МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

І. В. Сердюк, О. Б. Ахієзер, О. І. Дунаєвська,
А. О. Нікульченко, Н. Є. Коломойська,
А. Ю. Стрельнікова

ПРАКТИКУМ З КУРСУ «АЛГЕБРА І ГЕОМЕТРІЯ» АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Навчально-методичний посібник для студентів
спеціальностей
113 – Прикладна математика та
124 – Системний аналіз

Рекомендовано
редакційно-видавничою
радою університету,
протокол № 3 від 30.10.21 р.

Харків
НТУ «ХПІ»
2022

УДК 512
С 32

Рецензенти

М. В. Сідоров, доктор фізико-математичних наук, професор, Харківський національний університет радіоелектроніки
О. О. Ларін, доктор технічних наук, професор, Харківський національний університет «Харківський політехнічний інститут»

Рекомендовано вченою радою НТУ «ХПІ»
як навчальний посібник для студентів напрямів підготовки
«Прикладна математика» та «Системний аналіз»,
протокол № 03 від 30.10.2020 р.

Сердюк І. В.

С 32 Практикум з курсу «Алгебра і геометрія». Аналітична геометрія : навчальний посібник для студентів напрямів підготовки «Прикладна математика» та «Системний аналіз» / І. В. Сердюк, О. Б. Ахієзер, О. І. Дунаєвська, А. О. Нікульченко, Н. Є. Коломойська, А. Ю. Стрельнікова. — Харків : «НТМТ», 2022. — 160 с.
ISBN 978-617-578-335-1

Розглянуто методи розв’язання й дослідження задач курсу «Алгебра і геометрія» з розділу «Векторна алгебра». Посібник містить достатню кількість теоретичного матеріалу, докладно розв’язано приклади, подано вправи для самостійної роботи.

Призначено для студентів напрямів підготовки «Прикладна математика» та «Системний аналіз», інших технічних спеціальностей.

Бібліогр. 15

УДК 512

ISBN 978-617-578-335-1

ПЕРЕДМОВА

У навчальному посібнику викладено основні методи розв'язання й дослідження задач курсу «Алгебра і геометрія» з розділу «Аналітична геометрія». Мета пропонованого видання — сформувати у студентів практичні навички розв'язування задач, розвинути математичне мислення здобувачів вищої освіти.

Посібник складається з двох частин.

У першій частині подано визначення основних понять, формулювання теорем і формули. Теоретичні відомості проілюстровано численними прикладами розв'язання типових задач із детальними поясненнями. Поєднання мінімально необхідного обсягу теорії з великою кількістю прикладів дозволяє здобувачам вищої освіти ефективно засвоїти матеріал у ході самостійного навчання.

У другій частині посібника запропоновано 25 варіантів письмових індивідуальних розрахунково-графічних завдань, перевірка яких відбувається у формі усного захисту. Під час захисту студент повинен правильно відповісти на всі контрольні запитання, перелік яких подано в посібнику, і вміти пояснювати операції, здійснені в ході виконання РГЗ.

Модуль 2. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

§1. *Площина у просторі*

1.1. Різновиди рівнянь площини у просторі

Означення 1.1.1. Будь-який ненульовий вектор, перпендикулярний площині, називається її нормальним вектором, або нормаллю.

Виведемо рівняння площини у тримірному просторі. Нехай на площині задано точку $M_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$ і вибрано вектор $\vec{n}\left(A, B, C\right)$, перпендикулярний до неї (вектор нормалі). Візьмемо на площині довільну точку $M\left(x, y, z\right)$ (рис. 1.1). Тоді вектор $\overrightarrow{M_0M} = \left(x - x_0,\, y - y_0,\, z - z_0\right)$ перпендикулярний до вектора $\vec{n}\left(A, B, C\right)$. Запишемо аналітично умову перпендикулярності цих векторів:

$$A\left(x - x_0\right) + B\left(y - y_0\right) + C\left(z - z_0\right) = 0. \qquad (1.1)$$

Це рівняння площини, що проходить через задану точку $M_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$ перпендикулярно до заданого вектора $\vec{n}\left(A, B, C\right)$.

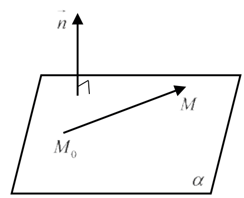

Рисунок 1.1

Якщо позначити сталу величину $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$, то отримане рівняння матиме вигляд

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad \left(A^2 + B^2 + C^2 \neq 0\right). \qquad (1.2)$$

Формула (1.2) задає загальне рівняння площини.

Дослідимо частинні випадки цього рівняння:

1) $D = 0$, тоді рівняння

$$Ax + By + Cz = 0$$

визначає площину, яка проходить через початок координат;

2) C = 0, тоді рівняння

$$Ax + By + D = 0$$

визначає площину, яка паралельна осі Oz (або вісь Oz належить площині, якщо $D = 0$);

3) $B = 0$, тоді рівняння

$$Ax + Cz + D = 0$$

визначає площину, яка паралельна осі Oy (або вісь Oy належить площині, якщо $D = 0$);

4) $A = 0$, тоді рівняння

$$By + Cz + D = 0$$

визначає площину, яка паралельна осі Ox (або вісь Ox належить площині, якщо $D = 0$);

5) $A = B = 0$, тоді рівняння

$$Cz + D = 0,\ z = -\frac{D}{C}$$

визначає площину, яка паралельна координатній площині xOy (якщо $D = 0$, то маємо рівняння $z = 0$, яке задає координатну площину xOy);

6) $A = C = 0$, тоді рівняння

$$By + D = 0,\ y = -\frac{D}{B}$$

визначає площину, яка паралельна координатній площині xOz (якщо $D = 0$, то маємо рівняння $y = 0$, яке задає координатну площину xOz);

7) $B = C = 0$, тоді рівняння

$$Ax + D = 0,\ x = -\frac{D}{A}$$

визначає площину, яка паралельна координатній площині yOz (якщо $D = 0$, то маємо рівняння $x = 0$, яке задає координатну площину yOz).

Якщо $A \neq 0, B \neq 0, C \neq 0, D \neq 0$, то рівняння (1.2) площини можна подати у вигляді:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \qquad (1.3)$$

де a, b, c — довжини напрямлених відрізків, що відтинаються площиною на координатних осях. Формула (1.3) задає рівняння площини у відрізках.

Нехай задано три точки $M_1\ (x_1,\ y_1,\ z_1)$, $M_2\ (x_2, y_2, z_2)$, $M_3\ (x_3, y_3, z_3)$, які не лежать на одній прямій (рис. 1.2). Тоді ці точки задають площину у тривимірному просторі.

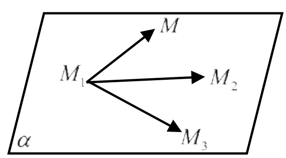

Рисунок 1.2

Якщо $M\ (x, y, z)$ є довільна точка у площині (M_1, M_2, M_3), то вектори $\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}$ за визначенням компланарні. Напишемо умову компланарності цих векторів:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (1.4)$$

Рівняння (1.4) задає рівняння площини, що проходить через три задані точки.

Приклад 1.1.

Як розташовані точки A (3; –2; 0), B (1; 1; 1), C (1; –2; 1) відносно площини $3x+5y-2z+1=0$?

Розв'язання.

Підставляємо координати точок A, B, C у рівняння площини:

$$A(3;-2;0):\quad 3\cdot 3+5\cdot(-2)-2\cdot 0+1=0,$$

$$B(1;1;1):\quad 3\cdot 1+5\cdot 1-2\cdot 1+1>0,$$

$$C(1;-2;1):\quad 3\cdot 1+5\cdot(-2)-2\cdot 1+1<0.$$

Таким чином, точка A належить площині, а точки B і C лежать в різних півпросторах відносно заданої площини.

Приклад 1.2.

Встановити особливості розташування наступних площин:

1) $3x-z=0$;
2) $3x+5y-5=0$;
3) $3x=0$.

Розв'язання.

1). У рівнянні відсутня змінна y і вільний член, таким чином, площина паралельна осі Oy та проходить через початок координат, отже, вона проходить через вісь Oy.

2). Нормальний вектор площини має координати $\vec{n}(3;5;0)$, таким чином, він перпендикулярний до осі Oz, отже, площина паралельна осі Oz.

3). $3x=0 \Rightarrow x=0$. Дане рівняння площини є рівнянням координатної площини yOz.

Приклад 1.3.

Знайти точки перетину площини $2x-y+3z-6=0$ з осями координат.

Розв'язання.

Загальне рівняння площини подамо у вигляді рівняння площини у відрізках:

$$2x-y+3z=6\,\big|:6,$$

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{-6}+\frac{z}{2}=1.$$

Тоді шукані точки мають координати: (3; 0; 0), (0; –6; 0), (0; 0; 2).

Приклад 1.4.

Скласти рівняння площини, що проходить через точку M (3; 2; 4) і відтинає на координатних осях відрізки рівної довжини.

Розв'язання.

Нехай площина перетинає вісь Ox в точці ($\pm a$, 0, 0), тобто відтинає від неї відрізок, що дорівнює $|a|$. Оскільки площина відтинає на інших координатних осях відрізки тієї ж довжини, точки перетину її з осями координат Oy та Oz мають координати (0, $\pm a$, 0) та (0, 0, $\pm a$). Скористаємося рівнянням площини у відрізках і складемо рівняння усіх площин, що відтинають від осей координат відрізки довжиною $|a|$: $\frac{x}{a}+\frac{y}{a}+\frac{z}{a}=1$, $\frac{x}{-a}+\frac{y}{a}+\frac{z}{a}=1$, $\frac{x}{a}+\frac{y}{a}+\frac{z}{-a}=1$, $\frac{x}{a}+\frac{y}{-a}+\frac{z}{a}=1$. Для кожного з цих рівнянь знайдемо відповідне значення a, підставляючи в них координати точки M (3; 2; 4): $\frac{3}{a}+\frac{2}{a}+\frac{4}{a}=1 \Rightarrow a=9$, $\frac{3}{-a}+\frac{2}{a}+\frac{4}{a}=1 \Rightarrow a=3$, $\frac{3}{a}+\frac{2}{a}+\frac{4}{-a}=1 \Rightarrow a=1$, $\frac{3}{a}+\frac{2}{-a}+\frac{4}{a}=1 \Rightarrow a=5$.

Одержимо: $\frac{x}{9}+\frac{y}{9}+\frac{z}{9}=1$, $\frac{x}{-3}+\frac{y}{3}+\frac{z}{3}=1$, $\frac{x}{1}+\frac{y}{1}+\frac{z}{-1}=1$, $\frac{x}{5}+\frac{y}{-5}+\frac{z}{5}=1$.

Приклад 1.5.

Скласти рівняння площини, що проходить через точку M (1; 2; –1) перпендикулярно до вектора $\vec{n}(1;1;2)$.

Розв'язання.

Заданий вектор $\vec{n}(1;1;2)$ є нормаллю даної площини. Таким чином, рівняння площини можна записати у вигляді (1.1):

$$A(x-x_M)+B(y-y_M)+C(z-z_M)=0,$$

$$1\cdot(x-1)+1\cdot(y-2)+2\cdot(z+1)=0,$$

$$x+y+2z-1=0.$$

Приклад 1.6.

Задано точки M_1 (1; 2; –1), M_2 (0; 3; 1). Скласти рівняння площини, що проходить через точку M_1 перпендикулярно до вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$.

Розв'язання.

Знайдемо вектор $\overrightarrow{M_1M_2}(x_2-x_1;\, y_2-y_1;\, z_2-z_1)$: $\overrightarrow{M_1M_2}(-1;1;2)$. За нормальний вектор до площини візьмемо вектор $\vec{n}=\overrightarrow{M_1M_2}$. Скористаємося далі рівнянням площини, заданої точкою M_1 (1; 2; –1) та нормаллю $\vec{n}(-1;1;2)$:

$$A\left(x-x_{M_1}\right)+B\left(y-y_{M_1}\right)+C\left(z-z_{M_1}\right)=0,$$

$$-1\cdot(x-1)+1\cdot(y-2)+2\cdot(z+1)=0,$$

$$x-y-2z-1=0.$$

Приклад 1.7.

Написати рівняння площини, що проходить через точку M_0 (1; 0; –1) паралельно векторам $\vec{a}=5\vec{i}+\vec{k}, \vec{b}=\vec{j}-\vec{k}$.

Розв'язання.

1 спосіб.

Оскільки шукана площина паралельна векторам $\vec{a}$ та $\vec{b}$, то її нормаль $\vec{n}$ є перпендикулярною до обох векторів, а отже, колінеарна їх векторному добутку $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$. Знайдемо вектор $\vec{n}$ за формулою:

$$\vec{n}=\lambda\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\lambda\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix},$$

$$\vec{n}=\lambda\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 5 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{vmatrix}=\lambda(-1;5;5).$$

Оскільки нормаль $\vec{n}$ — довільний ненульовий вектор перпендикулярний до шуканої площині, то візьмемо $\lambda = 1$.

Скористаємося далі рівнянням площини, заданої точкою M_0 (1; 0; –1) та нормаллю $\vec{n}(-1;5;5)$:

$$A\left(x-x_0\right)+B\left(y-y_0\right)+C\left(z-z_0\right)=0,$$

$$-1\cdot(x-1)+5\cdot(y-0)+5\cdot(z-(-1))=0,$$

$$x-5y-5z-6=0.$$

2 спосіб.

Щоб записати рівняння площини розглянемо довільну точку M (x; y; z) цієї ж площини. Тоді вектори $\overrightarrow{M_0M}(x-1;y;z+1)$, $\vec{a}(5;0;1)$, $\vec{b}(0;-1;1)$ компланарні, отже, їх мішаний добуток нульовий, тобто:

$$\left(\overrightarrow{M_0M}, \vec{a}, \vec{b}\right) = 0,$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ 5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (x-1)\cdot(0-1) - y\cdot(-5-0) + (z+1)\cdot(5-0) = 0,$$

або, після очевидних перетворень, шукане рівняння має вигляд

$$x - 5y - 5z - 6 = 0.$$

Приклад 1.8.

Написати рівняння площини, що проходить через точки A (1; –1; 2), B (3; 0; –3) паралельно вектору $\vec{a}(2; 1; -1)$.

Розв'язання.

Якщо M (x; y; z) — довільна точка площини, тоді вектори $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \vec{a}$ компланарні. Знайдемо координати векторів $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{\left(x_M - x_A; y_M - y_A; z_M - z_A\right)},$$

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{\left(x-1; y+1; z-2\right)},$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\left(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A\right)},$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\left(2; 1; -5\right)},$$

й запишемо умову компланарності векторів $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \vec{a}$:

$$\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \vec{a}\right) = 0,$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-2 \\ 2 & 1 & -5 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$4x - 8y - 12 = 0.$$

Шукане рівняння площини має вигляд

$$x - 2y - 3 = 0.$$

Приклад 1.9.

Скласти рівняння площини, що проходить через три дані точки A (1; –3; 2), B (5; 1; –4), C (2; 0; 3).

Розв'язання.

Запишемо рівняння площини, заданої трьома точками:

$$\begin{vmatrix} x-x_A & y-y_A & z-z_A \\ x_B-x_A & y_B-y_A & z_B-z_A \\ x_C-x_A & y_C-y_A & z_C-z_A \end{vmatrix}=0,$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+3 & z-2 \\ 5-1 & 1+3 & -4-2 \\ 2-1 & 0+3 & 3-2 \end{vmatrix}=0,$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+3 & z-2 \\ 4 & 4 & -6 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}=(x-1)\cdot 22-(y+3)\cdot 10+(z-2)\cdot 8=0,$$

або, після очевидних перетворень, маємо

$$11x-5y+4z-34=0.$$

1.2. Відстань від точки до площини

Відстань ρ (M_0, α) від точки M_0 (x_0; y_0; z_0) до площини $\alpha: Ax+By+Cz+D=0$ визначається за формулою:

$$\rho(M_0,\alpha)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \qquad (1.5)$$

Використовуючи формулу (1.5) можливо також знайти відстані між прямою і паралельною до неї площиною, або між двома паралельними площинами. Для цього достатньо взяти довільну точку на прямій або площині (відповідно) і обчислити відстань до паралельної їм площині. Обчислимо деякі відстані.

Приклад 1.10.

Знайти відстань від точки M_0 (1; 2; –3) до площини $4x-3z-1=0$.

Розв'язання.

Для обчислення шуканої відстані скористаємося формулою (1.5):

$$\rho(M_0,\alpha)=\frac{|4\cdot 1+0\cdot 2-3\cdot(-3)-1|}{\sqrt{4^2+0^2+(-3)^2}}=\frac{12}{5}=2,4.$$

Приклад 1.11.

Обчислитивідстаньміжпаралельнимиплощинами $\alpha_1 : 2x - y + 2z + 9 = 0$ и $\alpha_2 : 4x - 2y + 4z - 21 = 0$.

Розв'язання.

Щоб знайти відстань між паралельними площинами, візьмемо на першій площині деяку точку, наприклад, M_0 (0; 9; 0), й за формулою (1.5) знайдемо відстань від цієї точки до другої площини:

$$\rho\left(M_0, \alpha_2\right) = \frac{\left|4 \cdot 0 - 2 \cdot 9 + 4 \cdot 0 - 21\right|}{\sqrt{4^2 + \left(-2\right)^2 + 4^2}} = \left|\frac{-39}{6}\right| = \frac{13}{2} = 6,5.$$

1.3. Кут між двома площинами. Умови перпендикулярності, паралельності та збігу двох площин

Двогранний кут φ між двома площинами, заданими рівняннями $\alpha_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ та $\alpha_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, можна визначити як кут між їх нормалями $\vec{n}_1\left(A_1, B_1, C_1\right)$ та $\vec{n}_2\left(A_2, B_2, C_2\right)$:

$$\cos\varphi = \frac{\left(\vec{n}_1, \vec{n}_2\right)}{\left|\vec{n}_1\right|\left|\vec{n}_2\right|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \tag{1.6}$$

Таким чином, умови перпендикулярності та паралельності двох площин, можливо записати використовуючи відповідні умови для векторів $\vec{n}_1\left(A_1, B_1, C_1\right)$ і $\vec{n}_2\left(A_2, B_2, C_2\right)$.

Умова перпендикулярності двох площин:

$$\alpha_1 \perp \alpha_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 : A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Умова паралельності двох площин:

$$\alpha_1 \parallel \alpha_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 = \lambda\vec{n}_2 : \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2} = \lambda.$$

Дві площини збігаються, якщо виконується рівність

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}.$$

Розглянемо приклади.

Приклад 1.12.

Визначити кут між площинами $\alpha_1 : 3y - z = 0, \alpha_2 : 2y + z = 0$.

Розв'язання.

Нормалями до заданих площин є вектори $\overrightarrow{n_1}\left(3; -1\right), \overrightarrow{n_2}\left(2; 1\right)$. Скориставшись формулою (1.6), одержимо:

$$\cos\varphi = \frac{3\cdot 2 - 1\cdot 1}{\sqrt{3^2 + \left(-1\right)^2}\cdot\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{5}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

звідки $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$.

Приклад 1.13.

Скласти рівняння площини, яка проходить через точку *A* (–2; 7; 3) і паралельна площині $\beta : x - 4y + 5z - 1 = 0$.

Розв'язання.

Оскільки шукана площина α паралельна площині β з нормаллю $\vec{n}_\beta\left(1; -4; 5\right)$, то її нормальний вектор $\vec{n}_\alpha = \lambda\cdot\vec{n}_\beta$. Оскільки $\vec{n}_\alpha$ довільний ненульовий вектор перпендикулярний площині α, то покладемо λ = 1. Отже, $\vec{n}_\alpha = \overrightarrow{\left(1; -4; 5\right)}$. Скористаємося рівнянням площини, заданої точкою *A* і нормальним вектором $\vec{n}_\alpha$:

$$A\left(x - x_A\right) + B\left(y - y_A\right) + C\left(z - z_A\right) = 0,$$

$$1\cdot\left(x - 2\right) - 4\cdot\left(y - \left(-7\right)\right) + 5\cdot\left(z - \left(-3\right)\right) = 0,$$

$$x - 4y + 5z - 15 = 0.$$

Приклад 1.14.

Скласти рівняння площини, що проходить через точку *A* (3; 4; 0) перпендикулярно до площин $\alpha_1 : x + y + 5z - 9 = 0, \alpha_2 : 2x + y + 2z + 1 = 0$.

Розв'язання.

Нехай *M* (*x*; *y*; *z*) — довільна точка шуканої площини. Тоді вектори $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}$ ($\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}$ — нормалі площин α_1, α_2) компланарні. Знайдемо координати цих векторів: $\overrightarrow{AM}\left(x - 3; y - 4; z\right), \overrightarrow{n_1}\left(1; 1; 5\right), \overrightarrow{n_2}\left(2; 1; 2\right)$. Запишемо умову їх компланарності:

$$\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}\right) = \begin{vmatrix} x-3 & y-4 & z \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$-3(x-3)+8(y-4)-1z=0,$$

$$3x-8y+z+23=0.$$

Приклад 1.15.

Скласти рівняння площини, яка проходить через точки M_1 (1; –1; –2), M_2 (3; 1; 1) перпендикулярно до площини $\alpha: x-2y-3z-5=0$.

Розв'язання.

Нормаль $\overrightarrow{n_\beta}$ шуканої площини є перпендикулярною до вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$ і до нормалі $\overrightarrow{n_\alpha}$ даної площини α, а отже, колінеарна їх векторному добутку $\left[\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{n}_\alpha\right]$. Оскільки $\overrightarrow{M_1M_2}(2;2;3), \overrightarrow{n_\alpha}(1;-2;-3)$, то

$$\overrightarrow{n_\beta} = \lambda\left[\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{n_\alpha}\right] = \lambda\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} -6-(-6) \\ -(-6-3) \\ -4-2 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Отже, її рівняння:

$$A_\beta(x-x_1)+B_\beta(y-y_1)+C_\beta(z-z_1)=0,$$

$$0\cdot(x-1)+3\cdot(y-(-1))-2\cdot(z-(-2))=0,$$

$$3y-2z-1=0.$$

§ 2. *Пряма у просторі*

2.1. Різновиди рівнянь прямої у просторі

Будь-яку пряму l у просторі можна розглядати як лінію перетину двох непаралельних площин (рис. 2.1).

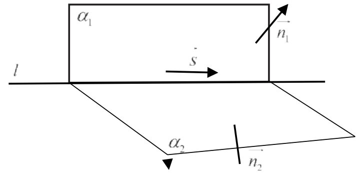

Рисунок 2.1

При цьому, якщо площини α_1, α_2 задані загальними рівняннями (1.2), то система

$$l:\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \qquad (2.1)$$

задає загальні рівняння прямої у просторі.

Означення 2.1.1. Будь-який ненульовий вектор $\vec{s} = \overrightarrow{(m, n, p)}$, що паралельний прямій *l* або лежить на ній, називається напрямним вектором прямої.

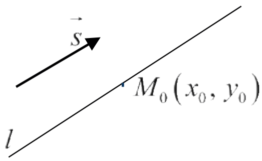

Рисунок 2.2

Якщо відомі (рис. 2.2) точка M_0 (x_0; y_0; z_0) прямої та її напрямний вектор $\vec{s} = \overrightarrow{(m, n, p)}$, то пряма *l* може бути визначена рівняннями

$$l: \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}. \qquad (2.2)$$

Формула (2.2) задає канонічні рівняння прямої.

Пряму також можна задати, вказавши дві точки M_1 (x_1; y_1; z_1), M_2 (x_2; y_2; z_2) на ній. Нехай M (x; y; z) — довільна точка прямої. Тоді вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)}$ буде напрямним і можемо записати умову колінеарності векторів $\overrightarrow{M_1M}$ та $\overrightarrow{M_1M_2}$:

$$l: \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \qquad (2.3)$$

Формула (2.3) задає канонічні рівняння прямої, заданої двома точками.

Якщо покладемо $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} = t$, то система:

$$l:\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt \end{cases} \qquad (2.4)$$

задає параметричні рівняння прямої.

Щоб записати пряму, задану загальними рівняннями (2.1), у канонічному вигляді (2.2) необхідно визначити напрямний вектор прямої та деяку точку на ній. Напрямний вектор $\vec{s}$, очевидно, має бути перпендикулярним до нормалей $\vec{n}_1$ та $\vec{n}_2$ обох площин α_1 і α_2 (рис.2.1), тому можна вважати, що

$$\vec{s} = \lambda\left[\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}\right].$$

Для того, щоб визначити точку M_0 (x_0; y_0; z_0) на прямій, покладемо в систему (2.1) одну із змінних, наприклад z, рівною z_0 і розв'яжемо систему

$$\begin{cases} A_1x + B_1y = -C_1z_0 - D_1, \\ A_2x + B_2y = -C_2z_0 - D_2 \end{cases}$$

відносно змінних x та y. Отримані значення x та y є координатами x_0 та y_0 шуканої точки M_0.

Розглянемо деякі приклади складання рівняння прямої у тримірному просторі.

Приклад 2.1.

Пряма задана загальними рівняннями

$$l: \quad \begin{cases} 2x - 3y - 3z - 9 = 0, \\ x - 2y + z + 3 = 0. \end{cases}$$

Записати її канонічні та параметричні рівняння.

Розв'язання.

Напрямний вектор $\vec{s}$ даної прямої визначимо як векторний добуток нормалей площин:

$$\vec{s} = \lambda\left[\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}\right] = \lambda \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -3-6 \\ -(2+3) \\ -4+3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -9 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Покладемо $\lambda = -1$, тоді $\vec{s} = \overrightarrow{(9;\, 5;\, 1)}$.

Знайдемо ще точку A, що належить прямій l. З цією метою задаємо одну з координат, наприклад, $z = -3$, а дві інші отримаємо з системи рівнянь:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 0; \\ x - 2y = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0; \\ y = 0. \end{cases}$$

Маємо: $A(0;\, 0;\, -3) \in l,\ \vec{s}\,(9;\, 5;\, 1)$. Запишемо канонічні рівняння (2.2) цієї прямої:

$$\frac{x-0}{9} = \frac{y-0}{5} = \frac{z-(-3)}{1},$$

$$\frac{x}{9} = \frac{y}{5} = \frac{z+3}{1}.$$

Кожне відношення в останньому співвідношенні позначимо літерою t:

$$\frac{x}{9} = \frac{y}{5} = \frac{z+3}{1} = t,$$

таким чином, параметричні рівняння (2.4) прямої l мають вигляд:

$$\begin{cases} x = 9t, \\ y = 5t, \\ z = t - 3. \end{cases}$$

Приклад 2.2.

Написати рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки M_1 (1; –1; 3), M_2 (1; 1; –1).

Розв'язання.

Запишемо канонічні рівняння прямої M_1M_2, заданої двома точками:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1},$$

$$\frac{x - 1}{1 - 1} = \frac{y + 1}{1 + 1} = \frac{z - 3}{-1 - 3},$$

$$\frac{x - 1}{0} = \frac{y + 1}{2} = \frac{z - 3}{-4},$$

$$\frac{x - 1}{0} = \frac{y + 1}{1} = \frac{z - 3}{-2}.$$

Приклад 2.3.

Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку M (2; –1; 0) паралельно вектору $\vec{s}(3; -5; 1)$.

Розв'язання.

Запишемо канонічні рівняння (2.2):

$$\frac{x - 2}{3} = \frac{y + 1}{-5} = \frac{z}{1}.$$

Приклад 2.4.

Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку M (2; 0; 1) паралельно прямій $l: \begin{cases} x = t - 1, \\ y = 2t + 2, \\ z = -t. \end{cases}$

Розв'язання.

Напрямний вектор заданої прямої l знайдемо із її параметричних рівнянь: $\vec{s}(1;\ 2;\ -1)$. Шукана пряма паралельна заданій, отже, вектор $\vec{s}$ буде напрямним і для неї.

Маємо: M (2; 0; 1), $\vec{s}\,(1;\,2;\,-1)$. Запишемо канонічні рівняння (2.2) шуканої прямої:

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{-1}.$$

Приклад 2.5.

Задані вершини трикутника A (3; –1; –1), B (1; 2; –7), C (–5; 14; –3). Скласти рівняння бісектриси внутрішнього кута $\angle B$ трикутника ABC.

Розв'язання.

Передусім знайдемо точку L перетину бісектриси BL зі стороною AC (рис. 2.3).

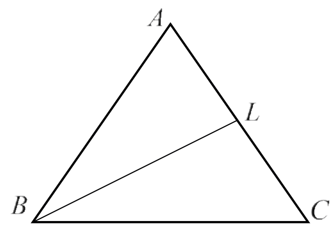

Рисунок 2.3

Бісектриса внутрішнього кута трикутника поділяє протилежну сторону трикутника на частини, пропорційні прилеглим сторонам, тобто $\frac{AL}{LC}=\frac{AB}{BC}$. Знайдемо AB, BC, $\frac{AB}{BC}$:

$$AB=\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2+\left(z_B-z_A\right)^2},$$

$$AB=\sqrt{\left(1-3\right)^2+\left(2+1\right)^2+\left(-7+1\right)^2}=7,$$

$$BC=\sqrt{\left(x_C-x_B\right)^2+\left(y_C-y_B\right)^2+\left(z_C-z_B\right)^2},$$

$$BC=\sqrt{\left(-5-1\right)^2+\left(14-2\right)^2+\left(-3+7\right)^2}=14,$$

$$\frac{AB}{BC}=\frac{7}{14}=\frac{1}{2}.$$

Знайдемо координати точки L за формулами поділення відрізку в даному відношенні:

$$x_L=\frac{x_A+\lambda x_C}{1+\lambda}=\frac{3+\frac{1}{2}\cdot(-5)}{1+\frac{1}{2}}=\frac{1}{3},$$

$$y_L=\frac{y_A+\lambda y_C}{1+\lambda}=\frac{-1+\frac{1}{2}\cdot 14}{1+\frac{1}{2}}=4,$$

$$z_L=\frac{z_A+\lambda z_C}{1+\lambda}=\frac{-1+\frac{1}{2}\cdot(-3)}{1+\frac{1}{2}}=-\frac{5}{3},$$

$$L\left(\frac{1}{3}; 4; \frac{-5}{3}\right).$$

Запишемо канонічні рівняння (2.3) бісектриси, заданої двома точками $B\,(1; 2; -7)$ та $L\left(\frac{1}{3}; 4; \frac{-5}{3}\right)$:

$$\frac{x-x_B}{x_L-x_B}=\frac{y-y_B}{y_L-y_B}=\frac{z-z_B}{z_L-z_B},$$

$$\frac{x-1}{\frac{1}{3}-1}=\frac{y-2}{4-2}=\frac{z+7}{\frac{-5}{3}+7},$$

$$\frac{x-1}{\frac{-2}{3}}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+7}{\frac{16}{3}}.$$

2.2. Взаємне розміщення двох прямих у просторі

Кут між прямими

$$l_1:\ \frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}\ \text{ і }\ l_2:\ \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$$

можна визначити як кут між їх напрямними векторами $\vec{s}_1=\overrightarrow{(m_1, n_1, p_1)}$ та $\vec{s}_2=\overrightarrow{(m_2, n_2, p_2)}$:

$$\angle(l_1, l_2)=\angle(\vec{s}_1, \vec{s}_2)=\alpha,$$

$$\cos\alpha=\frac{(\vec{s}_1, \vec{s}_2)}{|\vec{s}_1||\vec{s}_2|}=\frac{m_1\cdot m_2+n_1\cdot n_2+p_1\cdot p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}. \qquad (2.5)$$

Отже, умови взаємного розміщення прямих у просторі можна визначити за допомогою їх напрямних векторів та векторної алгебри.

Умова перпендикулярності двох прямих:

$$l_1\perp l_2 \Leftrightarrow \vec{s}_1\perp\vec{s}_2 \Leftrightarrow \vec{s}_1\cdot\vec{s}_2=0: m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0. \qquad (2.6)$$

Умова паралельності двох прямих:

$$l_1 \,||\, l_2 \Leftrightarrow \vec{s}_1 \,||\, \vec{s}_2 \Leftrightarrow \left[\overrightarrow{s_1}, \overrightarrow{s_2}\right]=0, \vec{s}_1=\lambda\vec{s}_2: \frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}=\lambda. \qquad (2.7)$$

Наведемо кілька прикладів розв’язання задач.

Приклад 2.6.

Знайти кут між прямими

$$l_1: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{3},\ l_2: \begin{cases} 3x + y - 5z + 1 = 0, \\ 2x + 3y - 8z + 3 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання.

Знайдемо координати напрямного вектора $\overrightarrow{s_2}$ другої прямої:

$$\overrightarrow{s_2} = \lambda\left[\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}\right] = \lambda\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -5 \\ 2 & 3 & -8 \end{vmatrix} = \lambda\left(7; 14; 7\right) = \left(1; 2; 1\right),$$

де $\lambda = \dfrac{1}{7}$.

Враховуючи, що координати напрямного вектора $\overrightarrow{s_1}$ першої прямої відомі, $\overrightarrow{s_1}\left(1; -2; 3\right)$, визначимо косинус кута між прямими за формулою (2.5):

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{s_1} \cdot \overrightarrow{s_2}}{\left|\overrightarrow{s_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{s_2}\right|} = \frac{1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + \left(-2\right)^2 + 3^2}} = \frac{0}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{14}} = 0,$$

звідки,

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow l_1 \perp l_2.$$

Умова належності двох прямих

$$l_1: \quad \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1},$$

$$l_2: \quad \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}$$

одній площині:

$$\left(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{s_1}, \overrightarrow{s_2}\right) = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0, \qquad (2.8)$$

де $M_1\ (x_1; y_1; z_1) \in l_1$, $M_2\ (x_2; y_2; z_2) \in l_2$; $\overrightarrow{s_1}\left(m_1; n_1; p_1\right)$ — напрямний вектор першої прямої; $\overrightarrow{s_2}\left(m_2; n_2; p_2\right)$ — напрямний вектор другої прямої.

Умова перетину двох непаралельних прямих еквівалентна умові компланарності векторів $\overrightarrow{s_1}\left(m_1; n_1; p_1\right)$, $\overrightarrow{s_2}\left(m_2; n_2; p_2\right)$ та $\overrightarrow{M_1M_2}$, де $M_1\ (x_1; y_1; z_1) \in l_1$, $M_2\ (x_2; y_2; z_2) \in l_2$.

Умова (2.8) еквівалентна умові належності двох прямих одній площині.

Розглянемо кілька прикладів розв'язання задач на взаємне розташування прямих у просторі.

Приклад 2.7.

Встановити взаємне розташування прямих:

$$l_1:\begin{cases} x = 4t+2, \\ y=-6t, \\ z=-8t-1 \end{cases} \text{ та } l_2:\begin{cases} x=-6t+7, \\ y=9t+2, \\ z=12t. \end{cases}$$

Розв'язання.

Координати напрямних векторів $\vec{s_1}(4;-6;-8)$, $\vec{s_2}(-6;9;12)$ заданих прямих пропорційні:

$$\frac{4}{-6}=\frac{-6}{9}=\frac{-8}{12}=-\frac{2}{3}.$$

Таким чином, прямі або паралельні, або співпадають. Вони паралельні, якщо ніяка точка першої прямої не належить другої і співпадають, якщо будь-яка точка першої прямої належить другої. Візьмемо яку-небудь точку першої прямої, наприклад M_1 (2; 0; –1), й підставимо її координати в рівняння другої прямої:

$$\begin{cases} 2=-6t+7, \\ 0=9t+2, \\ -1=12t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=\dfrac{5}{6}, \\ t=\dfrac{-2}{9}, \\ t=\dfrac{-1}{12}, \end{cases}$$

звідки M_1 (2; 0; –1) $\notin l_2$. Отже, $l_1 \parallel l_2$.

Приклад 2.8.

Встановити взаємне розташування прямих:

$$l_1:\frac{x-1}{2}=\frac{y-7}{1}=\frac{z-3}{4} \text{ і } l_2:\frac{x-6}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z+2}{1}.$$

Розв'язання.

Координати напрямних векторів $\vec{s_1}(2;1;4)$ та $\vec{s_2}(3;-2;1)$ даних прямих не пропорційні, таким чином, прямі або перетинаються, або мимобіжні. Якщо вектори $\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{s_1}, \vec{s_2}$ компланарні ($\left(\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{s_1}, \vec{s_2}\right)=0$), то прямі l_1 та l_2 перетинаються. Якщо вектори $\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{s_1}, \vec{s_2}$ некомпланарні ($\left(\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{s_1}, \vec{s_2}\right)\neq 0$), то прямі l_1 та l_2 мимобіжні.

За умовою M_1 (1; 7; 3) $\in l_1$, M_2 (6; –1; –2) $\in l_2$. Знайдемо вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$:

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{\left(x_2 - x_1;\, y_2 - y_1;\, z_2 - z_1\right)} = \overrightarrow{\left(6-1;\, -1-7;\, -2-3\right)} = \overrightarrow{\left(5;\, -8;\, -5\right)}.$$

Обчислимо мішаний добуток векторів $\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{s_1}, \vec{s_2}$:

$$\left(\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{s_1}, \vec{s_2}\right) = \begin{vmatrix} 5 & -8 & -5 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 .$$

Таким чином, прямі l_1 та l_2 перетинаються.

Приклад 2.9.

Знайти точку перетину прямих

$$l_1 : \begin{cases} x = 2t + 1, \\ y = t + 7, \\ z = 4t + 3 \end{cases} \text{ та } l_2 : \begin{cases} x = 3t + 6, \\ y = -2t - 1, \\ z = t - 2. \end{cases}$$

Розв'язання.

Нехай M_0 (x_0; y_0; z_0) — точка перетину даних прямих. Нехай при значенні t_1 параметра t її координати будуть задовольнять рівнянням першої прямої, а при значенні t_2 — рівнянням другої прямої, тобто

$$l_1 : \begin{cases} x_0 = 2t_1 + 1, \\ y_0 = t_1 + 7, \\ z_0 = 4t_1 + 3 \end{cases} \text{ та } l_2 : \begin{cases} x_0 = 3t_2 + 6, \\ y_0 = -2t_2 - 1, \\ z_0 = t_2 - 2. \end{cases}$$

Прирівнявши отримані значення x_0, y_0, z_0, отримаємо систему:

$$\begin{cases} 2t_1 + 1 = 3t_2 + 6, \\ t_1 + 7 = -2t_2 - 1, \\ 4t_1 + 3 = t_2 - 2. \end{cases}$$

Якщо ця система має єдиний розв'язок, то дані прямі перетинаються ($l_1 \cap l_2$); якщо вона має безліч розв'язків, то прямі співпадають; якщо вона не має розв'язків, то прямі на мають спільних точок.

Розв'язавши отриману систему, маємо єдиний розв'язок

$$t_1 = -2,\, t_2 = -3.$$

Підставляючи t_1 = –2 у рівняння першої прямої l_1 або t_2 = –3 у рівняння другої прямої l_2, знайдемо координати точки перетину цих прямих:

$$\begin{cases} x_0 = -3, \\ y_0 = 5, \\ z_0 = -5, \end{cases} \to M_0(-3; 5; -5).$$

2.3. Відстань від точки до прямої у просторі

Відстань $\rho(M_1, l)$ від точки M_1 (x_1; y_1; z_1) до прямої l: $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$ обчислюється за формулою

$$\rho(M_1, l) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{M_0M_1}, \vec{s}\right]\right|}{|\vec{s}|}, \tag{2.9}$$

де точка M_0 (x_0; y_0; z_0) $\in l$, $\vec{s}(m, n, p)$ — напрямний вектор прямої l.

Цю ж формулу використовують для знаходження відстані між двома паралельними прямими.

Відстань між двома мимобіжними прямими

$$l_1 : \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1}, l_2 : \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}$$

обчислюються за формулою

$$\rho(l_1, l_2) = \frac{\left|\left(\overrightarrow{M_1M_1}, \overrightarrow{s_1}, \overrightarrow{s_2}\right)\right|}{\left|\left[\overrightarrow{s_1}, \overrightarrow{s_2}\right]\right|}. \tag{2.10}$$

Приклад 2.10.

Знайти відстань між паралельними прямими

$$l_1 : \begin{cases} x = 3t + 2, \\ y = 4t - 1, \\ z = 2t \end{cases} \text{ та } l_2 : \begin{cases} x = 3t + 7, \\ y = 4t + 1, \\ z = 2t + 3. \end{cases}$$

Розв'язання.

Враховуючи, що за умовою M_1 (2; –1; 0) $\in l_1$, M_2 (7; 1; 3) $\in l_2$, знайдемо вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$:

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)} = \overrightarrow{(7-2; 1+1; 3-0)} = \overrightarrow{(5; 2; 3)}.$$

$\vec{s}(3; 4; 2)$ — напрямний вектор обох прямих, оскільки $l_1 \parallel l_2$.

Відстань між паралельними прямими обчислюємо за формулою:

$$\rho(l_1, l_2) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{s}\right]\right|}{|\vec{s}|},$$

$$\left[\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{s}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = (-8; -1; 14),$$

$$\left|\left[\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{s}\right]\right| = \sqrt{(-8)^2 + (-1)^2 + 14^2} = \sqrt{261},$$

$$|\vec{s}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{29},$$

$$\rho(l_1, l_2) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{s}\right]\right|}{|\vec{s}|} = \frac{\sqrt{261}}{\sqrt{29}} = 3.$$

Приклад 2.10.

