МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

для самостійної роботи за темою
ПОХІДНА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ:
основні поняття та формули, варіанти контрольних завдань,
приклади розв'язку
з курсу «Вища математика»

Затверджено редакційно-
видавничою радою університету,
протокол № 2 від 27.06.24.

Харків
НТУ «ХПІ»
2024

Методичні вказівки для самостійної роботи за темою «Похідна та її застосування: основні поняття, формули, варіанти контрольних завдань, приклади розв’язку» з курсу «Вища математика» для студентів заочної форми навчання / уклад.: Н.О. Кириллова, О.В. Одинцова, Г.М. Тимченко,. – Харків: НТУ «ХПІ». – 2024. – 37с.

Укладачі: Н.О. Кириллова, О.В. Одинцова, Г.М. Тимченко.

Рецензент доц. С.М. Решетнікова

Кафедра прикладної математики

Вступ

Методичні вказівки відповідають силабусам з дисципліни «Вища математика» та призначені надати допомогу студентам заочної форми навчання при вивченні розділу "Диференціальне числення функції однієї змінної", виконанні контрольних завдань з цієї теми та підготовки до іспиту.

Вказівки складаються з трьох частин. В першій частині зручно, компактно, у вигляді таблиць наведені формули та основні поняття теми "Диференціальне числення функції однієї змінної". Друга частина містить варіанти контрольних завдань, які охоплюють всі розділи теми: диференціювання складних функцій, функцій що задані неявно та параметричному вигляді; завдання на дослідження поведінки функцій та побудову графіків, обчислення границь за правилом Лопіталя, знаходження найбільшого та найменшого значень функції на відрізку, складання рівнянь дотичної та нормалі. Третя частина методичних вказівок містить приклади виконання контрольних завдань з покроковими поясненнями дій, з посиланнями на необхідні формули та теоретичні відомості.

Ці методичні вказівки можуть стати у нагоді і студентам очної форми навчання технічних університетів при підготовці до контрольних, колоквіумів, тестів, іспитів.

Основні поняття та формули до теми

«Диференціальне числення функції однієї змінної»

Приріст функції $y=f(x)$	$\Delta y = y(x+\Delta x)-y(x)=f(x+\Delta x)-f(x)$, де Δx - приріст аргументу
Похідна функції $y=f(x)$ в точці $x=x_0$	$y'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$
Геометричний зміст похідної в точці $x=x_0$	Проведемо дотичну до кривої $y=f(x)$ в точці $\mathrm{M}(x_0, f(x_0))$. Тоді $y'(x_0)=tg\alpha$, де α - кут між дотичною та додатним напрямком осі OX
Механічний зміст похідної в точці $t=t_0$	Якщо $x=x(t)$ - закон руху точки, то $x'(t_0)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{x(t_0+\Delta t)-x(t_0)}{\Delta t}=V(t_0)$ миттєва швидкість руху точки в момент часу t_0
Ліва похідна функції $y=f(x)$ в точці $x=x_0$	$y'_- = y'(x_0-0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0-0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$, $\Delta x = x-x_0<0$
Права похідні функції $y=f(x)$ в точці $x=x_0$	$y'_+ = y'(x_0+0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0+0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$, $\Delta x = x-x_0>0$
Необхідна та достатня умова існування похідної функції в точці	Якщо в точці існують ліва та права похідні і $y'(x_0-0)=y'(x_0+0)$, то в цій точці існує похідна $y'(x_0)$
Основні правила диференціювання функцій $U=U(x)$, $V=V(x)$, $C=const$	$C'=0$, $x'=1$, $(Cx)'=C$ $(U\pm V)'=U'\pm V' \Rightarrow (U\pm C)'=U'$ $(U\cdot V)'=U'\cdot V+U\cdot V' \Rightarrow (CU)'=CU'$ $\left(\frac{U}{V}\right)'=\frac{U'V-UV'}{V^2} \Rightarrow \left(\frac{U}{C}\right)'=\frac{U'}{C}$, $\left(\frac{C}{V}\right)'=-\frac{CV'}{V^2}$
Похідна складної функції $y=U(V(x))$	$y'=(U(V(x)))'=U'(V)\cdot V'(x)$
Похідна функції лінійного аргументу $y=f(ax+b)$	Якщо $(f(x))'=\varphi(x)$, то $y'=(f(ax+b))'=a\varphi(ax+b)$

