_i = \Phi(u_{i+1}) - \Phi(u_i).$$

- Розрахунок p_i краще починати знизу таблиці. Наприклад,

$$p_8 = \Phi(u_9) - \Phi(u_8) = 0{,}49573 - 0{,}47778 = 0{,}01795 \cong 0{,}02.$$

• Сума p_i не буде дорівнюватися 1, але буде близька до 1. Це пов'язано з округленням при розрахунках. У нашому прикладі $\sum_1^8 \mathrm{p_i} = 0{,}99$.

N	x_i	n_i	u_i	$\Phi(u_i)$	p_i	$n \cdot p_i$	$n_i - np_i$	$\frac{(n_i - n \cdot p_i)^2}{np_i}$
1	1,29	4	–2,29	–0,4889	0,04	2	2	2
2	1,77	5	–1,68	–0,4535	0,10	5	0	0
3	2,25	5	–1,06	–0,3554	0,18	9	–4	1,78
4	2,73	11	–0,45	–0,1736	0,24	12	–1	0,08
5	3,21	14	0,17	0,0675	0,21	10,5	3,5	1,17
6	3,69	10	0,78	0,2823	0,14	7	3	1,29
7	4,17	0	1,40	0,4192	0,06	3	–3	3
8	4,65	1	2,01	0,4778	0,02	1	0	0
9	5,15		2,63	0,4957				
					0,99		${\chi^2}_{\text{сп}}$	=9,32

б) $r = 8 - 3 = 5$; тому що число інтервалів 8, число параметрів нормального закону розподілу дорівнює 2, це $a = \widetilde{m}$ і $\sigma = \tilde{s}$ і число зв'язків буде 2+1=3.

в) За таблицею критичних точок розподілу χ^2(додаток 5) ($\beta = 1 - \alpha = 0{,}95$):

$$ {\chi^2}_{\text{кр}}(5; 0{,}95) = 1{,}15, $$

$$ {\chi^2}_{\text{сп}} = \sum_{i=1}^{8} \frac{(n_i - n \cdot p_i)^2}{np_i} = 9{,}32. $$

${\chi^2}_{\text{сп}} > {\chi^2}_{\text{кр}}$, тому гіпотезу про нормальний закон розподілу можна відкинути, тому що статистичні і теоретичні дані значно відрізняються.

Критерій Колмогорова.

Перевірити узгодженість статистичних даних висунутій гіпотезі при рівні значимості $\alpha = 0{,}05$.

Для перевірки узгодженості користуємось критерієм Колмогорова, для чого треба:

а) обчислити міру розходження, в якості якої розглядається максимальне значення абсолютної величини різниці між емпіричною і теоретичною функціями розподілу $D = max\left|\tilde{F}(x_i) - F(x_i)\right|$ і обчислюється спостережувана величина $\lambda_{сп} = D \cdot \sqrt{n}$;

б) по заданому $\alpha = 0{,}05$, користуючись таблицею (додаток 2), знайти критичне значення $\lambda_{кр}$ і порівняти з $\lambda_{сп}$. Якщо $\lambda_{сп} < \lambda_{кр}$ нема підстав відкидати гіпотезу про нормальний розподіл випадкової величини X, а якщо $\lambda_{сп} > \lambda_{кр}$, гіпотезу відкидають.

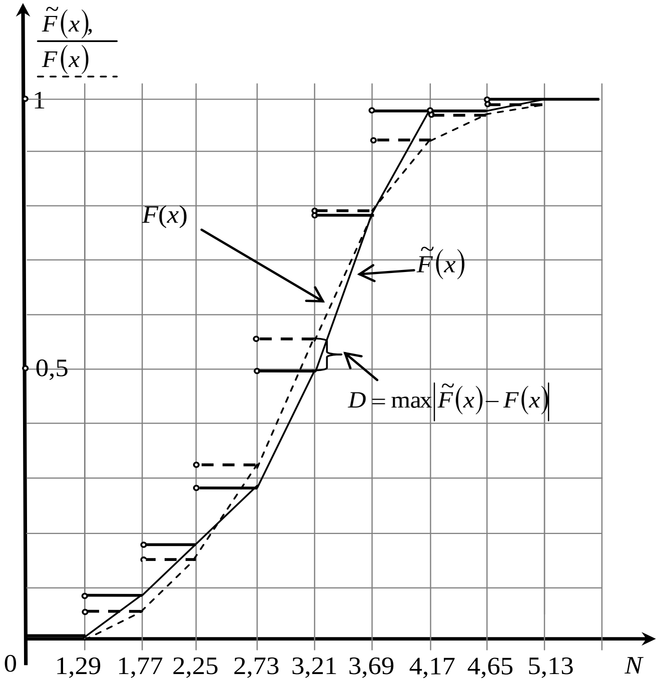
Виконуємо перевірку гіпотези поетапно (за заданою схемою).

а) Для обчислення $\lambda_{сп}$ скористуємось таблицею (новою, або добавимо стовпчики у таблицю з пункту 1).

N	x_{i+1}	$\tilde{F}(x_{i+1})$	u_{i+1}	$\Phi(u_{i+1})$	$F(x_{i+1}) = \frac{1}{2} + \Phi(u_{i+1})$	$\lvert\tilde{F}(x_{i+1}) - F(x_{i+1})\rvert$
1	1,77	0,08	–1,68	–0,4535	0,0468	0,0332
2	2,25	0,18	–1,06	–0,3554	0,1446	0,0354
3	2,73	0,28	–0,45	–0,1736	0,3264	0,0464
4	3,21	0,5	0,17	0,0675	0,5675	0,0675
5	3,69	0,78	0,78	0,2823	0,7823	0,0023
6	4,17	0,98	1,40	0,4192	0,9192	0,0608
7	4,65	0,98	2,01	0,4778	0,9778	0,0022
8	5,13	1	2,63	0,4957	0,9957	0,0043
					$D =$	0,0675

З рисунку нижче видно, що:

$$D = |\tilde{F}(3{,}21) - F(3{,}21)| = |0{,}5 - 0{,}5675| = 0{,}0675.$$



Пояснення до заповнення таблиці.

- $\Phi(u_i)$ – функція Лапласа (за таблицею з додатку 1).

Її аргумент $u_i = \frac{x_i - \tilde{m}}{\tilde{s}}$. У таблиці обчислено значення функції на границі справа кожного інтервалу.

- Користуємось властивістю $\Phi(-u_i) = -\Phi(u_i)$.

б) За таблицею критичних точок критерію Колмогорова (додаток 2):

$$\lambda_{\text{кр}}(0{,}05) = 1{,}36,$$

$$\lambda_{\text{сп}} = 0{,}0675 \cdot \sqrt{50} = 0{,}4773.$$

$\lambda_{\text{сп}} < \lambda_{\text{кр}}$, тому нульова гіпотеза не суперечить дослідним даним і не відкидається при рівні значимості 0,05.