Знайти відстань між мимобіжними прямими

$$l_1 : \frac{x}{-2} = \frac{y-1}{0} = \frac{z+2}{1} \text{ та } l_2 : \frac{x+1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-1}.$$

Розв'язання.

Враховуючи, що за умовою $M_1\ (0; 1; -2) \in l_1$, $M_2\ (-1; -1; 2) \in l_2$ знайдемо вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$:

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)} = \overrightarrow{(-1-0; -1-1; 2-(-2))} = \overrightarrow{(-1; -2; 4)}.$$

Напрямні вектори заданих прямих: $\vec{s}_1\,(-2; 0; 1)$ та $\vec{s}_2\,(1; 2; -1)$.

Відстань між мимоміжними прямими обчислюємо за формулою:

$$\rho(l_1, l_2) = \frac{\left|\left(\overrightarrow{M_1M_1}, \overrightarrow{s_1}, \overrightarrow{s_2}\right)\right|}{\left|\left[\overrightarrow{s_1}, \overrightarrow{s_2}\right]\right|},$$

$$\left(\overrightarrow{M_1M_1}, \overrightarrow{s_1}, \overrightarrow{s_2}\right) = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -8,$$

$$\left[\overrightarrow{s_1}, \overrightarrow{s_2}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (-2; -1; -4),$$

$$\left|\left[\vec{s_1}, \vec{s_2}\right]\right| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + (-4)^2} = \sqrt{21}.$$

$$\rho(l_1, l_2) = \frac{\left|\left(\overrightarrow{M_1M_1}, \vec{s_1}, \vec{s_2}\right)\right|}{\left|\left[\vec{s_1}, \vec{s_2}\right]\right|} = \frac{|-8|}{\sqrt{21}} = \frac{8\sqrt{21}}{21}.$$

§ 3. *Пряма і площина в просторі*

Нехай пряма задана параметричними рівняннями (2.4) $l:\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt, \end{cases}$

а площина — загальним рівнянням (1.2) $\alpha: Ax + By + Cz + D = 0$.

Означення 3.1. Кутом між прямою і площиною називається гострий кут між цією прямою та її проекцією на дану площину.

Величина φ кута між прямою і площиною обчислюється за формулою:

$$\sin\varphi = \frac{\left|\left(\vec{n}, \vec{s}\right)\right|}{|\vec{n}||\vec{s}|} = \frac{|A\cdot m + B\cdot n + C\cdot p|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\cdot\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}, \qquad (3.1)$$

де $\vec{s}(m; n; p)$ — напрямний вектор прямої l; $\vec{n}(A; B; C)$ — нормальний вектор площини α.

Таким чином, умови взаємного розташування прямої та площини у просторі відповідають взаємному розташуванню напрямного вектора прямої l та нормального вектора площини α.

Умова паралельності прямої і площини:

$$\alpha \parallel l \Rightarrow \vec{n} \perp \vec{s} \Rightarrow \left(\vec{n}, \vec{s}\right) = 0 \Rightarrow Am + Bn + Cp = 0. \qquad (3.2)$$

Умова перпендикулярності прямої і площини:

$$\alpha \perp l \Rightarrow \vec{n} \parallel \vec{s} \Rightarrow \frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}. \qquad (3.3)$$

Розглянемо кілька прикладів розв’язання задач на взаємне розташування прямої і площини.

Приклад 3.1.

Визначити величину кута між прямою $l:\begin{cases} 3x - y - z + 5 = 0, \\ x - y - z - 1 = 0 \end{cases}$ і площиною $\alpha: 4x - 8y + z - 3 = 0$.

Розв'язання.

Спочатку знайдемо напрямний вектор заданої прямої *l*:

$$\vec{s} = \lambda\left[\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \lambda\left(0; 2; -2\right) = \left(0; 1; -1\right),$$

де $\lambda = \dfrac{1}{2}$.

Знаючи напрямний вектор $\vec{s}\left(0; 1; -1\right)$ та нормаль $\vec{n}\left(4; -8; 1\right)$, обчислимо за формулою величину φ кута між даними прямою і площиною:

$$\sin\varphi = \frac{\left|\left(\vec{n}, \vec{s}\right)\right|}{\left|\vec{n}\right|\left|\vec{s}\right|} = \frac{\left|4\cdot 0 + (-8)\cdot 1 + 1\cdot(-1)\right|}{\sqrt{4^2 + (-8)^2 + 1^2}\cdot\sqrt{0^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{\left|-8-1\right|}{\sqrt{81}\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Отже,

$$\varphi = \frac{\pi}{4}.$$

Приклад 3.2.

Із точки *M* (1; 0; –1) провести до площини $\alpha: 2x - y + 5 = 0$ перпендикуляр.

Розв'язання.

Напрямним вектором перпендикуляра буде нормаль заданої площини $\vec{s} = \vec{n}$. Знаючи точку *M* (1; 0; –1) і напрямний вектор $\vec{s}\left(2; -1; 0\right)$ прямої, запишемо її канонічні рівняння (2.2):

$$\frac{x - x_M}{m} = \frac{y - y_M}{n} = \frac{z - z_M}{p},$$

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{0}.$$

Приклад 3.3.

Написати рівняння площини, яка проходить через точку *A* (1; 2; 3) перпендикулярно до прямої $l: \dfrac{x}{-3} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-2}{1}$.

Розв'язання.

Напрямний вектор прямої $\vec{s}\left(-3; 2; 1\right)$ перпендикулярний до площини. Тому за нормальний вектор до площини візьмемо вектор $\vec{n} = \vec{s} = \overline{\left(-3; 2; 1\right)}$. Скористаємося рівнянням (1.1) площини, заданої точкою *A* (1; 2; 3) та нормаллю $\vec{n}\left(-3; 2; 1\right)$

$$A\left(x-x_A\right)+B\left(y-y_A\right)+C\left(z-z_A\right)=0,$$

$$-3\left(x-1\right)+2\left(y-2\right)+1\left(z-3\right)=0,$$

$$-3x+2y+z-4=0.$$

Нехай пряма l перетинає площину α. Щоб знайти точку перетину прямої і площини, слід розв'язати систему

$$\begin{cases} x=x_0+mt, \\ y=y_0+nt, \\ z=z_0+pt, \\ Ax+By+Cz+D=0, \end{cases} \qquad (3.4)$$

де $\begin{cases} x=x_0+mt, \\ y=y_0+nt, \\ z=z_0+pt, \end{cases}$ — параметричні рівняння (2.4) прямої l;

$Ax+By+Cz+D=0$ — рівняння (1.2) площини α.

Розглянемо кілька прикладів.

Приклад 3.4.

Знайти точку перетину прямої $\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z+1}{5}$ з площиною $x+2y-3z-4=0$.

Розв'язання.

Запишемо рівняння (2.4) прямої у параметричній формі та підставимо їх у рівняння площини:

$$\frac{x-2}{4}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+1}{5}=t \Rightarrow \begin{cases} x=4t+2, \\ y=2t+3, \\ z=5t-1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=4t+2, \\ y=2t+3, \\ z=5t-1, \\ x+2y-3z-4=0. \end{cases}$$

Отримаємо рівняння з однією змінною

$$2+4t+2\left(3+2t\right)-3\left(-1+5t\right)-4=0 .$$

Звідки $t=1$. Тоді

$$\begin{cases} x = 4 \cdot 1 + 2 = 6, \\ y = 2 \cdot 1 + 3 = 5, \\ z = 5 \cdot 1 - 1 = 4. \end{cases}$$

Отже, (6; 5; 4) — точка перетину прямої і площини.

Приклад 3.5.

Чи належить пряма $l : \begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = -3 - t, \\ z = -2 + 5t \end{cases}$ площині $\alpha : 4x + 3y - z + 3 = 0$?

Розв'язання.

Для того, щоб пряма лежала у площині необхідно і достатньо виконання двох умов: 1) ортогональність напрямного вектора прямої і нормалі площини; 2) хоча б одна точка прямої належить площині.

Якщо пряма задана параметричними рівняннями (2.4) $l : \begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt, \end{cases}$

де M_0 (x_0; y_0; z_0) $\in$ l, $\vec{s}\left(m;\ n;\ p\right)$ — напрямний вектор прямої l; а площина — загальним рівнянням (1.2) $\alpha : Ax + By + Cz + D = 0$, де $\vec{n}\left(A;\ B;\ C\right)$ — нормальний вектор площини, тоді умова належності прямої площині така:

$$l \in \alpha : \begin{cases} \vec{s} \perp \vec{n}, \left(\vec{s}, \vec{n}\right) = m \cdot A + n \cdot B + p \cdot C = 0; \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \end{cases} \qquad (3.5)$$

Знаючи точку M_0(1; –3; –2), напрямний вектор прямої $\vec{s}\left(2; -1; 5\right)$, нормаль площини $\vec{n}\left(4; 3; -1\right)$ перевіримо виконання цих умов:

$$\left(\vec{s}, \vec{n}\right) = 2 \cdot 4 + \left(-1\right) \cdot 3 + 5 \cdot \left(-1\right) = 0 \Rightarrow \vec{s} \perp \vec{n};$$

$$4 \cdot 1 + 3 \cdot \left(-3\right) - 1 \cdot \left(-2\right) + 3 = 0 \Rightarrow M_0 \in \alpha .$$

Таким чином, $l \in \alpha$.

Приклад 3.6.

Знайти проекцію точки M (2; –1; 3) на пряму $l : \dfrac{x+3}{-3} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-5}{4}$.

Розв'язання.

Проводимо площину α, що проходить через точку M перпендикулярно до даної прямої. Напрямний вектор прямої $\vec{s}\left(-3; 2; 4\right)$ перпендикулярний до площини. Тому за нормальний вектор до площини α візьмемо вектор

$\vec{n} = \vec{s} = \overrightarrow{(-3;\,2;\,4)}$. Скориставшись рівнянням (1.1) площини, заданої точкою M (2; –1; 3) та нормаллю $\vec{n}(-3;\,2;\,4)$, запишемо

$$\alpha:\ A\left(x - x_{\grave{\imath}}\ \right) + B\left(y - y_{\grave{\imath}}\ \right) + C\left(z - z_{\grave{\imath}}\ \right) = 0\,,$$

$$\alpha:\ -3\left(x-2\right) + 2\left(y+1\right) + 4\left(z-3\right) = 0\,,$$

$$\alpha:\ -3x + 2y + 4z - 4 = 0\,.$$

Проекцією точки M на задану пряму l буде точка перетину цієї прямої та площини α.

Запишемо рівняння (2.4) прямої у параметричній формі та підставимо їх у рівняння площини:

$$\frac{x+3}{-3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-5}{4} = t \Rightarrow \begin{cases} x = -3t - 3, \\ y = 2t + 2, \\ z = 4t + 5. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -3t - 3, \\ y = 2t + 2, \\ z = 4t + 5, \\ -3x + 2y + 4z - 4 = 0. \end{cases}$$

Отримаємо рівняння з однією змінною

$$-3\left(-3t - 3\right) + 2\left(2t + 2\right) + 4\left(4t + 5\right) - 4 = 0.$$

Звідки $t = -1$. Тоді

$$\begin{cases} x = -3\cdot\left(-1\right) - 3 = 0, \\ y = 2\cdot\left(-1\right) + 2 = 0, \\ z = 4\cdot\left(-1\right) + 5 = 1. \end{cases}$$

Отже, (0; 0; 1) — проекція точки M на задану пряму l.

Приклад 3.7.

Знайти проекцію прямої $l: \begin{cases} x = 4t - 2; \\ y = -3t + 1; \\ z = t + 4 \end{cases}$ на площину $\alpha:\ x + 3y - 2z + 5 = 0.$

Розв’язання.

Складемо рівняння площини β, що проходить через пряму l перпендикулярно до заданої площини α.

Нормаль $\overrightarrow{n_\beta}$ шуканої площини є перпендикулярною до напрямного вектора $\vec{s}$ даної прямої l і до нормалі $\overrightarrow{n_\alpha}$ даної площини α, а отже, колінеарна їх векторному добутку $\left[\vec{s}, \vec{n}_\alpha\right]$. Оскільки $\vec{s}\left(4; -3; 1\right), \overrightarrow{n_\alpha}\left(1; 3; -2\right)$, то

$$\overrightarrow{n_\beta} = \lambda\left[\vec{s}, \overrightarrow{n_\alpha}\right] = \lambda\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Скористаємося рівнянням (1.1) площини, заданої точкою A (–2; 1; 4) · ($A \in l$) та нормаллю $\vec{n}_\beta\left(1; 3; 5\right)$

$$A\left(x - x_A\right) + B\left(y - y_A\right) + C\left(z - z_A\right) = 0,$$

$$1\left(x + 2\right) + 3\left(y - 1\right) + 5\left(z - 4\right) = 0,$$

$$x + 3y + 5z - 21 = 0.$$

Проекцією даної прямої l на задану площину α буде лінія перетину площин α та β, тому $\begin{cases} x + 3y - 2z + 5 = 0; \\ x + 3y + 5z - 21 = 0 \end{cases}$ — загальні рівняння шуканої прямої.

§ 4. *Метод координат на площині*

Метод координат полягає в установленні відповідності між точками прямої (площини, простору) та їх координатами (дійсними числами) за допомогою системи координат.

Прямокутна система координат xOy на площині задається двома взаємно перпендикулярними прямими, на кожній з яких вибрано додатний напрямок і задано одиничний відрізок. Ці прямі називають осями координат. Одну з них називають віссю абсцис и позначають Ox, іншу — віссю ординат Oy.

Координати точки M записують як: M (x; y); при цьому число x — абсциса точки M, а число y — ордината точки M. Координати точки повністю задають її положення на площині: кожній парі чисел x і y відповідає єдина точка M площини, і — навпаки.

Відстань між двома точками M_1 (x_1; y_1) і M_2 (x_2; y_2) на площині визначається за формулою

$$d = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2}. \qquad (4.1)$$

Координати (x; y) точки M, *яка ділить у заданому відношенні* λ відрізок AB знаходять за формулами:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda},\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \tag{4.2}$$

де $A\ (x_1; y_1)$, $B\ (x_2; y_2)$ $\left(\lambda = \dfrac{AM}{MB}\right)$.

При $\lambda = 1$ (точка M ділить відрізок AB навпіл) отримаємо формули координат середини відрізка:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},\ y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \tag{4.3}$$

Площа трикутника ΔABC обчислюється за формулою:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left\| \begin{matrix} x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix} \right\|, \tag{4.4}$$

де $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B), C(x_C; y_C)$ — вершини трикутника.

Нехай в точках $M_1\ (x_1; y_1)$, $M_2\ (x_2; y_2)$ розміщені маси m_1, m_2. Тоді координати центра мас цієї системи визначаються за формулами:

$$x = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{m_1 + m_2},\ y = \frac{y_1 m_1 + y_2 m_2}{m_1 + m_2}. \tag{4.5}$$

Якщо дана система мас $m_1, m_2, \ldots, m_k$., розміщених у точках $M_1\ (x_1; y_1)$, $M_2\ (x_2; y_2)$, … $M_k\ (x_k; y_k)$,то формули

$$x = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \ldots + x_k m_k}{m_1 + m_2 + \ldots + m_k},\ y = \frac{y_1 m_1 + y_2 m_2 + \ldots + y_k m_k}{m_1 + m_2 + \ldots + m_k} \tag{4.6}$$

задають координати $(x; y)$ центра мас цієї системи.

Приклад 4.1.

Чи лежать на одній прямій точки $A\ (3; –2)$, $B\ (9; 7)$, $C\ (5; 1)$?

Розв'язання.

Обчислимо відстань між точками A, B, C:

$$AB = \sqrt{\left(x_B - x_A\right)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2},$$

$$AB = \sqrt{\left(9-3\right)^2 + \left(7+2\right)^2} = \sqrt{117} = 3\sqrt{13};$$

$$AC = \sqrt{\left(x_C - x_A\right)^2 + \left(y_C - y_A\right)^2},$$

$$AC=\sqrt{(5-3)^2+(1+2)^2}=\sqrt{13};$$

$$CB=\sqrt{(x_B-x_C)^2+(y_B-y_C)^2},$$

$$CB=\sqrt{(9-5)^2+(7-1)^2}=\sqrt{52}=2\sqrt{13}.$$

Оскільки $AC = AB - CB$, , то точки A, B, C лежать на одній прямій.

Приклад 4.2.

Точки A (–2; 3), B (4; –5), C (–3; 1) — послідовні вершини паралелограма $ABCD$. Обчислити площу паралелограма та знайти координати вершини D.

Розв'язання.

Шукана площа паралелограма $ABCD$ у два рази більша від площі трикутника ABC, тобто $S_{\square}=2S_{\vartriangle ABC}$. Отже,

$$S_{\square}=2S_{\vartriangle ABC}=2\cdot\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}x_A & x_B & x_C\\ y_A & y_B & y_C\\ 1 & 1 & 1\end{matrix}\right\|,$$

$$S_{\square}=\left\|\begin{matrix}-2 & 4 & -3\\ 3 & -5 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{matrix}\right\|=\left|10-9+4-15+2-12\right|=20.$$

Оскільки діагоналі паралелограма в точці O перетину діляться навпіл, знайдемо цю точку як середину відрізка AC

$$x_O=\frac{x_A+x_C}{2}=\frac{-2-3}{2}=\frac{-5}{2},$$

$$y_O=\frac{y_A+y_C}{2}=\frac{3+1}{2}=2.$$

З іншої сторони, O — середина відрізка BD:

$$x_O=\frac{x_B+x_D}{2}\Rightarrow x_D=2x_O-x_B,\ x_D=2\cdot\left(\frac{-5}{2}\right)-4=-9;$$

$$y_O=\frac{y_B+y_D}{2}\Rightarrow y_D=2y_O-y_B,\ y_D=2\cdot 2-(-5)=9.$$

Маємо D (9; 9).

Приклад 4.3.

У трикутнику з вершинами A (2; 3), B (6; 3), C (6; –5) визначити довжину бісектриси його внутрішнього кута, проведеної з вершини B (рис. 4.1).

Розв'язання.

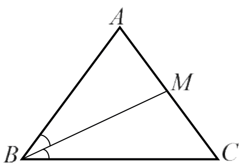

Рисунок 4.1

Відомо, що бісектриса внутрішнього кута трикутника ділить протилежну сторону на частини, пропорційні довжинам прилеглих сторін $\frac{|CM|}{|MA|}=\frac{|BC|}{|BA|}$.

Знайдемо за формулою (4.1) довжини цих сторін BC та BA трикутника ΔABC:

$$|BC|=\sqrt{(6-6)^2+(-5-3)^2}=8, |BA|=\sqrt{(2-6)^2+(3-3)^2}=4.$$

Точка $M(x_M, y_M)$ ділить сторону CA у відношенні $\lambda=\frac{|CM|}{|MA|}=\frac{8}{4}=2.$ Тепер за формулами (4.2) знаходимо координати точки M: $x_M=\frac{6+2\cdot 2}{1+2}=\frac{10}{3}$, $y_M=\frac{-5+2\cdot 3}{1+2}=\frac{1}{3}$, тобто $M\left(\frac{10}{3};\frac{1}{3}\right)$. Обчислимо довжину бісектриси BM: $|BM|=\sqrt{\left(\frac{10}{3}-6\right)^2+\left(\frac{1}{3}-3\right)^2}=\sqrt{\frac{64}{9}+\frac{64}{9}}=\frac{8}{3}\sqrt{2}\cdot$

Приклад 4.4.

Знайти симетричний образ точки $M(x_0, y_0)$ відносно: 1) прямої $x = a$; 2) прямої $y = b$; 3) прямої $y = x$; 4) прямої $x + y = 0$; 5) точки $P(a;b)$.

Розв'язання.

1) Нехай $M'(x';y')$ шукана точка. Зрозуміло, що $y'=y_0$. Оскільки середина відрізка MM' лежить на прямій $x = a$, то $\frac{x'+x_0}{2}=a$, звідки $x'=2a-x_0$. Отже, $M'(2a-x_0;y_0)$ — симетричний образ точки $M(x_0;y_0)$ відносно прямої $x = a$.

2) Аналогічно знаходимо симетричний образ точки $M(x_0, y_0)$ відносно прямої $y=b$: $x'=x_0$; $\frac{y'+y_0}{2}=b \Rightarrow y'=2b-y_0$. Отже, $M'(x_0;2b-y_0)$.

3) Нехай $M(x_0, y_0)$ та $M'(x';y')$ — довільні симетричні точки відносно прямої $y = x$. Проектуємо ці точки на осі координат (рис. 4.2). Оскільки середина відрізка MM' лежить на прямій $y = x$, то за формулами (4.3) $\frac{x'+x_0}{2}=x$ та $\frac{y'+y_0}{2}=y$. Враховуючи, що $y = x$, маємо $x'+x_0=y'+y_0$.

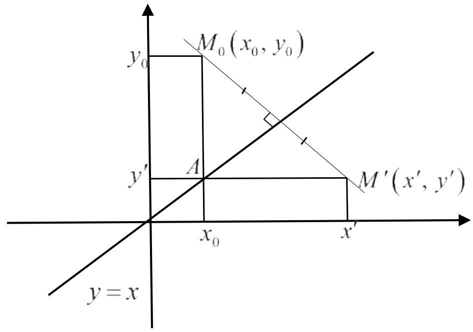

Рисунок 4.2

З іншого боку, $\triangle MAM'\left(\angle A = 90^\circ\right)$ — рівнобедрений прямокутний трикутник (рис. 4.2), тому $|AM| = |AM'|$. Звідки, $x' - x_0 = y_0 - y'$. Таким чином, отримаємо систему

$$\begin{cases} x' + x_0 = y' + y_0; \\ x' - x_0 = y_0 - y'. \end{cases}$$

Цю систему розв'язуємо способом додавання:

$$+\begin{cases} x' + x_0 = y' + y_0; \\ x' - x_0 = y_0 - y' \end{cases}$$

$$2x' = 2y_0,$$

$$x' = y_0 \Rightarrow y' = x_0.$$

Отже, $M'\left(y_0; x_0\right)$.

4) Аналогічно знаходимо симетричний образ точки $M\left(x_0, y_0\right)$ відносно прямої $y = -x$.

Проектуємо точки $M\left(x_0, y_0\right)$ та $M'\left(x'; y'\right)$ на осі координат (рис. 4.3). Оскільки середина відрізка MM' лежить на прямій $y = -x$, то за формулами (4.3) $\dfrac{x' + x_0}{2} = x$ та $\dfrac{y' + y_0}{2} = y$. Враховуючи, що $y = -x$, маємо $x' + x_0 = -y' - y_0$.

З іншого боку, $\triangle MAM'\left(\angle A = 90^\circ\right)$ — рів-

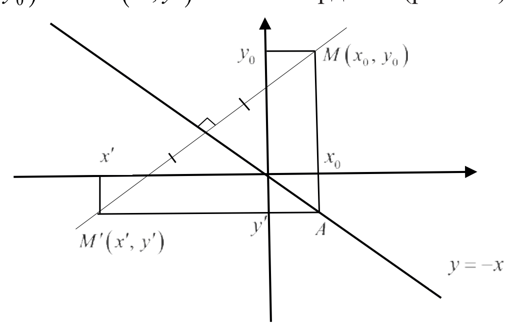

Рисунок 4.3

нобедрений прямокутний трикутник (рис. 4.3), тому $|AM| = |AM'|$. Звідки, $x_0 - x' = y_0 - y'$. Таким чином, отримаємо систему

$$\begin{cases} x' + x_0 = -y' - y_0; \\ x_0 - x' = y_0 - y'. \end{cases}$$

Розв'язуємо систему способом додавання:

$$+\begin{cases} x' + x_0 = -y' - y_0; \\ x_0 - x' = y_0 - y' \end{cases}$$

$$2x_0 = -2y',$$

$$y' = -x_0 \Rightarrow x' = -y_0.$$

Отже, $M'(-y_0; -x_0)$.

5) Оскільки $P(a;b)$ — середина відрізка MM', то за формулами (4.3) $\frac{x' + x_0}{2} = a$, $\frac{y' + y_0}{2} = b$. Звідки, $x' = 2a - x_0$, $y' = 2b - y_0$.

Отже, $M'(2a - x_0; 2b - y_0)$.

§ 5. *Рівняння лінії на площині*

Рівняння лінії є найважливішим поняттям аналітичної геометрії. Нехай на площині задано деяку лінію (криву); тоді координати x і y в кожній точці, що лежить на цій лінії, зв'язані між собою певним способом. Такий зв'язок аналітично записується у вигляді деякого рівняння.

Означення 5.1. *Рівняння лінії* (*кривої*) *на площині* називають рівнянням з двома змінними x і y, яке задовольняють координати довільної точки цієї лінії й не задовольняють координати будь-якої точки, що не лежить на цій лінії.

У загальному випадку рівняння лінії записується $F(x, y) = 0$.

Приклад 5.1.

Запишемо рівняння лінії точок, рівновіддалених від двох точок площини A (–2; 1) і B (4; –1).

Розв'язання.

Нехай $M(x; y)$ — довільна точка шуканої лінії. Тоді, підставляючи координати точок $M(x; y)$, A (–2; 1), B (4; –1) у формулу (4.1) і прирівнявши відстані $|AM|$ і $|BM|$, матимемо

$$\sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2}=\sqrt{(x-4)^2+(y+1)^2}.$$

Піднесемо до квадрата обидві частини рівняння. Після перетворень дістанемо рівняння

$$3x-y-3=0,$$

Що задає лінію точок, рівновіддалених від двох заданих точок площини.

Задача щодо знаходження точок перетину двох ліній, заданих рівняннями $F_1(x,y)=0$ и $F_2(x,y)=0$, зводиться до розв'язання системи двох рівнянь з двома невідомими:

$$\begin{cases} F_1(x,y)=0; \\ F_2(x,y)=0. \end{cases} \qquad (5.1)$$

Лінію на площині можна розглядати як траєкторію шляху, пройденого точкою, яка рухається за яким-небудь законом. Якщо абсциса точки $M(x;y)$ змінюється за законом $x=x(t)$, а ордината — за законом $y=y(t)$, де t — змінна, яку називають параметром, то рівняння лінії записується у вигляді

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \end{cases} \quad t\in[t_1,t_2]. \qquad (5.2)$$

Ці рівняння називають *параметричними рівняннями лінії*.

Приклад 5.2.

Стрижень AB ковзає своїми кінцями по координатних осях. Точка M ділить стрижень на дві частини $AM=a, BM=b$. Знайти параметричні рівняння траєкторії точки M, прийнявши за параметр кут $t=\angle OBA$.

Розв'язання.

Нехай $M(x,y)$ довільна точка площини, що задовольняє умові задачі. Проєктуємо цю точку на осі координат. Нехай точки C і K проєкції точки M на вісь Ox та Oy відповідно (рис. 5.1).

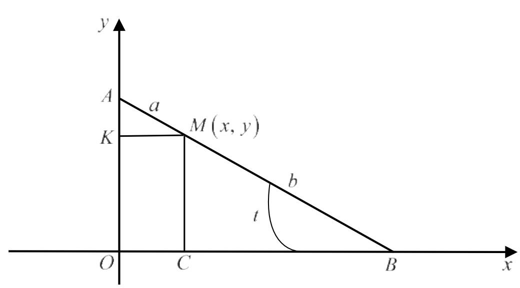

Рисунок 5.1

Розглянемо прямокутний трикутник $\triangle MCB\left(\angle C = 90^\circ\right)$: $CB = b\cos t$, $CM = b\sin t$. Очевидно, розглядаючи $\triangle AOB$ $\left(\angle O = 90^\circ\right)$, маємо $OB = \left(a+b\right)\cos t$. Звідки $OC = OB - CB = \left(a+b\right)\cos t - b\cos t = a\cos t$, $MC = b\sin t$. Довжина відрізка OC дорівнює абсцисі x точки M, а довжина відрізка MC дорівнює ординаті y цієї точки. Таким чином, отримуємо рівняння шуканої лінії

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases} \quad t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

Рівняння траєкторії точки M можна записати у вигляді $F\left(x, y\right) = 0$. Для цього перепишемо знайдені рівняння: $\frac{x}{a} = \cos t$, $\frac{y}{a} = \sin t$. Піднесемо до квадрата отримані рівності й додамо їх, тоді отримаємо:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Лінія, яка задана цим рівнянням, називається еліпсом.

§ 6. *Пряма на площині*

Найпростішою лінією на площині є пряма. Будь-яка пряма на площині xOy визначається лінійним рівнянням першого ступеня з двома невідомими.

Рівняння вигляду

$$Ax + By + C = 0,\ A^2 + B^2 \neq 0 \qquad (6.1)$$

називається *загальним рівнянням прямої*.

Дослідимо частинні випадки цього рівняння

1) $C = 0$, тоді рівняння $Ax + By = 0$ визначає пряму, яка проходить через початок координат – точку O (0; 0);

2) $B = 0$, $A \neq 0$, $C \neq 0$, , тоді рівняння $Ax + C = 0 \Rightarrow x = \frac{-C}{A}$ або $x = a$ $\left(a = -\frac{C}{A}\right)$, визначає пряму, яка паралельна осі Oy та перетинає вісь Ox в точці $x = a$;

3) $B = 0$, $A \neq 0$, $C = 0$, тоді рівняння $Ax = 0 \Rightarrow x = 0$, визначає вісь Oy;

4) $A = 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$, тоді рівняння $By + C = 0 \Rightarrow y = \frac{-C}{B}$ або $y = b\left(b = -\frac{C}{B}\right)$, визначає пряму, яка паралельна осі Ox та перетинає ось Oy в точці $y = b$;

5) $A = 0$, $B \neq 0$, $C = 0$, тоді рівняння $By = 0 \Rightarrow y = 0$, визначає вісь Ox.

Пряма ділить площину на дві півплощини таким чином, що для координат точок однієї півплощини виконується

$$Ax + By + C > 0\,,$$

а для координат точок другої півплощини – нерівність

$$Ax + By + C < 0\,.$$

Приклад 6.1.

Чи перетинає пряма $3x + 2y - 6 = 0$ відрізок *AB*, якщо *A* (1; 1), *B* (2; 2)?

Розв'язання.

Підставимо координати кінців відрізка *AB* в ліву частину рівняння даної прямої:

$$\text{для точки } A(1;1): 3\cdot 1 + 2\cdot 1 - 6 < 0\,;$$

$$\text{для точки } B(2;\,2): 3\cdot 2 + 2\cdot 2 - 6 > 0\,.$$

Точки *A*, *B* лежать в різних півплощинах відносно прямої, отже, пряма перетинає відрізок *AB*.

§ 7. *Різновиди рівнянь прямої на площині*

1. *Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом*

$$y = kx + b\,, \tag{7.1}$$

де k — *кутовий коефіцієнт прямої* (тобто тангенс кута α, який утворює пряма з додатним напрямом осі *Ox*, $k = \mathrm{tg}\alpha$), b – ордината точки перетину прямої з віссю *Oy* (рис. 7.1).

2. *Загальне рівняння прямої*:

$$Ax + By + C = 0\,,\;\; A^2 + B^2 \neq 0\,. \tag{7.2}$$

Означення 7.1. Будь-який ненульовий вектор $\vec{n}$, перпендикулярний до прямої, називається *нормальним вектором* або *нормаллю прямої*.

1. *Рівняння прямої, заданої точкою* $M_0\left(x_0,\; y_0\right)$ *та нормаллю* $\vec{n}\left(A,\,B\right)$:

$$A\left(x - x_0\right) + B\left(y - y_0\right) = 0\,. \tag{7.3}$$

2. *Рівняння прямої у відрізках*:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1\,, \tag{7.4}$$

де $a \neq 0$ и $b \neq 0$ — задані відрізки, які відтинає пряма від осей (з урахуванням знаку) *Ox* і *Oy* відповідно (рис. 7.2).

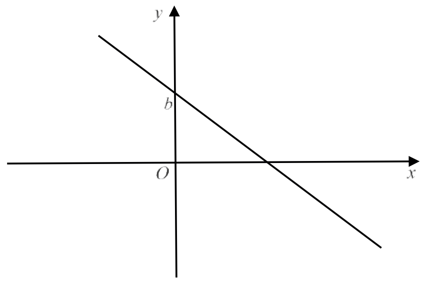

Рисунок 7.2

3. *Рівняння прямої, яка проходить через задану точку* $M_0\left(x_0,\ y_0\right)$ *і має кутовий коефіцієнт k*:

$$y-y_0=k\left(x-x_0\right). \qquad (7.5)$$

4. *Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки* $M_1\left(x_1,\,y_1\right),\,M_2\left(x_2,\,y_2\right)$:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}. \qquad (7.6)$$

Кутовий коефіцієнт прямої, що проходить через дві задані точки, визначається за формулою

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

Означення 7.2. Будь-який ненульовий вектор $\vec{s}$, що паралельний прямій l або лежить на ній, називається *напрямним вектором прямої*.

1. *Канонічне рівняння прямої*:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}, \qquad (7.7)$$

де $M_0\left(x_0,\ y_0\right)\in l,\ \vec{s}\left(m,\,n\right)\parallel l$.

2. *Параметричні рівняння прямої*:

$$\begin{cases} x=x_0+mt, \\ y=y_0+nt. \end{cases} \qquad (7.8)$$

3. *Нормальне рівняння прямої*:

$$x\cos\beta+y\sin\beta-p=0, \qquad (7.9)$$

де p — довжина перпендикуляра, опущеного з початку координат на пряму, β — кут, який цей перпендикуляр утворює з додатнім напрямком осі Ox (рис. 7.3).

Загальне рівняння можна перетворити в нормальне рівняння шляхом множення на $\mu = \dfrac{\pm 1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$; знак залежить від знаку вільного члена C (беруть протилежний).

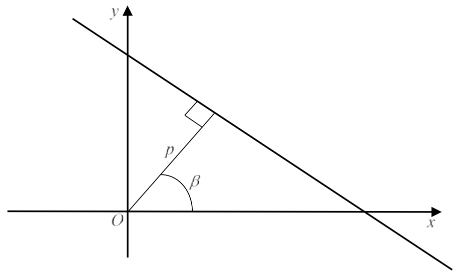

Рисунок 7.3

Приклад 7.1.

Обчислити площу та периметр трикутника, утвореного координатними осями і прямою $3x - 4y - 12 = 0$.

Розв'язання.

Загальне рівняння (7.2) прямої подамо у вигляді рівняння (7.4) прямої у відрізках:

$$3x - 4y - 12 = 0,$$

$$3x - 4y = 12 \,\big|\, :12,$$

$$\frac{3x}{12} - \frac{4y}{12} = 1,$$

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{-3} = 1.$$

Пряма відтинає на координатних осях відрізки довжиною 4 та 3 одиниці відповідно, отже,

$$S_{\vartriangle} = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6 \text{ (кв. од.)}.$$

Для знаходження периметра трикутника знайдемо довжину c його гіпотенузи. Гіпотенуза визначена точками (4; 0), (0; –3). Тоді

$$c = \sqrt{(0-4)^2 + (-3-0)^2} = 5 \text{ (лін. од.)}.$$

$$P_{\vartriangle} = a + b + c = 4 + 3 + 5 = 12 \text{ (лін. од.)}$$

Приклад 7.2.

Знайти кут між прямою $3x-3y+1=0$ і додатним напрямком вісі абсцис.

Розв'язання.

Запишемо загальне рівняння прямої у вигляді рівняння з кутовим коефіцієнтом:

$$3x-3y+1=0 \Rightarrow -3y=-3x-1 \Rightarrow y=x+\frac{1}{3}.$$

Звідки $k = 1$, отже, $\text{tg}\alpha=1 \Rightarrow \alpha=\frac{\pi}{4}$.

Приклад 7.3.

Скласти рівняння прямої, яка проходить через початок координат і точку A (–1; –8).

Розв'язання.

Знаючи дві точки O (0; 0) та A (–1; –8) шуканої прямої, запишемо її канонічне рівняння (7.6) прямої, заданої двома точками:

$$\frac{x-x_O}{x_A-x_O}=\frac{y-y_O}{y_A-y_O},$$

$$\frac{x-0}{-1-0}=\frac{y-0}{-8-0},$$

$$\frac{x}{-1}=\frac{y}{-8} \Rightarrow 8\cdot x=1\cdot y,$$

$$8x-y=0.$$

§ 8. *Кут між двома прямими на площині. Умови перпендикулярності, паралельності та збігу двох прямих на площині*

Якщо прямі l_1, l_2 задані рівняннями з кутовими коефіцієнтами $y=k_1x+b_1$ і $y=k_2x+b_2$, де $k_1=\text{tg}\varphi_1, k_0=\text{tg}\varphi_2$ (рис. 8.1), то кут φ між ними визначається за формулою

$$\text{tg}\varphi=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|. \qquad (8.1)$$

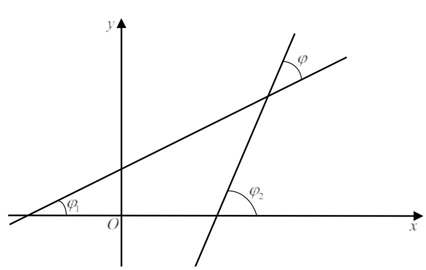

Рисунок 8.1

Якщо прямі l_1, l_2 задані загальними рівняннями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ і $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, то величина φ кута між ними визначається за формулою

$$\mathrm{tg}\varphi = \left|\frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}\right|. \tag{8.2}$$

Умова перпендикулярності двох прямих на площині:

$$l_1 \perp l_2 : \alpha = \frac{\pi}{2}, \mathrm{tg}\alpha \text{ не існує } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k_1 \cdot k_2 = -1 \Rightarrow k_2 = -\frac{1}{k_1},\ A_1A_2 = -B_1B_2\,. \tag{8.3}$$

Умова паралельності двох прямих на площині:

$$l_1 \parallel l_2 :\ \alpha = 0^\circ, \mathrm{tg}\alpha = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k_1 = k_2, A_1B_2 = A_2B_1 \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \tag{8.4}$$

Якщо прямі збігаються:

$$k_1 = k_2,\ b_1 = b_2 \text{ або } \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}\,. \tag{8.5}$$

Приклад 8.1.

Знайти кут між прямими:

1) $l_1 : y = 3x, l_2 : y = -2x + 5$;

2) $l_1 : y = 4x - 7, l_2 : y = \frac{-1}{4}x + 2$;

3) $l_1 : y = 5x - 3, l_2 : y = 5x + 8$.

Розв'язання.

1) $k_1 = 3, k_2 = -2$ и $\mathrm{tg}\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}\right| = \left|\frac{-2-3}{1-6}\right| = 1 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$;

2) $k_1 = 4, k_2 = \frac{-1}{4}$ и $k_1 \cdot k_2 = -1 \Rightarrow l_1 \perp l_2 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$;

3) $k_1 = 5, k_2 = 5$ и $k_1 = k_2 \Rightarrow l_1 \parallel l_2 \Rightarrow \varphi = 0$.

Приклад 8.2.

Знайти кут між гіпотенузою $c : y = -\sqrt{3}x + 1$ і катетом $a : y = \sqrt{3}x - 5$ прямокутного трикутника.

Розв'язання.

Маємо $k_1 = -\sqrt{3}, k_2 = \sqrt{3}$, тоді за формулою (8.1)

$$\mathrm{tg}\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}\right| = \left|\frac{\sqrt{3} + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}\right| = \sqrt{3} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}$$

Приклад 8.3.

Дослідити взаємне розташування заданих прямих. При цьому, якщо прямі перетинаються, знайти їх точку перетину.

1) $l_1: x+y-3=0, l_2: 2x+3y-8=0;$

2) $l_1: y=x+5, l_2: 2x-2y+3=0;$

3) $l_1: y=\frac{1}{2}x+2, l_2: \frac{x}{-4}+\frac{y}{2}=1.$

Розв'язання.

1). Прямі задані загальними рівняннями, тому порівнюємо відношення їх коефіцієнтів: $\frac{A_1}{A_2}=\frac{1}{2}, \frac{B_1}{B_2}=\frac{1}{3}$. Оскільки $\frac{A_1}{A_2}\neq\frac{B_1}{B_2}$, то прямі перетинаються. Розв'язавши систему рівнянь, дістаємо координати точки перетину

$$\begin{cases} x+y-3=0; \\ 2x+3y-8=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=5; \\ y=-2 \end{cases} \Rightarrow M(5;-2).$$

2). Запишемо загальне рівняння другої прямої у вигляді з кутовим коефіцієнтом:

$$l_2: 2x-2y+3=0 \Rightarrow y=x+\frac{3}{2}, k_2=1, b_2=\frac{3}{2}.$$

$$l_1: y=x+5, k_1=1, b_1=5.$$

Оскільки $k_1=k_2$, $b_1\neq b_2$, то $l_1 \parallel l_2$.

3). Запишемо рівняння другої прямої у вигляді з кутовим коефіцієнтом:

$$l_2: \frac{x}{-4}+\frac{y}{2}=1 \Rightarrow y=\frac{1}{2}x+2, k_2=\frac{1}{2}, b_2=2.$$

$$l_1: y=\frac{1}{2}x+2, k_1=\frac{1}{2}, b_1=2.$$

Оскільки $k_1=k_2=\frac{1}{2}$ і $b_1=b_2=2$, то прямі збігаються.

Приклад 8.4.

Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M(-8;1)$ паралельно прямій $l: 2x-y+7=0$.

Розв'язання.

Спосіб 1.

Запишемо загальне рівняння шуканої прямої: $Ax+By+C=0$. Оскільки шукана пряма паралельна даній , то їх коефіцієнти при змінних *x*, *y* пропорційні, наприклад рівні. Тоді рівняння шуканої прямої можна переписати у вигляді $2x-y+C=0$. Підставляючи в це рівняння координати відомої точки M (–8; 1), дістанемо

$$2\cdot(-8)-1\cdot1+C=0\Rightarrow C=17.$$

Отже, шукане рівняння має вигляд $2x-y+17=0$.

Спосіб 2.

Запишемо рівняння прямої, заданої точкою M (–8; 1) та нормаллю $\vec{n}(A,\ B)$: $A(x-x_M)+B(y-y_M)=0$. Оскільки шукана пряма паралельна прямій $l: 2x-y+7=0$, то можна вважати, що $A=2,\ B=-1$. Тоді

$$2(x-x_M)-1\cdot(y-y_M)=0,$$

$$2(x+8)-1\cdot(y-1)=0,$$

$$2x-y+17=0.$$

Спосіб 3.

Запишемо загальне рівняння прямої у вигляді рівняння з кутовим коефіцієнтом:

$$l: 2x-y+7=0\Rightarrow y=2x-7,\ k=2.$$

Оскільки шукана пряма паралельна даній прямій l, то її кутовий коефіцієнт $k=k_l=2$. Запишемо рівняння шуканої прямої, яка проходить через точку M (–8; 1) з кутовим коефіцієнтом $k=2$:

$$y-y_M=k(x-x_M),$$

$$y-1=2(x+8),$$

$$2x-y+17=0.$$

Приклад 8.5.

Встановити, які із перерахованих пар прямих взаємно перпендикулярні:

1) $l_1: x-y=0,\ l_2: x+y=0$;

2) $l_1: x-2y+3=0,\ l_2: y=2x+3$;

3) $l_1: x+2=0,\ l_2: y-2=0$;

4) $l_1: \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{3}=1,\ l_2: y=\dfrac{3}{2}x-1$.

Розв'язання.

1). Прямі задані загальними рівняннями. Перевіримо умову (8.3) перпендикулярності двох прямих:

$$A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0 \to 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 = 0 \Rightarrow l_1 \perp l_2 .$$

2). Запишемо загальне рівняння першої прямої у вигляді рівняння з кутовим коефіцієнтом:

$$l_1 : x - 2y + 3 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}, k_1 = \frac{1}{2} .$$

$$l_2 : y = 2x + 3, k_2 = 2 .$$

Перевіримо умову перпендикулярності (8.3) двох прямих:

$$k_1 \cdot k_2 = -1 \to \frac{1}{2} \cdot 2 = 1 \neq -1 \Rightarrow l_1 \not\perp l_2 .$$

3). Прямі перпендикулярні, оскільки одна з них паралельна осі ординат, інша – осі абсцис:

$$l_1 : x + 2 = 0 \Rightarrow l_1 \parallel Oy;$$

$$l_2 : y - 2 = 0 \Rightarrow l_2 \parallel Ox.$$

4). Запишемо перше рівняння прямої у вигляді рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом:

$$l_1 : \frac{x}{3} + \frac{y}{3} = 1 \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x + 2, k_1 = -\frac{2}{3} .$$

$$l_2 : y = \frac{3}{2}x - 1, k_2 = \frac{3}{2} .$$

Оскільки $k_1 \cdot k_2 = -\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = -1$, то $l_1 \perp l_2$.

Приклад 8.6.

З точки перетину прямих $l_1 : 4x + 3y - 5 = 0, l_2 : 8x - 5y + 23 = 0$ опустимо перпендикуляр до першої прямої. Скласти рівняння цього перпендикуляра.

Розв'язання.

Знайдемо координати точки *M* як точки перетину прямих l_1, l_2. Для цього розв'яжемо систему рівнянь

$$\frac{\begin{cases} 4x + 3y - 5 = 0; \left| \cdot (-2) \right. \\ 8x - 5y + 23 = 0 \end{cases}}{\begin{gathered} -11y + 33 = 0, \\ y = 3 \Rightarrow x = -1. \end{gathered}}$$

Отже, *M* (–1; 3).

Визначимо кутовий коефіцієнт першої прямої:

$$l_1 : 4x + 3y - 5 = 0,\ k_1 = -\frac{A_1}{B_1} = -\frac{4}{3}.$$

Оскільки шукана пряма перпендикулярна до першої прямої l_1, то її кутовий коефіцієнт $k = -\frac{1}{k_1} = \frac{3}{4}$.

Запишемо рівняння шуканої прямої, яка проходить через точку M (–1; 3) з кутовим коефіцієнтом $k = \frac{3}{4}$:

$$y - y_M = k\left(x - x_M\right),$$

$$y - 3 = \frac{3}{4}\left(x + 1\right),$$

$$3x - 4y + 15 = 0.$$

Приклад 8.7.

Знайти точку P, симетричну точці M (–2; 9) відносно прямої $l : 2x - 3y + 18 = 0$.

Розв'язання.

Якщо P — точка, симетрична точці M відносно прямої l, то точки P, M лежать на прямій, перпендикулярній l, і рівновіддалені від цієї прямої l, тобто $OP = OM$, де O — проекція точки M на дану пряму.

Знайдемо рівняння прямої PM такої, що $M \in PM$, $PM \perp l$. Оскільки $PM \perp l \Rightarrow k_{PM} = -\frac{1}{k_l} = -\frac{3}{2}$ ($l : 2x - 3y + 18 = 0,\ k_l = -\frac{A_l}{B_l} = \frac{2}{3}$). Знаючи, що $k_{PM} = -\frac{3}{2}$ та M (–2; 9), запишемо її пряму:

$$y - y_M = k_{PM}\left(x - x_M\right),$$

$$y - 9 = -\frac{3}{2}\left(x + 2\right),$$

$$3x + 2y - 12 = 0.$$

Точка O перетину прямих l, PM і буде проекцією точки M на пряму l. Знайдемо цю точку:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 18 = 0; \,\middle|\cdot 2 \\ 3x + 2y - 12 = 0, \,\middle|\cdot 3 \end{cases}$$

$$13x = 0,$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 6.$$

Отже, O (0; 6).

Точка *O* — середина відрізка *PM*. Для знаходження координат точки $P\left(x_P;\, y_P\right)$, симетричної відносно прямої *l*, скористаємося формулами:

$$\begin{cases} x_O = \dfrac{x_P + x_M}{2}; \\ y_O = \dfrac{y_P + y_M}{2}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_P = 2x_O - x_M; \\ y_P = 2y_O - y_M, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_P = 2\cdot 0 + 2; \\ y_P = 2\cdot 6 - 9, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_P = 2; \\ y_P = 3. \end{cases}$$

Отже, *P* (2; 3).

Приклад 8.8.

Записати рівняння прямих, на яких лежать сторони трикутника, знаючи одну його вершину *A* (2; –7), а також рівняння прямих, на яких лежать висота $3x + y + 11 = 0$ і медіана $x + 2y + 7 = 0$, проведених з різних вершин.

Розв'язання.

Перевіримо, чи проходять висота і медіана через точку *A*. Для цього підставимо координати точки в рівняння прямих:

$$3\cdot 2 + \left(-7\right) + 11 = 10 \neq 0,\ 2 + 2\cdot 2 + 7 = 13 \neq 0 .$$

Отже, висота проведена з точки *B*, а медіана — з точки *C*.

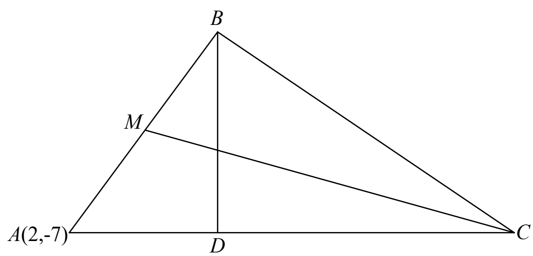

Рисунок 8.2

$BD \perp AC$. Використовуючи умову перпендикулярності двох прямих, запишемо рівняння прямої *AC*:

$$1\left(x - x_A\right) - 3\left(y - y_A\right) = 0 ,$$

$$\left(x - 2\right) - 3\left(y + 7\right) = 0,$$

$$x - 3y - 23 = 0 .$$

CM — медіана, яка проведена до *AB*. Отже, *M* — середина *AB*. За формулами координат середини відрізка

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2},\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

$M\left(\frac{2 + x_B}{2}, \frac{-7 + y_B}{2}\right) \in CM \Rightarrow$ координати точки M задовольняють рівнянню прямої CM: $x_M + 2y_M + 7 = 0,\ \frac{2 + x_B}{2} + 2 \cdot \frac{-7 + y_B}{2} + 7 = 0$.

$B \in BD \Rightarrow$ координати точки B задовольняють рівнянню прямої BD: $3x_B + y_B + 11 = 0$.

Розв'язавши систему рівнянь

$$\begin{cases} 3x_B + y_B + 11 = 0, \\ \frac{1}{2}x_B + y_B + 1 = 0, \end{cases}$$

дістаємо координати точки B (–4; 1).

Рівняння прямої, що проходить через точки A і B,

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A},\ \frac{x - 2}{-4 - 2} = \frac{y + 7}{1 + 7} \Rightarrow x + y + 5 = 0.$$

Знайдемо координати точки C як точки перетину прямих AC, BC. Для цього розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} x - 3y - 23 = 0, \\ x + 2y + 7 = 0. \end{cases}$$

Точка Cмає координати C (5; –6).

Рівняння прямої BC

$$\frac{x - x_B}{x_C - x_B} = \frac{y - y_B}{y_C - y_B},\ \frac{x + 4}{5 + 4} = \frac{y - 1}{-6 - 1} \Rightarrow 7x + 9y + 19 = 0.$$

Отже, $x - 3y - 23 = 0$, $x + y + 5 = 0$, $7x + 9y + 19 = 0$ — шукані рівняння.

Приклад 8.9.

Рівняння однієї із сторін кута є $4x - 3y + 9 = 0$, рівняння його бісектриси $x - 7y + 21 = 0$. Записати рівняння прямої, на якій лежить інша сторона кута.

Розв'язання.

Нехай $\angle CAB$ — даний кут, AL — бісектриса кута. Отже, $\Rightarrow \operatorname{tg}\angle CAL = \operatorname{tg}\angle BAL \Rightarrow \operatorname{tg}\left|\frac{k_{AC} - k_{AL}}{1 + k_{AC}k_{AL}}\right| = \operatorname{tg}\left|\frac{k_{AB} - k_{AL}}{1 + k_{AB}k_{AL}}\right|$ (*).

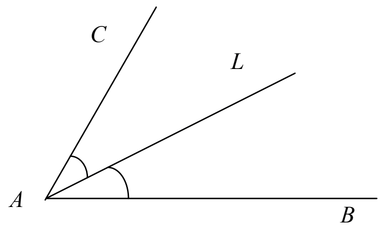

Рисунок 8.3

Знайдемо кутові коефіцієнти прямих AB, AL: $k_{AB} = \frac{4}{3}, k_{AL} = \frac{1}{7}$. Нехай k — поки що незнайдений кутовий коефіцієнт прямої AC. Підставимо дані у співвідношення (*).

$$\left|\frac{k-\frac{1}{7}}{1+k\cdot\frac{1}{7}}\right| = \left|\frac{\frac{4}{3}-\frac{1}{7}}{1+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{7}}\right| \Rightarrow \left|\frac{k-\frac{1}{7}}{1+k\cdot\frac{1}{7}}\right| = 1 \Rightarrow ,$$

$$\angle CAL = \angle BAL = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \angle CAB = \frac{\pi}{2}.$$

Використовуючи умову перпендикулярності: $k_{AB}\cdot k_{AC} = -1$, $k_{AC} = \frac{-1}{k_{AB}} = \frac{-3}{4}$, знайдемо координати точки A як точки перетину прямої AB та бісектриси AL

$$\begin{cases} x-7y+21=0, \\ 4x-3y+9=0, \end{cases} \Rightarrow A(0,3).$$

Запишемо рівняння шуканої прямої, яка проходить через точку A (0; 3) з кутовим коефіцієнтом $k = \frac{-3}{4}$:

$$y - y_A = k_{AC}(x - x_A),$$

$$y-3 = \frac{-3}{4}x,$$

$$3x+4y-12.$$

Приклад 8.10.

Скласти рівняння катетів рівнобічного прямокутного трикутника, якщо задано координати вершини прямого кута C (4; –1) і рівняння гіпотенузи c: $3x-y+5=0$.

Розв'язання.

Оскільки трикутник прямокутний і рівнобічний, то величина його гострих кутів дорівнює $\frac{\pi}{4}$. Кутовий коефіцієнт гіпотенузи $k_c = \frac{-A_c}{B_c} = \frac{-3}{-1} = 3$. Позначимо k_a — кутовий коефіцієнт катета. Тоді

$$\mathrm{tg}\left(\widehat{c,a}\right) = \left|\frac{k_c-k_a}{1+k_c\cdot k_a}\right| \Rightarrow \mathrm{tg}\frac{\pi}{4} = \left|\frac{3-k_a}{1+3\cdot k_a}\right|,$$

$$1=\left|\frac{3-k_a}{1+3\cdot k_a}\right| \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{3-k_a}{1+3\cdot k_a}=1; \\ \dfrac{3-k_a}{1+3\cdot k_a}=-1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} k_a=\dfrac{1}{2}; \\ k_a=-2. \end{array}\right.$$

Оскільки прямі, на яких лежать катети, перпендикулярні, то $k_{AC}\cdot k_{BC}=-1$. Таким чином, $k_{AC}=-2,\quad k_{BC}=\dfrac{1}{2}$. Знаючи кутові коефіцієнти катетів і точку *C* (4; –1), запишемо рівняння *AC*, *BC*:

$$AC:\quad y-y_C=k_{AC}\left(x-x_C\right),$$

$$y+1=-2\left(x-4\right),$$

$$2x+y-7=0;$$

$$BC:\quad y-y_C=k_{BC}\left(x-x_C\right),$$

$$y+1=\frac{1}{2}\left(x-4\right),$$

$$x+2y-6=0.$$

Приклад 8.11.

Написати рівняння серединного перпендикуляра до відрізка *AB*, коли відомі координати його кінців: *A* (–2; 3), *B* (4; –7).

Розв'язання.

Спосіб 1.

Серединою даного відрізка є точка *C*:

$x_C=\dfrac{x_A+x_B}{2}=\dfrac{-2+4}{2}=1,\quad y_C=\dfrac{y_A+y_B}{2}=\dfrac{3-7}{2}=-2.$ Отже, $C(1;-2)$. Шукана пряма перпендикулярна до вектора $\overrightarrow{AB}=\left(x_B-x_A;y_B-y_A\right)=\left(6;-10\right)$.
 Запишемо рівняння прямої, заданої точкою *C* (1; –2) та нормаллю $\overrightarrow{AB}=\left(6;-10\right)$:

$$6\left(x-1\right)-10\left(y+2\right)=0 \text{ або } 3x-5y-13=0.$$

Спосіб 2.

Точка *M* (*x*; *y*) тоді і тільки тоді лежить на серединному перпендикулярі, коли вона рівновіддалена від кінців відрізка *AB*:

$$AM=BM,$$

$$AM^2 = BM^2,$$

$$(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2 = (x_M - x_B)^2 + (y_M - y_B)^2,$$

$$(x+2)^2 + (y-3)^2 = (x-4)^2 + (y+7)^2.$$

Після спрощень дістаємо рівняння

$$3x - 5y - 13 = 0.$$

Приклад 8.12.

Написати рівняння прямої, яка проходить через точку *A* (3; –1) і відтинає на координатних осях відрізки однакової довжини, рахуючи від початку координат.

Розв'язання.

Шукана пряма має бути перпендикулярна до одного з векторів: $\overrightarrow{n_1}(1;1)$ або $\overrightarrow{n_2}(1;-1)$. Запишемо рівняння прямої, яка проходить через точку *A* перпендикулярно до вектора $\vec{n}(A;B)$ $A(x-x_A)+B(y-y_A)=0$:

$$1(x-3)+1(y+1)=0 \text{ або } 1(x-3)-1(y+1)=0,$$

$$x+y-2=0 \text{ або } x-y-4=0.$$

Приклад 8.13.

Написати рівняння прямої *l*, яка проходить через точку *A* (3; –1) і відтинає від одного з координатних кутів трикутник з площею 6,25.

Розв'язання.

Шукане рівняння прямої *l* має вигляд $a(x-3)+b(y+1)=0$, причому $a \neq 0$ і $b \neq 0$. Визначити треба число $\dfrac{a}{b}$. Пряма *l* перетинає координатні осі в точках $\left(\dfrac{3a-b}{a};0\right)$ і $\left(0;\dfrac{3a-b}{b}\right)$. Тому площа трикутника, обмеженого цією прямою і координатними осями, дорівнює

$$\frac{1}{2}\cdot\left|\frac{3a-b}{a}\right|\cdot\left|\frac{3a-b}{b}\right| = \frac{(3a-b)^2}{2|a||b|}.$$

Отже, для визначення відношення $\dfrac{a}{b}$ маємо рівняння $\dfrac{(3a-b)^2}{|a||b|} = \dfrac{25}{2}$, яке рівносильне сукупності двох рівнянь:

$$\left[\begin{aligned} &18a^2 - 37ab + 2b^2 = 0; \\ &18a^2 + 13ab + 2b^2 = 0. \end{aligned}\right.$$

Розв'язавши ці рівняння, знайдемо чотири значення для $\frac{a}{b}$: $2, \frac{1}{18}, -\frac{2}{9}, -\frac{1}{2}$. Цим значенням відповідають прямі:

$$l_1: 2x + y - 5 = 0, \quad l_2: x + 18y + 15 = 0,$$
$$l_3: 2x - 9y - 15 = 0, \quad l_4: x - 2y - 5 = 0.$$

§ 9. *Відстань від точки до прямої*

Якщо задано рівняння прямої $Ax + By + C = 0$ і точка M_0 $(x_0; y_0)$, то відстань від цієї точки до даної прямої обчислюється за формулою

$$\rho(M_0, l) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{9.1}$$

Приклад 9.1.

Знайти відстань від точки P $(-1; 5)$ до прямої $l: 4x + 3y - 5 = 0$.

Розв'язання.

Використовуючи формулу (9.1) для визначення відстані від точки до прямої, одержуємо

$$\rho(P, l) = \frac{|Ax_P + By_P + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

$$\rho(P, l) = \frac{|4x_P + 3y_P - 5|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{|4 \cdot (-1) + 3 \cdot 5 - 5|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{6}{5} = 1,2.$$

Приклад 9.2.

Знайти відстань між паралельними прямими $l_1: 3x + 4y - 18 = 0$, $l_2: 3x + 4y + 43 = 0$.

Розв'язання.

Щоб знайти відстань між паралельними прямими, візьмемо на одній із прямих деяку точку, наприклад, $(x_0; y_0) = (6; 0)$, і знайдемо відстань від неї до іншої прямої. Використовуючи формулу (9.1) для визначення відстані від точки до прямої, одержуємо:

$$\rho(M_0, l_2) = \frac{|3x_0 + 4y_0 + 43|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|3 \cdot 6 + 4 \cdot 0 + 43|}{\sqrt{25}} = \frac{61}{5} = 12,2.$$

§ 10. *Криві другого порядку*

10.1. Коло

Означення 10.1.1. Колом називають геометричне місце точок площини, рівновіддалених від заданої точки — центра кола — на задану відстань — радіус кола.

Загальне рівняння другого порядку з двома змінними

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (10.1.1)$$

в прямокутній системі координат описує коло, якщо $A = C \neq 0$ и $B = 0$:

$$Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0\,. \qquad (10.1.2)$$

Якщо в даному рівнянні поділити обидві його частини на $A \neq 0$ і виділити повні квадрати, то отримаємо:

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2 \qquad (10.1.3)$$

— коло з центром у точці (α; β) і радіусом R (якщо центр кола знаходиться в початку координат, то рівняння має вигляд: $x^2 + y^2 = R^2$);

$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = 0$ — вироджене коло (точку M (α; β));

$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = -R^2$ — уявне коло (порожня множина точок — немає геометричного образу).

Приклад 10.1.

Записати рівняння кола, що проходить через точки A (3; 1), B (–2; 6), C (–5; –3).

Розв'язання.

Нехай O (α; β) — центр шуканого кола. Тоді $OA = OB = OC$ як радіуси одного кола. Маємо

$$OA = \sqrt{(\alpha-3)^2 + (\beta-1)^2},$$

$$OB = \sqrt{(\alpha+2)^2 + (\beta-6)^2},$$

$$OC = \sqrt{(\alpha+5)^2 + (\beta+3)^2}.$$

Складемо систему рівнянь відносно невідомих α, β і розв'яжемо її:

$$\begin{cases}\sqrt{(\alpha-3)^2+(\beta-1)^2}=\sqrt{(\alpha+2)^2+(\beta-6)^2},\\ \sqrt{(\alpha-3)^2+(\beta-1)^2}=\sqrt{(\alpha+5)^2+(\beta+3)^2},\end{cases}$$

$$\begin{cases}\alpha-\beta+3=0,\\ 2\alpha+\beta+3=0.\end{cases}$$

Розв’язок системи $\alpha=-2,\ \beta=1$. Отже, точка O (–2; 1) є центром кола. Знаходимо радіус кола:

$$R=\sqrt{(-2-3)^2+(1-1)^2}=5$$

Отже, шукане рівняння кола має вигляд

$$(x+2)^2+(y-1)^2=25\,.$$

Приклад 10.2.

Записати рівняння кола, діаметр якого відрізок AB, де A (2; 3), B (–6; 3).

Розв’язання.

Центр кола O (α; β) — середина діаметра AB:

$$\alpha=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{2-6}{2}=-2\,,$$

$$\beta=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{-3+3}{2}=0\,.$$

Знаходимо радіус кола:

$$R=OA=\sqrt{(x_A-x_O)^2+(y_A-y_O)^2}=\sqrt{(-2-2)^2+(-3-0)^2}=5\,.$$

Тоді $(x+2)^2+y^2=25$ шукане рівняння кола.

Приклад 10.3.

Звести рівняння кола $x^2+y^2+2x-10y+1=0$ до канонічного вигляду.

Розв’язання.

Групуємо в лівій частині рівняння члени зі змінними x, y і виділяємо повні квадрати із цими змінними:

$$x^2+y^2+2x-10y+1=0\,,$$

$$\left(\underbrace{x^2+2x+1}-1\right)+\left(\underbrace{y^2-10y+25}-25\right)+1=0\,,$$

$$(x+1)^2-1+(y-5)^2-25+1=0\,,$$

$$\left(x+1\right)^2+\left(y-5\right)^2=25.$$

Це рівняння визначає коло з центром у точці O (–1; 5) і радіусом R = 5.

Приклад 10.4.

Яка лінія визначається рівнянням $x^2+y^2+10x-4y+29=0$?

Розв'язання.

Перетворимо задане рівняння так:

$$x^2+y^2+10x-4y+29=0,$$

$$\left(\underbrace{x^2+10x+5^2}_{}-25\right)+\left(\underbrace{y^2-4y+2^2}_{}-4\right)+29=0,$$

$$\left(x+5\right)^2-25+\left(y-2\right)^2-4+29=0,$$

$$\left(x+5\right)^2+\left(y-2\right)^2=0.$$

Таким чином, рівняння визначає вироджене коло, тобто точку (–5; 2).

Приклад 10.5.

Знайти відстань від точки M (9; 1) до кола $\left(x-3\right)^2+\left(y+7\right)^2=4$.

Розв'язання.

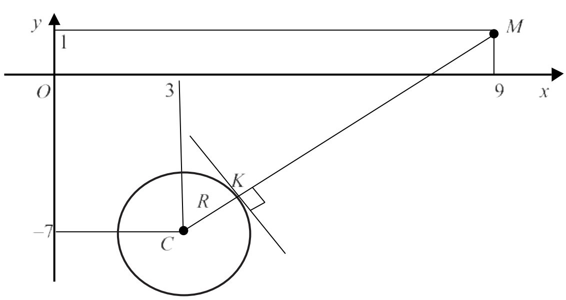

Рисунок 10.1

Задане рівняння $\left(x-3\right)^2+\left(y+7\right)^2=4$ визначає коло з центром в точці C (3; –7) і радіусом R = 2. Через точки M і C проводимо пряму, вона перетинає коло у точці K (рис. 10.1). Відстань від точки до кола – це довжина перпендикуляра, опущеного з точки M до дотичної, проведеної через точку K.

Можна показати, що шукана відстань від точки M до кола буде дорівнюватиме $MK = MC - R$. Спочатку знайдемо відстань від точки M до центра даного кола за формулою (4.1):

$$MC=\sqrt{\left(x_C-x_M\right)^2+\left(y_C-y_M\right)^2}$$

$$MC = \sqrt{(3-9)^2 + (-7-1)^2} = 10 .$$

Звідки, $MC = 10 - 2 = 8$ лін. од.

Приклад 10.6.

Знайти відстань між прямою $l:\ 3x + 4y - 31 = 0$ і колом $(x-3)^2 + (y+7)^2 = 9$.

Розв'язання.

Задане рівняння $(x-3)^2 + (y+7)^2 = 9$ визначає коло з центром в точці C (3; –7) і радіусом R = 3.

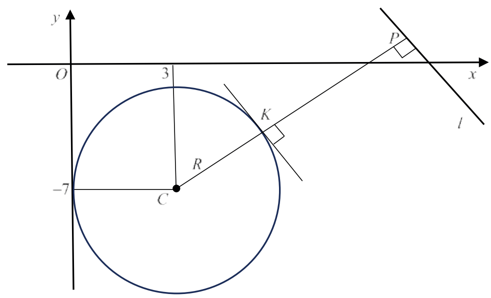

Рисунок 10.2

Проведемо перпендикуляр з центру кола точки C на пряму l, він перетинає коло у точці K (рис. 10.2). Відстань між прямою і колом — це відстань між прямою і дотичною до кола, проведеною паралельно заданій прямій в точці K. Спочатку обчислимо відстань від центра кола точки C (3; –7) до прямої $l:\ 3x + 4y - 31 = 0$ за формулою (9.1):

$$\rho\,(C, l) = \frac{|3 \cdot 3 + 4 \cdot (-7) - 31|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|-50|}{5} = 10.$$

Шукана відстань між прямою l і заданим колом буде дорівнюватиме

$$PK = \rho\,(C, l) - R.$$

Звідки, PK = 10 – 3 = 7 лін. од.

10.2. Еліпс

Означення 10.2.1. *Еліпсом* називають геометричне місце точок площини, сума відстаней від яких до заданих точок (фокусів) є величиною сталою й більшою за відстань між фокусами.

Канонічне рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі Ox має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ 0<b\le a\ . \qquad (10.2.1)$$

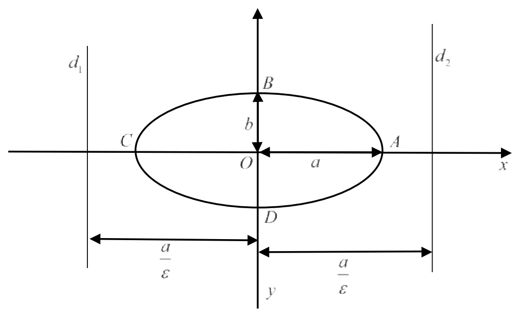

Рисунок 10.3

Параметри a і b є довжинами півосей еліпса, які розташовані на осях координат (рис. 10.3). *Вершинами еліпса* є точки A (a; 0), B (b; 0), C (a; 0), D (b; 0). Відрізки $AC = 2a$, $BD = 2b$ утворюють відповідно велику й малу *сі еліпса*. Вони зв'язані між собою рівністю

$$c^2=a^2-b^2 \quad (a>b)\,. \qquad (10.2.2)$$

Фокусами цього еліпса є точки $F_1(-c,0), F_2(c,0)$. $F_1F_2=2c$ — відстань між фокусами. $MF_1=r_1, MF_2=r_2$ — *фокальні радіуси точки M* еліпса. За означенням еліпса: $r_1+r_2=2a$.

Означення 10.2.2. *Ексцентриситетом еліпса* називають відношення відстані між фокусами до великої осі:

$$\varepsilon=\frac{c}{a} \quad (a>b). \qquad (10.2.3)$$

Оскільки за означенням еліпса $a > c$, то $0\le\varepsilon<1$. Ураховуючи співвідношення між параметрами $c^2=a^2-b^2$, маємо

$$\varepsilon^2=\frac{\tilde{n}^2}{a^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2}=1-\left(\frac{b}{a}\right)^2 \Rightarrow \frac{b}{a}=\sqrt{1-\varepsilon^2}\ .$$

З останнього рівняння випливає геометрична інтерпретація ексцентриситету. При малому ε числа a і b майже рівні, тому еліпс близький до кола, причому для кола ε = 0. Якщо ε близький до 1, то число b дуже мале порівняно з числом a і еліпс сильно «витягнутий» уздовж великої осі. Таким чином*, ексцентриситет еліпса характеризує його форму*.

Означення 10.2.3. Директрисами еліпса називаються прямі, перпендикулярні великій осі та симетрично розташовані на відстані $\frac{a}{\varepsilon}$ від центру кривої (випадок кола, коли ε = 0, не розглядається). Рівняння директрис еліпса мають вигляд:

$$d_1 : x = -\frac{a}{\varepsilon}, \; d_2 : x = \frac{a}{\varepsilon}. \tag{10.2.4}$$

Для еліпса $\varepsilon < 1 \Rightarrow \frac{a}{\varepsilon} > a$, тобто директриси розташовані зовні його (рис. 10.3).

Приклад 10.5.

Звести рівняння еліпса $25x^2 + 169y^2 = 4225$ до канонічного вигляду. Знайти координати центра, півосі, координати фокусів, ексцентриситет, рівняння директрис і відстань між ними.

Розв'язання.

Розділивши обидві частини даного рівняння на 4225, одержимо канонічне рівняння еліпса

$$\frac{x^2}{13^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1.$$

Звідки знаходимо O (0; 0) — центр еліпса; a = 13, b = 5. Оскільки $c^2 = a^2 - b^2$, то $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{169 - 25} = 12$. Тоді координати фокусів: $F_1(-12; 0)$, $F_2(12; 0)$. За формулою знаходимо ексцентриситет $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{12}{13}$. Запишемо рівняння директрис: $x = \pm\frac{a}{\varepsilon} = \pm\frac{169}{12}$. Відстань між ними $d = 2 \cdot \frac{a}{\varepsilon} = \frac{169}{6}$.

Приклад 10.6.

Звести рівняння $4x^2 + 3y^2 - 8x + 12y - 32 = 0$ до канонічного вигляду. Визначити координати центра, півосі, координати фокусів, ексцентриситет, рівняння директрис. Побудувати графік кривої.

Розв'язання.

Оскільки $A \cdot B = 4 \cdot 3 > 0$, то рівняння описує криву еліптичного типу.

Групуємо в лівій частині рівняння члени зі змінними x, y і виділяємо повні квадрати із цими змінними:

$$\left(4x^2 - 8x\right) + \left(3y^2 + 12y\right) - 32 = 0,$$

$$4\left(\underbrace{x^2-2x+1}-1\right)+3\left(\underbrace{y^2+4y+4}-4\right)-32=0,$$

$$4(x-1)^2-4+3(y+2)^2-12-32=0,$$

$$4(x-1)^2+3(y+2)^2=48,$$

$$\frac{(x-1)^2}{12}+\frac{(y+2)^2}{16}=1\,.$$

Точка $O(1;\ -2)$ — центр еліпса. $a=2\sqrt{3}$ — мала півось, $b=4$ — велика півось еліпса. Оскільки $a<b$, то фокуси лежать на вертикальній осі симетрії. Тоді $c=\sqrt{b^2-a^2}=\sqrt{16-12}=\sqrt{4}=2$, а ексцентриситет (відношення відстані між фокусами до великої осі) $\varepsilon=\dfrac{c}{b}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$. Координати фокусів: $F_1(x_O;\ y_O-c)\to F_1(1;\ 0); F_2(x_O;\ y_O+c)\to F_2(1;\ -4)$. Рівняння директрис: $d_1, d_2: y-y_O=\mp\dfrac{b}{\varepsilon}$; для даного еліпса: $y+2=\mp\dfrac{4}{1/2}=\mp 8\Rightarrow d_1: y=-10,\ d_2: y=6.$

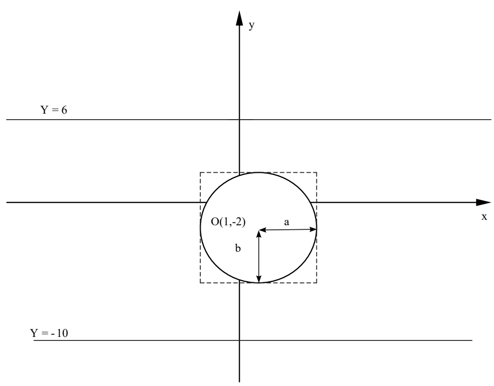

Рисунок 10.4

10.3. Гіпербола

Означення 10.3.1. Гіперболою називається геометричне місце точок площини, для яких модуль різниці відстаней до двох заданих точок (фокусів) є величиною сталою й меншою, ніж відстань між фокусами.

Канонічне рівняння гіперболи, фокуси якого лежать на осі Ox має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\,. \qquad (10.3.1)$$

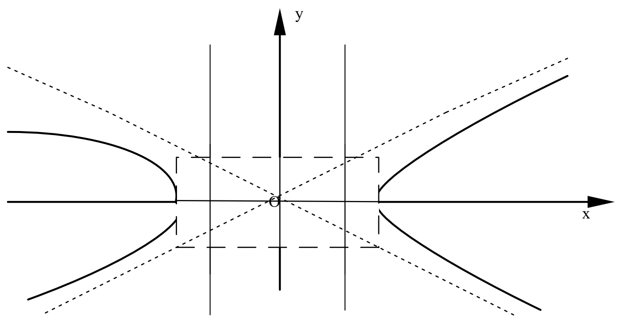

Рисунок 10.5

Параметри a і b є довжинами півосей еліпса, які розташовані на осях координат (рис. 10.5). Вершинами гіперболи є точки A (a; 0), C (–a; 0). Відрізок $AC = 2a$ утворює дійсну вісь гіперболи, а відрізок $BD = 2b$ — її уявну вісь. Вони зв'язані між собою рівністю: $c^2 = a^2 + b^2$.

Фокусами цього еліпса є точки $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$. $F_1F_2 = 2c$ — відстань між фокусами. $MF_1 = r_1$, $MF_2 = r_2$ — фокальні радіуси точки M гіперболи. За означенням гіперболи: $|r_1 - r_2| = 2a \quad (a > 0)$.

Означення 10.3.2. *Ексцентриситетом гіперболи* називають відношення відстані між фокусами до дійсної вісі:

$$\varepsilon = \frac{c}{a}. \tag{10.3.2}$$

Для гіперболи $\varepsilon \in (1, +\infty)$.

Означення 10.3.3. Прямі $d_1: \ x = -\frac{a}{\varepsilon}$ та $d_2: \ x = \frac{a}{\varepsilon}$, що перпендикулярні дійсній осі, називаються директрисами гіперболи. Для гіперболи $\varepsilon > 1 \Rightarrow \frac{a}{\varepsilon} < a$, тобто директриси розміщені між гілками гіперболи.
Асимптоти гіперболи описуються рівняннями: $y = \pm\frac{b}{a}x$.

Гіпербола, яка задається рівнянням

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{10.3.3}$$

має за дійсну вісь відрізок $2b$, а за уявну — $2a$.

Фокуси гіперболи лежать на осі $Oy \left(F_1(0, -c), F_2(0, c)\right)$.

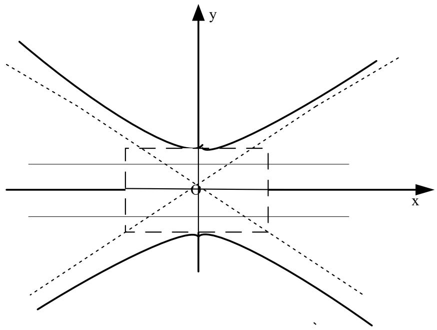

Рисунок 10.6

Ексцентриситет цієї гіперболи дорівнює

$$\varepsilon = \frac{c}{b}, \tag{10.3.4}$$

асимптоти описуються рівняннями

$$y = \pm\frac{b}{a}x, \tag{10.3.5}$$

а директриси:

$$d_1 : \ y = -\frac{b}{\varepsilon}; \quad d_2 : \ y = \frac{b}{\varepsilon}. \tag{10.3.6}$$

Означення 10.3.4. Дві гіперболи, що описуються рівняннями $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ та $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, називаються *взаємно спряженими.*

Означення 10.3.5. Якщо дійсна та уявна вісі гіперболи рівні, то гіперболу називають *рівносторонньою*.

Приклад 10.7.

Задано рівняння гіперболи $7x^2 - 9y^2 = 63$. Знайти координати центра, півосі, координати фокусів, ексцентриситет, рівняння директрис та асимптот.

Розв'язання.

Розділивши обидві частини даного рівняння на 63, одержимо канонічне рівняння (10.3.1) гіперболи:

$$\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{\left(\sqrt{7}\right)^2} = 1.$$

Звідки знаходимо $O(0;\ 0)$ — центр гіперболи; $a = 3$ — дійсна півось, $b = \sqrt{7}$ — уявна півось. Оскільки $c^2 = a^2 + b^2$, то $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9+7} = 4$.

Тоді координати фокусів: $F_1(-4;0)$, $F_2(4;0)$. За формулою (10.3.2) знаходимо ексцентриситет $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{4}{3}$. Запишемо рівняння директрис: $x=\pm\frac{a}{\varepsilon}=\pm\frac{9}{4}=\pm 2,25$. Рівняння асимптот: $y=\pm\frac{b}{a}x=\pm\frac{\sqrt{7}}{3}x$.

Приклад 10.8.

Написати рівняння гіперболи, фокуси якої розташовані на осі *Oy* симетрично відносно початку координат, якщо відстань між директрисами рівна 8, а ексцентриситет гіперболи — $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Розв'язання.

Оскільки фокуси гіперболи лежать на осі *Oy*, то рівняння директрис $y=\pm\frac{b}{\varepsilon}$ та ексцентриситет $\varepsilon=\frac{c}{b}$. Відстань між директрисами $d=2\cdot\frac{b}{\varepsilon}=8$. Отже, $b=4\varepsilon=2\sqrt{5}$. Звідки $\varepsilon=\frac{c}{b}=\sqrt{1+\frac{a^2}{b^2}}\Rightarrow a^2=b^2\cdot\left(\varepsilon^2-1\right)=$ $=\left(2\sqrt{5}\right)^2\cdot\left(\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2-1\right)=5$. Тоді рівняння гіперболи (10.3.3) має вигляд $-\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{20}=1$.

Приклад 10.9.

Знайти відстань від фокусів гіперболи $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ до її асимптот і кут між асимптотами.

Розв'язання.

Виходячи з канонічного рівняння (10.3.1) гіперболи, знайдемо довжини її півосей: $a = 4$, $b = 3$. Відомо, що гіпербола має фокуси в точках F_1, F_2 з координатами $\left(-\sqrt{a^2+b^2},0\right),\left(\sqrt{a^2+b^2},0\right)$, а рівняння асимптот мають вигляд $y=\pm\frac{b}{a}x$. Підставляючи відомі значення *a*, *b*, дістанемо координати фокусів $F_1(-5,0)$, $F_2(5,0)$ та рівняння асимптот $y=\pm\frac{3}{4}x$.

Оскільки гіпербола складається з двох віток, симетричних відносно координатних осей, то з міркувань симетрії випливає, що відстані d_1,d_2,d_3,d_4 від будь-якого фокуса до асимптот однакові. Для визначення шуканої відстані скористаємося формулою для обчислення відстані від точки F_2 до прямої $y = \pm\frac{3}{4}x$:

$$d = \frac{\left|\frac{3}{4}\cdot 5\right|}{\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + (-1)^2}} = 3 .$$

Кут φ між асимптотами обчислимо за формулою $\mathrm{tg}\varphi = \left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}\right|$ для кута між двома прямими $y = \frac{3}{4}x,\ y = -\frac{3}{4}x$:

$$\mathrm{tg}\varphi = \left|\frac{\frac{3}{4} - \left(-\frac{3}{4}\right)}{1 + \frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)}\right| = \frac{24}{7} .$$

Звідки $\varphi = \mathrm{arctg}\left(\frac{24}{7}\right)$.

Приклад 10.10.

Задано рівносторонню гіперболу $x^2 - y^2 = 8$. Знайти рівняння еліпса, фокуси якого знаходяться у фокусах гіперболи, якщо відомо, що еліпс проходить через точку *A* (4; 6).

Розв'язання.

Канонічне рівняння (10.3.1) гіперболи має вигляд $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{8} = 1$. З нього знаходимо $a^2 = b^2 = 8, c^2 = a^2 + b^2 = 16$. Отже, $F_1(-4, 0), F_2(4, 0)$. Позначимо через a_1, b_1 довжини відповідно великої та малої півосей шуканого еліпса. Оскільки, з одного боку, відстань між фокусами еліпса $2c = 8$, а з іншого — $2\sqrt{a_1^2 - b_1^2}$, то для невідомих параметрів еліпса дістаємо перше співвідношення

$$8 = 2\sqrt{a_1^2 - b_1^2} \Rightarrow a_1^2 - b_1^2 = 16 .$$

Оскільки за умовою точка *A* належить еліпсу, то її координати (4, 6) мають задовольняти його рівняння $\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1$. Дістаємо друге співвідношення

$$\frac{16}{a_1^2} + \frac{36}{b_1^2} = 1 .$$

Для визначення параметрів a_1^2, b_1^2 одержуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} a_1^2 - b_1^2 = 16, \\ \dfrac{16}{a_1^2} + \dfrac{36}{b_1^2} = 1. \end{cases}$$

Розв’язавши її, матимемо $a_1^2 = 64, b_1^2 = 48$. Отже,

$$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1 .$$

10.4. Парабола

Означення 10.4.1. Параболою називають геометричне місце точок площини, відстані від яких до заданої точки (фокуса) й заданої прямої (директриси) рівні.