ВАРІАНТИ ЗАВДАННЯ 2

Варіант 1

–0,209	1,543	1,906	–2,593	–1,265	–0,872	0,851	1,188	–0,752	–0,910
2,630	–0,172	0,082	0,039	–0,576	–2,050	0,744	–1,212	–0,104	0,334
–1,120	0,752	–1,574	1,690	–1,296	–0,565	–0,585	0,347	2,260	0,919
1,388	–0,354	0,557	0,222	–1,225	–1,104	0,953	–1,905	–0,672	0,026
1,387	0,757	2,355	0,009	0,986	1,677	0,512	–1,003	–0,433	0,589

Варіант 2

3,092	1,489	3,448	1,716	2,424	–1,949	1,915	–0,575	1,317
1,227	0,866	1,509	–1,682	4,506	1,603	0,111	3,532	2,299
1,349	6,781	2,560	–1,592	4,891	0,523	2,482	0,386	–0,857
0,725	3,945	–2,736	–0,563	–2,470	1,270	2,277	3,010	4,934
2,056	–0,632	–0,759	–0,153	–0,675	1,835	5,217	2,348	2,167

Варіант 3

2,436	1,288	2,814	1,056	4,950	1,540	2,638	4,614	4,871	4,653
2,419	2,059	1,351	3,811	1,189	3,586	4,898	2,003	4,498	4,125
3,607	1,359	2,799	2,423	2,895	4,931	4,207	1,567	1,917	3,822
3,667	2,602	1,553	3,982	3,383	2,403	1,876	4,429	4,984	1,812
1,501	3,491	3,184	3,035	4,459	3,618	2,482	2,936	3,134	4,339

Варіант 4

–0,192	1,329	0,078	–0,007	–1,018	–1,959	0,184	1,147	0,873	1,553
1,529	1,854	–1,150	0,152	1,829	–1,977	0,888	0,963	–0,313	1,960
0,764	1,403	0,820	1,966	–1,877	0,429	1,427	–0,021	0,307	1,768
0,228	–1,370	0,780	–0,428	–1,802	–0,376	1,420	0,427	1,311	–1,564
1,231	–0,421	–0,887	1,856	–1,279	0,401	1,911	1,931	1,551	0,602

Варіант 5

6,025	–0,295	2,668	2,392	1,410	0,035	7,086	1,403	3,495	–2,165
1,755	–0,249	4,777	2,331	7,235	2,675	7,064	2,073	–0,513	7,825
7,106	6,964	4,473	2,992	4,699	1,720	–1,123	5,974	2,422	4,171
–1,168	3,993	0,749	6,792	6,793	2,225	0,964	4,561	5,176	0,461
–0,050	6,937	2,315	8,718	2,120	4,332	–0,350	4,143	–0,942	1,846

Варіант 6

2,118	1,690	2,840	–2,827	3,807	1,847	–0,722	1,216	–0,438	0,875
4,293	0,537	3,023	–2,267	–1,981	3,328	1,407	–5,612	–3,404	1,908
2,066	–1,010	1,698	–0,952	–2,566	3,416	–2,085	–1,637	–3,566	1,834
1,005	–3,915	4,253	–0,927	2,532	1,225	–0,807	2,244	1,232	0,755
3,960	–3,763	3,656	–1,803	–0,432	0,080	3,435	–0,704	–1,498	3,485

Варіант 7

3,406	–2,541	–0,410	0,956	–1,148	2,573	8,507	2,703	0,937	–0,533
3,396	2,385	1,340	–1,301	5,726	8,357	1,629	1,492	2,281	2,282
1,840	2,927	–0,678	3,277	2,775	5,963	2,888	–3,328	7,441	4,045
3,746	11,071	1,820	1,225	2,292	2,405	0,434	1,854	2,860	3,098
4,579	1,068	2,181	7,106	–0,173	2,999	3,730	4,531	5,665	7,626

Варіант 8

2,803	–1,218	4,339	2,616	2,594	–0,463	2,292	–0,033	3,597	–0,824
–1,687	0,812	0,895	3,583	6,784	–3,059	0,025	–0,056	–1,910	–1,424
–2,010	–1,123	0,913	4,757	3,958	3,045	2,356	–4,034	–1,221	0,119
8,996	7,181	0,103	5,314	4,852	–1,667	0,258	3,817	1,933	–2,827
–4,034	–2,037	2,181	3,847	1,829	–2,006	0,266	-4,485	–2,957	–1,299

Варіант 9

2,560	1,876	0,301	2,960	–1,917	2,630	–0,152	1,346	2,851	–0,566
–0,147	2,072	1,558	0,425	–2,819	0,460	2,079	2,968	–0,939	2,648
0,037	–2,872	1,958	–0,814	–1,592	2,354	–0,356	–0,739	–2,496	–2,980
2,314	2,047	0,106	–1,255	1,968	1,057	0,971	2,975	1,860	–0,590
–1,061	–1,028	2,191	–0,379	–1,957	0,317	–2,463	–1,157	–2,884	–1,924

Варіант 10

4,718	2,734	4,187	3,881	5,621	2,470	3,337	4,873	2,910	2,290
5,520	3,576	4,763	3,931	5,896	3,112	2,706	3,516	2,681	2,534
3,676	5,291	2,784	3,420	4,911	5,805	4,952	2,469	3,894	5,113
5,713	5,196	2,491	3,487	4,025	4,249	5,471	4,487	5,208	4,930
5,500	3,020	5,017	5,336	5,177	2,208	3,208	5,211	4,794	4,367

Варіант 11

8,505	5,070	6,649	5,426	5,782	5,527	4,529	6,920	6,626	7,612
4,240	6,562	6,141	5,482	2,590	7,000	4,018	7,723	6,536	3,259
5,812	7,369	5,693	4,975	5,787	5,755	3,245	6,069	4,564	3,253
4,783	4,356	6,896	4,781	3,538	6,381	3,214	2,993	3,829	8,241
8,657	6,605	4,824	5,383	4,819	5,655	5,216	4,434	2,692	4,307

Варіант 12

0,157	1,816	1,241	1,222	–1,354	1,158	0,584	2,730	–0,291	1,057
0,544	–3,736	4,327	–2,132	–0,359	4,471	1,535	1,669	3,325	–0,394
1,015	–0,435	1,573	–1,242	1,424	–0,425	1,508	0,543	–0,032	3,898
1,596	1,779	–0,092	0,184	–1,452	–0,185	0,619	5,726	1,980	–1,573
1,508	2,744	3,864	–1,541	0,156	–0,942	2,393	0,890	–0,970	2,992

Варіант 13

2,382	4,619	8,022	2,091	3,213	5,556	3,351	2,483	0,127	5,933
3,557	6,771	4,823	5,130	4,414	4,352	4,824	6,497	3,648	3,839
5,067	6,484	5,709	6,842	3,405	5,710	4,191	6,236	4,247	5,250
7,972	2,856	3,171	4,485	2,908	6,976	5,224	4,377	4,108	1,241
5,628	2,859	4,525	7,878	4,982	6,569	6,876	3,553	3,077	3,534

Варіант 14

4,479	2,018	5,253	5,038	4,840	3,864	4,971	5,688	2,302	2,877
5,261	7,981	0,739	3,696	5,403	4,971	1,900	2,738	5,536	0,612
0,367	2,249	3,309	5,288	2,455	3,831	2,237	2,606	1,702	5,560
4,494	1,860	5,831	0,754	5,129	0,670	2,249	2,253	1,824	2,779
4,821	2,108	5,747	3,824	3,514	5,385	2,255	3,714	1,425	0,515

Варіант 15

1,292	4,751	0,470	–0,897	1,231	0,823	4,710	1,798	–0,554	2,067
–0,396	–0,913	–0,727	0,710	1,134	4,854	–0,679	0,801	0,191	1,241
2,579	1,445	–0,806	1,059	4,462	3,840	3,230	3,501	–0,616	4,915
4,395	4,179	–0,015	2,322	1,796	4,947	3,899	1,109	1,150	–0,756
4,308	–0,168	0,318	1,144	1,557	0,538	4,835	3,654	1,922	0,384

Варіант 16

6,974	5,135	4,014	3,831	6,506	3,809	4,818	5,648	4,950	3,990
5,157	5,321	5,287	4,853	6,846	6,254	4,903	5,673	6,888	5,075
3,756	3,180	6,684	5,633	5,108	3,930	5,988	4,055	5,572	5,499
3,858	4,293	5,904	6,037	6,707	6,146	6,838	5,056	5,453	6,954
3,833	5,048	6,832	3,734	4,059	4,926	5,584	5,043	3,724	3,111

Варіант 17

11,557	4,722	7,770	11,912	6,956	14,902	11,206	9,625	6,838	7,434
12,331	4,106	6,734	8,112	6,259	2,213	2,237	5,270	8,062	9,068
8,671	11,917	4,094	10,777	2,225	7,535	10,973	9,873	4,354	10,085
5,317	4,416	10,276	5,206	11,467	9,461	1,448	4,979	11,638	13,241
4,894	9,104	2,907	2,860	4,281	1,730	5,690	10,273	8,035	6,130

Варіант 18

1,325	1,170	0,324	–2,891	4,475	–4,748	0,364	–1,257	1,030	5,561
–1,249	2,512	0,833	3,753	2,686	–1,296	–1,395	–0,896	–2,872	2,309
3,186	2,672	1,645	–0,585	4,029	1,463	–5,402	1,854	0,983	3,778
–2,148	1,094	1,466	–1,331	0,933	5,482	–1,276	0,698	–1,917	2,981
–1,537	3,355	1,643	–0,187	0,371	–0,682	0,935	–1,491	–0,316	1,665

Варіант 19

5,747	6,593	3,908	3,938	7,899	6,774	4,388	5,207	6,909	8,421
3,566	5,383	3,147	3,521	9,383	6,238	5,648	5,400	5,909	6,434
5,679	5,664	4,453	7,547	5,180	3,561	4,443	3,316	4,604	6,067
5,663	6,148	8,589	3,709	6,026	5,741	2,290	6,928	3,708	9,053
4,258	5,320	5,387	7,167	6,824	3,553	4,240	4,334	6,164	5,379

Варіант 20

–0,390	2,703	5,211	7,614	–0,004	4,759	3,578	2,417	6,323	4,012
3,533	3,529	1,586	3,472	–0,174	3,713	1,905	4,901	3,276	–1,511
0,616	1,134	3,949	1,348	1,392	2,777	4,635	2,900	3,362	1,513
1,313	3,922	9,031	5,899	1,782	0,741	2,194	0,112	3,003	1,987
4,436	2,710	2,280	2,477	1,225	4,534	0,078	1,296	6,304	2,963

Варіант 21

0,403	3,916	2,073	–1,854	1,716	0,996	0,303	1,805	3,503	0,502
–0,904	2,512	3,726	2,656	1,183	–0,922	0,695	3,092	–1,110	3,727
1,766	–0,812	–0,844	1,360	–1,368	0,657	3,939	1,504	1,187	1,738
3,436	–1,434	0,824	–1,112	–0,140	0,887	3,397	1,050	2,503	–1,028
2,603	2,820	1,577	3,378	3,057	–1,021	3,101	–1,740	2,184	–0,514

Варіант 22

1,695	0,094	1,783	1,555	1,936	0,507	0,921	0,917	–0,720	0,880
1,231	2,414	2,703	–0,981	–0,497	1,645	1,456	2,328	2,894	–0,924
1,728	0,718	0,085	2,789	1,930	1,077	–0,150	–0,168	2,794	–0,234
2,656	1,030	–0,707	2,623	0,971	1,410	0,382	1,087	1,369	2,481
–0,584	–0,643	2,269	0,795	–0,223	1,014	2,514	1,098	1,320	2,141

Варіант 23

12,889	5,455	12,613	5,325	7,835	7,978	13,694	9,288	9,743	3,583
1,119	6,337	6,220	6,671	6,492	18,523	2,848	3,950	10,882	2,687
5,884	5,410	6,580	7,286	5,615	4,580	2,353	15,455	11,719	9,939
12,516	7,402	–2,806	0,511	8,507	16,976	2,459	3,563	–2,819	7,456
14,822	4,640	–0,981	11,297	7,932	8,388	6,105	10,020	–1,640	10,457

Варіант 24

0,581	1,788	5,276	0,733	1,748	–0,496	1,654	1,183	0,647	2,755
1,341	0,808	0,793	1,601	0,547	3,829	–2,558	–1,498	–1,557	–1,315
3,558	1,867	–2,660	1,846	4,352	–1,040	–2,870	–1,919	–3,911	0,968
1,040	4,373	1,578	3,247	4,240	5,798	–0,267	3,502	–2,414	–1,293
0,328	1,428	4,057	3,630	–4,850	–1,119	–1,144	–2,295	3,772	–0,785

Варіант 25

4,760	5,702	5,518	7,006	6,990	3,743	5,462	5,385	4,160	5,171
2,856	6,184	3,842	4,931	2,904	4,817	3,101	5,171	3,657	7,382
5,476	3,414	3,902	2,112	9,053	6,131	4,219	5,194	7,553	5,459
5,328	5,732	5,164	1,137	6,362	7,081	3,674	6,761	6,012	4,510
5,112	5,697	4,596	6,356	6,425	6,620	3,801	4,792	6,357	5,086

Варіант 26

3,351	1,933	2,362	3,845	1,160	4,202	2,094	1,269	4,135	2,519
2,384	3,469	0,781	3,946	3,543	1,830	4,808	4,567	2,874	2,020
2,547	5,900	0,424	1,932	2,983	2,507	4,289	5,545	3,820	1,299
5,056	3,946	1,529	0,778	3,268	6,144	1,179	1,902	2,651	5,761
4,038	1,323	4,493	4,539	1,427	2,008	5,049	1,160	1,602	3,790

Варіант 27

0,631	–0,964	–0,420	–0,315	0,501	0,100	–0,106	–0,177	0,321	0,119
0,792	0,925	–0,514	–0,427	0,255	–0,893	0,361	0,641	0,416	–0,969
0,885	–0,868	0,699	–0,285	0,578	–0,092	–0,591	–0,505	–0,480	0,497
0,690	0,060	0,505	–0,799	0,132	0,855	–0,968	–0,393	–0,962	–0,905
0,510	–0,678	–0,954	0,004	0,927	–0,097	0,531	0,437	–0,005	0,511

Варіант 28

1,717	3,280	1,860	0,244	2,907	1,179	3,376	3,078	2,677	2,358
0,776	3,583	3,306	3,193	1,631	0,288	2,030	2,415	2,426	2,740
2,845	1,955	0,342	2,276	0,847	1,667	2,338	1,580	1,391	1,048
0,275	2,306	0,642	1,913	3,045	0,601	2,192	0,642	2,901	0,110
2,956	0,922	0,907	0,313	0,874	3,007	1,523	3,535	2,028	1,915

Варіант 29

9,341	–2,442	9,630	7,803	7,662	17,165	8,765	9,128	2,670	11,794
9,047	12,179	2,354	6,336	5,689	0,559	7,195	12,965	1,207	3,737
–0,994	6,767	15,293	1,733	5,823	7,328	6,996	6,760	8,462	3,499
9,558	4,927	15,478	6,476	4,070	7,651	2,177	3,702	6,282	8,276
10,831	9,361	11,927	9,284	7,796	7,045	9,998	7,434	–0,093	6,771

Варіант 30

–0,447	–4,377	0,122	4,862	4,208	4,076	0,991	6,396	3,418	–2,939
2,569	6,151	5,229	–2,227	–1,826	2,734	–0,735	1,774	2,618	0,314
–0,323	3,681	–0,683	0,215	–1,217	2,890	–1,708	0,753	0,275	5,603
4,484	2,558	0,666	0,913	–0,002	4,350	0,307	–0,274	5,165	1,898
–1,494	2,786	2,125	2,294	–3,984	6,683	4,349	0,465	1,010	2,400

ЗАВДАННЯ 3

ДОВІДКА. Метод найменших квадратів

У процесі вивчення різних питань природознавства, економіки, техніки, соціології, педагогіки доводиться на основі великої кількості дослідних даних виявляти суттєві фактори, які впливають на досліджуваний об’єкт, а також встановлювати форму зв’язку між різними зв’язаними одна з одною величинами (ознаками).