Канонічне рівняння параболи, симетричної відносно осі Ox, із вершиною в початку координат, вітки якої напрямлені вправо має вигляд

$$y^2 = 2px,\ p > 0 . \tag{10.4.1}$$

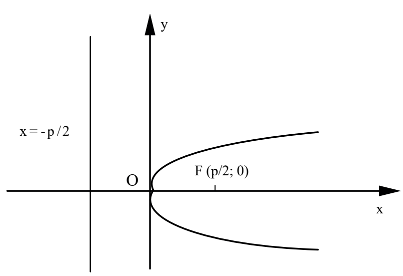

Рисунок 10.7

Фокус параболи позначається буквою F, а директрису — буквою l.

Означення 10.4.2. Число p — відстань від фокуса до директриси — називають параметром параболи.

Рівняння параболи з вершиною в початку координат, віссю симетрії якої є вісь Ox і вітки якої напрямлені вліво:

$$y^2 = -2px,\ p > 0 . \tag{10.4.2}$$

Координати її фокуса $F\left(-\dfrac{p}{2}, 0\right)$, а рівняння директриси $x = \dfrac{p}{2}$.

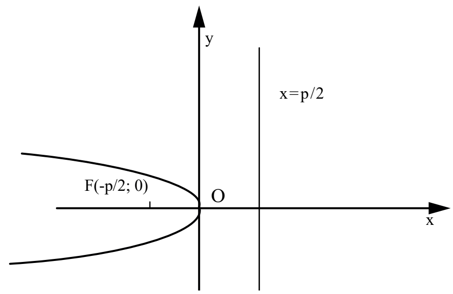

Рисунок 10.8

Рівняння параболи з вершиною в початку координат, віссю симетрії якої є вісь *Oy* і вітки якої напрямлені вгору,

$$x^2 = 2py,\ p > 0\ . \qquad (10.4.3)$$

Координати її фокусів $F\left(0, \dfrac{p}{2}\right)$, а рівняння директриси $y = -\dfrac{p}{2}$.

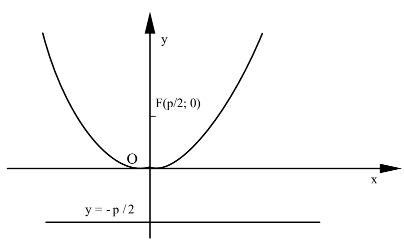

Рисунок 10.9

Рівняння параболи з вершиною в початку координат, віссю симетрії якої є вісь *Oy* і вітки якої напрямлені вниз,

$$x^2 = -2py,\ p > 0\ . \qquad (10.4.4)$$

Координати її фокусів $F\left(0, -\dfrac{p}{2}\right)$, а рівняння директриси $y = \dfrac{p}{2}$.

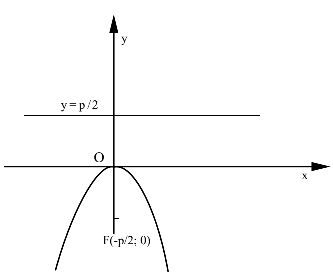

Рисунок 10.10

Означення 10.4.3. Відстань r від точки M параболи до її фокуса F називається *фокальним радіусом* цієї точки.

Означення 10.4.4. Відношення довжини фокального радіуса r кожної точки параболи до відстані d цієї точки до директриси називається її *ексцентриситетом*, і він дорівнює 1, $\varepsilon = \frac{r}{d} = 1$.

Приклад 10.11.

Записати рівняння параболи, вершиною якої є точка (0, 0) і яка проходить: а) через точку (–1, 2) симетрично відносно осі Ox; б) через точку (2, 4) симетрично відносно вісі Oy.

Розв'язання.

а) Оскільки парабола проходить через початок координат і через точку (–1, 2) з від'ємною абсцисою, а її віссю симетрії є вісь Ox, то рівняння параболи слід шукати у вигляді $y^2 = -2px$. Підставляючи в це рівняння координати відомої точки, дістанемо $4 = -2p(-1)$, $p = 2$. Шукане рівняння має вигляд $y^2 = -4x$.

б) Рівняння параболи шукатимемо у вигляді $x^2 = 2py$. Підставляючи в це рівняння координати точки (2, 4), дістанемо $4 = 2p \cdot 4$, $p = \frac{1}{2}$. Отже, шуканим рівнянням параболи є $x^2 = y$.

Приклад 10.12.

Знайти координати фокуса та рівняння директриси параболи $y^2 = 8x$.

Розв'язання.

Парабола визначена канонічним рівнянням $y^2 = 2px$. Отже, $p = 4$. Тоді координати фокуса $F\left(\frac{p}{2}; 0\right) \to F(2; 0)$, рівняння директриси: $x = -\frac{p}{2} \to x = -2.$

Приклад 10.13.

Скласти рівняння параболи із вершиною у початку координат, яка симетрична відносно осі Oy і проходить через точку A(1; –2).

Розв'язання.

Оскільки парабола симетрична відносно осі Oy і проходить через початок координат, то її рівняння має вигляд $x^2 = 2py$. Враховуючи, що парабола проходить через точку A(1; –2), маємо $1 = 2 \cdot p \cdot (-2) \Rightarrow p = -\frac{1}{4}$.

$x^2 = -\frac{1}{2}y$ — рівняння шуканої параболи.

10.5. Зведення загального рівняння кривої другого порядку до канонічного вигляду

Загальне рівняння кривої другого порядку:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

де $A^2 + C^2 \neq 0$. 0

Якщо $4AC - B^2 > 0$, то рівняння визначає криву еліптичного типу і зводиться до одного із видів:

1) при $A \neq C$

$\dfrac{x'^2}{a^2} + \dfrac{y'^2}{b^2} = 1$ — еліпс;

$\dfrac{x'^2}{a^2} + \dfrac{y'^2}{b^2} = 0$ — вироджений еліпс (точка з координатами $x' = 0,\ y' = 0$);

$\dfrac{x'^2}{a^2} + \dfrac{y'^2}{b^2} = -1$ — уявний еліпс (порожня множина точок).

2) при $A = C$

$x'^2 + y'^2 = R^2$ — коло;

$x'^2 + y'^2 = 0$ — вироджене коло (точка з координатами $x' = 0,\ y' = 0$);

$x'^2 + y'^2 = -R^2$ — уявне коло (порожня множина точок).

Якщо $4AC - B^2 < 0$, то рівняння визначає криву гіперболічного типу і зводиться до одного із видів:

$\dfrac{x'^2}{a^2} - \dfrac{y'^2}{b^2} = 1$ — гіпербола;

$-\dfrac{x'^2}{a^2} + \dfrac{y'^2}{b^2} = 1$ — спряжена гіпербола;

$\dfrac{x'^2}{a^2} + \dfrac{y'^2}{b^2} = 0$ — пара прямих, що перетинаються $y' = \dfrac{b}{a}x',\ y' = -\dfrac{b}{a}x'$, де точка з координатами $x' = 0,\ y' = 0$ —точка перетину прямих.

Якщо $4AC - B^2 = 0$, то рівняння визначає криву параболічного типу і зводиться до одного із видів:

1) при $C = 0$

$x'^2 = 2py'$ — парабола;

$x'^2 = a^2$ — пара паралельних прямих $x' = a,\ x' = -a$;

$x'^2 = -a^2$ — пара уявних прямих, тобто порожня множина точок;

$x'^2 = 0$ — пара збіжних прямих $x' = 0$;

2) при $A = 0$

$y'^2 = 2px'$ — парабола;

$y'^2 = b^2$ — пара паралельних прямих $y' = b,\ y' = -b$;

$y'^2 = -b^2$ — пара уявних прямих, тобто порожня множина точок;

$y'^2 = 0$ — пара збіжних прямих $y' = 0$;

Приклад 10.14.

З'ясувати, яка лінія відповідає заданому рівнянню:

1) $4x^2 + 9y^2 - 40x + 36y + 100 = 0;$

2) $4x^2 - 25y^2 + 50y - 24x + 89 = 0;$

3) $9x^2 - 16y^2 - 36x + 32y + 20 = 0;$

4) $4y^2 - 8y - 2x - 1 = 0.$

Розв'язання.

1) Оскільки $4AC - B^2 = 4 \cdot 4 \cdot 9 > 0$, то рівняння визначає фігуру еліптичного типу.

Згрупуємо члени зі змінними x, y:

$$\left(4x^2 - 40x\right) + \left(9y^2 + 36y\right) + 100 = 0,$$

$$4\left(x^2 - 10x\right) + 9\left(y^2 + 4y\right) + 100 = 0.$$

Доповнивши до повних квадратів вирази у дужках, отримуємо:

$$4\left(\underbrace{x^2 - 10x + 5^2} - 25\right) + 9\left(\underbrace{y^2 + 4y + 2^2} - 4\right) + 100 = 0,$$

$$4\left(x-5\right)^2 - 100 + 9\left(y+2\right)^2 - 36 + 100 = 0,$$

$$4\left(x-5\right)^2 + 9\left(y+2\right)^2 = 36,$$

$$\frac{\left(x-5\right)^2}{9} + \frac{\left(y+2\right)^2}{4} = 1.$$

Це рівняння еліпса з центром у точці O (5; –2) і півосями $a = 3$, $b = 2$.

2) Оскільки $4AC - B^2 = 4 \cdot 4 \cdot \left(-25\right) < 0$, то рівняння визначає фігуру гіперболічного типу.

Згрупуємо члени зі змінними x, y:

$$\left(4x^2 - 24x\right) + \left(-25y^2 + 50y\right) + 89 = 0,$$

$$4\left(x^2 - 6x\right) - 25\left(y^2 - 2y\right) + 89 = 0.$$

Доповнимо до повних квадратів вирази у дужках:

$$4\left(\underbrace{x^2-6x+3^2}-9\right)-25\left(\underbrace{y^2-2y+1^2}-1\right)+89=0,$$

$$4(x-3)^2-36-25(y-1)^2+25+89=0,$$

$$4(x-3)^2-25(y-1)^2=100,$$

$$\frac{(x-3)^2}{25}-\frac{(y-1)^2}{4}=1.$$

Це рівняння гіперболи з центром у точці O (3; 1) і півосями a = 5, b = 2.

3) Оскільки $4AC-B^2=4\cdot 9\cdot(-16)<0$, то рівняння визначає фігуру гіперболічного типу.

Перетворимо задане рівняння так:

$$9x^2-16y^2-36x+32y+20=0,$$

$$\left(9x^2-36x\right)+\left(-16y^2+32y\right)+20=0,$$

$$9\left(x^2-4x\right)-16\left(y^2-2y\right)+20=0,$$

$$9\left(\underbrace{x^2-4x+2^2}-4\right)-16\left(\underbrace{y^2-2y+1^2}-1\right)+20=0,$$

$$9(x-2)^2-36-16(y-1)^2+16+20=0,$$

$$9(x-2)^2-16(y-1)^2=0,$$

$$\big(3(x-2)-4(y-1)\big)\big(3(x-2)+4(y-1)\big)=0,$$

$$(3x-4y-2)(3x-4y-10)=0.$$

Дане рівняння розпадається на два:

$$3x-4y-2=0 \text{ та } 3x-4y-10=0,$$

і визначає дві прямі, що перетинаються в точці O (2; 1).

4) Оскільки $4AC-B^2=4\cdot 0\cdot 4=0$, то рівняння визначає фігуру параболічного типу.

Перетворимо задане рівняння так:

$$4y^2-8y-2x-1=0,$$

$$\left(4y^2-8y\right)-2x-1=0,$$

$$4\left(\underbrace{y^2-2y+1^2}-1\right)-2x-1=0,$$

$$4\left(y-1\right)^2-4-2x-1=0,$$

$$4\left(y-1\right)^2=2x+5,$$

$$\left(y-1\right)^2=\frac{1}{2}\left(x+\frac{5}{2}\right).$$

Це рівняння визначає параболу з вершиною у точці $O\left(-\frac{5}{2},1\right)$ і параметром $p=\frac{1}{4}$.

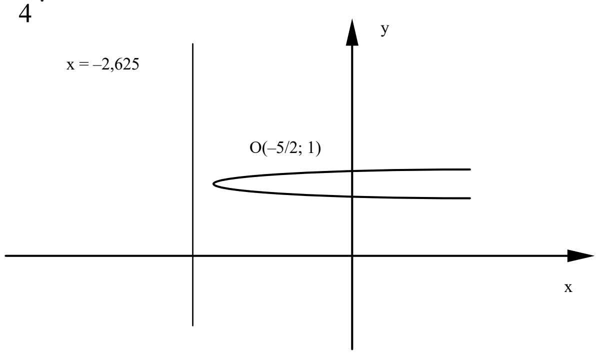

Рисунок 10.11

Зразки модульної контрольної роботи з теми «Векторна алгебра»

Варіант 1

1. Як знайти точку перетину прямої та площини у просторі?

2. Записати рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом і вказати геометричний зміст параметрів, що в нього входять.

3. Знайти ГМТ рівновіддалених від двох заданих кіл

$$(x+3)^2+y^2=4, \quad (x-2)^2+y^2=1 .$$

4. Скласти рівняння сторін ΔABC, якщо відомо координати однієї вершини A (1, 1), а також рівняння висоти $2x+y-8=0$ та медіани $3x-y-12=0$, проведених з однієї вершини.

5. Пряма проходить через точку C (1, 1, 1) і перетинає прямі $a: \frac{x+4}{7}=\frac{y-5}{4}=\frac{z+1}{4}$, $b: \frac{x-1}{1}=\frac{y-4}{1}=\frac{z+2}{4}$. Визначити кути перетину.

6. Площа паралелограма $S_{\square}=20$ кв. од. Дві його вершини розташовані в точках A(1, 2) та B(4, 4). Знайти дві інші вершини паралелограма при умові, що точка перетину діагоналей лежить на додатній півосі абсцис.

7. Скласти рівняння спряжених діаметрів еліпса $x^2+4y^2=7-2x$, розташованих симетрично відносно осі абсцис. Виконати рисунок в прямокутній системі координат.

8. Площина проходить на відстані 11 – x одиниць від початку координат. Скласти рівняння площини, якщо відомо, що вона перпендикулярна двом заданим площинам $\alpha: 3x+2y-2z-3=0, \beta: 3x+5y-4z-4=0$.

Варіант 2

1. Записати умову належності прямої площині.

2. Записати канонічне рівняння еліпса. Вказати його осі симетрії, вершини, фокуси, ексцентриситет, рівняння директрис.

3. Скласти рівняння ГМТ, для яких сума відстаней до точки A (2, 0) та кола $(x+2)^2+y^2=1$ є величина стала, що дорівнює 5.

4. Скласти рівняння сторін ΔABC, якщо відомо координати його вершини A (1, 1) та рівняння двох медіан: $2x-3y-7=0, 2x+y-11=0$.

5. Для гіперболи $2x^2 - 3y^2 = 6$ скласти рівняння спряжених діаметрів, кут між якими дорівнює 45°.

6. Довести, що прямі $a:\begin{cases} 2x - y + 3z - 1 = 0; \\ 5x + 4y - z - 2 = 0 \end{cases}$ і $b: \dfrac{x-2}{-11} = \dfrac{y+5}{17} = \dfrac{z-3}{13}$ паралельні та знайти відстань $\rho(a, b)$.

7. Знайти лінію перетину двох площин $x + y + 5z - 11 = 0$, $2x + 2y + z - 1 = 0$ провести площину найбільш віддалену від точки A (1, 1, 3).

8. Два однорідних круга з радіусами R, r дотикається координатних осей. Визначити координати центра мас цієї системи, якщо круги розташовані в протилежних квадрантах.

Запитання для самоперевірки

1. Записати загальне рівняння площини.
2. Записати рівняння площини, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно до нормального вектора $\vec{n}(A, B, C)$.
3. Записати рівняння площини, що проходить через три задані точки.
4. Записати рівняння площини у відрізках.
5. Записати формулу, за якою знаходиться кут між площинами.
6. Записати умови перпендикулярності, паралельності та збігу двох площин.
7. Записати формулу для обчислення відстані від точки до площини.
8. Записати канонічні рівняння прямої у просторі.
9. Записати параметричні рівняння прямої у просторі.
10. Записати рівняння прямої, що проходить через дві точки.
11. Записати загальні рівняння прямої у просторі.
12. Як здійснюється перехід від загальних рівнянь прямої до її канонічних рівнянь?
13. Записати формулу, за якою знаходиться кут між прямими у просторі.
14. Записати умови перпендикулярності, паралельності прямих у просторі.
15. Записати формулу для обчислення відстані від точки до прямої у просторі.
16. Записати формулу для обчислення відстані між мимобіжними прямими.
17. Записати формулу, за якою знаходиться кут між прямою та площиною.
18. Як знайти точку перетину прямої та площини?
19. Записати умову паралельності прямої та площини.

20. Записати умову перпендикулярності прямої та площини.
21. Записати умову належності прямої площині.
22. Записати загальне рівняння прямої на площині. Який геометричний зміст коефіцієнтів при x та y?
23. Записати рівняння прямої, заданої точкою та нормаллю.
24. Записати рівняння прямої у відрізках.
25. Записати рівняння прямої на площині та вказати геометричний зміст параметрів, що в нього входять.
26. Записати рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом і вказати геометричний зміст параметрів, що в нього входять.
27. Записати формулу, за якою знаходиться кут між двома прямими на площині.
28. Записати умови перпендикулярності, паралельності та збігу двох прямих на площині.
29. Записати формулу для обчислення відстані від точки до прямої на площині.
30. Що називається колом?
31. Записати канонічне рівняння кола.
32. Що називається еліпсом?
33. Записати канонічне рівняння еліпса. Вказати його осі симетрії, вершини, фокуси, ексцентриситет, рівняння директрис.
34. Що називається гіперболою?
35. Записати канонічне рівняння гіперболи. Вказати її осі симетрії, вершини, фокуси, дійсну вісь, уявну вісь, ексцентриситет, асимптоти, рівняння директрис.
36. Що називається параболою?
37. Записати канонічне рівняння параболи. Указати її вершину, параметр, директрису, фокус, вісь симетрії.
38. Написати загальне рівняння кривої другого порядку. У якому випадку це рівняння являється рівнянням еліптичного типу, гіперболічного типу, параболічного типу?

ВАРІАНТИ РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНИХ ЗАВДАНЬ З ТЕМИ «АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ»

Варіант 1

1. На осі *Oz* знайти точку, рівновіддалену від точок *A* (1; 3; 0) і *B* (3; –5; –4).

2. Через точку *M* (1; –1) провести прямі паралельно і перпендикулярно до прямої $6x-3y-2=0$.

3. Обчислити тангенс кута між прямими $6x+4y+3=0$ і $y=-3x-1$.

4. Знайти відстань від точки *M* (4; 3) до прямої $8(x-4)-4(y+3)=0$.

5. Привести до нормального вигляду рівняння прямої $6x+8y+4=0$.

6. З точки *A* (–4; 3) проведені промені до перетину з прямою $4x-4y+24=0$ в точці *D*. Скласти рівняння множини точок *M*, таких, що *AM* : *MD* = 1:1

7. Задані вершини трикутника *A* (4; –4), *B* (–7; 3), *C* (6; 4).

1) Довести, що точки *A, B, C* не лежать на одній прямій.
2) Скласти рівняння сторін трикутника *ABC*.
3) Скласти рівняння прямої, що проходить через центр мас трикутника паралельно прямій *AC*.
4) Скласти рівняння висоти *BD*, знайти координати основи висоти *BD* трикутника *ABC*. Обчислити довжину висоти.
5) Скласти рівняння медіани *AM*.
6) Обчислити периметр $\triangle ABC$.
7) Обчислити площу $\triangle ABC$.
8) Визначити кути $\triangle ABC$.
9) Скласти рівняння прямої *A'B'*, симетричну прямій *AB* відносно точки *C*.
10) Зобразити $\triangle ABC$ в прямокутній системі координат *xOy*.
11) Задати системою нерівностей множину точок $\triangle ABC$.

8. Записати рівняння площини, що проходить:

1) через точку *M* (1; 3; –3) паралельно до площини $10x-5y+5z+2=0$;
2) проходить через точку *M* (–2; 0; 4) перпендикулярно до прямої
$$\begin{cases}3x+4y+4z+1=0;\\-x+2z-4=0;\end{cases}$$
3) через три точки *A* (–2; 0; 0), *B* (–3; –3; 2), *C* (1; 2; 4);
4) через пряму $\begin{cases}4x+2y-2z-3=0;\\-4x+2y+3z+4=0\end{cases}$ і точку *M* (–2; –3; 1)

5) через паралельні прямі $\frac{x+1}{30}=\frac{y-1}{4}=\frac{z+1}{6}$ і $\frac{x+19}{30}=\frac{y+3}{4}=\frac{z+3}{6}$;

6) через точки $M(2;-2;4)$, $N(1;0;0)$ паралельно до вектора $\vec{a}(6;6;4)$.

9. Обчислити кут та координати точки перетину прямої $\frac{x+3}{-2}=\frac{y}{0}=\frac{z}{3}$ і площини $3x-2y-2z+57=0$.

10. Знайти відстань від точки *M* (–2; –1; –1) до площини $9(x+2)+2(y+1)+6(z+2)=0$.

11. Знайти кут між площинами $2x+6y+9z+10=0$ і $7(x+1)-4(y-4)-4(z+1)=0$.

12. Знайти відстань від точки $M(-4;4;-2)$ до прямої $\begin{cases}6x+4y+2z-4=0;\\ 3x+y-3z+1=0.\end{cases}$

13. Знайти точку A_1, симетричну точці *A* (–3; –8; –9) відносно прямої $\frac{x-7}{3}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+1}{-2}$.

14. Задані мимобіжні прямі: $\frac{x-2}{3}=\frac{y-4}{-3}=\frac{z+3}{0}$, $\frac{x-4}{3}=\frac{y+1}{0}=\frac{z+3}{3}$.

Виконати наступні дії:

1) провести площину, що проходить через першу пряму паралельно до другої прямої;
2) знайти відстань між прямими;
3) провести спільний перпендикуляр до прямих.

15. Задані вершини піраміди *A* (1; –4; 0), *B* (–2; –1; 3), *C* (2; –3; –2), *D* (0; –2; 4).

1) Довести, що точки *A*, *B*, *C*, *D* не лежать в одній площині.
2) Знайти рівняння площин, які містять грані піраміди *ABCD*.
3) Скласти рівняння площини, що проходить через вершину *D* паралельно грані *ABC*.
4) Скласти рівняння площини, що проходить через ребро *AB* паралельно ребру *CD*.
5) Скласти рівняння прямої, що проходить через точки *C*, *D*.
6) Скласти рівняння прямої, що проходить через точку *B* паралельно ребру *AC*.
7) Знайти об’єм піраміди *ABCD*.
8) Знайти довжину висоти піраміди *ABCD*, що опущена з вершини *D*.
9) Знайти площу грані *ABC*.
10) Знайти кут між ребром *AB* та гранню *BCD*.
11) Скласти рівняння площини, що проходить через вершину *D* перпендикулярно до ребра *AB*.

12) Скласти рівняння висоти, що опущена з вершини D на грань ABC.

13) Знайти координати основи висоти DE тетраедра $ABCD$.

16. Знайти відстань між площинами $7x+6y+6z-5=0$ і $7(x-2)+6(y-1)+6(z-2)=0$.

17. Побудувати криві другого порядку в прямокутній системі координат:

а) $(x-2)^2+(y-3)^2=9$; б) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$; в) $\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{25}=1$; г) $y^2=10x$.

18. Побудувати задані лінії в прямокутній системі координат й заштрихувати площу фігури, обмеженої ними: $x^2=(y+1)$, $5x+2y-10=0$, $y=\frac{5}{4}$.

19. Знайти найменшу відстань між двома колами $x^2+y^2-16x-8y=-76$ і $x^2+y^2-32x+4y=-224$.

20. Звести криву другого порядку $-x-4y^2+48y-147=0$ до канонічного вигляду, знайти всі її характеристики, побудувати графік кривої.

21. Знайти радіус кола, яке є перерізом сфери $x^2+y^2+z^2-10x-4y-18z=-97$ площиною $x=2$.

22. Скласти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що $F\left(\sqrt{73};0\right)$, $a=3$.

23. Побудувати криву, що задана параметрично $\begin{cases} x=3\cos^2 4t+4; \\ y=6-4\sin 4t. \end{cases}$

24. Встановити тип і звести рівняння поверхні другого порядку до канонічного вигляду: $7x^2-5y^2+8z^2+56x-30y-80z+267=0$.

25. З'ясувати, яка лінія відповідає заданому рівнянню $7x^2-2y^2=0$:

1) Точка;
2) Пара паралельних прямих;
3) Парабола;
4) Пара перетинаючих прямих;
5) Гіпербола;
6) Еліпс.

26. Рівняння $3x^2+4y^2-2z^2=-9$ описує:

1) Гіперболічний параболоїд;
2) Двопорожнинний гіперболоїд;
3) Циліндр;
4) Однопорожнинний гіперболоїд;
5) Еліпсоїд;
6) Еліптичний параболоїд.

27. C (3;–2) — вершина прямого кута рівнобедреного прямокутного трикутника, $2y-5x+1=0$ — рівняння його гіпотенузи. Записати рівняння катетів цього трикутника.

28. Скласти рівняння сторін трикутника, знаючи одну його вершину *A* (3; –4) і рівняння прямих, на яких лежать дві його висоти: $7x-2y-1=0, 2x-7y-6=0$.

29. Записати рівняння площини, що проходить через вісь *Ox* і точку *M* (0; –2; 3).

30. Скласти канонічне рівняння прямої, що проходить через точку *M* (1; –2; 3) перпендикулярно до вектора $\vec{a}=\{9;-3;-1\}$ і перетинає пряму $\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{1}$.

31. Знайти рівняння площини, що проходить через точки *M* (1; 1; 1) і *N* (–1; 1; –1) паралельно до прямої *AB*: *A* (5; –2; 3) і *B* (6; 1; 0).

Варіант 2

1. На осі *Ox* знайти точку, рівновіддалену від точок *A* (–1; 3; –5) і *B* (3; 3; 5).

2. Через точку *M* (2; –3) провести прямі паралельно і перпендикулярно до прямої $y=-3x+2$.

3. Обчислити тангенс кута між прямими $2x+4y+4=0$ і $y=-4x-1$.

4. Знайти відстань від точки *M* (3; –3) до прямої $-3x-4y+3=0$.

5. Привести до нормального вигляду рівняння прямої $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$.

6. З точки *A* (4; 6) проведені промені до перетину з прямою $6x+4y-78=0$ в точці *D*. Скласти рівняння множини точок *M*, таких, що *AM* : *MD* = 2 : 1.

7. Задані вершини трикутника *A* (4; 3), *B* (11; 2), *C* (7; 9).

1) Довести, що точки *A*, *B*, *C* не лежать на одній прямій.
2) Скласти рівняння сторін трикутника *ABC*.
3) Скласти рівняння прямої, що проходить через центр мас трикутника паралельно прямій *AC*.
4) Скласти рівняння висоти *BD*, знайти координати основи висоти *BD* трикутника *ABC*. Обчислити довжину висоти.
5) Скласти рівняння медіани *AM*.
6) Обчислити периметр ΔABC.
7) Обчислити площу ΔABC.
8) Визначити кути ΔABC.
9) Скласти рівняння прямої *A'B'*, симетричну прямій *AB* відносно точки *C*.
10) Зобразити ΔABC в прямокутній системі координат *xOy*.
11) Задати системою нерівностей множину точок ΔABC.

8. Записати рівняння площини, що проходить:

1) через точку M (1; 4; –2) паралельно до площини $5x-2y+6z+3=0$;

2) через точку M (3; –3; –3) перпендикулярно до прямої $\frac{x+2}{1}=\frac{y}{-3}=\frac{z+1}{1}$;

3) через три точки A (3; –3; –2), B (–4; –3; 4), C (–3; 3; 2);

4) через пряму $\frac{x+2}{0}=\frac{y}{-3}=\frac{z-2}{-1}$ і точку M (3; –2; –2);

5) через паралельні прямі $\frac{x-14}{-16}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+4}{3}$ і $\frac{x+2}{-16}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}$;

6) через точки M (2; 4; 3), N (4; 5; 6) паралельно до вектора $\vec{a}\left(5; 5; -1\right)$.

9. Обчислити кут та координати точки перетину прямої $\frac{x-3}{1}=\frac{y-4}{-3}=\frac{z+2}{-2}$ і площини $5x-3y+2z-19=0$.

10. Знайти відстань від точки M (–2; 1; 2) до площини $-x+8y+4z+6=0$.

11. Знайти кут між прямими $\frac{x+3}{-2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-3}{-2}$ і $\frac{x+4}{4}=\frac{y-1}{-4}=\frac{z+1}{2}$.

12. Знайти відстань від точки M (–4; 4; 1) до прямої $\begin{cases} 4x-4y+2z+3=0; \\ -3x+2y-3z=0. \end{cases}$

13. Знайти точку A_1, симетричну точці A (–4; –8; –9) відносно прямої $\frac{x+3}{0}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z+5}{11}$.

14. Задані мимобіжні прямі: $\frac{x-2}{0}=\frac{y-3}{3}=\frac{z+3}{0}$, $\frac{x-3}{-2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-2}{2}$.

Виконати наступні дії:

1) провести площину, що проходить через першу пряму паралельно до другої прямої;

2) знайти відстань між прямими;

3) провести спільний перпендикуляр до прямих.

15. Задані вершини піраміди A (–3; 3; –4), B (3; 1; 1), C (2; –4; –3), D (1; –1; 0).

1) Довести, що точки A, B, C, D не лежать в одній площині.

2) Знайти рівняння площин, які містять грані піраміди $ABCD$.

3) Скласти рівняння площини, що проходить через вершину D паралельно грані ABC.

4) Скласти рівняння площини, що проходить через ребро AB паралельно ребру CD.

5) Скласти рівняння прямої, що проходить через точки C, D.

6) Скласти рівняння прямої, що проходить через точку B паралельно ребру AC.

7) Знайти об'єм піраміди $ABCD$.

8) Знайти довжину висоти піраміди $ABCD$, що опущена з вершини D.

9) Знайти площу грані $ABCD$.

10) Знайти кут між ребром AB та гранню BCD.

11) Скласти рівняння площини, що проходить через вершину D перпендикулярно до ребра AB.

12) Скласти рівняння висоти, що опущена з вершини D на грань ABC.

13) Знайти координати основи висоти DE тетраедра $ABCD$.

16. Знайти відстань між площинами $-4x+4y+2z-3=0$ і $-4x+4y+2z-8=0$.

17. Побудувати криві другого порядку в прямокутній системі координат: а) $(x+3)^2+(y-5)^2=4$; б) $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{4}=1$; в) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$; г) $y^2=8x$.

18. Побудувати задані лінії в прямокутній системі координат й заштрихувати площу фігури, обмеженої ними: $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{9}=1$, $2x+3y-12=0$, $2x-3y+12=0$.

19. Знайти найменшу відстань між двома колами $x^2+y^2-16x+2y=-61$ і $x^2+y^2-48x+26y=-744$.

20. Звести криву другого порядку $2x^2-20x+6y^2+60y+188=0$ до канонічного вигляду, знайти всі її характеристики, побудувати графік кривої.

21. Знайти радіус кола, яке є перерізом сфери $x^2+y^2+z^2-10x-4y+6z=-6$ площиною $z=1$.

22. Скласти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що $F\left(0;\sqrt{117}\right)$, $b=6$.

23. Побудувати криву, що задана параметрично $\begin{cases} x=2\cos 3t+5; \\ y=7\sin 3t-1. \end{cases}$

24. Встановити тип і звести рівняння поверхні другого порядку до канонічного вигляду: $3x^2+y^2+9z^2+6x+8y-72z+136=0$.

25. З'ясувати, яка лінія відповідає заданому рівнянню $8x^2=5$:

1) Точка;
2) Пара паралельних прямих;
3) Парабола;
4) Пара перетинаючих прямих;
5) Гіпербола;
6) Еліпс.

26. Рівняння $4x^2-2y^2-5z^2=-2$ описує:

1) Гіперболічний параболоїд;
2) Двопорожнинний гіперболоїд;
3) Циліндр;
4) Однопорожнинний гіперболоїд;
5) Еліпсоїд;
6) Еліптичний параболоїд.

27. Знайти рівняння прямої, що проходить через точку *M* (–2; 6) і утворює з віссю *Ox* кут у два рази більший від кута, який утворює пряма $\sqrt{3}y-3x+5=0$ з віссю *Ox*.

28. Знайти координати вершин ромба, якщо задано рівняння прямих, на яких лежать дві його сторони: $x+2y=4$ і $x+2y=10$, а також рівняння однієї з його діагоналей: $y=x+2$.

29. Записати рівняння площини, що проходить через точку *M* (1; 7; –5) і відсікає від осей координат додатні та рівні відрізки.

30. Скласти канонічне рівняння прямої, що лежить в площині *yOz*, проходить через початок координат перпендикулярно до прямої $\dfrac{x+3}{-1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+1}{1}$.

31. Записати рівняння площини, що проходить через пряму $x=2t+1$, $y=-t+2$, $z=3t-2$ паралельно до прямої $\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z+1}{2}$.

***Варіант* 3**

1. На осі *Oy* знайти точку, рівновіддалену від точок *A* (–1; –3; 5) і *B* (–3; –1; 5).

2. Через точку *M* (–1; –3) провести прямі паралельно і перпендикулярно до прямої $3x+4y-2=0$.

3. Обчислити тангенс кута між прямими $4x-3y-1=0$ і $y=-4x+2$.

4. Знайти відстань від точки *M* (–1; –2) до прямої $9(x+3)+2(y-1)=0$.

5. Привести до нормального вигляду рівняння прямої $-4x+3y-6=0$.

6. З точки *A* (4; 4) проведені промені до перетину з прямою $3x-5y+20=0$ в точці *D*. Скласти рівняння множини точок *M*, таких, що *AM* : *MD* = 1 : 5.

7. Задані вершини трикутника *A* (–4; 0), *B* (7; –4), *C* (2; 8).

1) Довести, що точки *A*, *B*, *C* не лежать на одній прямій.
2) Скласти рівняння сторін трикутника *ABC*.

3) Скласти рівняння прямої, що проходить через центр мас трикутника паралельно прямій AC.
4) Скласти рівняння висоти BD, знайти координати основи висоти BD трикутника ABC. Обчислити довжину висоти.
5) Скласти рівняння медіани AM.
6) Обчислити периметр ΔABC.
7) Обчислити площу ΔABC.
8) Визначити кути ΔABC.
9) Скласти рівняння прямої $A'B'$, симетричну прямій AB відносно точки C.
10) Зобразити ΔABC в прямокутній системі координат xOy.
11) Задати системою нерівностей множину точок ΔABC.

8. Записати рівняння площини, що проходить
1) через точку M (2; –2; 2) паралельно до площини $6x-4y-4z+7=0$;
2) через точку M (0; 0; –3) перпендикулярно до прямої $\begin{cases} 3x-3y+2z+2=0; \\ 3x+2z+2=0; \end{cases}$
3) через три точки A (–3; –1; –1), B (2; –1; 4), C (–3; 3; –4)
4) через пряму $\begin{cases} 4x-2y-4z-1=0; \\ -x+4y+3z+2=0 \end{cases}$ і точку M (–3; 3; 1);
5) через паралельні прямі $\dfrac{x+9}{-16}=\dfrac{y-4}{5}=\dfrac{z-1}{3}$ і $\dfrac{x-7}{-16}=\dfrac{y+2}{5}=\dfrac{z+1}{3}$;
6) через точки M (–2; –4; –4), N (–5; –2; 4) паралельно до вектора $\vec{a}(5;5;-1)$.

9. Обчислити кут та координати точки перетину прямої $\dfrac{x-3}{0}=\dfrac{y-4}{-2}=\dfrac{z-1}{-3}$ і площини $4x+3y-2z-22=0$.

10. Знайти відстань від точки M (3; –3; –3) до площини $-3(x-3)+6(y+3)+6(z-3)=0$.

11. Знайти кут між площинами $6x+2y-3z-3=0$ і $-4(x+3)+2(y+2)+4(z+3)=0$.

12. Знайти відстань від точки M (4; 5; –2) до прямої $\dfrac{x+3}{-1}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z-5}{0}$

13. Знайти точку A_1, симетричну точці A (–4; –8; –4) відносно площини $2x-4y-6z+8=0$.

14. Задані мимобіжні прямі: $\dfrac{x+4}{1}=\dfrac{y-4}{-3}=\dfrac{z-2}{3}$, $\dfrac{x+3}{4}=\dfrac{y-4}{-3}=\dfrac{z-2}{-3}$.

Виконати наступні дії:

1) провести площину, що проходить через першу пряму паралельно до другої прямої;
2) знайти відстань між прямими;
3) провести спільний перпендикуляр до прямих.

15. Задані вершини піраміди A (0; –1; 1), B (–2; –1; –1), C (3; –1; –4), D (–3; –4; 2).

1) Довести, що точки A, B, C, D не лежать в одній площині.
2) Знайти рівняння площин, які містять грані піраміди $ABCD$.
3) Скласти рівняння площини, що проходить через вершину D паралельно грані ABC.
4) Скласти рівняння площини, що проходить через ребро AB паралельно ребру CD.
5) Скласти рівняння прямої, що проходить через точки C, D.
6) Скласти рівняння прямої, що проходить через точку B паралельно ребру AC.
7) Знайти об’єм піраміди $ABCD$.
8) Знайти довжину висоти піраміди $ABCD$, що опущена з вершини D.
9) Знайти площу грані ABC.
10) Знайти кут між ребром AB та гранню BCD.
11) Скласти рівняння площини, що проходить через вершину D перпендикулярно до ребра AB.
12) Скласти рівняння висоти, що опущена з вершини D на грань ABC.
13) Знайти координати основи висоти DE тетраедра $ABCD$.

16. Знайти відстань між площинами $-x-4y+8z+10=0$ і $-(x-2)-4(y+3)+8(z-2)=0$.

17. Побудувати криві другого порядку в прямокутній системі координат:

а) $(x+1)^2+(y-2)^2=16$; б) $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{25}=1$; в) $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$; г) $y^2=12x$.

18. Побудувати задані лінії в прямокутній системі координат й заштрихувати площу фігури, обмеженої ними: $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1,\quad x^2=y,\quad 2x-3y+15=0.$

19. Знайти найменшу відстань між двома колами $x^2+y^2+6x-14y=-33$ і $x^2+y^2-4x-38y=-340$.

20. Звести криву другого порядку $-2x^2-8x+3y-27=0$ до канонічного вигляду, знайти всі її характеристики, побудувати графік кривої.

21. Побудувати криву, що задана параметрично $\begin{cases} x=7\cos 4t+3; \\ y=8\sin 4t+5. \end{cases}$

22. Знайти радіус кола, яке є перерізом сфери
$x^2+y^2+z^2-16x+4y+2z=-56$ площиною $y=-5$.

23. Скласти канонічне рівняння еліпса якщо відомо, що $F\left(\sqrt{40};\,0\right)$, $a=7$.

24. Встановити тип і звести рівняння поверхні другого порядку до канонічного вигляду: $-6x^2+9y^2-2z^2+72x+36y-2z-130=0$.

25. З'ясувати, яка лінія відповідає заданому рівнянню $2x^2-5y^2=-4$:

1) Пара паралельних прямих;
2) Гіпербола;
3) Еліпс;
4) Пара перетинаючих прямих;
5) Парабола;
6) Точка.

26. Рівняння $9x^2+3y^2-8z=-2$ описує:

1) Гіперболічний параболоїд;
2) Еліпсоїд;
3) Однопорожнинний гіперболоїд;
4) Еліптичний параболоїд;
5) Циліндр;
6) Двопорожнинний гіперболоїд.

27. Написати рівняння прямої, що проходить через точку M (1; –2) і утворює з віссю Ox кут у два рази більший від кута, який утворює пряма $\sqrt{3}y-3x+13=0$ з віссю Ox.

28. Дано $2x-y+5=0$ та $x-2y+4=0$ — рівняння сторін AB та BC паралелограма $ABCD$, M (1; 4) —точка перетину діагоналей. Знайти рівняння сторін CD і AD.

29. Записати рівняння площини, що проходить на однаковій відстані від двох паралельних площин $x+4y-z-5=0$ і $x+4y-z+7=0$.

30. Скласти канонічне рівняння прямої, що проходить через точку M (3; –2; 0) перпендикулярно до прямої $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-2}{3}$ і розташована у площині xOy.

31. Записати рівняння площини, що проходить через пряму $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z+4}{-1}$ перпендикулярно до площини $3x+y-2z+5=0$.

Варіант 4

1. На осі Oz знайти точку, рівновіддалену від точок A (2; –4; 1) і B (4; –3; 5).