Метод найменших квадратів (МНК) – один з математичних методів, що дозволяють проаналізувати і обробити дані, одержані в результаті експерименту. Найчастіше цей метод використовується для апроксимації експериментальних значень аналітичною функцією. Метод найменших квадратів, завдяки широкій сфері застосування, посідає виняткове місце серед методів математичної статистики.

Нехай у результаті досліджень або експерименту було отримано таку таблицю залежності між двома величинами:

x_i	x_1	x_2	…	x_n
y_i	y_1	y_2	…	y_n

Треба знайти аналітичний вигляд функції $y = f(x)$, яка відображала б дослідні дані в аналітичному вигляді.

Поставимо задачу наступним чином. Знайти функцію заданого вигляду $y = f(x)$, яка у точках x_i, $i = 1, 2, \dots n$ набуває значення як умова ближче до досліджених y_i, $i = 1, 2, \dots n$, що знаходяться у таблиці.

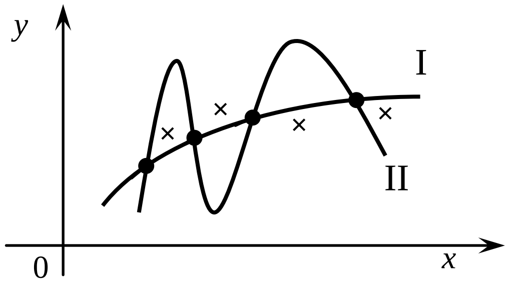
Процес побудови формули $y = f(x)$ складається з двох етапів:

- встановлення загального вигляду цієї формули;
- визначення найкращих її параметрів.

Щоб встановити вигляд функції, на площині будують точки з координатами $(x_i; y_i)$, $i = \overline{1, n}$. Точки з’єднують плавною кривою, яку проводять так, щоб вона проходила якомога ближче до всіх даних точок. Після цього візуально визначають, графік якої з відомих нам функцій найкраще підходить до побудованої кривої. Звичайно, намагаються підібрати найпростіші функції: лінійну, квадратичну, дрібно-раціональну, степеневу, показникову, логарифмічну тощо.

Очевидно, у випадку, зображеному на малюнку, дослідник безсумнівно віддасть перевагу кривій I перед кривій II.

Встановивши загальний вигляд функції, треба знайти її параметри (коефіцієнти). Найточніші значення коефіцієнтів визначають методом найменших квадратів.



Розглянемо суть методу найменших квадратів на прикладах, які представлені нижче.

Приклад 1. Нехай функція має вигляд *лінійної залежності* між y та x: $f(x) = ax + b$. Треба знайти невідомі коефіцієнти $a,\ b$, виходячи з того, що пряма якомога ближче проходитиме до всіх n точок, знайдених експериментально. Зрозуміло, що експериментальні точки можуть не задовольняти точно рівняння $f(x) = ax + b$. Відхилення від підстановки координат $(x_i; y_i)$ у рівняння прямої лінії дорівнюватимуть величинам:

$$\delta_i = f(x_i) - y_i = (ax_i + b) - y_i.$$

За методом найменших квадратів найкращі значення коефіцієнтів $a,\ b$ ті, для яких сума квадратів відхилень дослідних даних від обчислених за вибраною функцією найменша.

$$S(a,b) = \sum_{i=1}^{n} \delta_i^2 = \sum_{i=1}^{n} ((ax_i + b) - y_i)^2 \to min$$

Величина $S(a,b)$, яка є функцією від коефіцієнтів, повинна мати мінімум. Необхідною умовою існування мінімуму функції багатьох змінних є рівність нулю її частинних похідних, тобто:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a} = \sum\limits_{i=1}^{n} 2((ax_i + b) - y_i)\, x_i = 0; \\ \dfrac{\partial S}{\partial b} = \sum\limits_{i=1}^{n} 2((ax_i + b) - y_i) = 0. \end{cases}$$

Маємо систему рівнянь з невідомими a, b. Після виконання алгебраїчних перетворень (скоротити обидва рівняння на 2, розбити суми, виділити праву частину):

$$\begin{cases} a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i; \\ a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i + b \cdot n = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i . \end{cases}$$

Найкраще розв'язання цієї системі – за правилом Крамера.

Приклад 2. Нехай емпірична формула має вигляд *квадратичної залежності* між *y* та *x*: $f(x) = ax^2 + bx + c$. Аналогічно **Прикладу 1**, одержимо наступну систему рівнянь для визначення коефіцієнтів a, b, c:

$$\begin{cases} a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^4 + b\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 + c\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 y_i; \\ a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 + b\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + c\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i ; \\ a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum\limits_{i=1}^{n} x_i + c \cdot n = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i . \end{cases}$$

ЗАВДАННЯ 3

По заданим експериментальним точкам:

1. Побудувати точки на площині в системі координат XOY. Одержати статистичну ламану.

2. Вирівняти її двома способами: за допомогою лінійної залежності (пряма лінія) і квадратичної залежності (парабола).

3. Методом найменших квадратів обчислити параметри прямої і параболи.

4. Побудувати на тому ж малюнку одержані аналітичні залежності.

5. Зробити висновки.

Приклад виконання завдання 3

x_i	–5	–3	–2	–1	0	2	3
y_i	–3,1	–1,4	2,2	1,8	6,3	8,2	11,1

Для зручності вирахування коефіцієнтів систем зробимо таблицю.

№	1	2	3	4	5	6	7	Σ
x_i	–5	–3	–2	–1	0	2	3	–6
y_i	–3,1	–1,4	2,2	1,8	6,3	8,2	11,1	25,1
$x_i y_i$	15,5	4,2	–4,4	–1,8	0	16,4	33,3	63,2
x_i^2	25	9	4	1	0	4	9	52
x_i^3	–125	–27	–8	–1	0	8	27	–126
x_i^4	625	81	16	1	0	16	81	820
$x_i^2 y_i$	–77,5	–12,6	8,8	1,8	0	32,8	99,9	53,2

Підставимо суми з таблиці у систему для визначення коефіцієнтів a, b прямої лінії $f(x) = ax + b$.

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i; \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + b \cdot n = \sum_{i=1}^{n} y_i \, . \end{cases}$$

Одержимо:

$$\begin{cases} 52 \cdot a - 6 \cdot b = 63{,}2 \\ -6 \cdot a + 7 \cdot b = 25{,}1. \end{cases}$$

За правилом Крамера обчислимо визначники:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 52 & -6 \\ -6 & 7 \end{vmatrix} = 328;$$

$$\Delta_a = \begin{vmatrix} 63{,}2 & -6 \\ 30{,}1 & 7 \end{vmatrix} = 593;$$

$$\Delta_b = \begin{vmatrix} 52 & 63{,}2 \\ -6 & 30{,}1 \end{vmatrix} = 1684{,}4.$$

Тоді коефіцієнти:

$$a = \frac{\Delta_a}{\Delta} = 1{,}8; \; b = \frac{\Delta_b}{\Delta} = 5{,}1$$

(округлення до одного знаку після коми).

Рівняння прямої: $f(x) = 1{,}8 \cdot x + 5{,}1$.

Для побудови прямої на малюнку достатньо двох точок, але для порівняння двох способів апроксимації нам буде потрібна сума квадратів відхилень дослідних даних від обчислених за емпіричною формулою, тому обчислимо $f(x)$ в усіх точках.

x_i	–5	–3	–2	–1	0	2	3
$f(x_i)$	–3,9	–0,3	1,5	3,3	5,1	8,7	10,5
y_i	–3,1	–1,4	2,2	1,8	6,3	8,2	11,1
δ_i^2	0,64	1,21	0,49	2,25	1,44	0,25	0,36

Для лінійної апроксимації $\sum_{i=1}^{n} \delta_i^2 = 6{,}64$.

Підставимо суми з таблиці у систему для визначення коефіцієнтів $a, b,$ c квадратичної залежності $f(x) = ax^2 + bx + c$.

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^4 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + c\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i; \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + c\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i; \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i + c \cdot n = \sum_{i=1}^{n} y_i. \end{cases}$$

Одержимо:

$$\begin{cases} 820 \cdot a - 126 \cdot b + 52 \cdot c = 53{,}2; \\ -126 \cdot a + 52 \cdot b - 6 \cdot c = 63{,}2; \\ 52 \cdot a - 6 \cdot b + 7 \cdot c = 25{,}1. \end{cases}$$

За правилом Крамера обчислимо визначники:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 820 & -126 & 52 \\ -126 & 52 & -6 \\ 52 & -6 & 7 \end{vmatrix} = 95844;$$

$$\Delta_a = \begin{vmatrix} 53{,}2 & -126 & 52 \\ 63{,}2 & 52 & -6 \\ 25{,}1 & -6 & 7 \end{vmatrix} = 4578{,}8;$$

$$\Delta_b = \begin{vmatrix} 820 & 53{,}2 & 52 \\ -126 & 63{,}2 & -6 \\ 52 & 25{,}1 & 7 \end{vmatrix} = 181236;$$

$$\Delta_c = \begin{vmatrix} 820 & -126 & 53{,}2 \\ -126 & 52 & 63{,}2 \\ 52 & -6 & 25{,}1 \end{vmatrix} = 465000{,}4.$$

Тоді коефіцієнти:

$$a = \frac{\Delta_a}{\Delta} = 0{,}05;\ b = \frac{\Delta_b}{\Delta} = 1{,}89;\ c = \frac{\Delta_c}{\Delta} = 4{,}85$$

(округлення до двох знаків після коми).

Рівняння параболи: $f(x) = 0{,}05 \cdot x^2 + 1{,}89 \cdot x + 4{,}85.$

Якщо розглянути одержані рівняння, можна помітити, що коефіцієнт при x^2 параболи дуже малий, а коефіцієнти при x і вільний член прямої лінії і параболи близькі.

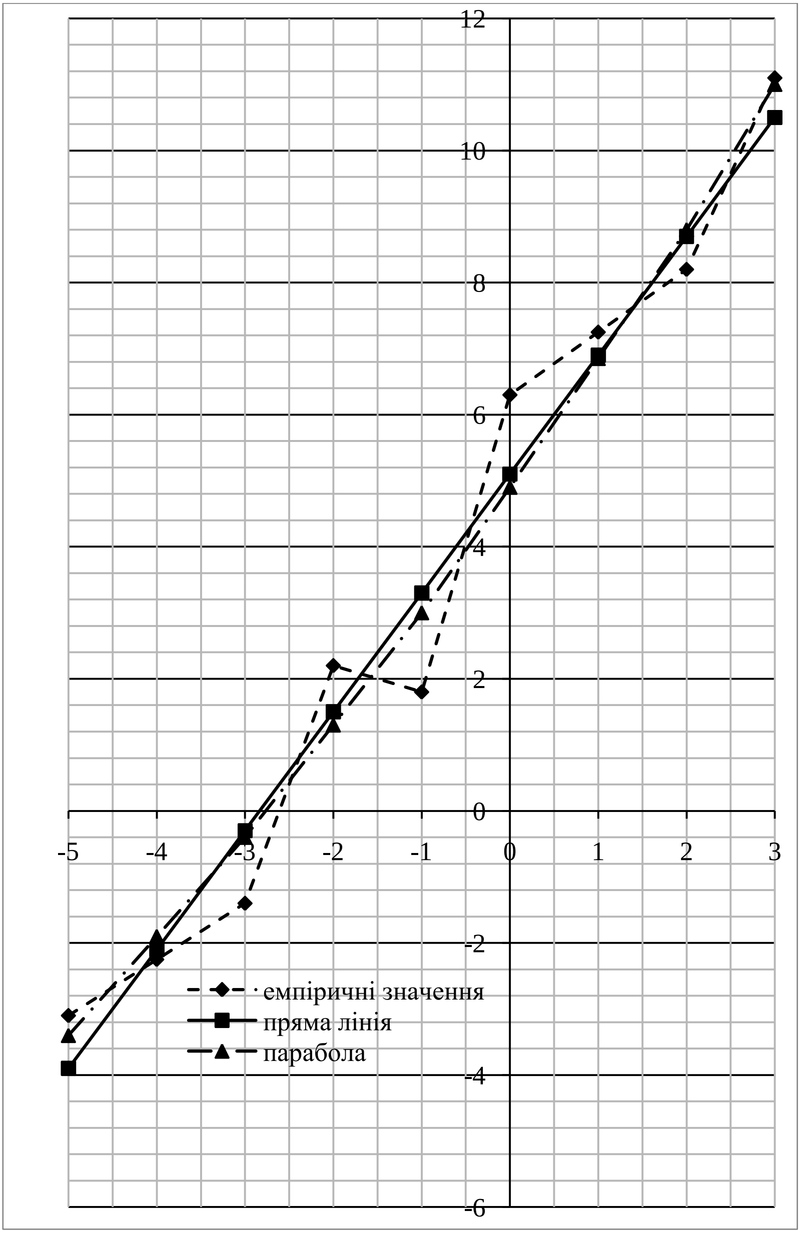
Обчислимо суму квадратів відхилень дослідних даних від обчислених за емпіричною формулою.

x_i	–5	–3	–2	–1	0	2	3
$f(x_i)$	–3,4	–0,4	1,3	3	4,9	8,8	11
y_i	–3,1	–1,4	2,2	1,8	6,3	8,2	11,1
δ_i^2	0,09	1	0,81	1,44	1,96	0,36	0,01

Для квадратичної апроксимації $\sum_{i=1}^{n} \delta_i^2 = 5{,}67$.

Висновки.

У даному випадку сума квадратів відхилень дослідних даних від обчислених за вибраною функцією менше для квадратичної апроксимації (не набагато), тому парабола краще відображає експериментальні дані. Але близькість коефіцієнтів дає змогу зробити висновок про те, що для зменшення обсягу розрахунків можна обмежитися лінійною залежністю, без втрати точності.