2. Через точку M (–3; 1) провести прямі паралельно і перпендикулярно до прямої $y = -3x - 1$.

3. Обчислити тангенс кута між прямими $6x + 2y + 2 = 0$ і $y = -4x + 1$.

4. Знайти відстань від точки M (1; –2) до прямої $4x + 3y + 7 = 0$.

5. Привести до нормального вигляду рівняння прямої $6x + 8y - 1 = 0$.

6. З точки A (–2; 3) проведені промені до перетину з прямою $6x + 6y - 54 = 0$ в точці D. Скласти рівняння множини точок M, таких, що $AM : MD = 3 : 1$.

7. Задані вершини трикутника A (2; –4), B (5; 1), C (14; –1).

1) Довести, що точки A, B, C не лежать на одній прямій.
2) Скласти рівняння сторін трикутника ABC.
3) Скласти рівняння прямої, що проходить через центр мас трикутника паралельно прямій AC.
4) Скласти рівняння висоти BD, знайти координати основи висоти BD трикутника ABC. Обчислити довжину висоти.
5) Скласти рівняння медіани AM.
6) Обчислити периметр $\triangle ABC$.
7) Обчислити площу $\triangle ABC$.
8) Визначити кути $\triangle ABC$.
9) Скласти рівняння прямої $A'B'$, симетричну прямій AB відносно точки C.
10) Зобразити $\triangle ABC$ у прямокутній системі координат xOy.
11) Задати системою нерівностей множину точок $\triangle ABC$.

8. Записати рівняння площини, що проходить:

1) через точку M (–3; 2; 3) паралельно до площини $2x - y - 6z - 6 = 0$;
2) через точку M (2; 4; 3) перпендикулярно до прямої $\dfrac{x-4}{2} = \dfrac{y-2}{0} = \dfrac{z-1}{3}$;
3) через три точки A (–4; –3; –2), B (–3; –4; 1), C (4; –4; 3);
4) через пряму $\dfrac{x}{-1} = \dfrac{y-3}{-4} = \dfrac{z-3}{2}$ і точку М (5; –4; –4);
5) через паралельні прямі $\dfrac{x+5}{10} = \dfrac{y-3}{-4} = \dfrac{z-4}{2}$ і $\dfrac{x+6}{10} = \dfrac{y-3}{-4} = \dfrac{z-3}{2}$;
6) через точки M (–3; 5; 2), N (–5; –5; –5) паралельно до вектора $\vec{a}(-2; 6; 2)$.

9. Обчислити кут та координати точки перетину прямої $\frac{x}{2}=\frac{y}{0}=\frac{z+2}{1}$ і площини $3x+2y+4z-42=0$.

10. Знайти відстань від точки M (3; –3; –2) до площини $x+8y-4z-8=0$.

11. Знайти кут між прямими $\frac{x-2}{-2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z+2}{-2}$ і $\frac{x+2}{1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+4}{2}$.

12. Знайти відстань від точки M (5; 3; 4) до прямої $\frac{x+2}{0}=\frac{y-5}{-3}=\frac{z+4}{4}$

13. Знайти точку A_1, симетричну точці A (7; 7; 0) відносно прямої $\frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{0}=\frac{z+2}{-2}$.

14. Задані мимобіжні прямі: $\frac{x+4}{-1}=\frac{y+2}{3}=\frac{z+4}{-1}$, $\frac{x-2}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-3}{3}$.

Виконати наступні дії:

1) провести площину, що проходить через першу пряму паралельно до другої прямої;
2) знайти відстань між прямими;
3) провести спільний перпендикуляр до прямих.

15. Задані вершини піраміди A (4; –3; 2), B (0; 1; 1), C (4; 0; 1), D (3; –2; –4).

1) Довести, що точки A, B, C, D не лежать в одній площині.
2) Знайти рівняння площин, які містять грані піраміди $ABCD$.
3) Скласти рівняння площини, що проходить через вершину D паралельно грані ABC.
4) Скласти рівняння площини, що проходить через ребро AB паралельно ребру CD.
5)Скласти рівняння прямої, що проходить через точки C, D.
6) Скласти рівняння прямої, що проходить через точку B паралельно ребру AC.
7) Знайти об’єм піраміди $ABCD$.
8) Знайти довжину висоти піраміди $ABCD$, що опущена з вершини D.
9) Знайти площу грані ABC.
10) Знайти кут між ребром AB та гранню BCD.
11) Скласти рівняння площини, що проходить через вершину D перпендикулярно до ребра AB.
12) Скласти рівняння висоти, що опущена з вершини D на грань ABC.
13) Знайти координати основи висоти DE тетраедра $ABCD$.

16. Знайти відстань між площинами $6x+9y+2z+5=0$ і $6(x+1)+9(y-3)+2(z+1)=0$.

17. Побудувати криві другого порядку в прямокутній системі координат:

а) $(x-3)^2+(y+4)^2=25$; б) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$; в) $\dfrac{x^2}{64}-\dfrac{y^2}{25}=1$; г) $y^2=16x$.

18. Побудувати задані лінії в прямокутній системі координат й заштрихувати площу фігури, обмеженої ними: $x^2=-y, \quad (x-4)^2=-y, \quad y=0$.

19. Знайти найменшу відстань між двома колами $x^2+y^2+4x+2y=20$ і $x^2+y^2-14x-22y=-134$.

20. Звести криву другого порядку $8x+2y^2-20y+91=0$ до канонічного вигляду, знайти всі її характеристики, побудувати графік кривої.

21. Побудувати криву, що задана параметрично $\begin{cases} x=4\cos^2 2t-4; \\ y=8-2\sin 2t. \end{cases}$

22. Знайти радіус кола, яке є перерізом сфери

$x^2+y^2+z^2+12x+6y+4z=-47$ площиною $x=-5$.

23. Скласти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що $F\left(0;\sqrt{13}\right)$, $b=7$.

24. Встановити тип і звести рівняння поверхні другого порядку до канонічного вигляду: $3x^2-5y^2+8z^2-6x-50y-80z+78=0$.

25. З'ясувати, яка лінія відповідає заданому рівнянню $4x^2+3y=9$:

1) Пара перетинаючих прямих;
2) Еліпс;
3) Парабола;
4) Гіпербола;
5) Пара паралельних прямих;
6) Точка.

26. Рівняння $6x^2+8y^2-8z=5$ описує:

1) Циліндр;
2) Гіперболічний параболоїд;
3) Двопорожнинний гіперболоїд;
4) Еліпсоїд;
5) Еліптичний параболоїд;
6) Однопорожнинний гіперболоїд.

27. Написати рівняння прямої, що проходить через точку M (–4; –3) і утворює з віссю Ox кут у три рази більший від кута, який утворює пряма $x-y-17=0$ з віссю Ox.

28. Для трикутника ABC відомі: рівняння сторони AB $3x+2y=12$, рівняння висоти BM $x+2y=4$, рівняння висоти AM $4x+y=6$, де M — ортоцентр. Записати рівняння сторін AC та BC.

29. Задані точки *A* (2; 0; 0), *B* (5; 3; 0), *C* (0; 1; 1) і *D* (–2; –4; 1) — вершини тетраедра *ABCD*. Знайти двогранний кут між гранями *ABC* та *ABD*.

30. При якому значенні λ прямі $\frac{x+2}{\lambda}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{1}$ та $\begin{cases} x+y-z=0; \\ x-y-5z-8=0 \end{cases}$ паралельні?

31. Знайти координати проекції точки *M* (3; 1; –1) на площину $x+2y+3z-30=0$.

Варіант 5

1. На осі *Ox* знайти точку, рівновіддалену від точок *A* (–2; –2; 4) і *B* (–3; 5; –5).

2. Через точку *M* (–2; –3) провести прямі паралельно і перпендикулярно до прямої $y=-5x+2$.

3. Обчислити тангенс кута між прямими $5x+3y+3=0$ і $y=2x-2$.

4. Знайти відстань від точки *M* (4; 2) до прямої $-(x+2)+4(y-1)=0$.

5. Привести до нормального вигляду рівняння прямої $-4x+3y-1=0$.

6. Із точки *A* (2; 2) проведені промені до перетину з прямою $3x-2y-7=0$ в точці *D*. Скласти рівняння множини точок *M*, таких, що *AM* : *MD* = 1 : 4.

7. Задані вершини трикутника *A* (–2; –3), *B* (12; –15), *C* (18; 9).

1) Довести, що точки *A*, *B*, *C* не лежать на одній прямій.
2) Скласти рівняння сторін трикутника *ABC*.
3) Скласти рівняння прямої, що проходить через центр мас трикутника паралельно прямій *AC*.
4) Скласти рівняння висоти *BD*, знайти координати основи висоти *BD* трикутника *ABC*. Обчислити довжину висоти.
5) Скласти рівняння медіани *AM*.
6) Обчислити периметр ΔABC.
7) Обчислити площу ΔABC.
8) Визначити кути ΔABC.
9) Скласти рівняння прямої *A'B'*, симетричну прямій *AB* відносно точки *C*.
10) Зобразити ΔABC в прямокутній системі координат *xOy*.
11) Задати системою нерівностей множину точок ΔABC.

8. Записати рівняння площини, що проходить:

1) через точку *M* (1; 4; 3) паралельно до площини $4x+5y+2z+6=0$;

2) через точку M (1; –3; –3) перпендикулярно до прямої

$$\begin{cases} 4x-2y+2z-3=0; \\ -x+3y-3z+2=0; \end{cases}$$

3) через три точки A (1; –1; 1), B (–4; 1; 3), C (–2; 4; 2);

4) через пряму $\frac{x+3}{-4}=\frac{y+3}{-3}=\frac{z+2}{3}$ і точку М (3; 4; 4);

5) через паралельні прямі $\frac{x-18}{24}=\frac{y-4}{0}=\frac{z-1}{6}$ і $\frac{x+6}{24}=\frac{y-2}{0}=\frac{z+3}{6}$;

6) через точки M (5; 1; –1), N (4; 3; 4) паралельно до вектора $\vec{a}(0;-3;-3)$.

9. Обчислити кут та координати точки перетину прямої $\frac{x-3}{2}=\frac{y+3}{0}=\frac{z+1}{3}$ і площини $5x-2y+3z-56=0$.

10. Знайти відстань від точки M (3; 4; 3) до площини $6(x-3)+3(y-4)-6(z-3)=0$.

11. Знайти кут між площинами $-x-2y-2z-1=0$ і $-4(y-2)-3(z-3)=0$.

12. Знайти відстань від точки M (0; –2; 4) до прямої $\begin{cases} 5x+2y-4z+2=0; \\ 3x-2y+2z+4=0. \end{cases}$

13. Знайти точку A_1, симетричну точці A (–1; –1; 0) відносно площини $-3x+5y+2z+40=0$.

14. Задані мимобіжні прямі: $\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-4}{2}$, $\frac{x+4}{1}=\frac{y+3}{-3}=\frac{z+3}{3}$.

Виконати наступні дії:

1) провести площину, що проходить через першу пряму паралельно до другої прямої;
2) знайти відстань між прямими;
3) провести спільний перпендикуляр до прямих.

15. Задані вершини піраміди A (–1; 2; 2), B (2; 3; 4), C (0; –3; 1), D (–1; 3; –4).

1) Довести, що точки A, B, C, D не лежать в одній площині.
2) Знайти рівняння площин, які містять грані піраміди $ABCD$.
3) Скласти рівняння площини, що проходить через вершину D паралельно грані ABC.
4) Скласти рівняння площини, що проходить через ребро AB паралельно ребру CD.

5) Скласти рівняння прямої, що проходить через точки C, D.

6) Скласти рівняння прямої, що проходить через точку B паралельно ребру AC.

7) Знайти об'єм піраміди $ABCD$.

8) Знайти довжину висоти піраміди $ABCD$, що опущена з вершини D.

9) Знайти площу грані ABC.

10) Знайти кут між ребром AB та гранню BCD.

11) Скласти рівняння площини, що проходить через вершину D перпендикулярно до ребра AB.

12) Скласти рівняння висоти, що опущена з вершини D на грань ABC.

13) Знайти координати основи висоти DE тетраедра $ABCD$.

16. Знайти відстань між площинами $x+2y+2z-2=0$ і $x+2y+2z-10=0$.

17. Побудувати криві другого порядку в прямокутній системі координат: а) $(x+3)^2+(y+3)^2=4$; б) $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{25}=1$; в) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{9}=1$; г) $y^2=20x$.

18. Побудувати задані лінії в прямокутній системі координат й заштрихувати площу фігури, обмеженої ними: $y=\frac{1}{x}$, $x-y=0$, $x=4$.

19. Знайти найменшу відстань між двома колами $x^2+y^2+10y=-21$ і $x^2+y^2-16x+40y=-460$.

20. Звести криву другого порядку $8x^2+64x+7y^2+14y+79=0$ до канонічного вигляду, знайти всі її характеристики, побудувати графік кривої.

21. Побудувати криву, що задана параметрично $\begin{cases} x=7\sin^2 2t+4; \\ y=6-2\cos 2t. \end{cases}$

22. Знайти радіус кола, яке є перерізом сфери

$$x^2+y^2+z^2+12x-10y-12z=-63$$ площиною $z=1$.

22. Скласти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що $F\left(\sqrt{181};0\right)$, $a=10$.

24. Встановити тип і звести рівняння поверхні другого порядку до канонічного вигляду: $-5x^2+6y^2-5z^2-40x+60y-40z-160=0$.

25. З'ясувати, яка лінія відповідає заданому рівнянню $7x^2-4y^2=-8$:

1) Пара перетинаючих прямих;

2) Гіпербола;

3) Точка;

4) Пара паралельних прямих;

5) Еліпс;

6) Парабола.

26. Рівняння $9x^2-3y^2-6z=4$ описує:

1) Двопорожнинний гіперболоїд;
2) Циліндр;
3) Еліпсоїд;
4) Однопорожнинний гіперболоїд;
5) Гіперболічний параболоїд;
6) Еліптичний параболоїд.

27. Задані вершини трикутника *A* (2; –1), *B* (4; 5), *C* (–3; 2). Скласти рівняння прямої, що проходить через початок координат і центр ваги трикутника *ABC*.

28. Для паралелограма *ABCD* відомі: рівняння сторін $AB: 3x+4y-12=0$, $AD: 5x-12y-6=0$ та середина *E* (–2; 1) сторони *BC*. Знайти рівняння двох інших сторін паралелограма.

29. Записати рівняння площини, що проходить через точку *M* (1; 7; –5) паралельно до векторів $\vec{a}=\{3;0;1\}$ і $\vec{b}=\{1;2;3\}$.

30. При якому значенні *D* пряма $\begin{cases} 2x-y+3z+D=0; \\ x+3y-z=0 \end{cases}$ проходить через початок координат?

31. При якому значенні λ пряма $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+1}{\lambda}=\dfrac{z-3}{3}$ паралельна до площини $2x+y-z=0$?

Варіант 6

1. На осі *Oy* знайти точку, рівновіддалену від точок *A* (–4; 1; –5) і *B* (1; 3; –2).

2. Через точку *M* (3; –2) провести прямі паралельно і перпендикулярно до прямої $3x+4y+4=0$.

3. Обчислити тангенс кута між прямими $5x-2y+1=0$ і $y=-4x+3$.

4. Знайти відстань від точки *M* (4; –1) до прямої $-3x-4y-2=0$.

5. Привести до нормального вигляду рівняння прямої $-4x-3y-3=0$.

6. З точки *A* (4; 1) проведені промені до перетину з прямою $-4x+4y-20=0$ в точці *D*. Скласти рівняння множини точок *M*, таких, що *AM* : *MD* = 4 : 1.

7. Задані вершини трикутника *A* (–2; –4), *B* (6; –4), *C* (6; 8).

1) Довести, що точки *A*, *B*, *C*, не лежать на одній прямій.
2) Скласти рівняння сторін трикутника *ABCD*.
3) Скласти рівняння прямої, що проходить через центр мас трикутника паралельно прямій *AC*.

4) Скласти рівняння висоти *BD*, знайти координати основи висоти *BD* трикутника *ABC*. Обчислити довжину висоти.

5) Скласти рівняння медіани *AM*.

6) Обчислити периметр ΔABC.

7) Обчислити площу ΔABC.

8) Визначити кути ΔABC.

9) Скласти рівняння прямої $A'B'$, симетричну прямій *AB* відносно точки *C*.

10) Зобразити ΔABC в прямокутній системі координат *xOy*.

11) Задати системою нерівностей множину точок ΔABC.

8. Записати рівняння площини, що проходить

1) через точку *M* (4; –3; –1) паралельно до площини $9x-3y-2z-1=0$;

2) через точку М (5; –2; 4) перпендикулярно до прямої

$$\begin{cases} x=2t+1; \\ y=-2t+2; \\ z=3t+4; \end{cases}$$

3) через три точки *A* (2; 3; –1), *B* (4; 2; 0), *C* (2; 1; –2);

4) через пряму $\begin{cases} 6x-2y-3z+4=0; \\ -4x-2y-3z+1=0 \end{cases}$ і точку М (–1; 0; 1);

5) через паралельні прямі $\dfrac{x-16}{3}=\dfrac{y+4}{-2}=\dfrac{z+1}{1}$ і $\begin{cases} x=3t-11; \\ y=-2t+3; \\ z=t+1; \end{cases}$

6) через точки *M* (5; –1; 0), *N* (2; 6; 6) паралельно до вектора $\vec{a}(-1;2;-5)$.

9. Обчислити кут та координати точки перетину прямої $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-4}{-3}$ і площини $3x-3y+4z+32=0$.

10. Знайти відстань від точки *M* (–2; –3; –1) до площини $2(x+2)+1(y+3)-2(z+2)=0$.

11. Знайти кут між прямими $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-2}{-2}$ і $\dfrac{x+4}{-4}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z+2}{4}$.

12. Знайти відстань від точки *M* (5; –4; –4) до прямої $\dfrac{x+1}{-4}=\dfrac{y-4}{3}=\dfrac{z-2}{-1}$

13. Знайти точку A_1, симетричну точці *A* (–2; 1; –2) відносно площини $x+2y-2z+14=0$.

14. Задані мимобіжні прямі: $\frac{x+3}{3}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+3}{-1}, \frac{x-2}{0}=\frac{y-4}{1}=\frac{z+4}{-1}$. Виконати наступні дії:

1) провести площину, що проходить через першу пряму паралельно до другої прямої;
2) знайти відстань між прямими;
3) провести спільний перпендикуляр до прямих.

15. Задані вершини піраміди *A* (0; –4; –2), *B* (–4; –1; 2), *C* (1; –3; –2), *D* (0; 1; 0).

1) Довести, що точки *A*, *B*, *C*, *D* не лежать в одній площині.
2) Знайти рівняння площин, які містять грані піраміди *ABCD*.
3) Скласти рівняння площини, що проходить через вершину *D* паралельно грані *ABC*.
4) Скласти рівняння площини, що проходить через ребро *AB* паралельно ребру *CD*.
5) Скласти рівняння прямої, що проходить через точки *C*, *D*.
6) Скласти рівняння прямої, що проходить через точку *B* паралельно ребру *AC*.
7) Знайти об'єм піраміди *ABCD*.
8) Знайти довжину висоти піраміди *ABCD*, що опущена з вершини *D*.
9) Знайти площу грані *ABC*.
10) Знайти кут між ребром *AB* та гранню *BCD*.
11) Скласти рівняння площини, що проходить через вершину *D* перпендикулярно до ребра *AB*.
12) Скласти рівняння висоти, що опущена з вершини *D* на грань *ABC*.
13) Знайти координати основи висоти *DE* тетраедра *ABCD*.

16. Знайти відстань між площинами $x-2y+2z-6=0$ і $1(x-2)-2(y-4)+2(z-2)=0$.

17. Побудувати криві другого порядку в прямокутній системі координат:

а) $(x-1)^2+(y+1)^2=1$; б) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$; в) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$; г) $y^2=4x$.

18. Побудувати задані лінії в прямокутній системі координат й заштрихувати площу фігури, обмеженої ними: $(y-2)^2=x$, $(x-4)^2+(y+4)^2=16$, $x=4$.

19. Знайти найменшу відстань між двома колами $x^2+y^2+10x+10y=-14$ і $x^2+y^2-8x+34y=-289$.

20. Звести криву другого порядку $-4x^2+8x+5y-28=0$ до канонічного вигляду, знайти всі її характеристики, побудувати графік кривої.

21. Побудувати криву, що задана параметрично $\begin{cases} x = 7\cos 2t + 1; \\ y = 4\sin 2t - 1. \end{cases}$

22. Знайти радіус кола, яке є перерізом сфери
$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 8y + 10z = -5$ площиною $y = 6$.

23. Скласти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що $F\left(0; \sqrt{130}\right)$, $b = 9$.

24. Встановити тип і звести рівняння поверхні другого порядку до канонічного вигляду: $7x^2 - 6y^2 - 5z^2 - 28x - 48y - 5z - 51 = 0$.

25. З'ясувати, яка лінія відповідає заданому рівнянню $8x^2 = 5y^2$:

1) Парабола;
2) Точка;
3) Гіпербола;
4) Пара перетинаючих прямих;
5) Еліпс;
6) Пара паралельних прямих.

26. Рівняння $3x^2 - 2y^2 + 8z = -8$ описує:

1) Еліптичний параболоїд;
2) Циліндр;
3) Двопорожнинний гіперболоїд;
4) Еліпсоїд;
5) Гіперболічний параболоїд;
6) Однопорожнинний гіперболоїд.

27. Задані вершини трикутника A (2; 0), B (5; 3), C (3; 7). Скласти рівняння прямої, що проходить через вершину B паралельно медіані AM трикутника.

28. Знайти проекцію точки A (1; 1) на пряму $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+1,5}{-2}$.

29. Записати рівняння площини, що проходить через точки A (2; 3; –1) і B (1; 5; 3) перпендикулярно до площини $3x - y + 3z + 15 = 0$.

30. Написати канонічне рівняння прямої, що проходить через M (2; 1; 3) паралельно до прямої $\begin{cases} x = 3 + t; \\ y = 3t; \\ z = 2 - t. \end{cases}$

31. При якому значенні a площина $ax + 2y - z + 3 = 0$ паралельна до прямої $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{3} = \dfrac{z-1}{-2}$?

Варіант 7

1. На осі Oz знайти точку, рівновіддалену від точок A (3; 3; –5) і B (6; –2; 0).

2. Через точку M (–1; –3) провести прямі паралельно і перпендикулярно до прямої $y = -2x - 1$.

3. Обчислити тангенс кута між прямими $4x - 2y + 1 = 0$ і $y = -4x - 3$.

4. Знайти відстань від точки M (–1; 2) до прямої $4(x+1) + 2(y+3) = 0$.

5. Привести до нормального вигляду рівняння прямої $\frac{x}{3} - \frac{y}{4} = 1$.

6. З точки A (6; 6) проведені промені до перетину з прямою $6x - 3y - 27 = 0$ в точці D. Скласти рівняння множини точок M, таких, що $AM : MD = 1 : 2$.

7. Задані вершини трикутника A (–2; 1), B (–2; 6), C (6; 5).

1) Довести, що точки A, B, C не лежать на одній прямій.
2) Скласти рівняння сторін трикутника ABC.
3) Скласти рівняння прямої, що проходить через центр мас трикутника паралельно прямій AC.
4) Скласти рівняння висоти BD, знайти координати основи висоти BD трикутника ABC. Обчислити довжину висоти.
5) Скласти рівняння медіани АМ.
6) Обчислити периметр ΔABC.
7) Обчислити площу ΔABC.
8) Визначити кути ΔABC.
9) Скласти рівняння прямої $A'B'$, симетричну прямій AB відносно точки C.
10) Зобразити ΔABC в прямокутній системі координат xOy.
11) Задати системою нерівностей множину точок ΔABC.

8. Записати рівняння площини, що проходить:

1) через точку M (–3; –2; 2) паралельно до площини $5x + 8y + 4z - 2 = 0$;
2) через точку М (–2; 2; –2) перпендикулярно до прямої
$$\begin{cases} 3x - 3y - 2z + 4 = 0; \\ y + 3z + 3 = 0; \end{cases}$$
3) через три точки A (–4; –2; –1), B (1; 4; 1), C (3; –1; 3);
4) через пряму $\begin{cases} 4x + 3y - 4z + 3 = 0; \\ -x - 3y + 2z - 4 = 0 \end{cases}$ і точку M (2; 1; 3);

5) через паралельні прямі $\frac{x+19}{12}=\frac{y+4}{3}=\frac{z-3}{0}$ і $\begin{cases} x=12t-13; \\ y=3t-3; \\ z=2; \end{cases}$

6) через точки M (2; –5; 4), N (–4; 3; 2) паралельно до вектора $\vec{a}\left(-4;1;-5\right)$.

9. Обчислити кут та координати точки перетину прямої $\frac{x-4}{-1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-2}{1}$ і площини $6x-2y+2z+16=0$.

10. Знайти відстань від точки M (1; –2; –2) до площини $8x+4y-z+4=0$.

11. Знайти кут між площинами $4x+8y+8z-7=0$ і $-2\left(x+2\right)-\left(y-4\right)+2\left(z+2\right)=0$.

12. Знайти відстань від точки M (6; 4; 2) до прямої $\frac{x-5}{1}=\frac{y+3}{-4}=\frac{z+3}{1}$

13. Знайти точку A_1, симетричну точці A (7; 3; –9) відносно площини $2x+y-2z-14=0$.

14. Задані мимобіжні прямі: $\begin{cases} x=-t-3; \\ y=-3t-1; \\ z=-2t+4, \end{cases}$ $\frac{x-3}{4}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z+3}{1}$.

Виконати наступні дії:

1) провести площину, що проходить через першу пряму паралельно до другої прямої;
2) знайти відстань між прямими;
3) провести спільний перпендикуляр до прямих.

15. Задані вершини піраміди A (2; –4; 1), B (2; –4; 3), C (0; –1; 2), D (1; –4; 0).

1) Довести, що точки A, B, C, D не лежать в одній площині.
2)Знайти рівняння площин, які містять грані піраміди $ABCD$.
3) Скласти рівняння площини, що проходить через вершину D паралельно грані ABC.
4) Скласти рівняння площини, що проходить через ребро AB паралельно ребру CD.
5) Скласти рівняння прямої, що проходить через точки C, D.
6) Скласти рівняння прямої, що проходить через точку B паралельно ребру AC.
7) Знайти об’єм піраміди $ABCD$.
8) Знайти довжину висоти піраміди $ABCD$, що опущена з вершини D.
9) Знайти площу грані ABC.

10) Знайти кут між ребром AB та гранню BCD.

11) Скласти рівняння площини, що проходить через вершину D перпендикулярно до ребра AB.

12) Скласти рівняння висоти, що опущена з вершини D на грань ABC.

13) Знайти координати основи висоти DE тетраедра $ABCD$.

16. Знайти відстань між площинами $-3x+6y+2z+1=0$ і $-3(x-1)+6(y-2)+2(z-1)=0$.

17. Побудувати криві другого порядку в прямокутній системі координат:

а) $(x+2)^2+(y-1)^2=36$; б) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$; в) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1$; г) $y^2=2x$.

18. Побудувати задані лінії в прямокутній системі координат й заштрихувати площу фігури, обмеженої ними: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$, $x^2-y^2=1$, $x+5=0$.

19. Знайти найменшу відстань між двома колами $x^2+y^2+6x+10y=-18$ і $x^2+y^2-24x-6y=-152$.

20. Звести криву другого порядку $-6x+3y^2+18y-9=0$ до канонічного вигляду, знайти всі її характеристики, побудувати графік кривої.

21. Побудувати криву, що задана параметрично $\begin{cases} x=3\cos^2 3t+3; \\ y=6-2\sin 3t. \end{cases}$

22. Знайти радіус кола, яке є перерізом сфери

$x^2+y^2+z^2-14x-16y+2z=-101$ площиною $x=5$.

23. Скласти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що $F\left(\sqrt{19};0\right)$, $a=10$.

24. Встановити тип і звести рівняння поверхні другого порядку до канонічного вигляду: $8x^2-4y^2+5z^2+48x-8y-20z+88=0$.

25. З’ясувати, яка лінія відповідає заданому рівнянню $4x^2-3y^2=2$:

1) Точка;

2) Пара паралельних прямих;

3) Парабола;

4) Пара перетинаючих прямих;

5) Гіпербола;

6) Еліпс.

26. Рівняння $3x^2+2y^2-7z=0$ описує:

1) Еліптичний параболоїд;

2) Двопорожнинний гіперболоїд;

3) Однопорожнинний гіперболоїд;

4) Циліндр;

5) Гіперболічний параболоїд;

6) Еліпсоїд;

7) Конус.

27. Задані вершини трикутника A (1; –2), B (–1; 3), C (3; 2). Скласти рівняння прямих, що проходять через вершини трикутника паралельно його сторонам.

28. Записати рівняння сторін трикутника ABC, якщо задано координати однієї з його вершин A (1; 2) і рівняння висоти $x-2y+1=0$ та медіани $4x+y+2=0$, які виходять із однієї вершини трикутника.

29. Записати рівняння площини, що проходить через точку M (2; –3; 5) перпендикулярно до лінії перетину двох площин $2x+y+-2z+1=0$ і $x+y+z-5=0$.

30. Задані вершини трикутника A (1; 0; –1), B (2; 1; 3), C (0; –1; 1). Скласти параметричні рівняння висоти, опущеної з вершини B на сторону AC.

31. При яких значеннях a і b площина $ax+by-2z+1=0$ перпендикулярна до прямої $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+2}{-1}$?

Варіант 8

1. На осі Ox знайти точку, рівновіддалену від точок A (–1; –3; –3) і B (–3; 1; –4).

2. Через точку M (1; 4) провести прямі паралельно і перпендикулярно до прямої $4x+3y-2=0$.

3. Обчислити тангенс кута між прямими $6x-3y+2=0$ і $y=-4x+1$.

4. Знайти відстань від точки M (0; –1) до прямої $4x+3y+8=0$.

5. Привести до нормального вигляду рівняння прямої $3x-4y+10=0$.

6. З точки A (8; 1) проведені промені до перетину з прямою $-2x+3y+8=0$ в точці D. Скласти рівняння множини точок M, таких, що $AM : MD = 4 : 1$.

7. Задані вершини трикутника A (1; –2), B (7; –9), C (9; 0).

1) Довести, що точки A, B, C не лежать на одній прямій.
2) Скласти рівняння сторін трикутника ABC.
3) Скласти рівняння прямої, що проходить через центр мас трикутника паралельно прямій AC.
4) Скласти рівняння висоти BD, знайти координати основи висоти BD трикутника ABC. Обчислити довжину висоти.
5) Скласти рівняння медіани AM.
6) Обчислити периметр $\triangle ABC$.

7) Обчислити площу $\triangle ABC$.

8) Визначити кути $\triangle ABC$.

9) Скласти рівняння прямої $A'B'$, симетричну прямій AB відносно точки C.

10) Зобразити $\triangle ABC$ в прямокутній системі координат xOy.

11) Задати системою нерівностей множину точок $\triangle ABC$.

8. Записати рівняння площини, що проходить:

1) через точку $M(-1;3;-3)$ паралельно до площини $5x+2y-3z-2=0$;

2) через точку M (4; 2; –2) перпендикулярно до прямої

$$\frac{x-1}{-1}=\frac{y-4}{1}=\frac{z-2}{0};$$

3) через три точки A (4; –3; 1), B (1; 0; 4), C (2; 1; –2);

4) через пряму $\frac{x+2}{4}=\frac{y-3}{0}=\frac{z-3}{-2}$ і точку M (3; –4; 4);

5) через паралельні прямі $\frac{x-3}{14}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-4}{2}$ і $\begin{cases} x=14t-10; \\ y=4t-3; \\ z=2t+1; \end{cases}$

6) через точки M (6; –3; –5), N (1; –3; –5) паралельно до вектора $\vec{a}(2;5;6)$.

9. Обчислити кут та координати точки перетину прямої $\frac{x}{1}=\frac{y-4}{0}=\frac{z-4}{3}$ і площини $2x+3y-2z+8=0$.

10. Знайти відстань від точки M (–2; 3; 2) до площини $1(x+2)-2(y-3)+2(z+2)=0$.

11. Знайти кут між прямими $\begin{cases} x=-2t+2; \\ y=t; \\ z=-2t-3 \end{cases}$ і $\frac{x-4}{2}=\frac{y-3}{4}=\frac{z+3}{4}$.

12. Знайти відстань від точки M (1; –3; 4) до прямої $\begin{cases} 2x+4y+3z-1=0; \\ -4x+4y+2z+3=0 \end{cases}$

13. Знайти точку A_1, симетричну точці A (–5; 1; 3) відносно площини $-4x+3y+4z+6=0$.

14. Задані мимобіжні прямі: $\begin{cases} x=2t-2; \\ y=-2t+4; \\ z=t-2, \end{cases}$ $\frac{x-2}{3}=\frac{y+4}{0}=\frac{z+3}{-4}$.

Виконати наступні дії:

1) провести площину, що проходить через першу пряму паралельно до другої прямої;

2) знайти відстань між прямими;

3) провести спільний перпендикуляр до прямих.

15. Задані вершини піраміди A (3; –2; –3), B (–3; –4; –4), C (–1; 1; –4), D (–2; 0; 2).

1) Довести, що точки A, B, C, D не лежать в одній площині.

2) Знайти рівняння площин, які містять грані піраміди $ABCD$.

3) Скласти рівняння площини, що проходить через вершину D паралельно грані ABC.

4) Скласти рівняння площини, що проходить через ребро AB паралельно ребру CD.

5) Скласти рівняння прямої, що проходить через точки C, D.

6) Скласти рівняння прямої, що проходить через точку B паралельно ребру AC.

7) Знайти об'єм піраміди $ABCD$.

8) Знайти довжину висоти піраміди $ABCD$, що опущена з вершини D.

9) Знайти площу грані ABC.

10) Знайти кут між ребром AB та гранню BCD.

11) Скласти рівняння площини, що проходить через вершину D перпендикулярно до ребра AB.

12) Скласти рівняння висоти, що опущена з вершини D на грань ABC.

13) Знайти координати основи висоти DE тетраедра $ABCD$.

16. Знайти відстань між площинами $-3x+6y+6z=0$ і $-3(x+2)+6(y+1)+6(z+2)=0$.

17. Побудувати криві другого порядку в прямокутній системі координат:

а) $(x-4)^2+(y+2)^2=49$; б) $\dfrac{x^2}{49}+\dfrac{y^2}{36}=1$; в) $\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{9}=1$; г $y^2=6x$.

18. Побудувати задані лінії в прямокутній системі координат й заштрихувати площу фігури, обмеженої їними: $(x-2)^2+y^2=4,\quad y^2=-(x-2),\quad x=-2.$

19. Знайти найменшу відстань між двома колами $x^2+y^2-8x+4y=5$ і $x^2+y^2-32x-28y=-416$.

20. Звести криву другого порядку $5x^2-3y^2+24y-33=0$ до канонічного вигляду, знайти всі її характеристики, побудувати графік кривої.

21. Побудувати криву, що задана параметрично $\begin{cases} x=4\sin 3t-4; \\ y=6\cos 3t-3. \end{cases}$

22. Знайти радіус кола, яке є перерізом сфери

$x^2+y^2+z^2-10x+10y-8z=-26$ площиною $z=6$.

23. Скласти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що $F\left(0;\sqrt{72}\right)$, $b=9$.

24. Встановити тип і звести рівняння поверхні другого порядку до канонічного вигляду: $3x^2+2y^2-2z^2+18x-24y-4z+109=0$.

25. З'ясувати, яка лінія відповідає заданому рівнянню $7x^2+3y=9$:

1) Точка;
2) Пара паралельних прямих;
3) Пара перетинаючих прямих;
4) Еліпс;
5) Парабола;
6) Гіпербола.

26. Рівняння $4x^2-6y^2-2z=0$ описує:

1) Конус;
2) Гіперболічний параболоїд;
3) Еліптичний параболоїд;
4) Циліндр;
5) Однопорожнинний гіперболоїд;
6) Двопорожнинний гіперболоїд;
7) Еліпсоїд.

27. Для трикутника *ABC* відомі: рівняння двох сторін $x-2y-1=0, 2x-y-2=0$, а також середина третьої сторони *M* (1; 1). Знайти координати вершин трикутника.

28. Знайти основу перпендикуляра, проведеного з початку координат на пряму $l: x-y-17=0$.

29. Записати рівняння площини, що проходить через точки $P(0;1;0)$, $Q(-1;3;2)$ і відтинає на осі абсцис відрізок довжиною у два рази більший, ніж на осі ординат.

30. При якому значенні λ прямі $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{\lambda}=\frac{z}{3}$ та $\begin{cases}3x+y-5z+1=0;\\2x+3y-8z+3=0\end{cases}$ перпендикулярні?

31. Задані точки *A* (1; 3; –2) і *B* (7; –4; 4). Записати рівняння площини, що проходить через точку *B* перпендикулярно до відрізка *AB*.

Варіант 9

1. На осі *Oy* знайти точку, рівновіддалену від точок *A* (–4; 3; 5) і *B* (–3; 5; –1).

2. Через точку *M* (1; –1) провести прямі паралельно і перпендикулярно до прямої $y=-3x-2$.

3. Обчислити тангенс кута між прямими $4x+3y-1=0$ і $y=-2x+2$.

4. Знайти відстань від точки *M* (1; –1) до прямої $9(x-4)-2(y+1)=0$.

5. Привести до нормального вигляду рівняння прямої $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$.

6. З точки *A* (–4; –6) проведені промені до перетину з прямою $-3x-2y+1=0$ в точці *D*. Скласти рівняння множини точок *M*, таких, що *AM* : *MD* = 1 : 4.

7. Задані вершини трикутника *A* (0; 1), *B* (17; –10), *C* (10; 9).

1) Довести, що точки *A*, *B*, *C* не лежать на одній прямій.
2) Скласти рівняння сторін трикутника *ABC*.
3) Скласти рівняння прямої, що проходить через центр мас трикутника паралельно прямій *AC*.
4) Скласти рівняння висоти *BD*, знайти координати основи висоти *BD* трикутника *ABC*. Обчислити довжину висоти.
5) Скласти рівняння медіани *AM*.
6) Обчислити периметр $\triangle ABC$.
7) Обчислити площу $\triangle ABC$.
8) Визначити кути $\triangle ABC$.
9) Скласти рівняння прямої $A'B'$, симетричну прямій *AB* відносно точки *C*.
10) Зобразити $\triangle ABC$ в прямокутній системі координат *xOy*.
11) Задати системою нерівностей множину точок $\triangle ABC$.

8. Записати рівняння площини, що проходить:

1) через точку *M* (2; 1; 3) паралельно до площини $-2x+4y-6z-3=0$;
2) через точку *M* (–3; –1; –2) перпендикулярно до прямої
$$\begin{cases}2x+4y+3z-2=0;\\-x+3y+z=0;\end{cases}$$
3) через три точки *A* (–3; –1; –3), *B* (–1; –1; 4), *C* (2; 1; 2);
4) через пряму $\frac{x}{-2}=\frac{y-4}{-3}=\frac{z+1}{3}$ і точку *M* (4; –2; 2)
5) через паралельні прямі $\frac{x+6}{12}=\frac{y+1}{0}=\frac{z+3}{4}$ і $\begin{cases}x=3t+6;\\y=-1;\\z=t+1;\end{cases}$
6) через точки *M* (–2; –1; 5), *N* (–3; –1; 6) паралельно до вектора $\vec{a}(2;4;5)$.

9. Обчислити кут та координати точки перетину прямої $\frac{x+1}{2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z+1}{2}$ і площини $3x-2y-2z-5=0$.

10. Знайти відстань від точки *M* (0; 2; 1) до площини $6x+2y+9z+4=0$.

11. Знайти кут між площинами $9x+6y+2z-1=0$ і $2(x+1)+4(y-3)-4(z+1)=0$.

12. Знайти відстань від точки *M* (–2; 4; –3) до прямої $\begin{cases}4x-2y+3z=0;\\ 4x+2y-2z=0.\end{cases}$

13. Знайти точку A_1, симетричну точці *A* (–11; 5; –10) відносно площини $-5x+2y-6z-60=0$.

14. Задані мимобіжні прямі: $\frac{x-1}{-3}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-4}{-1}$, $\frac{x-3}{4}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z+3}{1}$.

Виконати наступні дії:

1) провести площину, що проходить через першу пряму паралельно до другої прямої;
2) знайти відстань між прямими;
3) провести спільний перпендикуляр до прямих.

15. Задані вершини піраміди *A* (3; –1; 2), *B* (0; –1; 4), *C* (–4; 0; 3), *D* (–3; 2; –3).

1) Довести, що точки *A*, *B*, *C*, *D* не лежать в одній площині.
2) Знайти рівняння площин, які містять грані піраміди *ABCD*.
3) Скласти рівняння площини, що проходить через вершину *D* паралельно грані *ABC*.
4) Скласти рівняння площини, що проходить через ребро *AB* паралельно ребру *CD*.
5) Скласти рівняння прямої, що проходить через точки *C*, *D*.
6) Скласти рівняння прямої, що проходить через точку *B* паралельно ребру *AC*.
7) Знайти об’єм піраміди *ABCD*.
8) Знайти довжину висоти піраміди *ABCD*,що опущена з вершини *D*.
9) Знайти площу грані *ABC*.
10) Знайти кут між ребром *AB* та гранню *BCD*.
11) Скласти рівняння площини, що проходить через вершину *D* перпендикулярно до ребра *AB*.
12) Скласти рівняння висоти, що опущена з вершини *D* на грань *ABC*.
13) Знайти координати основи висоти *DE* тетраедра *ABCD*.