12
10
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
емпіричні значення
пряма лінія
парабола

ВАРІАНТИ ЗАВДАННЯ 3

Варіант 1.

x_i	–6	–5	–3	–1	0	2	2
y_i	–4,5	–3,4	1,2	0,4	1,3	2,2	5

Варіант 2.

x_i	–6	–4	–2	0	2	4	4
y_i	–0,9	–1,1	1,0	2,3	3,1	4,4	6,2

Варіант 3.

x_i	–7	–5	–3	–2	–1	0	2
y_i	–3,1	–1,0	0,2	1,9	2,3	3,2	2,7

Варіант 4.

x_i	–2	–1	0	1	3	4	5
y_i	3,1	2,8	3,2	4,8	5,3	6,2	7,1

Варіант 5.

x_i	3	4	5	6	7	8	10
y_i	–0,1	0,4	1,3	1,6	1,2	3,2	4,3

Варіант 6.

x_i	–1	0	1	2	3	4	6
y_i	–3,1	–2,8	–3,2	–3,8	–4,3	–5,2	–6,1

Варіант 7.

x_i	–5	–4	–3	–2	–1	0	1
y_i	3,1	2,8	3,2	3,8	4,3	5,2	7,1

Варіант 8.

x_i	–5	–3	–2	–1	0	2	3
y_i	–3,1	–4,4	–5,3	–5,7	–6,3	–8,3	–11,1

Варіант 9.

x_i	–2	–1	0	1	2	4	6
y_i	3,0	1,6	0,2	–1,8	–3,4	–4,2	–5,2

Варіант 10.

x_i	0	1	2	3	4	5	6
y_i	3,9	3,4	2,2	1,8	0,3	0	–0,5

Варіант 11.

x_i	1	3	4	5	6	7	9
y_i	–6,2	–5,4	–4,3	–3,7	–2,3	–1,2	–0,1

Варіант 12.

x_i	–6	–5	–4	–3	–2	–1	0
y_i	1,1	1,5	0,9	–0,8	–1,7	–2,2	–4,1

Варіант 13.

x_i	–6	–4	–2	–1	1	2	4
y_i	4,2	1,2	1,3	–1,4	–1,3	1,2	1,1

Варіант 14.

x_i	–8	–6	–4	–3	–2	–2	1
y_i	–3,1	–2,4	1,2	1,3	2,2	3,2	5,8

Варіант 15.

x_i	–3	–2	–1	0	1	2	3
y_i	3,4	2,6	2,0	1,8	1,3	0,4	1,3

Варіант 16.

x_i	–3	–2	–1	0	1	2	3
y_i	–1,1	–1,7	–0,2	0,8	1,3	4,1	6,6

Варіант 17.

x_i	–5	–3	–2	–1	0	2	3
y_i	–3,1	–3,4	–4,2	–4,8	–6,3	–8,5	–8,3

Варіант 18.

x_i	–2	–1	0	1	2	3	5
y_i	3,1	4,6	5,2	4,7	5,2	5,8	6,1

Варіант 19.

x_i	1	2	3	4	6	8	7
y_i	–3,2	–1,1	0,2	1,6	2,3	2,5	2,8

Варіант 20.

x_i	–3	–2	–1	0	1	2	3
y_i	3,5	2,6	1,3	0	–1,4	–3,5	–6,1

Варіант 21.

x_i	–1	0	1	2	3	5	7
y_i	3,1	3,7	5,2	6,8	7,3	8,2	10,1

Варіант 22.

x_i	–1	0	1	2	3	4	7
y_i	–1,1	–0,8	1,2	2,8	2,4	3,5	6,2

Варіант 23.

x_i	–4	–3	–2	–1	0	2	2
y_i	3,8	6,1	1,1	2,2	–2,6	–2,8	–4,4

Варіант 24.

x_i	–4	–2	–1	2	2	4	4
y_i	–5,1	–3,3	–1,2	1,4	3,2	4,2	6,1

Варіант 25.

x_i	–2	–1	0	0	1	2	2
y_i	4,1	1,4	2,1	–0,8	–0,8	–2,2	–3,9

Варіант 26.

x_i	–3	–2	–1	0	2	4	5
y_i	4,1	2,4	2,2	1,8	1,3	2,2	1,9

Варіант 27

x_i	2	4	5	6	8	9	10
y_i	3,7	3,4	2,2	1,8	1,8	0,7	0,1

Варіант 28.

x_i	–4	–3	–1	0	2	4	5
y_i	–0,6	1,2	0	1,8	6,3	7,2	9,1

Варіант 29.

x_i	–5	–3	–2	0	1	2	3
y_i	–2,1	–1,6	2,2	1,8	6,3	8,2	9,1

Варіант 30.

x_i	3	4	5	6	8	9	10
y_i	–3,1	–1,4	2,2	1,8	4,3	6,2	8,1

ДОДАТКИ

Додаток1.

Значення функції Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

щільність стандартного нормального розподілу $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$.

x	$\Phi(x)$	$\varphi(x)$	x	$\Phi(x)$	$\varphi(x)$	x	$\Phi(x)$	$\varphi(x)$
0,00	0,00000	0,39894	0,31	0,12172	0,38023	0,62	0,23237	0,32918
0,01	0,00399	0,39892	0,32	0,12552	0,37903	0,63	0,23565	0,32713
0,02	0,00798	0,39886	0,33	0,12930	0,37780	0,64	0,23891	0,32506
0,03	0,01197	0,39876	0,34	0,13307	0,37654	0,65	0,24215	0,32297
0,04	0,01595	0,39862	0,35	0,13683	0,37524	0,66	0,24537	0,32086
0,05	0,01994	0,39844	0,36	0,14058	0,37391	0,67	0,24857	0,31874
0,06	0,02392	0,39822	0,37	0,14431	0,37255	0,68	0,25175	0,31659
0,07	0,02790	0,39797	0,38	0,14803	0,37115	0,69	0,25490	0,31443
0,08	0,03188	0,39767	0,39	0,15173	0,36973	0,70	0,25804	0,31225
0,09	0,03586	0,39733	0,40	0,15542	0,36827	0,71	0,26115	0,31006
0,10	0,03983	0,39695	0,41	0,15910	0,36678	0,72	0,26424	0,30785
0,11	0,04380	0,39654	0,42	0,16276	0,36526	0,73	0,26730	0,30563
0,12	0,04776	0,39608	0,43	0,16640	0,36371	0,74	0,27035	0,30339
0,13	0,05172	0,39559	0,44	0,17003	0,36213	0,75	0,27337	0,30114
0,14	0,05567	0,39505	0,45	0,17364	0,36053	0,76	0,27637	0,29887
0,15	0,05962	0,39448	0,46	0,17724	0,35889	0,77	0,27935	0,29659
0,16	0,06356	0,39387	0,47	0,18082	0,35723	0,78	0,28230	0,29431
0,17	0,06749	0,39322	0,48	0,18439	0,35553	0,79	0,28524	0,29200
0,18	0,07142	0,39253	0,49	0,18793	0,35381	0,80	0,28814	0,28969
0,19	0,07535	0,39181	0,50	0,19146	0,35207	0,81	0,29103	0,28737
0,20	0,07926	0,39104	0,51	0,19497	0,35029	0,82	0,29389	0,28504
0,21	0,08317	0,39024	0,52	0,19847	0,34849	0,83	0,29673	0,28269
0,22	0,08706	0,38940	0,53	0,20194	0,34667	0,84	0,29955	0,28034
0,23	0,09095	0,38853	0,54	0,20540	0,34482	0,85	0,30234	0,27798
0,24	0,09483	0,38762	0,55	0,20884	0,34294	0,86	0,30511	0,27562
0,25	0,09871	0,38667	0,56	0,21226	0,34105	0,87	0,30785	0,27324
0,26	0,10257	0,38568	0,57	0,21566	0,33912	0,88	0,31057	0,27086
0,27	0,10642	0,38466	0,58	0,21904	0,33718	0,89	0,31327	0,26848
0,28	0,11026	0,38361	0,59	0,22240	0,33521	0,90	0,31594	0,26609
0,29	0,11409	0,38251	0,60	0,22575	0,33322	0,91	0,31859	0,26369
0,30	0,11791	0,38139	0,61	0,22907	0,33121	0,92	0,32121	0,26129

Продовження додатка1

x	$\Phi(x)$	$\varphi(x)$	x	$\Phi(x)$	$\varphi(x)$	x	$\Phi(x)$	$\varphi(x)$
0,93	0,32381	0,25888	1,31	0,40490	0,16915	1,69	0,45449	0,09566
0,94	0,32639	0,25647	1,32	0,40658	0,16694	1,70	0,45543	0,09405
0,95	0,32894	0,25406	1,33	0,40824	0,16474	1,71	0,45637	0,09246
0,96	0,33147	0,25164	1,34	0,40988	0,16256	1,72	0,45728	0,09089
0,97	0,33398	0,24923	1,35	0,41149	0,16038	1,73	0,45818	0,08933
0,98	0,33646	0,24681	1,36	0,41309	0,15822	1,74	0,45907	0,08780
0,99	0,33891	0,24439	1,37	0,41466	0,15608	1,75	0,45994	0,08628
1,00	0,34134	0,24197	1,38	0,41621	0,15395	1,76	0,46080	0,08478
1,01	0,34375	0,23955	1,39	0,41774	0,15183	1,77	0,46164	0,08329
1,02	0,34614	0,23713	1,40	0,41924	0,14973	1,78	0,46246	0,08183
1,03	0,34849	0,23471	1,41	0,42073	0,14764	1,79	0,46327	0,08038
1,04	0,35083	0,23230	1,42	0,42220	0,14556	1,80	0,46407	0,07895
1,05	0,35314	0,22988	1,43	0,42364	0,14350	1,81	0,46485	0,07754
1,06	0,35543	0,22747	1,44	0,42507	0,14146	1,82	0,46562	0,07614
1,07	0,35769	0,22506	1,45	0,42647	0,13943	1,83	0,46638	0,07477
1,08	0,35993	0,22265	1,46	0,42785	0,13742	1,84	0,46712	0,07341
1,09	0,36214	0,22025	1,47	0,42922	0,13542	1,85	0,46784	0,07206
1,10	0,36433	0,21785	1,48	0,43056	0,13344	1,86	0,46856	0,07074
1,11	0,36650	0,21546	1,49	0,43189	0,13147	1,87	0,46926	0,06943
1,12	0,36864	0,21307	1,50	0,43319	0,12952	1,88	0,46995	0,06814
1,13	0,37076	0,21069	1,51	0,43448	0,12758	1,89	0,47062	0,06687
1,14	0,37286	0,20831	1,52	0,43574	0,12566	1,90	0,47128	0,06562
1,15	0,37493	0,20594	1,53	0,43699	0,12376	1,91	0,47193	0,06438
1,16	0,37698	0,20357	1,54	0,43822	0,12188	1,92	0,47257	0,06316
1,17	0,37900	0,20121	1,55	0,43943	0,12001	1,93	0,47320	0,06195
1,18	0,38100	0,19886	1,56	0,44062	0,11816	1,94	0,47381	0,06077
1,19	0,38298	0,19652	1,57	0,44179	0,11632	1,95	0,47441	0,05959
1,20	0,38493	0,19419	1,58	0,44295	0,11450	1,96	0,47500	0,05844
1,21	0,38686	0,19186	1,59	0,44408	0,11270	1,97	0,47558	0,05730
1,22	0,38877	0,18954	1,60	0,44520	0,11092	1,98	0,47615	0,05618
1,23	0,39065	0,18724	1,61	0,44630	0,10915	1,99	0,47670	0,05508
1,24	0,39251	0,18494	1,62	0,44738	0,10741	2,00	0,47725	0,05399
1,25	0,39435	0,18265	1,63	0,44845	0,10567	2,01	0,47778	0,05292
1,26	0,39617	0,18037	1,64	0,44950	0,10396	2,02	0,47831	0,05186
1,27	0,39796	0,17810	1,65	0,45053	0,10226	2,03	0,47882	0,05082
1,28	0,39973	0,17585	1,66	0,45154	0,10059	2,04	0,47932	0,04980
1,29	0,40147	0,17360	1,67	0,45254	0,09893	2,05	0,47982	0,04879
1,30	0,40320	0,17137	1,68	0,45352	0,09728	2,06	0,48030	0,04780

Закінчення додатка 1

x	$\Phi(x)$	$\varphi(x)$	x	$\Phi(x)$	$\varphi(x)$	x	$\Phi(x)$	$\varphi(x)$
2,07	0,48077	0,04682	2,36	0,49086	0,02463	2,65	0,49598	0,01191
2,08	0,48124	0,04586	2,37	0,49111	0,02406	2,66	0,49609	0,01160
2,09	0,48169	0,04491	2,38	0,49134	0,02349	2,67	0,49621	0,01130
2,10	0,48214	0,04398	2,39	0,49158	0,02294	2,68	0,49632	0,01100
2,11	0,48257	0,04307	2,40	0,49180	0,02239	2,69	0,49643	0,01071
2,12	0,48300	0,04217	2,41	0,49202	0,02186	2,70	0,49653	0,01042
2,13	0,48341	0,04128	2,42	0,49224	0,02134	2,71	0,49664	0,01014
2,14	0,48382	0,04041	2,43	0,49245	0,02083	2,72	0,49674	0,00987
2,15	0,48422	0,03955	2,44	0,49266	0,02033	2,73	0,49683	0,00961
2,16	0,48461	0,03871	2,45	0,49286	0,01984	2,74	0,49693	0,00935
2,17	0,48500	0,03788	2,46	0,49305	0,01936	2,75	0,49702	0,00909
2,18	0,48537	0,03706	2,47	0,49324	0,01888	2,76	0,49711	0,00885
2,19	0,48574	0,03626	2,48	0,49343	0,01842	2,77	0,49720	0,00861
2,20	0,48610	0,03547	2,49	0,49361	0,01797	2,78	0,49728	0,00837
2,21	0,48645	0,03470	2,50	0,49379	0,01753	2,79	0,49736	0,00814
2,22	0,48679	0,03394	2,51	0,49396	0,01709	2,80	0,49744	0,00792
2,23	0,48713	0,03319	2,52	0,49413	0,01667	2,85	0,49781	0,00687
2,24	0,48745	0,03246	2,53	0,49430	0,01625	2,90	0,49813	0,00595
2,25	0,48778	0,03174	2,54	0,49446	0,01585	2,95	0,49841	0,00514
2,26	0,48809	0,03103	2,55	0,49461	0,01545	3,00	0,49865	0,00443
2,27	0,48840	0,03034	2,56	0,49477	0,01506	3,10	0,49903	0,00327
2,28	0,48870	0,02965	2,57	0,49492	0,01468	3,20	0,49931	0,00238
2,29	0,48899	0,02898	2,58	0,49506	0,01431	3,30	0,49952	0,00172
2,30	0,48928	0,02833	2,59	0,49520	0,01394	3,40	0,49966	0,00123
2,31	0,48956	0,02768	2,60	0,49534	0,01358	3,50	0,49977	0,00087
2,32	0,48983	0,02705	2,61	0,49547	0,01323	3,60	0,49984	0,00061
2,33	0,49010	0,02643	2,62	0,49560	0,01289	3,80	0,49993	0,00029
2,34	0,49036	0,02582	2,63	0,49573	0,01256	4,00	0,49997	0,00013
2,35	0,49061	0,02522	2,64	0,49585	0,01223	4,50	0,50000	0,00002

ВКАЗІВКА. При $x > 5$ $\varphi(x) \approx 0$, $\Phi(x) \approx 0{,}5$.