16. Знайти відстань між площинами $6x-3y-6z-3=0$ і $6(x+1)-3(y-2)-6(z+1)=0$.

17. Побудувати криві другого порядку в прямокутній системі координат:

а) $(x+4)^2+(y-4)^2=9$; б) $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{9}=1$; в) $\dfrac{x^2}{36}-\dfrac{y^2}{16}=1$; г) $y^2=x$.

18. Побудувати задані лінії в прямокутній системі координат й заштрихувати площу фігури, обмеженої ними: $y^2=-(x-2)$, $(x-2)^2=y$, $x-1=0$.

19. Знайти найменшу відстань між двома колами $x^2+y^2-6x-14y=-57$ і $x^2+y^2-38x+10y=-350$.

20. Звести криву другого порядку $-6x^2+72x-4y-210=0$ до канонічного вигляду, знайти всі її характеристики, побудувати графік кривої.

21. Побудувати криву, що задана параметрично $\begin{cases} x=7\cos 4t-3; \\ y=5\sin^2 4t+3. \end{cases}$

22. Знайти радіус кола, яке є перерізом сфери

$x^2+y^2+z^2-16x+4y+12z=-59$ площиною $y=4$.

23. Скласти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що $F\left(\sqrt{149};\,0\right)$, $a=10$.

24. Встановити тип і звести рівняння поверхні другого порядку до канонічного вигляду: $x^2+4y^2-4z^2+6x-24y-4z+77=0$.

25. З'ясувати, яка лінія відповідає заданому рівнянню $8x^2+2y^2=8$:

1) Точка;
2) Пара паралельних прямих;
3) Парабола;
4) Пара перетинаючих прямих;
5) Гіпербола;
6) Еліпс.

26. Рівняння $4x^2-2y^2=5$ описує:

1) Еліптичний параболоїд;
2) Двопорожнинний гіперболоїд;
3) Однопорожнинний гіперболоїд;
4) Циліндр;
5) Гіперболічний параболоїд;
6) Еліпсоїд;
7) Конус.

27. Задані вершини трикутника A (2; 1), B (4; –5), C (–3; 3). Записати рівняння прямої, яка проходить через початок координат і ортоцентр трикутника ABC.

28. Знайти координати точки B, симетричної точці A (4; –3) відносно прямої, що проходить через точки M (1; –2) та N (–3; 2).

29. Площина проходить через вісь Oz і утворюю з площиною $2x + y - \sqrt{5}z = 0$ кут $\frac{\pi}{3}$. Знайти її рівняння.

30. Написати параметричні рівняння прямої, що проходить через точку M (2; –1; 3) і паралельна прямій $\begin{cases} x - y + 2z - 1 = 0; \\ 3x + 2y - z + 2 = 0. \end{cases}$

31. При яких значеннях a і b пряма $\frac{x+a}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+2}{-1}$ належить площині $bx + 2y - z + 1 = 0$?

Варіант 10

1. На осі Oz знайти точку, рівновіддалену від точок A (1; 1; –3) і B (6; 1; 1).

2. Через точку M (–3; 1) провести прямі паралельно і перпендикулярно до прямої $6x + 4y - 2 = 0$.

3. Обчислити тангенс кута між прямими $6x + 3y + 3 = 0$ і $y = -2x + 2$.

4. Знайти відстань від точки M (1; 2) до прямої $-3x - 4y + 10 = 0$.

5. Привести до нормального вигляду рівняння прямої $6x + 8y - 1 = 0$.

6. З точки A (–3; –1) проведені промені до перетину з прямою $3x - 3y + 6 = 0$ в точці D. Скласти рівняння множини точок M, таких, що AM : MD = 5 : 1.

7. Задані вершини трикутника A (3; –2), B (7; –5), C (11; 2).

1) Довести, що точки A, B, C не лежать на одній прямій.
2) Скласти рівняння сторін трикутника ABC.
3) Скласти рівняння прямої, що проходить через центр мас трикутника паралельно прямій AC.
4) Скласти рівняння висоти BD, знайти координати основи висоти BD трикутника ABC. Обчислити довжину висоти.
5) Скласти рівняння медіани AM.
6) Обчислити периметр ΔABC.
7) Обчислити площу ΔABC.
8) Визначити кути ΔABC.
9) Скласти рівняння прямої $A'B'$, симетричну прямій AB відносно точки C.
10) Зобразити ΔABC в прямокутній системі координат xOy.
11) Задати системою нерівностей множину точок ΔABC.

8. Записати рівняння площини, що проходить:

1) через точку M (1; 3; –2) паралельно до площини $7x + 2y + 3z + 5 = 0$;

2) через точку M (5; –2; –3) перпендикулярно до прямої $\frac{x+2}{0}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+3}{0}$;

3) через три точки A (1; 4; 4), B (–2; –2; –2), C (–1; –2; –4);

4) через пряму $\begin{cases} 5x-3y+3z+4=0; \\ -3x-4y+4z=0 \end{cases}$ і точку M (1; –2; 1)

5) через паралельні прямі $\frac{x-15}{-12}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+2}{6}$ і $\begin{cases} x=-4t+3; \\ y=t-3; \\ z=2t-3; \end{cases}$

6) через точки M (3; 6; 3), N (–2; –2; –2) паралельно до вектора $\vec{a}(-4;-4;0)$.

9. Обчислити кут та координати точки перетину прямої $\frac{x-1}{-1}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{2}$ і площини $5x+2y+2z+20=0$.

10. Знайти відстань від точки M (–3; 2; –3) до площини $1(x+3)+2(y-2)+2(z+3)=0$.

11. Знайти кут між прямими $\frac{x+3}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-3}{-2}$ і $\frac{x+2}{2}=\frac{y+2}{-4}=\frac{z+4}{-4}$.

12. Знайти відстань від точки M (4; 2; –3) до прямої $\frac{x-1}{-3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-2}{2}$

13. Знайти точку A_1, симетричну точці A (5; –4; 8) відносно прямої $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-5}=\frac{z-3}{-2}$.

14. Задані мимобіжні прямі: $\begin{cases} x=-3t-4; \\ y=3t+1; \\ z=-t-4, \end{cases}$ $\frac{x-4}{0}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+2}{0}$.

Виконати наступні дії:

1) провести площину, що проходить через першу пряму паралельно до другої прямої;
2) знайти відстань між прямими;
3) провести спільний перпендикуляр до прямих.

15. Задані вершини піраміди A (4; 1; –4), B (–4; –2; 1), C (0; 2; 1), D (–1; –2; 0).

1) Довести, що точки A, B, C, D не лежать в одній площині.
2) Знайти рівняння площин, які містять грані піраміди $ABCD$.
3) Скласти рівняння площини, що проходить через вершину D паралельно грані ABC.
4) Скласти рівняння площини, що проходить через ребро AB паралельно ребру CD.
5) Скласти рівняння прямої, що проходить через точки C, D.

6) Скласти рівняння прямої, що проходить через точку B паралельно ребру AC.

7) Знайти об’єм піраміди $ABCD$.

8) Знайти довжину висоти піраміди $ABCD$, що опущена з вершини D.

9) Знайти площу грані ABC.

10) Знайти кут між ребром AB та гранню BCD.

11) Скласти рівняння площини, що проходить через вершину D перпендикулярно до ребра AB.

12) Скласти рівняння висоти, що опущена з вершини D на грань ABC.

13) Знайти координати основи висоти DE тетраедра $ABCD$.

16. Знайти відстань між площинами $3x+6y-6z+7=0$ і $3(x-1)+6(y+1)-6(z-1)=0$.

17. Побудувати криві другого порядку в прямокутній системі координат:

а) $(x-5)^2+(y+1)^2=4$; б) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$; в) $\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{9}=1$; г) $y^2=8x$.

18. Побудувати задані лінії в прямокутній системі координат й заштрихувати площу фігури, обмеженої ними: $x^2=-(y-4)$, $2x-y-4=0$, $y-4=0$.

19. Знайти найменшу відстань між двома колами $x^2+y^2+4y=0$ і $x^2+y^2-16x+34y=-328$.

20. Звести криву другого порядку $8x+2y^2+20y+25=0$ до канонічного вигляду, знайти всі її характеристики, побудувати графік кривої.

21. Побудувати криву, що задана параметрично $\begin{cases} x=7\sin 2t-1; \\ y=4\cos 2t+5. \end{cases}$

22. Знайти радіус кола, яке є перерізом сфери

$x^2+y^2+z^2-8x+8y-18z=-48$ площиною $x=$ 5.

23. Скласти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що $F\left(0;\sqrt{85}\right)$, $b=7$.

24. Встановити тип і звести рівняння поверхні другого порядку до канонічного вигляду: $4x^2+7y^2-z^2-42y+10z+38=0$.

25. З’ясувати, яка лінія відповідає заданому рівнянню $4x^2+3y^2=0$:

1) Гіпербола;

2) Пара перетинаючих прямих;

3) Пара паралельних прямих;

4) Парабола;

5) Еліпс;

6) Точка.

26. Рівняння $2x^2+7y^2=8$ описує:

1) Гіперболічний параболоїд;
2) Еліптичний циліндр;
3) Конус;
4) Двопорожнинний гіперболоїд;
5) Гіперболічний циліндр;
6) Однопорожнинний гіперболоїд.

27. При якому значенні *p* прямі $3x-py-3=0$ і $2x+4y-7=0$ паралельні?

28. Відомі дві суміжні вершини *A* (5; –2) та *B* (3; 1) паралелограма *ABCD* і *Q* (0; 2) — точка перетину його діагоналей. Скласти рівняння сторін *BC* та C*D* і прямої, яка проходить через точку *Q* паралельно до сторони *BC*.

29. Записати рівняння площини, що проходить через точки *A* (–1; 2; 1) і *B* (3; 0; 2) паралельно до осі *Oy*.

30. Записати канонічне рівняння перпендикуляра, опущеного з початку координат на пряму $\frac{x-5}{4}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+1}{-2}$.

31. Знайти координати точки *B*, симетричної точці *A* (2; 0; 1) відносно площини $3x+6y-6z+7=0$.

Варіант 11

1. На осі *Ox* знайти точку, рівновіддалену від точок *A* (3; –4; –4) і *B* (1; –5; 3).

2. Через точку *M* (4; 4) провести прямі паралельно і перпендикулярно до прямої $6x+2y+3=0$.

3. Обчислити тангенс кута між прямими $4x+2y+2=0$ і $y=3x-1$.

4. Знайти відстань від точки *M* (0; 3) до прямої $4x+3y+8=0$.

5. Привести до нормального вигляду рівняння прямої $6x+8y-7=0$.

6. Із точки *A* (6; –6) проведені промені до перетину з прямою $-3x-4y+8=0$ в точці *D*. Скласти рівняння множини точок *M*, таких, що *AM* : *MD* = 1 : 1.

7. Задані вершини трикутника *A* (–1; 3), *B* (1; 19), *C* (14; 6).

1) Довести, що точки *A*, *B*, *C* не лежать на одній прямій.
2) Скласти рівняння сторін трикутника *ABC*.

3) Скласти рівняння прямої, що проходить через центр мас трикутника паралельно прямій AC.

4) Скласти рівняння висоти BD, знайти координати основи висоти BD трикутника ABC. Обчислити довжину висоти.

5) Скласти рівняння медіани AM.

6) Обчислити периметр ΔABC.

7) Обчислити площу ΔABC.

8) Визначити кути ΔABC.

9) Скласти рівняння прямої $A'B'$, симетричну прямій AB відносно точки C.

10) Зобразити ΔABC в прямокутній системі координат xOy.

11) Задати системою нерівностей множину точок ΔABC.

8. Записати рівняння площини, що проходить:

1) через точку $M(0;-2;-1)$ паралельно до площини $3x+10y-4z+6=0$;

2) через точку M (–3; 1; –1) перпендикулярно до прямої

$$\begin{cases} 6x+4y+3z-2=0; \\ -2x+2y-1=0; \end{cases}$$

3) через три точки A (–3; –1; 2), B (3; 0; 1), C (–1; 2; –1);

4) через пряму $\begin{cases} 4x-3y-2z+4=0; \\ 3x-3y-2z+2=0 \end{cases}$ і точку M (–3; –4; –3);

5) через паралельні прямі $\dfrac{x-12}{9}=\dfrac{y+4}{-4}=\dfrac{z-2}{1}$ і $\dfrac{x-2}{9}=\dfrac{y-1}{-4}=\dfrac{z-2}{1}$;

6) через точки M (–4; –3; 3), N (–1; 5; –1) паралельно до вектора $\vec{a}\left(4;-4;-4\right)$.

9. Обчислити кут та координати точки перетину прямої $\dfrac{x+3}{-1}=\dfrac{y+3}{1}=\dfrac{z-4}{0}$ і площини $4x+3y+3z+12=0$.

10. Знайти відстань від точки M (0; 2; 2) до площини $6x-2y+9z+5=0$.

11. Знайти кут між прямими $\dfrac{x+1}{0}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z+3}{0}$ і $\begin{cases} x=-2t-4; \\ y=4t+4; \\ z=-4t. \end{cases}$

12. Знайти відстань від точки $M(-4;-3;1)$ до прямої $\begin{cases} 2x+4y+3z+4=0; \\ x-y-3z+1=0. \end{cases}$

13. Знайти точку A_1, симетричну точці A (5; 8; 1) відносно площини $3x+6y-2z-12=0$.

14. Задані мимобіжні прямі: $\frac{x+4}{-2}=\frac{y-4}{-3}=\frac{z-1}{1}$, $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{3}$.

Виконати наступні дії:

1) провести площину, що проходить через першу пряму паралельно до другої прямої;
2) знайти відстань між прямими;
3) провести спільний перпендикуляр до прямих.

15. Задані вершини піраміди *A* (–2; –1; 0), *B* (2; 2; –2), *C* (–3; –1; 4), *D* (–3; –4; 4).

1) Довести, що точки *A, B, C, D* не лежать в одній площині.
2) Знайти рівняння площин, які містять грані піраміди *ABCD*.
3) Скласти рівняння площини, що проходить через вершину *D* паралельно грані *ABC*.
4) Скласти рівняння площини, що проходить через ребро *AB* паралельно ребру *CD*.
5) Скласти рівняння прямої, що проходить через точки *C*, *D*.
6) Скласти рівняння прямої, що проходить через точку *B* паралельно ребру *AC*.
7) Знайти об'єм піраміди *ABCD*.
8) Знайти довжину висоти піраміди *ABCD*, що опущена з вершини *D*.
9) Знайти площу грані *ABC*.
10) Знайти кут між ребром *AB* та гранню *BCD*.
11) Скласти рівняння площини, що проходить через вершину *D* перпендикулярно до ребра *AB*.
12) Скласти рівняння висоти, що опущена з вершини *D* на грань *ABC*.
13) Знайти координати основи висоти *DE* тетраедра *ABCD*.

16. Знайти відстань між площинами $6x+2y+9z+3=0$ і $6x+2y+9z-45=0$.

17. Побудувати криві другого порядку в прямокутній системі координат: а) $(x+5)^2+(y-6)^2=16$; б) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$; в) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{25}=1$; г $y^2=-10x$.

18. Побудувати задані лінії в прямокутній системі координат й заштрихувати площу фігури, обмеженої ними: $y=\frac{-1}{x}$, $x-2=0$, $3x+4y-12=0$.

19. Знайти найменшу відстань між двома колами $x^2+y^2+6x-4y=-12$ і $x^2+y^2-10x-34y=-305$.

20. Звести криву другого порядку $4x^2+16x+3y^2-18y+31=0$ до канонічного вигляду, знайти всі її характеристики, побудувати графік кривої.

21. Побудувати криву, що задана параметрично $\begin{cases} x=7\cos^2 3t-6; \\ y=3-3\sin 3t. \end{cases}$

22. Знайти радіус кола, яке є перерізом сфери

$x^2+y^2+z^2-16x+2y-16z=56$ площиною $z = -5$.

23. Скласти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що $F\left(\sqrt{51};0\right)$, $a=10$.

24. Встановити тип і звести рівняння поверхні другого порядку до канонічного вигляду: $2x^2+5y^2-2z^2-4x+20y+24z-30=0$.

25. З’ясувати, яка лінія відповідає заданому рівнянню $5x^2+8y^2=4$:

1) Точка;
2) Пара паралельних прямих;
3) Парабола;
4) Пара перетинаючих прямих;
5) Гіпербола;
6) Еліпс.

26. Рівняння $8x^2+3y^2+4z^2=5$ описує:

1) Гіперболічний параболоїд;
2) Двопорожнинний гіперболоїд;
3) Циліндр;
4) Однопорожнинний гіперболоїд;
5) Еліпсоїд;
6) Еліптичний параболоїд.

27. При якому значенні l прямі $3x+4y-7=0$ і $lx-3y-1=0$ перпендикулярні?

28. Записати рівняння прямих, які проходять через точку P (1; 2) і утворюють з координатними осями трикутник, площа якого дорівнює 4 кв. од.

29. Записати рівняння площини, що проходить через точку M (2; –1; 3) і вісь Oy.

30. Записати параметричні рівняння прямої, що проходить через точку A (0; –2; 1) і перетинає прямі: $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{-1}$, $\frac{x}{3}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{1}$.

31. Знайти проекцію точки A (2; 3; 4) на пряму $x = y = z$.

Варіант 12

1. На осі *Oy* знайти точку, рівновіддалену від точок *A* (–2; –1; 0) і *B* (–2; 1; 2).

2. Через точку *M* (4; –3) провести прямі паралельно і перпендикулярно до прямої $y = 2x - 2$.

3. Обчислити тангенс кута між прямими $6x + 4y + 3 = 0$ і $y = 3x - 2$.

4. Знайти відстань від точки *M* (0; 3) до прямої $8(x+2) + 4(y-2) = 0$.

5. Привести до нормального вигляду рівняння прямої $\dfrac{x}{-4} - \dfrac{y}{3} = 1$.

6. З точки *A* (7; –6) проведені промені до перетину з прямою $-3x - 2y + 19 = 0$ в точці *D*. Скласти рівняння множини точок *M*, таких, що *AM* : *MD* = 2 : 1.

7. Задані вершини трикутника *A* (0; 3), *B* (–2; 9), *C* (8; 19).

1) Довести, що точки *A*, *B*, *C* не лежать на одній прямій.
2) Скласти рівняння сторін трикутника *ABC*.
3) Скласти рівняння прямої, що проходить через центр мас трикутника паралельно прямій *AC*.
4) Скласти рівняння висоти *BD*, знайти координати основи висоти *BD* трикутника *ABC*. Обчислити довжину висоти.
5) Скласти рівняння медіани *AM*.
6) Обчислити периметр ΔABC.
7) Обчислити площу ΔABC.
8) Визначити кути ΔABC.
9) Скласти рівняння прямої $A'B'$, симетричну прямій *AB* відносно точки *C*.
10) Зобразити ΔABC в прямокутній системі координат *xOy*.
11) Задати системою нерівностей множину точок ΔABC.

8. Записати рівняння площини, що проходить:

1) через точку *M* (1; 3; –1) паралельно до площини $-4x + 5y - 7z + 1 = 0$;
2) через точку *M* (3; –3; 2) перпендикулярно до прямої $\begin{cases} x = -2t; \\ y = 3t; \\ z = -2t + 1; \end{cases}$
3) через три точки *A* (4; –2; 4), *B* (1; –3; –3), *C* (0; 4; 4);
4) через пряму $\dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y-1}{-3} = \dfrac{z+2}{-2}$ і точку *M* (4; –3; –4);
5) через паралельні прямі $\dfrac{x-15}{-12} = \dfrac{y+3}{3} = \dfrac{z+4}{3}$ і $\dfrac{x-10}{-12} = \dfrac{y+3}{3} = \dfrac{z-1}{3}$;

6) через точки M (3; –2; –1), N (5; 5; –3) паралельно до вектора $\vec{a}(2;2;2)$.

9. Обчислити кут та координати точки перетину прямої $\frac{x}{3}=\frac{y+3}{2}=\frac{z+1}{0}$ і площини $4x+2y-2z-28=0$.

10. Знайти відстань від точки M (3; –1; 4) до площини $-(x-3)-2(y+1)-2(z-3)=0$.

11. Знайти кут між площинами $2x-y-2z+1=0$ і $6(x+1)-6(y-3)-3(z+1)=0$.

12. Знайти відстань від точки M(2; –2; –2) до прямої $\frac{x+1}{4}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-2}{2}$

13. Знайти точку A_1, симетричну точці A (–4; –6; –2) відносно прямої $\frac{x-1}{6}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+5}{3}$.

14. Задані мимобіжні прямі: $\frac{x-4}{-2}=\frac{y-4}{-1}=\frac{z-3}{-2}$, $\begin{cases} x=-t+2; \\ y=-3t+1; \\ z=4t-2. \end{cases}$

Виконати наступні дії:

1) провести площину, що проходить через першу пряму паралельно до другої прямої;
2) знайти відстань між прямими;
3) провести спільний перпендикуляр до прямих.

15. Задані вершини піраміди A (–3; 0; 0), B (4; 0; –1), C (–4; –3; 4), D (–1; 3; 0).

1) Довести, що точки *A, B, C, D* не лежать в одній площині.
2)Знайти рівняння площин, які містять грані піраміди *ABCD*.
3) Скласти рівняння площини, що проходить через вершину *D* паралельно грані *ABC*.
4) Скласти рівняння площини, що проходить через ребро *AB* паралельно ребру *CD*.
5) Скласти рівняння прямої, що проходить через точки *C*, *D*.
6) Скласти рівняння прямої, що проходить через точку *B* паралельно ребру *AC*.
7) Знайти об’єм піраміди *ABCD*.
8) Знайти довжину висоти піраміди *ABCD*, що опущена з вершини *D*.
9) Знайти площу грані *ABC*.
10) Знайти кут між ребром *AB* та гранню *BCD*.
11) Скласти рівняння площини, що проходить через вершину *D* перпендикулярно до ребра *AB*.

12) Скласти рівняння висоти, що опущена з вершини D на грань ABC.

13) Знайти координати основи висоти DE етраедра $ABCD$.

16. Знайти відстань між площинами $4x+7y-4z-5=0$ і $4(x+2)+7(y+1)-4(z+2)=0$.

17. Побудувати криві другого порядку в прямокутній системі координат:

а) $(x-1)^2+(y+2)^2=1$; б) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$; в) $-\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$; г) $y^2=-8x$.

18. Побудувати задані лінії в прямокутній системі координат й заштрихувати площу фігури, обмеженої ними: $(y+2)^2=-x,\quad x=0,\quad y-1=0.$

19. Знайти найменшу відстань між двома колами $x^2+y^2+2x+2y=7$ і $x^2+y^2-28x-14y=-236$.

20. Звести криву другого порядку $8x^2-80x+3y+199=0$ до канонічного вигляду, знайти всі її характеристики, побудувати графік кривої.

21. Побудувати криву, що задана параметрично $\begin{cases} x=8\cos 3t+1; \\ y=4\sin 3t-3. \end{cases}$

22. Знайти радіус кола, яке є перерізом сфери $x^2+y^2+z^2+4x-8y-4z=16$ площиною $y=6$.

23. Скласти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що $F\left(0;\sqrt{32}\right)$, $b=6$.

24. Встановити тип і звести рівняння поверхні другого порядку до канонічного вигляду: $x^2-y^2+2z^2+8x+4y+2z+21=0$.

25. З'ясувати, яка лінія відповідає заданому рівнянню $2x^2-4y^2=7$:

1) Точка;
2) Пара паралельних прямих;
3) Парабола;
4) Пара перетинаючих прямих;
5) Гіпербола;
6) Еліпс.

26. Рівняння $4x^2-9y^2+2z^2=4$ описує:

1) Гіперболічний параболоїд;
2) Двопорожнинний гіперболоїд;
3) Циліндр;
4) Однопорожнинний гіперболоїд;
5) Еліпсоїд;
6) Еліптичний параболоїд.

27. При якому значенні l пряма $lx-2y+5=0$ паралельна до прямої, що проходить через точки $M(-1;2)$, $N(1;4)$?

28. Відомі $3x+5y-15=0, 3x-5y+15=0-$ рівняння двох суміжних сторін паралелограма, A (10; –3) і B (–5; 0) — координати його вершин. Записати рівняння діагоналей цього паралелограма.

29. З точки P (2; –1; 3) опущений перпендикуляр на площину, його основа — M (1; 2; 4) точка. Написати рівняння цієї площини.

30. З'ясувати, чи перетинаються прямі $\begin{cases} 4x+z-1=0; \\ x-2y+3=0 \end{cases}$ і $\begin{cases} 3x+y-z+4=0; \\ y+2z-8=0? \end{cases}$

31. Чи належить пряма $\dfrac{x-13}{8}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-4}{3}$ площині $x+2y-4z+1=0$?

Варіант 13

1. На осі Oz знайти точку, рівновіддалену від точок M (2; –2; 5) і B (–3; –3; 4).

2. Через точку M (3; 4) провести прямі паралельно і перпендикулярно до прямої $3x – 2y – 3 = 0$.

3. Обчислити тангенс кута між прямими $6x – 2y + 1 = 0$ і $y = 0\ 2x – 1$.

4. Знайти відстань від точки M (0; 2) до прямої $6x + 8y + 10 = 0$.

5. Привести до нормального вигляду рівняння прямої $4x + 3y – 4 = 0$.

6. З точки A (4; 1) проведені промені до перетину з прямою $6x – 4y – 24 = 0$ в точці D. Скласти рівняння множини точок M, таких, що $AM : MD = 1 : 1$.

7. Задані вершини трикутника A (3; 2), B (–11; 10), C (6; 17).

1) Довести, що точки *A, B, C* не лежать на одній прямій.
2) Скласти рівняння сторін трикутника ABC.
3) Скласти рівняння прямої, що проходить через центр мас трикутника паралельно прямій AC.
4) Скласти рівняння висоти BD, знайти координати основи висоти BD трикутника ABC. Обчислити довжину висоти.
5) Скласти рівняння медіани AM.
6) Обчислити периметр ΔABC.
7) Обчислити площу ΔABC.
8) Визначити кути ΔABC.
9) Скласти рівняння прямої $A'B'$, симетричну прямій AB відносно точки C.
10) Зобразити ΔABC в прямокутній системі координат xOy.
11) Задати системою нерівностей множину точок ΔABC.

8. Записати рівняння площини, що проходить:

1) через точку M (4; 0; 1) паралельно до площини $6x-2y-3z+4=0$;

2) через точку M (4; 3; 0) перпендикулярно до прямої $\begin{cases} 2x+3y+4z=0; \\ -3y+2=0; \end{cases}$

3) через три точки A (–1; –2; –3), B (4; 0; –2), C (0; 3; –4);

4) через пряму $\begin{cases} 6x-2y+3z-3=0; \\ -2x-y+4z-4=0 \end{cases}$ і точку M (–2; –3; 1);

5) через паралельні прямі $\frac{x+1}{-7}=\frac{y+2}{0}=\frac{z+3}{7}$ і $\frac{x+2}{-1}=\frac{y+3}{0}=\frac{z+3}{1}$;

6) через точки M (4; –3; 2), N (5; –4; –5) паралельно до вектора $\vec{a}\left(-2; 4; 6\right)$.

9. Обчислити кут та координати точки перетину прямої $\frac{x+2}{2}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-1}{-3}$ і площини $4x+3y-2z-36=0$.

10. Знайти відстань від точки M (4; 1; 2) до площини $4x+y+8z+4=0$.

11. Знайти кут між прямими $\begin{cases} x=-2t-1; \\ y=-t+1; \\ z=-2t+2 \end{cases}$ і $\frac{x+1}{4}=\frac{y-4}{-2}=\frac{z-2}{-4}$.

12. Знайти відстань від точки M (6; –3; 4) до прямої $\frac{x+3}{1}=\frac{y-1}{-4}=\frac{z-4}{2}$

13. Знайти точку A_1, симетричну точці A (–5; –2; –1) відносно площини $-3x-5y+2z+15=0$.

14. Задані мимобіжні прямі: $\frac{x-4}{-3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+4}{-3}$, $\frac{x-2}{-1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+4}{-1}$.

Виконати наступні дії:

1) провести площину, що проходить через першу пряму паралельно до другої прямої;
2) знайти відстань між прямими;
3) провести спільний перпендикуляр до прямих.

15. Задані вершини піраміди A (–2; 4; 2), B (1; –4; 1), C (–1; 4; 4), B (4; –4; 3).

1) Довести, що точки A, B, C, D не лежать в одній площині.
2)Знайти рівняння площин, які містять грані піраміди $ABCD$.
3) Скласти рівняння площини, що проходить через вершину D паралельно грані ABC.
4) Скласти рівняння площини, що проходить через ребро AB паралельно ребру CD.

5) Скласти рівняння прямої, що проходить через точки *C*, *D*.

6) Скласти рівняння прямої, що проходить через точку *B* паралельно ребру *AC*.

7) Знайти об'єм піраміди *ABCD*.

8) Знайти довжину висоти піраміди *ABCD*, що опущена з вершини *D*.

9) Знайти площу грані *ABC*.

10) Знайти кут між ребром *AB* та гранню *BCD*.

11) Скласти рівняння площини, що проходить через вершину *D* перпендикулярно до ребра *AB*.

12) Скласти рівняння висоти, що опущена з вершини *D* на грань *ABC*.

13) Знайти координати основи висоти *DE* тетраедра *ABCD*.

16. Знайти відстань між площинами $-4x+2y+4z+2=0$ і $-4x+2y+4z-8=0$.

17. Побудувати криві другого порядку в прямокутній системі координат:
а) $(x+1)^2+(y-3)^2=25$; б) $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{9}=1$; в) $-\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{16}=1$; г) $y^2=-5x$.

18. Побудувати задані лінії в прямокутній системі координат й заштрихувати площу фігури, обмеженої ними: $x^2=-(y-2)$, $x^2=y+2$, $y-4=0$.

19. Знайти найменшу відстань між двома колами $x^2+y^2-8x+8y=4$ і $x^2+y^2-32x+40y=-640$.

20. Звести криву другого порядку $4x+7y^2+56y+124=0$ до канонічного вигляду, знайти всі її характеристики, побудувати графік кривої.

21. Побудувати криву, що задана параметрично $\begin{cases} x=2\cos 4t+1; \\ y=8\sin 4t+2. \end{cases}$

22. Знайти радіус кола, яке є перерізом сфери
$x^2+y^2+z^2+2x-16y+12z=-61$ площиною $x=1$.

23. Скласти канонічне рівняння гіперболи якщо відомо, що $F\left(\sqrt{74};0\right)$, $a=5$.

24. Встановити тип і звести рівняння поверхні другого порядку до канонічного вигляду: $2x^2-3y^2+6z^2+4x-18y+24z-1=0$.

25. З'ясувати, яка лінія відповідає заданому рівнянню $3x^2+2y=4$:

1) Пара паралельних прямих;
2) Гіпербола;
3) Еліпс;
4) Пара перетинаючих прямих;
5) Парабола;
6) Точка.

26. Рівняння $5x^2+2y^2-9z^2=7$ описує:

1) Гіперболічний параболоїд;
2) Еліпсоїд;
3) Однопорожнинний гіперболоїд;
4) Еліптичний параболоїд;
5) Циліндр;
6) Двопорожнинний гіперболоїд.

27. У трикутнику *ABC* знайти точку перетину висот, якщо *A* (1; 0), *B* (–4; 1), *C* (–2; 2).

28. Для рівнобедреного прямокутного трикутника, якщо задано координати вершини гострого кута (1; –2) і рівняння протилежного катета $3x-4y+2=0$. Скласти рівняння інших двох сторін трикутника.

29. Записати рівняння площини, яка проходить через лінію перетину двох площин $4x-y+3z-1=0$, $x+5y-z+2=0$ і точку *M* (1; 1; 1).

30. З'ясувати, чи перетинаються прямі $\frac{x-1}{2}=\frac{y-7}{1}=\frac{z-5}{4}$ і $\frac{x-6}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{1}$.

31. Знайти кут між прямою $\begin{cases} x+y+z-2=0; \\ 2x+y-z-1=0 \end{cases}$ і площиною, що проходить через точки *A* (2; 3; –1), *B* (1; 1; 0) і *C* (0; –2; 1).

Варіант 14

1. На осі *Ox* знайти точку, рівновіддалену від точок *A* (–1; 2; 3) і *B* (4; –3; 0).

2. Через точку *M* (3; –2) провести прямі паралельно і перпендикулярно до прямої $y=2x-1$.

3. Обчислити тангенс кута між прямими $5x+4y+4=0$ і $y=-2x+1$.

4. Знайти відстань від точки *M* (1; –2) до прямої $-(x+1)-2(y-2)=0$.

5. Привести до нормального вигляду рівняння прямої $\frac{x}{-3}-\frac{y}{4}=1$.

6. Із точки *A* (–4; 4) проведені промені до перетину з прямою $3x+2y-11=0$ в точці *D*. Скласти рівняння множини точок *M*, таких, що *AM* : *MD* = 2 : 1.

7. Задані вершини трикутника *A* (–2; 2), *B* (0; 11), *C* (6; 4).

1) Довести, що точки *A*, *B*, *C* не лежать на одній прямій.

2) Скласти рівняння сторін трикутника ABC.

3) Скласти рівняння прямої, що проходить через центр мас трикутника паралельно прямій AC.

4) Скласти рівняння висоти BD, знайти координати основи висоти BD трикутника ABC. Обчислити довжину висоти.

5) Скласти рівняння медіани AM.

6) Обчислити периметр $\triangle ABC$.

7) Обчислити площу $\triangle ABC$.

8) Визначити кути $\triangle ABC$.

9) Скласти рівняння прямої $A'B'$, симетричну прямій AB відносно точки C.

10) Зобразити $\triangle ABC$ в прямокутній системі координат xOy.

11) Задати системою нерівностей множину точок $\triangle ABC$.

8. Записати рівняння площини, що проходить:

1) через точку $M(5;4;3)$ перпендикулярно до прямої $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-4}{1}=\dfrac{z+1}{2}$;

2) через точку $M(-1;-2;-3)$ паралельно до площини $7x-4y-6z-3=0$;

3) через три точки A (0; 2; –1), B (–4; 4; –4), C (–3; 0; 1);

4) через пряму $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y+1}{0}=\dfrac{z+3}{4}$ і точку M (4; –3; 2);

5) через паралельні прямі $\dfrac{x+7}{-6}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+1}{0}$ і $\dfrac{x-5}{-3}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2}{0}$;

6) через точки M (0; 4; 6), N (6; 4; –1) паралельно до вектора $\vec{a}(4;6;-1)$.

9. Обчислити кут та координати точки перетину прямої $\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y+2}{0}=\dfrac{z-2}{1}$ і площини $6x+2y+2z-20=0$.

10. Знайти відстань від точки M (1; –3; 4) до площини $6(x-1)+3(y+3)-2(z-1)=0$.

11. Знайти кут між площинами $3x+6y-6z+7=0$ і $6(x-2)+3(y+3)+2(z-2)=0$.

12. Знайти відстань від точки $M(-4;4;-2)$ до прямої $\begin{cases}6x-3y+4z+1=0;\\-x+3y+z-1=0.\end{cases}$

13. Знайти точку A_1, симетричну точці A (2; 3; –1) відносно прямої $\dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z+1}{3}$.

14. Задані мимобіжні прямі: $\frac{x-2}{-1}=\frac{y+3}{3}=\frac{z-1}{1}$, $\begin{cases} x=3; \\ y=-2t+2; \\ z=3t+2. \end{cases}$

Виконати наступні дії:

1) провести площину, що проходить через першу пряму паралельно до другої прямої;
2) знайти відстань між прямими;
3) провести спільний перпендикуляр до прямих.

15. Задані вершини піраміди A (3; 0; 2), B (3; 0; –1), C (–3; –3; 0), D (4; 4; –2).

1) Довести, що точки A, B, C, D не лежать в одній площині.
2) Знайти рівняння площин, які містять грані піраміди $ABCD$.
3) Скласти рівняння площини, що проходить через вершину D паралельно грані ABC.
4) Скласти рівняння площини, що проходить через ребро AB паралельно ребру CD.
5) Скласти рівняння прямої, що проходить через точки C, D.
6) Скласти рівняння прямої, що проходить через точку B паралельно ребру AC.
7) Знайти об'єм піраміди $ABCD$.
8) Знайти довжину висоти піраміди $ABCD$, що опущена з вершини D.
9) Знайти площу грані ABC.
10) Знайти кут між ребром AB та гранню BCD.
11) Скласти рівняння площини, що проходить через вершину D перпендикулярно до ребра AB.
12) Скласти рівняння висоти, що опущена з вершини D на грань ABC.
13) Знайти координати основи висоти DE тетраедра $ABCD$.

16. Знайти відстань між площинами $2x+y-2z-2=0$ і $2(x-2)+1(y+3)-2(z-2)=0$.

17. Побудувати криві другого порядку в прямокутній системі координат:

а) $(x-3)^2+(y-2)^2=36$; б) $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{25}=1$; в) $-\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{4}=1$; г) $y^2=-4x$.

18. Побудувати задані лінії в прямокутній системі координат й заштрихувати площу фігури, обмеженої ними: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$, $\frac{x^2}{4}-y^2=1$, $y^2-\frac{x^2}{4}=1$.

19. Знайти найменшу відстань між двома колами $x^2+y^2+10x+2y=-25$ і $x^2+y^2+26y=-160$.

20. Звести криву другого порядку $-3x^2+24x-2y^2+20y-104=0$ до канонічного вигляду, знайти всі її характеристики, побудувати графік кривої.

21. Побудувати криву, що задана параметрично $\begin{cases} x=7\sin^2 2t-4; \\ y=4-2\cos 2t. \end{cases}$

22. Знайти радіус кола, яке є перерізом сфери
$x^2+y^2+z^2-14x+8y-12z=-16$ площиною $z=-3$.

23. Скласти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що $F\left(0;\sqrt{106}\right)$, $b=9$.

24. Встановити тип і звести рівняння поверхні другого порядку до канонічного вигляду: $5x^2+6y^2+5z^2+10x-48y+60z+131=0$.

25. З'ясувати, яка лінія відповідає заданому рівнянню $5x+8y^2=7$:
1) Пара перетинаючих прямих;
2) Еліпс;
3) Парабола;
4) Гіпербола;
5) Пара паралельних прямих;
6) Точка.

26. Рівняння $2x^2-6y^2-9z^2=6$ описує:
1) Циліндр;
2) Гіперболічний параболоїд;
3) Двопорожнинний гіперболоїд;
4) Еліпсоїд;
5) Еліптичний параболоїд;
6) Однопорожнинний гіперболоїд.

27. Точки A (2; 1), B (4; 2), C (–3; 3) — послідовні вершини паралелограма $ABCD$. Записати рівняння сторін цього паралелограма.

28. Задані вершини трикутника A (0; 4), B (2; –3), C (–4; 5). Скласти рівняння перпендикуляра, що виходить із вершини C до медіани, проведеної із вершини A.

29. Площина проходить через початок координат. Записати рівняння площини, якщо відомо, що вона перпендикулярна двом заданим площинам: $2x-y+5z+3=0$ і $x+3y-z-7=0$.

30. Задані вершини трикутника A (1; 0; 2), B (–2; 3; –1), C (–2; 3; –1). Скласти канонічне рівняння медіани, проведеної з вершини B на сторону AC.

31. Скласти параметричні рівняння прямої, що проходить через точки перетину площини $x-3y+2z+1=0$ з прямими $\dfrac{x-5}{5}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-3}{-1}$ і $\dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y+4}{-6}=\dfrac{z-5}{2}$.

Варіант 15

1. На осі *Oy* знайти точку, рівновіддалену від точок *A* (5; –2; 5) і *B* (–4; 3; 3).

2. Через точку *M* (3; –2) провести прямі паралельно і перпендикулярно до прямої $5x-3y-3=0$.

3. Обчислити тангенс кута між прямими $2x-3y+1=0$ і $y=2x-3$.

4. Знайти відстань від точки *M* (0; –2) до прямої $6x+8y-2=0$.

5. Привести до нормального вигляду рівняння прямої $3x-4y+4=0$.

6. З точки *A* (4; 0) проведені промені до перетину з прямою $-2x+3y+2=0$ в точці *D*. Скласти рівняння множини точок *M*, таких, що *AM* : *MD* = 1 : 5.

7. Задані вершини трикутника *A* (2; –2), *B* (13; –9), *C* (22; 10).

1) Довести, що точки *A*, *B*, *C* не лежать на одній прямій.
2) Скласти рівняння сторін трикутника *ABC*.
3) Скласти рівняння прямої, що проходить через центр мас трикутника паралельно прямій *AC*.
4) Скласти рівняння висоти *BD*, знайти координати основи висоти *BD* трикутника *ABC*. Обчислити довжину висоти.
5) Скласти рівняння медіани *AM*.
6) Обчислити периметр ΔABC.
7) Обчислити площу ΔABC.
8) Визначити кути ΔABC.
9) Скласти рівняння прямої *A′B′*, симетричну прямій *AB* відносно точки *C*.
10) Зобразити ΔABC в прямокутній системі координат *xOy.*
11) Задати системою нерівностей множину точок ΔABC.