Додаток 2.

Критичні точки критерію Колмогорова.

Рівень значимості α	0,4	0,3	0,2	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001
$\lambda_{кр}$	0,89	0,97	1,07	1,22	1,36	1,48	1,63	1,73	1,95

Додаток 3.

Таблиця значень $t_\gamma = t(\gamma,\ n)$.

γ / n	0,95	0,99	0,999	γ / n	0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,60	8,61	20	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	25	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,720	3,600
9	2,31	3,36	5,04	40	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	80	1,991	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	100	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	∞	1,960	2.579	3,291
19	2,10	2,88	3,92				

Додаток 4.

Таблиця значень $q = q(\gamma,\ n)$.

γ / n	0,95	0,99	0,999	γ / n	0,95	0,99	0,999
5	1,37	2,67	5,64	20	0,370	0,580	0,880
6	1,09	2,01	3,88	25	0,320	0,490	0,730
7	0,92	1,62	2,98	30	0,280	0,430	0,630
8	0,80	1,38	2,42	35	0,260	0,380	0,560
9	0,71	1,20	2,06	40	0,240	0,350	0,500
10	0,65	1,08	1,80	45	0,220	0,320	0,460
11	0,59	0.98	1,60	50	0,210	0,300	0,430
12	0,55	0.90	1,45	60	0,188	0,269	0,380
13	0,52	0,83	1,33	70	0,174	0,245	0,340
14	0,48	0,78	1,23	80	0,161	0,226	0,310
15	0,46	0,73	1,15	90	0,151	0,211	0,290
16	0,44	0,70	1,07	100	0,143	0,198	0,270
17	0,42	0,66	1,01	150	0,115	0,160	0,211
18	0,40	0,63	0,96	200	0,099	0,136	0,185

Додаток 5.

Критичні точки розподілу Пірсона χ^2.

Число ступенів свободи	Рівень значимості					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,925	0,99
1	6,63490	5,02389	3,84146	0,00393	0,00098	0,00016
2	9,21034	7,37776	5,99146	0,10259	0,05064	0,02010
3	11,34487	9,34840	7,81473	0,35185	0,21580	0,11483
4	13,27670	11,14329	9,48773	0,71072	0,48442	0,29711
5	15,08627	12,83250	11,07050	1,14548	0,83121	0,55430
6	16,81189	14,44938	12,59159	1,63538	1,23734	0,87209
7	18,47531	16,01276	14,06714	2,16735	1,68987	1,23904
8	20,09024	17,53455	15,50731	2,73264	2,17973	1,64650
9	21,66599	19,02277	16,91898	3,32511	2,70039	2,08790
10	23,20925	20,48318	18,30704	3,94030	3,24697	2,55821
11	24,72497	21,92005	19,67514	4,57481	3,81575	3,05348
12	26,21697	23,33666	21,02607	5,22603	4,40379	3,57057
13	27,68825	24,73560	22,36203	5,89186	5,00875	4,10692
14	29,14124	26,11895	23,68479	6,57063	5,62873	4,66043
15	30,57791	27,48839	24,99579	7,26094	6,26214	5,22935
16	31,99993	28,84535	26,29623	7,96165	6,90766	5,81221
17	33,40866	30,19101	27,58711	8,67176	7,56419	6,40776
18	34,80531	31,52638	28,86930	9,39046	8,23075	7,01491
19	36,19087	32,85233	30,14353	10,11701	8,90652	7,63273
20	37,56623	34,16961	31,41043	10,85081	9,59078	8,26040
21	38,93217	35,47888	32,67057	11,59131	10,28290	8,89720
22	40,28936	36,78071	33,92444	12,33801	10,98232	9,54249
23	41,63840	38,07563	35,17246	13,09051	11,68855	10,19572
24	42,97982	39,36408	36,41503	13,84843	12,40115	10,85636
25	44,31410	40,64647	37,65248	14,61141	13,11972	11,52398
26	45,64168	41,92317	38,88514	15,37916	13,84390	12,19815
27	46,96294	43,19451	40,11327	16,15140	14,57338	12,87850
28	48,27824	44,46079	41,33714	16,92788	15,30786	13,56471
29	49,58788	45,72229	42,55697	17,70837	16,04707	14,25645
30	50,89218	46,97924	43,77297	18,49266	16,79077	14,95346
40	63,69074	59,34171	55,75848	26,50930	24,43304	22,16426
50	76,15389	71,42020	67,50481	34,76425	32,35736	29,70668
60	88,37942	83,29767	79,08194	43,18796	40,48175	37,48485
90	124,1303	118,1388	113,1425	69,12590	65,64051	61,73768

Список літератури

1. Гмурман В.Є. Керівництво вирішення задач з теорії ймовірностей та математичної статистиці / В.Є. Гмурман. – М.: Вища шк., 1998.
2. Гмурман В.Є. Теорія ймовірності і математична статистика / В.Є. Гмурман. – М.: Вища шк., 1998.
3. Свєшніков А.А. Збірник завдань з теорії ймовірностей, математичної статистики та теорії випадкових функцій / А.А. Свєшніков. – М.: Наука, 1970.
4. Лозінський Н.С. Збірник задач з теорії ймовірностей і математичної статистики : навч. посібник для студентів економічних спеціальностей вузів / Н.С. Лозінський. – М.: Статистика, 1975.
5. Розанов Ю.А. Теорія ймовірностей, математична статистика та випадкові процеси / Ю.А. Розанов. – М.: Наука, 1989.
6. Ширяєв А.Н. Ймовірність / А.Н. Ширяєв. – М.: Наука, 1989

Зміст

Навчальне видання

МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Методичні вказівки і варіанти індивідуальних домашніх робіт
для студентів економічних спеціальностей

Укладачі: КОРНІЛЬ Тетяна Леонівна
ТИМЧЕНКО Ліля Сергіївна
ГОЛОТАЙСТРОВА Галина Олександрівна

Відповідний за випуск проф. Любчик Л.М.
Роботу до видання рекомендував проф. Бреславський Д.В.
В авторській редакції

План 2018р., поз. 359
Підп.до друку 19.11.2018 р. Формат 60x84 1/16. Папір офсетний.
Riso-друк. Гарнітура Таймс. Ум. друк. арк.
Наклад 50 прим. Зам. № Ціна договірна

Видавничий центр НТУ "ХПІ". 61002, Харків, вул. Кирпичова, 2
Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 5478 від 21.08.2017 р.

Друкарня «Мадрид». 61024, Харків, вул. Максиміліанівська, 11