8. Записати рівняння площини, що проходить:

1) через точку *M* (2; –3; –3) паралельно до площини $9x-2y-2z+6=0$;
2) через точку *M* (1; 4; –3) перпендикулярно до прямої

$$\begin{cases}4x+3y+3z+2=0;\\-2x+3y+2z-2=0;\end{cases}$$

3) через три точки *A* (0; 3; –1), *B* (–4; –4; 0), *C* (2; 3; –3);
4) через пряму $\dfrac{x+2}{-1}=\dfrac{y-1}{-4}=\dfrac{z-4}{-1}$ і точку *M* (3; –4; –3);
5) через паралельні прямі $\dfrac{x+12}{-21}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-3}{5}$ і $\dfrac{x-4}{-21}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z+1}{5}$;

6) через точки M (–5; –2; 5), N (0; 6; 6) паралельно до вектора $\vec{a}(6;-5;-3)$.

9. Обчислити кут та координати точки перетину прямої $\frac{x-4}{0}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z}{-1}$ і площини $4x+3y+3z+11=0$.

10. Знайти відстань від точки M (1; 4; 1) до площини $-2x+6y+3z-4=0$.

11. Знайти кут між прямими $\frac{x+2}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-3}{2}$ і $\begin{cases} x=2t; \\ y=t+3; \\ z=-2t-3. \end{cases}$

12. Знайти відстань від точки $M(3;-3;-2)$ до прямої $\begin{cases} 5x-2y-4z+4=0; \\ -x-2y-4z-1=0. \end{cases}$

13. Знайти точку A_1, симетричну точці A (–4; –7; –8) відносно прямої $\frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-8}{0}$.

14. Задані мимобіжні прямі: $\frac{x+3}{-2}=\frac{y-4}{-3}=\frac{z-4}{3}$, $\frac{x-2}{4}=\frac{y+2}{3}=\frac{z+4}{-2}$.

Виконати наступні дії:

1) провести площину, що проходить через першу пряму паралельно до другої прямої;
2) знайти відстань між прямими;
3) провести спільний перпендикуляр до прямих.

15. Задані вершини піраміди A (3; –2; –3), B (3; –1; 3), C (–3; 2; –4), D (–3; –4; 3).

1) Довести, що точки A, B, C, D не лежать в одній площині.
2)Знайти рівняння площин, які містять грані піраміди $ABCD$.
3) Скласти рівняння площини, що проходить через вершину D паралельно грані ABC.
4) Скласти рівняння площини, що проходить через ребро AB паралельно ребру CD.
5)Скласти рівняння прямої, що проходить через точки C, D.
6) Скласти рівняння прямої, що проходить через точку B паралельно ребру AC.
7) Знайти об’єм піраміди $ABCD$.
8) Знайти довжину висоти піраміди $ABCD$, що опущена з вершини D.
9) Знайти площу грані ABC.
10) Знайти кут між ребром AB та гранню BCD.
11) Скласти рівняння площини, що проходить через вершину D перпендикулярно до ребра AB.

12) Скласти рівняння висоти, що опущена з вершини D на грань ABC.

13) Знайти координати основи висоти DE тетраедра $ABCD$.

16. Знайти відстань між площинами $8x+4y+z-1=0$ і $8x+4y+z-5=0$.

17. Побудувати криві другого порядку в прямокутній системі координат:

а) $(x+2)^2+(y+4)^2=49$; б) $\dfrac{x^2}{49}+\dfrac{y^2}{16}=1$; в) $\dfrac{x^2}{64}-\dfrac{y^2}{36}=1$; г) $y^2=-8x$.

18. Побудувати задані лінії в прямокутній системі координат й заштрихувати площу фігури, обмеженої ними: $y=\dfrac{1}{x}$, $x-5=0$, $y-4=0$.

19. Знайти найменшу відстань між двома колами $x^2+y^2-16x+2y=-40$ і $x^2+y^2-28x-14y=-236$.

20. Звести криву другого порядку $3x^2-18x-y+28=0$ до канонічного вигляду, знайти всі її характеристики, побудувати графік кривої.

21. Побудувати криву, що задана параметрично $\begin{cases} x=2\sin^2 3t+1; \\ y=\cos^2 3t-7. \end{cases}$

22. Знайти радіус кола, яке є перерізом сфери

$x^2+y^2+z^2+12x+2y+6z=-29$ площиною $y=-2$.

23. Скласти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що $F\left(\sqrt{15};0\right)$, $a=8$.

24. Встановити тип і звести рівняння поверхні другого порядку до канонічного вигляду: $x^2+7y^2+3z^2+8x+28y+3z+46=0$.

25. З'ясувати, яка лінія відповідає заданому рівнянню $3x^2+2y^2=0$:

1) Пара перетинаючих прямих;
2) Гіпербола;
3) Точка;
4) Пара паралельних прямих;
5) Еліпс;
6) Парабола.

26. Рівняння $5x^2+9y^2-6z^2=-2$ описує:

1) Двопорожнинний гіперболоїд;
2) Циліндр;
3) Еліпсоїд;
4) Однопорожнинний гіперболоїд;
5) Гіперболічний параболоїд;
6) Еліптичний параболоїд.

27. Записати рівняння прямих, що проходять через точку P (2; –1) і утворюють кут 45° з прямою $2x+5y+1=0$.

28. Задано A (1; 1) і B (2; –1) — дві вершини квадрата $ABCD$, що лежать на одній діагоналі. Знайти координати двох інших вершин цього квадрата.

29. Перша площина містить вісь Ox, а друга площина — вісь Oz. Знайти кут між цими площинами, якщо відомо, що точка M (–5; 16; 12) належить обом площинам.

30. Скласти канонічне рівняння прямої, що проходить через точку M (1; –5; 3) і утворює з осями координат Ox, Oy, Oz кути 60°, 45°, 120° відповідно.

31. Скласти канонічне рівняння прямої, що проходить через точку M (4; 0; –1) і перетинає прямі $\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{4}=\frac{z-5}{3}$, $\frac{x}{5}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{2}$.

Варіант 16

1. На осі Oz знайти точку, рівновіддалену від точок A (2; 2; –2) і B (–1; 2; 0).

2. Через точку M (–3; 2) провести прямі паралельно і перпендикулярно до прямої $y=-2x-3$.

3. Обчислити тангенс кута між прямими $3x+4y+2=0$ і $y=-2x-1$.

4. Знайти відстань від точки M (3; –1) до прямої $9(x+3)+2(y-3)=0$.

5. Привести до нормального вигляду рівняння прямої $\frac{x}{-3}+\frac{y}{4}=1$.

6. З точки A (2; 10) проведені промені до перетину з прямою $2x+4y-80=0$ в точці D. Скласти рівняння множини точок M, таких, що $AM : MD = 5 : 1$.

7. Задані вершини трикутника A (4; 0), B (14; –10), C (12; 4).

1) Довести, що точки A, B, C не лежать на одній прямій.
2) Скласти рівняння сторін трикутника ABC.
3) Скласти рівняння прямої, що проходить через центр мас трикутника паралельно прямій AC.
4) Скласти рівняння висоти BD, знайти координати основи висоти BD трикутника ABC. Обчислити довжину висоти.
5) Скласти рівняння медіани AM.
6) Обчислити периметр $\triangle ABC$.
7) Обчислити площу $\triangle ABC$.
8) Визначити кути $\triangle ABC$.

9) Скласти рівняння прямої $A'B'$, симетричну прямій AB відносно точки C.

10) Зобразити ΔABC в прямокутній системі координат xOy.

11) Задати системою нерівностей множину точок ΔABC.

8. Записати рівняння площини, що проходить:

1) через точку M (–2; 4; 1) паралельно до площини $x+4y-2z-4=0$;

2) через точку M (5; 3; 4) перпендикулярно до прямої $\dfrac{x+1}{0}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+2}{-1}$;

3) через три точки A (4; –2; –4), B (–2; –1; 0), C (–4; –1; 0);

4) через пряму $\begin{cases} 2x-2y+4z-3=0; \\ -3x+4y-4z+2=0 \end{cases}$ і точку M (2; 4; –3);

5) через паралельні прямі $\dfrac{x-14}{0}=\dfrac{y-4}{-2}=\dfrac{z+2}{0}$ і $\begin{cases} x=-1; \\ y=-2t-1; \\ z=3; \end{cases}$

6) через точки M (–4; 2; 0), N (–2; –2; –4) паралельно до вектора $\vec{a}\left(-2;5;0\right)$.

9. Обчислити кут та координати точки перетину прямої $\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-2}{-3}$ і площини $2x-y+z+15=0$.

10. Знайти відстань від точки M (–1; 4; 2) до площини $2\left(x+1\right)+6\left(y-4\right)-3\left(z+1\right)=0$.

11. Знайти кут між прямими $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+4}{1}=\dfrac{z+1}{2}$ і $\begin{cases} x=4t-1; \\ y=-4t-1; \\ z=-2t+1. \end{cases}$

12. Знайти відстань від точки M (2; 5; –3) до прямої $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+2}{1}$.

13. Знайти точку A_1, симетричну точці A (–10; 6; 0) відносно площини $-4x+3y-2z-29=0$.

14. Задані мимобіжні прямі: $\dfrac{x+2}{-2}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z+4}{3}$, $\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z+3}{3}$.

Виконати наступні дії:

1) провести площину, що проходить через першу пряму паралельно до другої прямої;

2) знайти відстань між прямими;

3) провести спільний перпендикуляр до прямих.

15. Задані вершини піраміди A (–3; –1; 4), B (0; 0; 1), C (1; 1; –2), D (–3; –3; 2).

1) Довести, що точки A, B, C, D не лежать в одній площині.

2) Знайти рівняння площин, які містять грані піраміди $ABCD$.

3) Скласти рівняння площини, що проходить через вершину D паралельно грані ABC.

4) Скласти рівняння площини, що проходить через ребро AB паралельно ребру CD.

5) Скласти рівняння прямої, що проходить через точки C, D.

6) Скласти рівняння прямої, що проходить через точку B паралельно ребру AC.

7) Знайти об'єм піраміди $ABCD$.

8) Знайти довжину висоти піраміди $ABCD$, що опущена з вершини D.

9) Знайти площу грані ABC.

10) Знайти кут між ребром AB та гранню BCD.

11) Скласти рівняння площини, що проходить через вершину D перпендикулярно до ребра AB.

12) Скласти рівняння висоти, що опущена з вершини D на грань ABC.

13) Знайти координати основи висоти DE тетраедра $ABCD$.

16. Знайти відстань між площинами $-x-2y+2z-2=0$ і $-1(x+1)-2(y-3)+2(z+1)=0$.

17. Побудувати криві другого порядку в прямокутній системі координат:

а) $(x-3)^2+(y-2)^2=9$; б) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{25}=1$; в) $-\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{49}=1$; г) $y^2=-16x$.

18. Побудувати задані лінії в прямокутній системі координат й заштрихувати площу фігури, обмеженої ними: $(x+3)^2=-(y-2)$, $7x+3y+21=0$, $x-3y-21=0$.

19. Знайти найменшу відстань між двома колами $x^2+y^2+12x-2y=-28$ і $x^2+y^2-12x-12y=-71$.

20. Звести криву другого порядку $x-3y^2-12y-7=0$ до канонічного вигляду, знайти всі її характеристики, побудувати графік кривої.

21. Побудувати криву, що задана параметрично $\begin{cases} x=3\cos 3t-5; \\ y=7\sin 3t-3. \end{cases}$

22. Знайти радіус кола, яке є перерізом сфери

$x^2+y^2+z^2-4x+2y+4z=4$ площиною $y=6$.

23. Скласти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що $F\left(0;\sqrt{24}\right)$, $b=7$.

24. Встановити тип і звести рівняння поверхні другого порядку до канонічного вигляду: $-4x^2+3y^2+z^2-32x-24y-2z-15=0$.

25. З'ясувати, яка лінія відповідає заданому рівнянню $3x^2 - 7y^2 = 0$:

1) Парабола;
2) Точка;
3) Гіпербола;
4) Пара перетинаючих прямих;
5) Еліпс;
6) Пара паралельних прямих.

26. Рівняння $5x^2 - 4y^2 - 7z^2 = -3$ описує:

1) Еліптичний параболоїд;
2) Циліндр;
3) Двопорожнинний гіперболоїд;
4) Еліпсоїд;
5) Гіперболічний параболоїд;
6) Однопорожнинний гіперболоїд.

27. Прямі $x + 2y - 4 = 0$ і $x - y - 1 = 0$ — суміжні сторони паралелограма *ABCD*, *P* (–2; –1) — точка перетину його діагоналей. Записати рівняння двох інших сторін паралелограма.

28. Знайти рівняння прямих, що проходять на відстані 2 лін.од. від початку координат і утворюють кут 30° з віссю *Ox*.

29. Записати рівняння площини, яка проходить через лінію перетину двох площин $4x - y + 3z - 6 = 0$ і $x + 5y - z + 10 = 0$ перпендикулярно до площини $2x - y + 5z - 5 = 0$.

30. Записати параметричні рівняння перпендикуляра, опущеного з точки *A* (–1; 0; 3) на пряму $\frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$.

31. Знайти координати точки, симетричної точці *A* (3; –1; 4) відносно прямої $\begin{cases} 2x - 2y + z - 3 = 0; \\ 2x + y - 2z + 3 = 0. \end{cases}$

Варіант 17

1. На осі *Ox* знайти точку, рівновіддалену від точок *A* (1; 5; –2) і *B* (–3; –2; –5).

2. Через точку *M* (2; –3) провести прямі паралельно і перпендикулярно до прямої $2x + y - 1 = 0$.

3. Обчислити тангенс кута між прямими $3x + 4y - 2 = 0$ і $y = -4x - 2$.

4. Знайти відстань від точки *M* (1; 0) до прямої $4x - 3y - 4 = 0$.

5. Привести до нормального вигляду рівняння прямої $4x + 3y - 6 = 0$.

6. З точки A (–2; 0) проведені промені до перетину з прямою $2x+3y-21=0$ в точці D. Скласти рівняння множини точок M, таких, що $AM : MD = 1 : 4$.

7. Задані вершини трикутника A (–1; 3), B (–2; 10), C (5; 6).

1) Довести, що точки A, B, C не лежать на одній прямій.
2) Скласти рівняння сторін трикутника ABC.
3) Скласти рівняння прямої, що проходить через центр мас трикутника паралельно прямій AC.
4) Скласти рівняння висоти BD, знайти координати основи висоти BD трикутника ABC. Обчислити довжину висоти.
5) Скласти рівняння медіани AM.
6) Обчислити периметр ΔABC.
7) Обчислити площу ΔABC.
8) Визначити кути ΔABC.
9) Скласти рівняння прямої $A'B'$, симетричну прямій AB відносно точки C.
10) Зобразити ΔABC в прямокутній системі координат xOy.
11) Задати системою нерівностей множину точок ΔABC.

8. Записати рівняння площини, що проходить:

1) через точку M (0; 4; 4) паралельно до площини $3x+5y+4z-5=0$;
2) через точку M (–1; 3; 0) перпендикулярно до прямої
$$\begin{cases} 5x+2y-2z=0; \\ -x+2y+3z+3=0; \end{cases}$$
3) через три точки A (2; 0; –4), B (3; –4; –1), C (–2; –3; 2);
4) через пряму $\begin{cases} 6x-3y-4z-2=0; \\ -x-2y+z+1=0 \end{cases}$ і точку M (4; –4; –2);
5) через паралельні прямі $\dfrac{x+9}{1}=\dfrac{y-4}{1}=\dfrac{z-2}{3}$ і $\begin{cases} x=t+2; \\ y=t-3; \\ z=3t-1; \end{cases}$
6) через точки M (2; 6; 6), N (3; –1; 2) паралельно до вектора $\vec{a}\left(-4;-2;-2\right)$.

9. Обчислити кут та координати точки перетину прямої $\dfrac{x-4}{3}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z+3}{-2}$ і площини $6x-2y+4z-50=0$.

10. Знайти відстань від точки M (4; 3; –1) до площини $4x+8y-z+2=0$.

11. Знайти кут між площинами $4x-4y-2z+3=0$ і $-4\left(x+1\right)+2\left(y-3\right)+4\left(z+1\right)=0$.

12. Знайти відстань від точки $M(-3;0;0)$ до прямої $\begin{cases} 2x-4y-4z+2=0; \\ -x-4y+3z=0. \end{cases}$

13. Знайти точку A_1, симетричну точці A $(4;-9;0)$ відносно прямої $\dfrac{x+2}{-1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+3}{2}$.

14. Задані мимобіжні прямі: $\begin{cases} x=-2t+3; \\ y=2t-3; \\ z=t-3, \end{cases}$ $\quad \dfrac{x+3}{-1}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z+4}{3}$.

Виконати наступні дії:

1) провести площину, що проходить через першу пряму паралельно до другої прямої;
2) знайти відстань між прямими;
3) провести спільний перпендикуляр до прямих.

15. Задані вершини піраміди A $(2;0;-4)$, B $(-4;1;-1)$, C $(0;-4;4)$, D $(3;-2;3)$.

1) Довести, що точки A, B, C, D не лежать в одній площині.
2) Знайти рівняння площин, які містять грані піраміди $ABCD$.
3) Скласти рівняння площини, що проходить через вершину D паралельно грані ABC.
4) Скласти рівняння площини, що проходить через ребро AB паралельно ребру CD.
5) Скласти рівняння прямої, що проходить через точки C, D.
6) Скласти рівняння прямої, що проходить через точку В паралельно ребру AC.
7) Знайти об'єм піраміди $ABCD$.
8) Знайти довжину висоти піраміди $ABCD$, що опущена з вершини D.
9) Знайти площу грані ABC.
10) Знайти кут між ребром AB та гранню BCD.
11) Скласти рівняння площини, що проходить через вершину D перпендикулярно до ребра AB.
12) Скласти рівняння висоти, що опущена з вершини D на грань ABC.
13) Знайти координати основи висоти DE тетраедра $ABCD$.

16. Знайти відстань між площинами $-2x+3y+6z-1=0$ і $-2x+3y+6z-30=0$.

17. Побудувати криві другого порядку в прямокутній системі координат:

а) $(x+5)^2+(y+3)^2=4$; б) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{49}=1$; в) $-\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$; г) $y^2=-2x$.

18. Побудувати задані лінії в прямокутній системі координат й заштрихувати площу фігури, обмеженої ними: $(y-6)^2 = x, \quad y^2 = x, \quad x = 0$.

19. Знайти найменшу відстань між двома колами $x^2 + y^2 - 8x - 2y = 8$ і $x^2 + y^2 - 40x + 22y = -520$.

20. Звести криву другого порядку $-5x^2 + 20x + 9y^2 - 18y + 34 = 0$ до канонічного вигляду, знайти всі її характеристики, побудувати графік кривої.

21. Побудувати криву, що задана параметрично $\begin{cases} x = 3\sin 4t - 2; \\ y = 4\cos 4t + 5. \end{cases}$

22. Знайти радіус кола, яке є перерізом сфери
$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 16y + 8z = 9$ площиною $z = 5$.

23. Скласти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що $F\left(\sqrt{89}; 0\right)$, $a = 5$.

24. Встановити тип і звести рівняння поверхні другого порядку до канонічного вигляду: $-6x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 36x + 16y - 40z + 158 = 0$.

25. З’ясувати, яка лінія відповідає заданому рівнянню $3x^2 = 7$:

1) Точка;
2) Пара паралельних прямих;
3) Парабола;
4) Пара перетинаючих прямих;
5) Гіпербола;
6) Еліпс.

26. Рівняння $5x^2 + 6y^2 - 3z = -8$ описує:

1) Еліптичний параболоїд;
2) Двопорожнинний гіперболоїд;
3) Однопорожнинний гіперболоїд;
4) Гіперболічний параболоїд;
5) Еліпсоїд;
6) Конус.

27. Зайти рівняння прямих, що проходять через точку M (–1; 2) під кутом 45° до прямої $x - 2y + 3 = 0$.

28. Задані вершини трикутника A (1; 4), B (2; 5), C (5; –2). Знайти точку перетину сторони AB з перпендикуляром, опущеним з середини сторони AC.

29. Знайти кут між площиною, яка проходить через точки O (0; 0; 0), A (a; –a; 0) і B (a; a; a), та площиною xOy.

30 .Задані точки перетину прямої з двома координатними площинами (x_1; y_1; 0) і (x_1; 0; z_2). Обчислити координати точки перетину цієї ж прямої з третьою координатною площиною.

31. Знайти кут між прямою, що проходить через точки *A* (–1; 0; –5) і *B* (1; 2; 0), і площиною $x-3y+z+5=0$.

Варіант 18

1. На осі *Oz* знайти точку, рівновіддалену від точок *A* (–1; 2; –3) і *B* (3; –2; –5).

2. Через точку *M* (3; 3) провести прямі паралельно і перпендикулярно до прямої $6x+3y-2=0$.

3. Обчислити тангенс кута між прямими $3x-2y-1=0$ і $y=-2x-3$.

4. Знайти відстань від точки *M* (0; 3) до прямої $3x+4y-3=0$.

5. Привести до нормального вигляду рівняння прямої $4x+3y+9=0$.

6. З точки *A* (8; 4) проведені промені до перетину з прямою $-2x+y+14=0$ в точці *D*. Скласти рівняння множини точок *M*, таких, що *AM* : *MD* = 1 : 1.

7. Задані вершини трикутника *A* (–2; 0), *B* (15; –11), *C* (18; 16).

1) Довести, що точки *A*, *B*, *C* не лежать на одній прямій.
2) Скласти рівняння сторін трикутника *ABC*.
3) Скласти рівняння прямої, що проходить через центр мас трикутника паралельно прямій *AC*.
4) Скласти рівняння висоти *BD*, знайти координати основи висоти *BD* трикутника *ABC*. Обчислити довжину висоти.
5) Скласти рівняння медіани *AM*.
6) Обчислити периметр ΔABC.
7) Обчислити площу ΔABC.
8) Визначити кути ΔABC.
9) Скласти рівняння прямої $A'B'$, симетричну прямій *AB* відносно точки *C*.
10) Зобразити ΔABC в прямокутній системі координат *xOy*.
11) Задати системою нерівностей множину точок ΔABC.

8. Записати рівняння площини, що проходить:

1) через точку *M* (1; –2; 3) паралельно до площини $2x-5y+5z+3=0$;

2) через точку M (2; –1; 0) перпендикулярно до прямої
$$\begin{cases} 3x-2y-3z+2=0; \\ 3x-y-4=0; \end{cases}$$

3) через три точки A (–4; 1; –1), B (–3; –4; 2), C (–4; 4; 1);

4) через пряму $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z+2}{-1}$ і точку M (2; –4; 4);

5) через паралельні прямі $\dfrac{x-2}{19}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z-3}{-1}$ і $\begin{cases} x=19t-18; \\ y=4t-3; \\ z=-t+3; \end{cases}$

6) через точки M (2; –1; –1), N (5; 5; 2) паралельно до вектора $\vec{a}\left(-1;3;-5\right)$.

9. Обчислити кут та координати точки перетину прямої $\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z+3}{1}$ і площини $6x+3y+4z-47=0$.

10. Знайти відстань від точки M (1; –3; 1) до площини $x+2y-2z-9=0$.

11. Знайти кут між прямими $\begin{cases} x=-2t+4; \\ y=-t+2; \\ z=2t+1 \end{cases}$ і $\dfrac{x+2}{-4}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-1}{4}$.

12. Знайти відстань від точки M (2; –3; 4) до прямої $\begin{cases} 2x-2y+4z-1=0; \\ 4x-2y+z+4=0. \end{cases}$

13. Знайти точку A_1, симетричну точці A (–8; 6; –4) відносно площини $-3x+3y-2z-36=0$.

14. Задані мимобіжні прямі: $\begin{cases} x=t-3; \\ y=-3t+2; \\ z=-t-1, \end{cases}$ $\dfrac{x+1}{-3}=\dfrac{y+3}{-2}=\dfrac{z-4}{-2}$.

Виконати наступні дії:

1) провести площину, що проходить через першу пряму паралельно до другої прямої;
2) знайти відстань між прямими;
3) провести спільний перпендикуляр до прямих.

15. Задані вершини піраміди A (2; –1; 3), B (–4; –4; 2), C (–3; –4; –4), D (1; 1; 3).

1) Довести, що точки A, B, C, D не лежать в одній площині.
2) Знайти рівняння площин, які містять грані піраміди $ABCD$.
3) Скласти рівняння площини, що проходить через вершину D паралельно грані ABC.

4) Скласти рівняння площини, що проходить через ребро AB паралельно ребру CD.

5) Скласти рівняння прямої, що проходить через точки C, D.

6) Скласти рівняння прямої, що проходить через точку B паралельно ребру AC.

7) Знайти об'єм піраміди $ABCD$.

8) Знайти довжину висоти піраміди $ABCD$, що опущена з вершини D.

9) Знайти площу грані ABC.

10) Знайти кут між ребром AB та гранню BCD.

11) Скласти рівняння площини, що проходить через вершину D перпендикулярно до ребра AB.

12) Скласти рівняння висоти, що опущена з вершини D на грань ABC.

13) Знайти координати основи висоти DE тетраедра $ABCD$.

16. Знайти відстань між площинами $8x+y-4z-2=0$ і $8(x+1)+(y+3)-4(z+1)=0$.

17. Побудувати криві другого порядку в прямокутній системі координат:

а) $(x+1)^2+(y-3)^2=16$; б) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{36}=1$; в) $-\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$; г) $y^2=6x$.

18. Побудувати задані лінії в прямокутній системі координат й заштрихувати площу фігури, обмеженої ними: $(y-1)^2=x+1,\quad x+1=0,\quad 4x+3y-12=0$.

19. Знайти найменшу відстань між двома колами $x^2+y^2-6x-8y=-24$ і $x^2+y^2-18x-24y=-224$.

20. Звести криву другого порядку $-x+4y^2+16y+18=0$ до канонічного вигляду, знайти всі її характеристики, побудувати графік кривої.

21. Побудувати криву, що задана параметрично $\begin{cases} x=2\cos 2t+5; \\ y=4\sin 2t-1. \end{cases}$

22. Знайти радіус кола, яке є перерізом сфери

$x^2+y^2+z^2-2x+10y-2z=-10$ площиною $x=5$.

23. Скласти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що $F\left(\sqrt{56};0\right)$, $a=9$.

24. Встановити тип і звести рівняння поверхні другого порядку до канонічного вигляду: $8x^2+4y^2-2z^2-24y+24z-36=0$.

25. З'ясувати, яка лінія відповідає заданому рівнянню $2x^2+8y=6$:

1) Точка;

2) Пара паралельних прямих;

3) Пара перетинаючих прямих;

4) Еліпс;
5) Парабола;
6) Гіпербола.

26. Рівняння $9x^2 - 7y^2 - 6z = 5$ описує:
1) Конус;
2) Гіперболічний параболоїд;
3) Еліптичний параболоїд;
4) Циліндр;
5) Однопорожнинний гіперболоїд;
6) Двопорожнинний гіперболоїд;
7) Еліпсоїд.

27. З точок *A* (1; 2) і *B* (3; 1) проведені прямі через початок координат. Обчислити кут між прямими.

28. Відомі рівняння двох суміжних сторін паралелограма: $x - y - 1 = 0$ та $x - 2y = 0$, і точка перетину його діагоналей *M* (3; –1). Знайти рівняння двох інших сторін паралелограма.

29. Записати рівняння площини, що проходить через точки *A* (2; 2; 0) і *B* (4; 0; 0) паралельно до осі *Oz*.

30. З'ясувати, чи перетинаються прямі $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{-1}$ і $\begin{cases} x - 2y - 3z - 4 = 0; \\ x - y - 5z - 2 = 0. \end{cases}$

31. Знайти основу перпендикуляра, опущеного з точки *A* (1; 3; 2) на площину $2x - y + z + 3 = 0$.

Варіант **19**

1. На осі *Oy* знайти точку, рівновіддалену від точок *A* (2; 3; –5) і *B* (4; 5; 2).

2. Через точку *M* (4; 4) провести прямі паралельно і перпендикулярно до прямої $y = -3x + 1$.

3. Обчислити тангенс кута між прямими $5x - 3y - 2 = 0$ і $y = 2x + 3$.

4. Знайти відстань від точки *M* (0; 3) до прямої $(x-4) + 2(y-1) = 0$.

5. Привести до нормального вигляду рівняння прямої $\frac{x}{4} - \frac{y}{3} = 1$.

6. З точки *A* (–2; 3) проведені промені до перетину з прямою $4x + 5y - 52 = 0$ в точці *D*. Скласти рівняння множини точок *M*, таких, що *AM* : *MD* = 4 : 1.

7. Задані вершини трикутника A (–2; –3), B (10; –2), C (6; 17).

1) Довести, що точки A, B, C не лежать на одній прямій.
2) Скласти рівняння сторін трикутника ABC.
3) Скласти рівняння прямої, що проходить через центр мас трикутника паралельно прямій AC.
4) Скласти рівняння висоти BD, знайти координати основи висоти BD трикутника ABC. Обчислити довжину висоти.
5) Скласти рівняння медіани AM.
6) Обчислити периметр ΔABC.
7) Обчислити площу ΔABC.
8) Визначити кути ΔABC.
9) Скласти рівняння прямої $A'B'$, симетричну прямій AB відносно точки C.
10) Зобразити ΔABC в прямокутній системі координат xOy.
11) Задати системою нерівностей множину точок ΔABC.

8. Записати рівняння площини, що проходить:

1) через точку M (2; –3; –1) паралельно до площини $8x+7y+6z+7=0$;
2) через точку M (3; –3; 2) перпендикулярно до прямої $\frac{x-3}{-1}=\frac{y}{-2}=\frac{z-1}{3}$;
3) через три точки A (0; 2; 2), B (–4; 3; 1), C (2; 0; 0);
4) через пряму $\begin{cases} x-y+2z-1=0; \\ x-4y+z=0 \end{cases}$ і точку M (0; 2; –2);
5) через паралельні прямі $\frac{x+15}{-6}=\frac{y+4}{-1}=\frac{z-2}{1}$ і $\begin{cases} x=-6t+1; \\ y=-t+2; \\ z=t+1; \end{cases}$
6) через точки M (1; 5; –4), N (5; –4; 5) паралельно до вектора $\vec{a}(1;1;5)$.

9. Обчислити кут та координати точки перетину прямої $\frac{x-2}{0}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+1}{1}$ і площини $5x+2y+3z-31=0$.

10. Знайти відстань від точки M (3; 2; 2) до площини $6(x-3)-2(y-2)+9(z-3)=0$.

11. Знайти кут між площинами $-2x-4y-4z-6=0$ і $4(x+3)+7(y-3)-4(z+3)=0$.

12. Знайти кут між прямою $\frac{x+1}{-2}=\frac{y+5}{-1}=\frac{z+4}{2}$ і площиною $2x-6y-3z-1=0$.

13. Знайти точку A_1, симетричну точці A (–7; 4; 2) відносно площини $-x+y+2z-3=0$.

14. Задані мимобіжні прямі: $\frac{x-1}{-2}=\frac{y+1}{0}=\frac{z+3}{-3}$, $\frac{x-1}{1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-3}{-2}$.

Виконати наступні дії:

1) провести площину, що проходить через першу пряму паралельно до другої прямої;
2) знайти відстань між прямими;
3) провести спільний перпендикуляр до прямих.

15 .Задані вершини піраміди *A* (3; 0; –4), *B* (–4; –2; 1), *C* (–2; –3; –4), *D* (–1; –4; 0).

1) Довести, що точки *A, B*, *C*, *D* не лежать в одній площині.
2)Знайти рівняння площин, які містять грані піраміди *ABCD*.
3) Скласти рівняння площини, що проходить через вершину *D* паралельно грані *ABC*.
4) Скласти рівняння площини, що проходить через ребро *AB* паралельно ребру *CD*.
5) Скласти рівняння прямої, що проходить через точки *C*, *D*.
6) Скласти рівняння прямої, що проходить через точку *B* паралельно ребру *AC*.
7) Знайти об'єм піраміди *ABCD.*
8) Знайти довжину висоти піраміди *ABCD*, що опущена з вершини *D*.
9) Знайти площу грані *ABC*.
10) Знайти кут між ребром *AB* та гранню *BCD*.
11) Скласти рівняння площини, що проходить через вершину *D* перпендикулярно до ребра *AB*.
12) Скласти рівняння висоти, що опущена з вершини *D* на грань *ABC*.
13) Знайти координати основи висоти *DE* тетраедра *ABCD*.

16. Знайти відстань між площинами $-4x-2y+4z-5=0$ і $-4(x+2)-2(y-4)+4(z+2)=0$.

17. Побудувати криві другого порядку в прямокутній системі координат:

а) $(x+4)^2+(y-3)^2=25$; б) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$; в) $-\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{25}=1$; г) $y^2=-10x$.

18. Побудувати задані лінії в прямокутній системі координат й заштрихувати площу фігури, обмеженої ними: $y^2=x$, $(y-1)^2=-(x-4)$, $x+2=0$.

19. Знайти найменшу відстань між двома колами $x^2+y^2+10x-2y=-17$ і $x^2+y^2-14x+30y=-270$.

20. Звести криву другого порядку $-4x^2-8x+4y-22=0$ до канонічного вигляду, знайти всі її характеристики, побудувати графік кривої.

21. Побудувати криву, що задана параметрично $\begin{cases} x = 4\cos 5t - 4; \\ y = 8 + 2\sin 5t. \end{cases}$

22. Знайти радіус кола, яке є перерізом сфери
$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 8y - 14z = -1$ площиною $y = 4$.

23. Скласти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що $F\left(0; \sqrt{40}\right), b = 6$.

24. Встановити тип і звести рівняння поверхні другого порядку до канонічного вигляду: $-4x^2 - 3y^2 + 8z^2 - 32x - 12y + 8z - 48 = 0$.

25. З'ясувати, яка лінія відповідає заданому рівнянню $2x^2 - 4y^2 = -5$:

1) Точка;
2) Пара паралельних прямих;
3) Парабола;
4) Пара перетинаючих прямих;
5) Гіпербола;
6) Еліпс.

26. Рівняння $4x^2 + 7y^2 - 7z = 2$ описує:

1) Еліптичний параболоїд;
2) Двопорожнинний гіперболоїд;
3) Однопорожнинний гіперболоїд;
4) Циліндр;
5) Гіперболічний параболоїд;
6) Еліпсоїд;
7) Конус.

27. Знайти рівняння прямих, що проходять через точку A (1; 1) і відсікають на осі Ox відрізок у два рази більше, ніж на осі Oy.

28 .Записати рівняння прямої, що проходить через точку M (3; 6) на відстані $2\sqrt{2}$ від точки N (5; 4).

29. Площина проходить через точку M (–1; –1; 2). Записати рівняння площини, якщо відомо, що вона перпендикулярна двом заданим площинам: $x - 2y + z - 4 = 0$ і $x + 2y - 2z + 4 = 0$.

30. При яких значеннях B і D пряма $\begin{cases} x - 2y + z - 9 = 0; \\ 3x + By + z + D = 0 \end{cases}$ належить площині xOy?

31. Переконатися, що прямі $\dfrac{x}{0} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z+1}{2}$ і $\dfrac{x+3}{3} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z}{1}$ перетинаються. Знайти рівняння площини, в якій вони лежать.

Варіант 20

1. На осі Ox знайти точку, рівновіддалену від точок A (–1; 5; 5) і B (3; 4; 2).

2. Через точку M (4; 4) провести прямі паралельно і перпендикулярно до прямої $y = -3x - 2$.

3. Обчислити тангенс кута між прямими $6x + 4y + 3 = 0$ і $y = 3x - 3$.

4. Знайти відстань від точки M (3; 4) до прямої $4(x-1) + 8(y+3) = 0$.

5. Привести до нормального вигляду рівняння прямої $\frac{x}{-3} - \frac{y}{4} = 1$.

6. З точки A (2; 7) проведені промені до перетину з прямою $-5x - 4y + 65 = 0$ в точці D. Скласти рівняння множини точок M, таких, що $AM : MD = 2 : 1$.

7. Задані вершини трикутника A (3; 0), B (19; –2), C (11; 12).

1) Довести, що точки A, B, C не лежать на одній прямій.
2) Скласти рівняння сторін трикутника ABC.
3) Скласти рівняння прямої, що проходить через центр мас трикутника паралельно прямій AC.
4) Скласти рівняння висоти BD, знайти координати основи висоти BD трикутника ABC. Обчислити довжину висоти.
5) Скласти рівняння медіани AM.
6) Обчислити периметр ΔABC.
7) Обчислити площу ΔABC.
8) Визначити кути ΔABC.
9) Скласти рівняння прямої $A'B'$, симетричну прямій AB відносно точки C.
10) Зобразити ΔABC в прямокутній системі координат xOy.
11) Задати системою нерівностей множину точок ΔABC.

8. Записати рівняння площини, що проходить:

1) через точку M (1; 0; 0) паралельно до площини $-3x - 4y + 5z + 7 = 0$;
2) через точку M (5; 4; –3) перпендикулярно до прямої $\frac{x+3}{-2} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z}{3}$;
3) через три точки A (–2; –4; –2), B (–3; 1; –4), C (2; 0; –2);
4) через пряму $\begin{cases} 2x - 2y - z + 2 = 0; \\ 4x - 4y - z + 4 = 0 \end{cases}$ і точку M (1; 3; 4);
5) через паралельні прямі $\frac{x+19}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-4}{2}$ і $\begin{cases} x = 4t - 9; \\ y = -2t + 1; \\ z = 4t + 2; \end{cases}$

6) через точки M (0; 6; –5), N (2; 1; 6) паралельно до вектора $\vec{a}\left(-5;4;4\right)$.

9. Обчислити кут та координати точки перетину прямої $\frac{x-3}{-2}=\frac{y-3}{0}=\frac{z+2}{1}$ і площини $3x-2y+2z+21=0$.

10. Знайти відстань від точки M (2; –2; 2) до площини $2\left(x-2\right)-\left(y+2\right)-2\left(z-2\right)=0$.

11. Знайти кут між площинами $-4x-y+8z+2=0$ і $-2\left(x-3\right)+6\left(y+3\right)+3\left(z-3\right)=0$.

12. Знайти відстань від точки M (4; 3; 3) до прямої $\frac{x+4}{2}=\frac{y+1}{-4}=\frac{z-5}{4}$.

13. Знайти точку A_1, симетричну точці A (7; 3; –9) відносно площини $2x+3y-2z-7=0$.

14. Задані мимобіжні прямі: $\begin{cases} x=-1; \\ y=t-2; \\ z=2t-3, \end{cases}$ $\frac{x+2}{2}=\frac{y-4}{-4}=\frac{z-2}{-4}$.

Виконати наступні дії:

1) провести площину, що проходить через першу пряму паралельно до другої прямої;
2) знайти відстань між прямими;
3) провести спільний перпендикуляр до прямих.

15. Задані вершини піраміди A (1; –4; –3), B (3; 0; 3), C (–3; –2; –1), D (0; 1; 1).

1) Довести, що точки A, B, C, D не лежать в одній площині.
2) Знайти рівняння площин, які містять грані піраміди $ABCD$.
3) Скласти рівняння площини, що проходить через вершину D паралельно грані ABC.
4) Скласти рівняння площини, що проходить через ребро AB паралельно ребру CD.
5) Скласти рівняння прямої, що проходить через точки C, D.
6) Скласти рівняння прямої, що проходить через точку B паралельно ребру AC.
7) Знайти об’єм піраміди $ABCD$.
8) Знайти довжину висоти піраміди $ABCD$, що опущена з вершини D.
9) Знайти площу грані ABC.
10) Знайти кут між ребром AB та гранню BCD.
11) Скласти рівняння площини, що проходить через вершину D перпендикулярно до ребра AB.

12) Скласти рівняння висоти, що опущена з вершини D на грань ABC.

13) Знайти координати основи висоти DE тетраедра $ABCD$.

16. Знайти відстань між площинами $-x+8y+4z+1=0$ і $-x+8y+4z-16=0$.

17. Побудувати криві другого порядку в прямокутній системі координат:
а) $(x-3)^2+(y-3)^2=4$; б) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{49}=1$; в) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{9}=1$; г) $y^2=-8x$.

18. Побудувати задані лінії в прямокутній системі координат й заштрихувати площу фігури, обмеженої ними: $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=1,\ (x-4)^2+y^2=1,$ $x-6=0$.

19. Знайти найменшу відстань між двома колами $x^2+y^2-8x-6y=-24$ і $x^2+y^2-24x-36y=-459$.

20. Звести криву другого порядку $-3x^2+18x+y^2-8y-8=0$ до канонічного вигляду, знайти всі її характеристики, побудувати графік кривої.

21. Побудувати криву, що задана параметрично $\begin{cases} x=6\sin^2 3t-1; \\ y=3-3\cos 3t. \end{cases}$

22. Знайти радіус кола, яке є перерізом сфери
$x^2+y^2+z^2-8x+8y+12z=-58$ площиною $z=-5$.

23. Скласти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що $F\left(0;\sqrt{72}\right), b=9$

24. Встановити тип і звести рівняння поверхні другого порядку до канонічного вигляду: $-5x^2+5y^2-5z^2+50x+20y+20z-250=0$.

25. З’ясувати, яка лінія відповідає заданому рівнянню $6x^2-5y^2=-3$:

1) Гіпербола;
2) Пара перетинаючих прямих;
3) Пара паралельних прямих;
4) Парабола;
5) Еліпс;
6) Точка.

26. Рівняння $6x^2-9y^2+3z=-3$ описує:

1) Гіперболічний параболоїд;
2) Еліптичний циліндр;
3) Конус;
4) Двопорожнинний гіперболоїд;
5) Гіперболічний циліндр;
6) Однопорожнинний гіперболоїд.

27. Знайти довжину висоти, опущеної на сторону *AB*, в трикутнику *ABC*: *A* (2; 0), *B* (4; 2), *C* (–3; 3).

28. Знайти проекцію точки *M* (4; 5) на пряму, що проходить через точки *A* (3;–2) і *B* (6; –1).

29. Записати рівняння площини, що проходить через точку *M* (2; –4; 3) і вісь *Oz*.

30. Записати канонічне рівняння прямої, що проходить через точку *M* (3; –2; –4) паралельно до площини $3x-2y-3z-7=0$ і перетинає пряму $\frac{x-2}{3}=\frac{y+4}{-2}=\frac{z-1}{2}$.

31. Записати параметричні рівняння перпендикуляра, опущеного з точки *M* (–1; 2; 3) на вісь *Oz*.

***Варіант* 21**

1. На осі *Oy* знайти точку, рівновіддалену від точок *A* (1; 3; 0) і *B* (3; –5; –4).

2. Через точку *M* (5; –1) провести прямі паралельно і перпендикулярно до прямої $x-3y-2=0$.

3. Обчислити тангенс кута між прямими $6x-4y+3=0$ і $y=-3x-1$.

4. Знайти відстань від точки *M* (4; 3) до прямої $3(x-4)-4(y+3)=0$.

5. Привести до нормального вигляду рівняння прямої $6x+8y-7=0$.

6. З точки *A* (–4; 2) проведені промені до перетину з прямою $4x-4y+16=0$ в точці *D*. Скласти рівняння множини точок *M*, таких, що *AM* : *MD* = 1 : 3.

7. Задані вершини трикутника *A* (1;–4), *B* (–7; 3), *C* (6; 4).

1) Довести, що точки *A*, *B*, *C* не лежать на одній прямій.
2) Скласти рівняння сторін трикутника *ABC*.
3) Скласти рівняння прямої, що проходить через центр мас трикутника паралельно прямій *AC*.
4) Скласти рівняння висоти *BD*, знайти координати основи висоти *BD* трикутника *ABC*. Обчислити довжину висоти.
5) Скласти рівняння медіани *AM*.
6) Обчислити периметр ΔABC.
7) Обчислити площу ΔABC.
8) Визначити кути ΔABC.

9) Скласти рівняння прямої $A'B'$, симетричну прямій AB відносно точки C.

10) Зобразити $\triangle ABC$ в прямокутній системі координат xOy.

11) Задати системою нерівностей множину точок $\triangle ABC$.

8. Записати рівняння площини, що проходить:

1) через точку $M(1; 3; 4)$ паралельно до площини $-2x+4y+4z-20=0$;

2) через точку M (–2; 0; 2) перпендикулярно до прямої

$$\begin{cases} 3x-3y+4z+2=0; \\ 3x+2y-2z-3=0. \end{cases}$$

3) через три точки A (–1; 4; –1), B (–4; 1; –4), C (3; 4; 3);

4) через пряму $\begin{cases} 6x-4y-2z-2=0; \\ 3x-4y+2z-2=0 \end{cases}$ і точку M (–2; –4; 4);

5) через паралельні прямі $\frac{x+1}{-2}=\frac{y-1}{-4}=\frac{z+1}{6}$ і $\frac{x+19}{-2}=\frac{y+3}{-4}=\frac{z+3}{6}$;

6) через точки M (0; –1; 3), N (3; 2; –5) паралельно до вектора $\vec{a}(-5; 1; -2)$.

9. Обчислити кут та координати точки перетину прямої $\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+1}{-2}$ і площини $5x+4y-3z-66=0$.

10. Знайти відстань від точки M (–3; –2; –3) до площини $-x-4y+8z+6=0$.

11. Знайти кут між площинами $2x+6y+9z+10=0$ і $7(x+1)-4(y-4)-4(z+1)=0$.

12. Знайти відстань від точки M (3; –1; 3) до прямої $\begin{cases} 6x+4y+2z-4=0; \\ 3x+y-3z+1=0. \end{cases}$

13. Знайти точку A_1, симетричну точці A (–11; –5; –3) відносно площини $x+y+z+1=0$.

14. Задані мимобіжні прямі: $\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{-3}=\frac{z+3}{3}$, $\frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{0}=\frac{z-4}{4}$.

Виконати наступні дії:

1) провести площину, що проходить через першу пряму паралельно до другої прямої;

2) знайти відстань між прямими;

3) провести спільний перпендикуляр до прямих.

15. Задані вершини піраміди A (–4; –1; 3), B (1; 0; –3), C (–3; 0; –1), D (4; –2; –2).

1) Довести, що точки A, B, C, D не лежать в одній площині.

2) Знайти рівняння площин, які містять грані піраміди $ABCD$.
3) Скласти рівняння площини, що проходить через вершину D паралельно грані ABC.
4) Скласти рівняння площини, що проходить через ребро AB паралельно ребру CD.
5) Скласти рівняння прямої, що проходить через точки C, D.
6) Скласти рівняння прямої, що проходить через точку B паралельно ребру AC.
7) Знайти об'єм піраміди $ABCD$.
8) Знайти довжину висоти піраміди $ABCD$, що опущена з вершини D.
9) Знайти площу грані ABC.
10) Знайти кут між ребром AB та гранню BCD.
11) Скласти рівняння площини, що проходить через вершину D перпендикулярно до ребра AB.
12) Скласти рівняння висоти, що опущена з вершини D на грань ABC.
13) Знайти координати основи висоти DE тетраедра $ABCD$.

16. Знайти відстань між площинами $-2x+4y+4z+4=0$ і $-2x+4y+4z-20=0$.

17. Побудувати криві другого порядку в прямокутній системі координат:
а) $(x+1)^2+(y-1)^2=1$; б) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$; в) $-\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$; г) $x^2=9y$.

18. Побудувати задані лінії в прямокутній системі координат й заштрихувати площу фігури, обмеженої ними: $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{16}=1,\ (x-1)^2+y^2=1,\ x=0.$

19. Знайти найменшу відстань між двома колами $x^2+y^2+2x-8y=8$ і $x^2+y^2-14x-38y=-374$.

20. Звести криву другого порядку $-2x^2+2y+10=0$ до канонічного вигляду, знайти всі її характеристики, побудувати графік кривої.

21. Побудувати криву, що задана параметрично $\begin{cases} x=7\cos 2t+1; \\ y=4\sin 2t-1. \end{cases}$

22. Знайти радіус кола, яке є перерізом сфери
$x^2+y^2+z^2-4x+2y-18z=-61$ площиною $y=3$.

23. Скласти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що $F\left(\sqrt{45};0\right)$, $a=3$.

24. Встановити тип і звести рівняння поверхні другого порядку до канонічного вигляду: $-2x^2+y^2-4z^2+12x+4y-4z-28=0$.

25. З'ясувати, яка лінія відповідає заданому рівнянню $3x^2 - 5y^2 = 0$:

1) Точка;
2) Пара паралельних прямих;
3) Парабола;
4) Пара перетинаючих прямих;
5) Гіпербола;
6) Еліпс.

26. Рівняння $2x^2 - 5y = 0$ описує:

1) Гіперболічний параболоїд;
2) Двопорожнинний гіперболоїд;
3) Циліндр;
4) Однопорожнинний гіперболоїд;
5) Еліпсоїд;
6) Еліптичний параболоїд.

27. *A* (3;–4) — вершина прямого кута рівнобедреного прямокутного трикутника, $2y - 5x + 1 = 0$ — рівняння його гіпотенузи. Записати рівняння катетів цього трикутника.

28. Скласти рівняння сторін трикутника, знаючи одну його вершину *A* (3;–4) і рівняння прямих, на яких лежать дві його висоти: $7x - 2y - 1 = 0,\ 2x - 7y - 6 = 0$.

29. Записати рівняння площини, що проходить через вісь *Ox* і точку *M* (0; –2; 3).

30. Скласти канонічне рівняння прямої, що проходить через точку *M* (1; –2; 3) перпендикулярно до вектора $\vec{a}(9; -3; -1)$ і перетинає пряму $\dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z}{1}$.

31. Знайти рівняння площини, що проходить через точки *M* (1; 1; 1) і *N* (–1; 1; –1) паралельно до прямої *AB*: *A* (5; –2; 3) і *B* (6; 1; 0).

Варіант 22

1. На осі *Ox* знайти точку, рівновіддалену від точок *A* (3; –2; 0) і *B* (4; 4; 4).

2. Через точку *M* (0; 0) провести прямі паралельно і перпендикулярно до прямої $3x - y + 2 = 0$.

3. Обчислити тангенс кута між прямими $4x + 3y + 2 = 0$ і $y = 2x + 1$.

4. Знайти відстань від точки *M* (3; –1) до прямої $-3x - 4y + 3 = 0$.

5. Привести до нормального вигляду рівняння прямої $3x-4y-5=0$.

6. З точки A (5; –2) проведені промені до перетину з прямою $6x+5y-42=0$ в точці D. Скласти рівняння множини точок M, таких, що $AM : MD = 2 : 1$.

7. Задані вершини трикутника A (–3; –3), B (6; –11), C (7; 1).

1) Довести, що точки A, B, C не лежать на одній прямій.
2) Скласти рівняння сторін трикутника ABC.
3) Скласти рівняння прямої, що проходить через центр мас трикутника паралельно прямій AC.
4) Скласти рівняння висоти BD, знайти координати основи висоти BD трикутника ABC. Обчислити довжину висоти.
5) Скласти рівняння медіани AM.
6) Обчислити периметр $\triangle ABC$.
7) Обчислити площу $\triangle ABC$.
8) Визначити кути $\triangle ABC$.
9) Скласти рівняння прямої $A'B'$, симетричну прямій AB відносно точки C.
10) Зобразити $\triangle ABC$ в прямокутній системі координат xOy.
11) Задати системою нерівностей множину точок $\triangle ABC$.

8. Записати рівняння площини, що проходить:

1) через точку M (–1; 1; 3) паралельно до площини $5x+4y-4z-5=0$;
2) через три точки A (–1; 1; 2), B (–1; –1; 3), C (4; –4; 2)
3) через пряму $\begin{cases} 5x-4y-2z-3=0; \\ 3x-2y+3z+4=0 \end{cases}$ і точку M (3; –2; –2);
4) через паралельні прямі $\dfrac{x-1}{8}=\dfrac{y+4}{-1}=\dfrac{z+1}{2}$ і $\dfrac{x-9}{8}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-3}{2}$;
5) через точку M (0; –1; 3) перпендикулярно до прямої $\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z+1}{1}$;
6) через точки M (–4; 2; –4), N (–1; 0; 1) паралельно до вектора $\vec{a}\left(-3;-5;-2\right)$.

9. Обчислити кут та координати точки перетину прямої $\dfrac{x+3}{-3}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z-2}{-3}$ і площини $2x-2y+4z+58=0$.

10. Знайти відстань від точки M (–2; 1; 2) до площини $-x+8y+4z+6=0$.

11. Знайти кут між прямими $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y+3}{1}=\dfrac{z}{-2}$ і $\dfrac{x+4}{2}=\dfrac{y-4}{-1}=\dfrac{z+2}{-2}$.

12. Знайти відстань від точки $M(1;-1;2)$ до прямої $\begin{cases} 5x+2y-3z=0; \\ -4x+3y+2z-4=0. \end{cases}$

13. Знайти точку A_1, симетричну точці A (–4; –8; –9) відносно площини $-2x-3y+6z+22=0$.

14. Задані мимобіжні прямі: $\frac{x+3}{-1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-4}{0}$, $\frac{x+3}{1}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-3}{4}$.

Виконати наступні дії:

1) провести площину, що проходить через першу пряму паралельно до другої прямої;
2) знайти відстань між прямими;
3) провести спільний перпендикуляр до прямих.

15. Задані вершини піраміди A (3; –3; –3), B (–2; 3; 2), C (–4; –2; –2), D (3; 2; 2).

1) Довести, що точки A, B, C, D не лежать в одній площині.
2) Знайти рівняння площин, які містять грані піраміди $ABCD$.
3) Скласти рівняння площини, що проходить через вершину D паралельно грані ABC.
4) Скласти рівняння площини, що проходить через ребро AB паралельно ребру CD.
5) Скласти рівняння прямої, що проходить через точки C, D.
6) Скласти рівняння прямої, що проходить через точку В паралельно ребру AC.
7) Знайти об'єм піраміди $ABCD$.
8) Знайти довжину висоти піраміди $ABCD$, що опущена з вершини D.
9) Знайти площу грані ABC.
10) Знайти кут між ребром AB та гранню BCD.
11) Скласти рівняння площини, що проходить через вершину D перпендикулярно до ребра AB.
12) Скласти рівняння висоти, що опущена з вершини D на грань ABC.
13) Знайти координати основи висоти DE тетраедра $ABCD$.

16. Знайти відстань між площинами $2x+6y+3z=0$ і $2x+6y+3z-12=0$.

17. Побудувати криві другого порядку в прямокутній системі координат:

а) $(x-1)^2+(y+2)^2=36$; б) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$; в) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1$; г) $x^2=8y$.

18. Побудувати задані лінії в прямокутній системі координат й заштрихувати площу фігури, обмеженої ними: $y^2=-(x+1)$, $y^2=x+3$, $x-2=0$.

19. Знайти найменшу відстань між двома колами $x^2+y^2+10x+4y=-13$ і $x^2+y^2+28y=-180$.

20. Звести криву другого порядку $7x^2+42x+5y^2+50y+153=0$ до канонічного вигляду, знайти всі її характеристики, побудувати графік кривої.

21. Побудувати криву, що задана параметрично $\begin{cases} x=4\sin^2 7t-4; \\ y=6\cos 7t-3. \end{cases}$

22. Знайти радіус кола, яке є перерізом сфери
$x^2+y^2+z^2+6x+4y+10z=23$ площиною $z=1$.

23. Скласти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що $F\left(\sqrt{74};\,0\right)$, $a=5$.

24. Встановити тип і звести рівняння поверхні другого порядку до канонічного вигляду: $7x^2-2y^2+8z^2+28x-20y+96z+378=0$.

25. З'ясувати, яка лінія відповідає заданому рівнянню $6x^2-5y^2=-9$:

1) Точка;
2) Пара паралельних прямих;
3) Парабола;
4) Пара перетинаючих прямих;
5) Гіпербола;
6) Еліпс.

26. Рівняння $4x^2-2y^2+6z^2=2$ описує:

1) Гіперболічний параболоїд;
2) Двопорожнинний гіперболоїд;
3) Циліндр;
4) Однопорожнинний гіперболоїд;
5) Еліпсоїд;
6) Еліптичний параболоїд.

27. Знайти рівняння прямої, що проходить через точку *M* (–2; 6) і утворює з віссю *Ox* кут у три рази більший від кута, який утворює пряма $3x-\sqrt{3}y+1=0$ з віссю *Ox*.

28. Знайти координати вершин ромба, якщо задано рівняння прямих, на яких лежать дві його сторони: $x+2y-4=0$ і $x+2y-10=0$, а також рівняння однієї з його діагоналей: $y=x+2$.

29. Записати рівняння площини, що проходить через точку *M* (1; 7; –5) і відсікає від осей координат додатні та рівні відрізки.

30. Скласти канонічне рівняння прямої, що лежить в площині *yOz*, проходить через початок координат перпендикулярно до прямої $\dfrac{x+3}{-1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+1}{1}$.

31. Записати рівняння площини, що проходить через пряму $\begin{cases} x = 2t+1; \\ y = -t+2; \\ z = 3t-2 \end{cases}$ паралельно до прямої $\dfrac{x}{-1} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z+1}{2}$.

Варіант 23

1. На осі *Oz* знайти точку, рівновіддалену від точок *A* (–4; 1; –5) і *B* (1; –3; –4).

2. Через точку *M* (–4; –12) провести прямі паралельно і перпендикулярно до прямої $y = 3x - 2$.

3. Обчислити тангенс кута між прямими $x - y - 1 = 0$ і $y = -3x + 1$.

4. Знайти відстань від точки *M* (0; 3) до прямої $-\left(x+3\right) + 2\left(y-2\right) = 0$.

5. Привести до нормального вигляду рівняння прямої $-\dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{3} = 1$.

6. З точки *A* (4;–6) проведені промені до перетину з прямою $x - y - 10 = 0$ у точці *D*. Скласти рівняння множини точок *M*, таких, що *AM* : *MD* = 2 : 3.

7. Задані вершини трикутника *A* (–2; 4), *B* (11; 5), *C* (0; 12).

1) Довести, що точки *A*, *B*, *C* не лежать на одній прямій.
2) Скласти рівняння сторін трикутника *ABC*.
3) Скласти рівняння прямої, що проходить через центр мас трикутника паралельно прямій *AC*.
4) Скласти рівняння висоти *BD*, знайти координати основи висоти *BD* трикутника *ABC*. Обчислити довжину висоти.
5) Скласти рівняння медіани *AM*.
6) Обчислити периметр $\triangle ABC$.
7) Обчислити площу $\triangle ABC$.
8) Визначити кути $\triangle ABC$.
9) Скласти рівняння прямої *A*’*B*’, симетричну прямій *AB* відносно точки *C*.
10) Зобразити $\triangle ABC$ в прямокутній системі координат *xOy*.
11) Задати системою нерівностей множину точок $\triangle ABC$.

8. Записати рівняння площини, що проходить:

1) через точку *M* (–1; 2; 4) паралельно до площини $-3x + 6y - 5z + 8 = 0$;
2) через точку *M* (0; 0; –3) перпендикулярно до прямої $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z}{3}$;

3) через три точки A (2; 0; 0), B (2; 3; 3), C (–3; –4; –4);

4) через пряму $\frac{x-1}{0}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{-4}$ і точку M (–3; 3; 1);

5) проходить через паралельні прямі $\frac{x+2}{-18}=\frac{y-4}{-2}=\frac{z-3}{3}$ і $\frac{x-1}{18}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+1}{-3}$;

6) через точки M (0; 1; 6), N (–1; 3; –5) паралельно до вектора $\vec{a}(5;5;-1)$.

9. Обчислити кут та координати точки перетину прямої $\frac{x-4}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-3}{-3}$ і площини $4x-3y-2z-87=0$.

10. Знайти відстань від точки M (3; 4; 2) до площини

$-(x-3)+8(y-4)-4(z-3)=0$.

11. Знайти кут між площинами $x-4y+8z+7=0$ і $3(x-4)+4(z-4)=0$.

12. Знайти відстань від точки M (4; 5; –2) до прямої $\frac{x+3}{2}=\frac{y-4}{0}=\frac{z-2}{4}$.

13. Знайти точку A_1, симетричну точці A (–4; –8; –4) відносно прямої $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+5}{-2}$.

14. Задані мимобіжні прямі: $\frac{x+3}{1}=\frac{y+4}{2}=\frac{z-1}{0}$, $\frac{x+3}{4}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-2}{0}$.

Виконати наступні дії:

1) провести площину, що проходить через першу пряму паралельно до другої прямої;

2) знайти відстань між прямими;

3) провести спільний перпендикуляр до прямих.

15. Задані вершини піраміди A (–1; –3; 0), B (–1; –4; –1), C (3; 4; –3), D (4; –1; –3).

1) Довести, що точки A, B, C, D не лежать в одній площині.

2) Знайти рівняння площин, які містять грані піраміди $ABCD$.

3) Скласти рівняння площини, що проходить через вершину D паралельно грані ABC.

4) Скласти рівняння площини, що проходить через ребро AB паралельно ребру CD.

5) Скласти рівняння прямої, що проходить через точки C, D.

6) Скласти рівняння прямої, що проходить через точку B паралельно ребру AC.

7) Знайти об’єм піраміди $ABCD$.

8) Знайти довжину висоти піраміди $ABCD$, що опущена з вершини D.

9) Знайти площу грані ABC.

10) Знайти кут між ребром AB та гранню BCD.

11) Скласти рівняння площини, що проходить через вершину D перпендикулярно до ребра AB.

12) Скласти рівняння висоти, що опущена з вершини D на грань ABC.

13) Знайти координати основи висоти DE тетраедра $ABCD$.

16. Знайти відстань між площинами $3x+2y-6z-5=0$ і $3(x+2)+2(y+1)-6(z+2)=0$.

17. Побудувати криві другого порядку в прямокутній системі координат:
а) $(x+2)^2+(y-4)^2=49$; б) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{49}=1$; в) $-\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$; г) $y^2=-12x$.

18. Побудувати задані лінії в прямокутній системі координат й заштрихувати площу фігури, обмеженої ними: $x^2=y$, $x^2+(y-3)^2=1$, $y-2=0$.

19. Знайти найменшу відстань між двома колами $x^2+y^2-4x+2y=31$ і $x^2+y^2-14x-22y=-134$.

20. Звести криву другого порядку $6x+9y^2+72y+175=0$ до канонічного вигляду, знайти всі її характеристики, побудувати графік кривої.

21. Побудувати криву, що задана параметрично $\begin{cases} x=8\cos t+1; \\ y=4\sin t-3. \end{cases}$

22. Знайти радіус кола, яке є перерізом сфери
$x^2+y^2+z^2-8x-14y-8z=-41$ площиною $x=6$.

23. Скласти канонічне рівняння еліпса якщо відомо, що $F\left(0;\sqrt{60}\right)$, $b=8$.

24. Встановити тип і звести рівняння поверхні другого порядку до канонічного вигляду: $-x^2+y^2+z^2-4x-8y+4z+16=0$.

25. З’ясувати, яка лінія відповідає заданому рівнянню $2x^2=6$:

1) Пара паралельних прямих;
2) Гіпербола;
3) Еліпс;
4) Пара перетинаючих прямих;
5) Парабола;
6) Точка.

26. Рівняння $7x^2+2y^2+9z^2=8$ описує:

1) Гіперболічний параболоїд;
2) Еліпсоїд;
3) Однопорожнинний гіперболоїд;
4) Еліптичний параболоїд;

5) Циліндр;

6) Двопорожнинний гіперболоїд.

27. Написати рівняння прямої, що проходить через точку M (1;–2) і утворює з віссю Ox кут у два рази більший від кута, який утворює пряма $-3x+\sqrt{3}y+13=0$ з віссю Ox.

28. Дано $2x-y+5=0$ та $x-2y+4=0$ — рівняння сторін AB та BC паралелограма $ABCD$, M (1; 4) — точка перетину діагоналей. Знайти рівняння сторін CD і AD.

29. Записати рівняння площини, що проходить на однаковій відстані від двох паралельних площин $x+4y-z-5=0$ і $x+4y-z+7=0$.

30. Скласти канонічне рівняння прямої, що проходить через точку M (3; –2; 0) перпендикулярно до прямої $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-2}{3}$ і розташована у площині xOy.

31. Записати рівняння площини, що проходить через пряму $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z+4}{-1}$ перпендикулярно до площини $3x+y-2z+5=0$.

Варіант 24

1. На осі Oy знайти точку, рівновіддалену від точок A (1; 1; –5) і B (1; 3; 0).

2. Через точку M (–2; –3) провести прямі паралельно і перпендикулярно до прямої $-2x-y+1=0$.

3. Обчислити тангенс кута між прямими $x+2y+2=0$ і $y=-4x+3$.

4. Знайти відстань від точки M (1; 2) до прямої $9(x-4)-2(y-2)=0$.

5. Привести до нормального вигляду рівняння прямої $4x-3y+2=0$.

6. З точки A (–1; 7) проведені промені до перетину з прямою $6x-2y+8=0$ в точці D. Скласти рівняння множини точок M, таких, що $AM : MD = 3 : 1$.

7. Задані вершини трикутника A (–4; 4), B (–12; 18), C (4; 16).

1) Довести, що точки A, B, C не лежать на одній прямій.

2) Скласти рівняння сторін трикутника ABC.

3) Скласти рівняння прямої, що проходить через центр мас трикутника паралельно прямій AC.

4) Скласти рівняння висоти BD, знайти координати основи висоти BD трикутника ABC. Обчислити довжину висоти.

5) Скласти рівняння медіани AM.

6) Обчислити периметр ΔABC.

7) Обчислити площу ΔABC.

8) Визначити кути ΔABC.

9) Скласти рівняння прямої $A'B'$, симетричну прямій AB відносно точки C.

10) Зобразити ΔABC в прямокутній системі координат xOy.

11) Задати системою нерівностей множину точок ΔABC.

8. Записати рівняння площини, що проходить:

1) через точку M (2; –2; 1) паралельно до площини $5x+6y-5z=0$;

2) через три точки A (1; –2; –2), B (–2; 2; 2), C (0; –2; –4);

3) через пряму $\begin{cases} 5x-2y-2z-2=0; \\ 2x+4y-z+4=0 \end{cases}$ і точку M (–2; –3; –4);

4) через паралельні прямі $\frac{x-7}{24}=\frac{y-2}{4}=\frac{z+1}{4}$ і $\frac{x+8}{6}=\frac{y+2}{1}=\frac{z+2}{1}$;

5) через точку M (5; 2; 3) перпендикулярно до прямої $\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{1}$;

6) через точки M (1; –5; 2), N (2; –2; –2) паралельно до вектора $\vec{a}\left(-2;-4;2\right)$.

9. Обчислити кут та координати точки перетину прямої $\frac{x+2}{3}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+2}{1}$ і площини $3x+2y+4z-77=0$.

10. Знайти відстань від точки M (2; –2; 2) до площини $3\left(x-2\right)+6\left(y+2\right)-6\left(z-2\right)=0$.

11. Знайти кут між прямими $\frac{x+3}{0}=\frac{y-4}{-3}=\frac{z-3}{0}$ і $\frac{x}{4}=\frac{y+4}{2}=\frac{z-3}{-4}$.

12. Знайти відстань від точки M (–4; 3; 1) до прямої $\begin{cases} 4x-3y-3z+2=0; \\ 3x-2y+3z+2=0. \end{cases}$

13. Знайти точку A_1, симетричну точці A (9; –1; –1) відносно площини $-4x-3y-4z-2=0$.

14. Задані мимобіжні прямі: $\frac{x+1}{-2}=\frac{y+4}{-1}=\frac{z-2}{2}$, $\frac{x+4}{2}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+3}{-4}$.

Виконати наступні дії:

1) провести площину, що проходить через першу пряму паралельно до другої прямої;

2) знайти відстань між прямими;

3) провести спільний перпендикуляр до прямих.

15. Задані вершини піраміди A (–2; 3; –3), B (4; –1; 3), C (–3; 1; –1), D (2; 0; 0).

1) Довести, що точки A, B, C, D не лежать в одній площині.
2) Знайти рівняння площин, які містять грані піраміди $ABCD$.
3) Скласти рівняння площини, що проходить через вершину D паралельно грані ABC.
4) Скласти рівняння площини, що проходить через ребро AB паралельно ребру CD.
5) Скласти рівняння прямої, що проходить через точки C, D.
6) Скласти рівняння прямої, що проходить через точку B паралельно ребру AC.
7) Знайти об'єм піраміди $ABCD$.
8) Знайти довжину висоти піраміди $ABCD$, що опущена з вершини D.
9) Знайти площу грані ABC.
10) Знайти кут між ребром AB та гранню BCD.
11) Скласти рівняння площини, що проходить через вершину D перпендикулярно до ребра AB.
12) Скласти рівняння висоти, що опущена з вершини D на грань ABC.
13) Знайти координати основи висоти DE тетраедра $ABCD$.

16. Знайти відстань між площинами $-3x-2y+6z-4=0$ і $-3(x+2)-2(y-1)+6(z+2)=0$.

17. Побудувати криві другого порядку в прямокутній системі координат:

а) $(x+1)^2+(y-5)^2=4$; б) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{25}=1$; в) $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{49}=1$; г) $x^2=3y$.

18. Побудувати задані лінії в прямокутній системі координат й заштрихувати площу фігури, обмеженої ними: $y^2=x+4$, $x-3y+6=0$, $x+3y+6=0$.

19. Знайти найменшу відстань між двома колами $x^2+y^2-12x+12y=-36$ і $x^2+y^2-36x+30y=-524$.

20. Звести криву другого порядку $6x^2+24x-y+15=0$ до канонічного вигляду, знайти всі її характеристики, побудувати графік кривої.

21. Побудувати криву, що задана параметрично $\begin{cases} x=6\cos 4t-5; \\ y=7\sin 4t-6. \end{cases}$

22. Знайти радіус кола, яке є перерізом сфери

$x^2+y^2+z^2-12x-18y-8z=-44$ площиною $y=1$.

23. Скласти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомо, що $F\left(0;\sqrt{85}\right)$, $b=9$.

24. Встановити тип і звести рівняння поверхні другого порядку до канонічного вигляду: $-5x^2 - y^2 - 3z^2 - 40x - 2y - 18z - 108 = 0$.

25. З'ясувати, яка лінія відповідає заданому рівнянню $9x^2 - 7y^2 = 0$:

1) Точка;
2) Пара паралельних прямих;
3) Парабола;
4) Пара перетинаючих прямих;
5) Гіпербола;
6) Еліпс.

26. Рівняння $8x^2 - 7y^2 = -7$ описує:

1) Гіперболічний параболоїд;
2) Двопорожнинний гіперболоїд;
3) Циліндр;
4) Однопорожнинний гіперболоїд;
5) Еліпсоїд;
6) Еліптичний параболоїд.

27. Написати рівняння серединного перпендикуляра до відрізка *AB*, коли відомі координати його кінців *A* (1; 4), *B* (–3; 2).

28. Написати рівняння кола, яке проходить через точку *B* (–9; 5) і дотикається до осі ординат у точці *A* (0; 2).

29. З'ясувати, як розміщена кожна з точок *A* (1; 2; 1), *B* (–1; 2; –2), *C* (1; –2; 3) відносно сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

30. Точки *A* (4; 0; –3) і *B* (1; –6; 2) симетричні відносно площини σ. Написати рівняння цієї площини.

31. Написати рівняння проекції прямої $\frac{x-1}{0} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}$ на площину $x + y - z + 1 = 0$.

Варіант 25

1. На осі *Oz* знайти точку, рівновіддалену від точок *A* (–2; 3; –1) і *B* (2; –5; –3).

2. Через точку *M* (–2; 1) провести прямі паралельно і перпендикулярно до прямої $3x + 2y + 1 = 0$.

3. Обчислити тангенс кута між прямими $5x + 2y + 3 = 0$ і $y = 3x + 2$.

4. Знайти відстань від точки *M* (–2; 0) до прямої $3x + 4y + 7 = 0$.

5. Привести до нормального вигляду рівняння прямої $\frac{x}{-4}-\frac{y}{3}=1.$

6. З точки *A* (–5; 3) проведені промені до перетину з прямою $x+2y-19=0$ в точці *D*. Скласти рівняння множини точок *M*, таких, що *AM* : *MD* = 2 : 1.

7. Задані вершини трикутника *A* (–4; 1), *B* (5; –6), *C* (5; 7).

1) Довести, що точки *A*, *B*, *C* не лежать на одній прямій.
2) Скласти рівняння сторін трикутника *ABC*.
3) Скласти рівняння прямої, що проходить через центр мас трикутника паралельно прямій *AC*.
4) Скласти рівняння висоти *BD*, знайти координати основи висоти *BD* трикутника *ABC*. Обчислити довжину висоти.
5) Скласти рівняння медіани *AM*.
6) Обчислити периметр ΔABC .
7) Обчислити площу ΔABC.
8) Визначити кути ΔABC.
9) Скласти рівняння прямої *A*’*B*’, симетричну прямій *AB* відносно точки *C*.
10) Зобразити ΔABC в прямокутній системі координат *xOy*.
11) Задати системою нерівностей множину точок ΔABC.

8. Записати рівняння площини, що проходить:

1) через точку *M* (2; –1; 3) паралельно до площини $-2x+2y+7z-3=0$;
2) через точку *M* (5; 2; 3) перпендикулярно до прямої $\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{1}$
3) через три точки *A* (–4; 4; –1), *B* (3; –1; –4), *C* (–1; 1; 1);
4) через пряму $\frac{x+2}{-2}=\frac{y}{4}=\frac{z-3}{0}$ і точку *M* (–3; 3; 1);
5) проходить через паралельні прямі $\frac{x-4}{-19}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-1}{4}$ і $\frac{x-15}{-19}=\frac{y+3}{1}=\frac{z+1}{4}$;
6) через точки *M* (0; 1; 1), *N* (2; 6; 1) паралельно до вектора $\vec{a}(3;-3;1)$.

9. Обчислити кут та координати точки перетину прямої $\frac{x-1}{-3}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-3}{-2}$ і площини $5x+4y+4z+63=0$.

10. Знайти відстань від точки *M* (–1; 3; –1) до площини $6x-2y-3z+2=0$.

11. Знайти кут між площинами $x-4y+8z+7=0$ і $3(x-4)+4(z-4)=0$.

12. Знайти відстань від точки *M* (5 4; –4) до прямої $\frac{x-4}{-1}=\frac{y+2}{0}=\frac{z}{-3}$.

13, Знайти точку A_1, симетричну точці A (4; –3; 6) відносно площини $6x+3y+5z+25=0$.

14. Задані мимобіжні прямі: $\frac{x+4}{2}=\frac{y+4}{3}=\frac{z-4}{2}$, $\frac{x+4}{2}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z+3}{1}$.

Виконати наступні дії:

1) провести площину, що проходить через першу пряму паралельно до другої прямої;
2) знайти відстань між прямими;
3) провести спільний перпендикуляр до прямих.

15. Задані вершини піраміди A (–3; 3; –3), B (4; 2; –4), C (–4; 0; –4), D (–3; 4; –2).

1) Довести, що точки A, B, C, D не лежать в одній площині.
2) Знайти рівняння площин, які містять грані піраміди $ABCD$.
3) Скласти рівняння площини, що проходить через вершину D паралельно грані ABC.
4) Скласти рівняння площини, що проходить через ребро AB паралельно ребру CD.
5) Скласти рівняння прямої, що проходить через точки C, D.
6) Скласти рівняння прямої, що проходить через точку B паралельно ребру AC.
7) Знайти об'єм піраміди $ABCD$.
8) Знайти довжину висоти піраміди $ABCD$, що опущена з вершини D.
9) Знайти площу грані ABC.
10) Знайти кут між ребром AB та гранню BCD.
11) Скласти рівняння площини, що проходить через вершину D перпендикулярно до ребра AB.
12) Скласти рівняння висоти, що опущена з вершини D на грань ABC.
13) Знайти координати основи висоти DE тетраедра $ABCD$.

16. Знайти відстань між площинами $8x-4y-z=0$ і $8x-4y-z+5=0$.

17. Побудувати криві другого порядку в прямокутній системі координат:

а) $(x-6)^2+(y+5)^2=16$; б) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{49}=1$; в) $\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{36}=1$; г) $x^2=4y$.

18. Побудувати задані лінії в прямокутній системі координат й заштрихувати площу фігури, обмеженої ними: $(x-2)^2=y-2$, $(x-2)^2=y+2$, $(x-2)^2=2$.

19. Знайти найменшу відстань між двома колами $x^2+y^2-6x-10y=-9$ і $x^2+y^2-22x-40y=-485$.

20. Звести криву другого порядку $-x+2y^2+20y+48=0$ до канонічного вигляду, знайти всі її характеристики, побудувати графік кривої.

21. Побудувати криву, що задана параметрично $\begin{cases} x = 6\sin 2t + 4; \\ y = 2\cos 2t - 5. \end{cases}$

22. Знайти радіус кола, яке є перерізом сфери $x^2+y^2+z^2+8x-2y-6z=3$ площиною $x = 1$.

23. Складти канонічне рівняння еліпса якщо відомо, що $F\left(\sqrt{91}; 0\right)$, $\quad =10$.

24. Встановити тип і звести рівняння поверхні другого порядку до канонічного вигляду: $2x^2+6y^2+3z^2+16x-12y+3z+14=0$.

25. З'ясувати, яка лінія відповідає заданому рівнянню $4x^2+2y^2=0$:

1) Пара паралельних прямих;
2) Гіпербола;
3) Еліпс;
4) Пара перетинаючих прямих;
5) Парабола;
6) Точка.

26. Рівняння $4x^2-5y^2=6$ описує:

1) Гіперболічний параболоїд;
2) Еліпсоїд;
3) Однопорожнинний гіперболоїд;
4) Еліптичний параболоїд;
5) Циліндр;
6) Двопорожнинний гіперболоїд.

27. Написати рівняння прямої, що проходить через точку M (1;–2) і утворює з віссю Ox кут у півтора рази більший від кута, який утворює пряма $-3x+\sqrt{3}y+13=0$ з віссю Ox.

28. Дано $2x-y+5=0$ та $x-2y+4=0$ — рівняння сторін AB та BC ромба $ABCD$, M (1; 4) — точка перетину діагоналей. Знайти рівняння сторін CD і AD, а також координати вершин чотирикутника.

29. Довести, що паралелепіпед, три грані якого лежать у площинах $x+2y+2z+10=0$, $2x+y-2z+6=0$, $2x-2y+z+8=0$ — прямокутний.

30. Скласти рівняння площин, які лежать на відстані 1 від площини $3x+y-2z+5=0$.

31. Написати канонічні рівняння прямої, яка проходить через точку M (2; 0; –3) паралельно осі Oz.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Боднарчук Ю.В., Олійник Б.В. Лінійна алгебра та аналітична геометрія (для студентів-інформатиків). — Київ : Національний університет «Києво-Могилянська Академія», 2009. — 272 с.
2. Вища математика Практичний курс для студентів технічних спеціальностей заочної та дистанційної форм навчання. Лінійна алгебра. Аналітична геометрія: навч. посіб. / О. А. Геляровська, О. А. Галуза, С. М. Решетнікова, І. В. Сердюк; за ред. проф. Л. М. Любчика. — Харків : НТУ «ХПІ», 2016. — 169 с.
3. Вища математика у прикладах і задачах: у 2 т. Т. 1: Аналітична геометрія та лінійна алгебра. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної : навч. посіб. / Л. В. Курпа, Ж.Б. Кашуба, Г. Б. Лінник [та ін.]; за ред. Л.В. Курпи. — Харків : НТУ «ХПІ», 2009. — 532 с.
4. Вища математика у прикладах та задачах: навчальний посібник: в 2 т. / Ю. Л. Геворкян, Л. А. Балака, С. С. Габриелян [та ін.]; за ред. Ю. Л. Геворкяна. — Харків : Вид-во «Підручник» НТУ «ХПІ», 2011. — 408 с.
5. Вища математика: підручник / Л.М. Малярець, Л.М. Афанасьєва, Т. В. Денисова [та ін.]; за ред.. Малярець Л. Н. — Харків : Вид. ХНЕУ, 2012. — 772 с.
6. Вища математика. Збірник задач. У 2 частинах. Частина 1. / за ред. П. Овчинников — Київ : Вид-во Техніка, 2003. — 279 с.
7. Дубовик В. П., Юрик І. І. Вища математика. — Київ : 2001. — 356 с.
8. Збірник задач з аналітичної геометрії. / за редакцією В. В. Кириченка. — Кам'янець-Подільский : Аксіома, 2005. — 228с.
9. Канатников А. Н., Крищенко А. П. Аналитическая геометрия. — М. : Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2005. — 400 с.
10. Клетеник А. В. Сборник задач по аналитической геометрии / А. В. Клетеник. — М. : Наука, 2002. — 240с.
11. Кузнецов Л. А. Сборник задач по высшей математике. — М. : Высш. шк., 1983. — 175 с.
12. Ніколаєв О. Г. Аналітична геометрія та лінійна алгебра: Навч. посібник. — Харків : Основа, 2000. — 223 с.

13. Рудаковський Ю. К. та ін. Лінійна алгебра та аналітична геометрія. — Львів: 2002. — 452 с.
14. Тевяшев А. Д., Литвин О. Г. Вища математика у прикладах та задачах. Ч.1. Лінійна алгебра і аналітична геометрія. Диференціальне числення функцій однієї змінної. — Харків : ХНУРЕ ; Фактор, 2004. — 592 с.
15. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике : учеб. пособ. : в 3 т. Т. 1. / А. П. Рябушко, В. В. Баршатов, В. В. Державец, И. Е. Юруть; под ред. А. П. Рябушко. — Мн. : Высш. шк., 1990. — 270 с.

ЗМІСТ

Навчальне видання

СЕРДЮК Ірина Василівна
АХІЄЗЕР Олена Борисівна
ДУНАЄВСЬКА Ольга Ігорівна
НІКУЛЬЧЕНКО Артем Олександрович
КОЛОМОЙСЬКА Наталія Євгенівна
СТРЕЛЬНІКОВА Анна Юріївна

ПРАКТИКУМ З КУРСУ «АЛГЕБРА І ГЕОМЕТРІЯ» АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Навчально-методичний посібник для студентів спеціальностей
113 — Прикладна математика та
124 — Системний аналіз

Роботу до видання рекомендував Л. І. Безменов

Редактор М. П. Єфремова

План 2020 р., поз. 110

Підп. до друку 01.02.2022. Формат 60×90 1/16. Папір офсетний.
Гарнітура Times New Roman. Ум. друк. арк. 10,0.
Наклад 100 прим. Зам. № № 20-2022/0115. Ціна договірна.

Видавництво «НТМТ»
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців ДК № 1748 від 15.04.2004 р.
61072, м. Харків, вул. Дерев’янка, б. 16, к. 83. Тел. (095) 249-39-96