Таблиця похідних найпростіших елементарних функцій
1) $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$, $\alpha \neq 0$, окремі випадки: $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$, $\left(\sqrt[p]{x^m}\right)' = \frac{m}{p} x^{\frac{m}{p}-1}$, $\left(\frac{1}{x^m}\right)' = -mx^{-m-1}$ $(C)' = (const)' = 0$ похідна від константи дорівнює 0
2) $(a^x)' = a^x \ln a$, $a > 0$, $a \neq 1$ $(e^x)' = e^x$
3) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$, $a > 0$, $a \neq 1$ $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
4) $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$, $(tg\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $(c\,tg\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
5) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\mathrm{arctg}\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$, $(\mathrm{arcctg}\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$
6) $(sh\, x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = ch\, x$ – похідна сінуса гіперболічного, $(ch\, x)' = \left(\frac{l^x + e^{-x}}{2}\right)' = sh\, x$ – похідна косінуса гіперболічного, $(th\, x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right)' = \frac{1}{ch^2 x}$ – похідна тангенса гіперболічного, $(cth\, x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}\right)' = \frac{1}{sh^2 x}$ – похідна котангенса гіперболічного

Правила та прийоми диференціювання деяких функцій та похідних вищих порядків

Логарифмічне диференціювання степенево-показникової функції $y=U(x)^{V(x)}$	$\ln y = V\ln U$, $y'(x)=\left(U(x)^{V(x)}\right)' = U^V\left(V'\ln U + \frac{V}{U}U'\right)$
Логарифмічне диференціювання функції вигляду $y=\frac{\sqrt[q]{U^p}\cdot\sqrt[n]{V^k}}{\sqrt[m]{W^r}}$	$\ln y = \frac{p}{q}\ln U + \frac{k}{n}\ln V - \frac{r}{m}\ln W$, $(\ln y)' = \frac{y'}{y}$, $y' = \frac{\sqrt[q]{U^p}\cdot\sqrt[n]{V^k}}{\sqrt[m]{W^r}}\left(\frac{p}{qU}U' + \frac{k}{nV}V' - \frac{r}{mW}W'\right)$
Похідна оберненої функції $y=1/f(x)$	$y' = \left(f^{-1}(x)\right)' = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$
Похідна функції, заданої параметрично	якщо $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, тоді $y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)}$
Похідні вищих порядків	$y'' = \left(y'(x)\right)'$, $y''' = \left(y''(x)\right)'$,… $y^{(n)}(x) = \left(y^{(n-1)}(x)\right)'$
Правила обчислення похідних вищих порядків	$\left(CU(x)\right)^{(n)} = CU^{(n)}$; $\left(U(x)\pm V(x)\right)^{(n)} = U^{(n)} \pm V^{(n)}$; $\left(U(x)\pm C\right)^{(n)} = U^{(n)}$
Формула Лейбніца (похідні вищого порядку добутку функцій)	$\left(U(x)\cdot V(x)\right)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k U^{(n-k)} V^{(k)}$, *де* $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, $\left(U(x)\right)^{(0)} = 1$, $\left(V(x)\right)^{(0)} = 1$; *окремі випадки:* $\left(U(x)\cdot V(x)\right)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k U^{(n-k)} V^{(k)}$ $(UV)^{(3)} = U'''V + 3U''V' + 3U'V'' + VU'''$
Друга похідна функції, заданої параметрично $x=x(t)$, $y=y(t)$	$y''(x) = \left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)' \cdot \frac{1}{x'(t)} = \frac{y''(t)x'(t) - x''(t)y'(t)}{\left(x'(t)\right)^3}$

Диференціал функції та його застосування	
Диференціал функції	$dy = df(x) = f'(x)\Delta x$, або $dy = f'(x)dx$, або $dy = y'(x)\,dx$
Геометричний зміст диференціалу функції $y = y(x)$ в точці $x = x_0$	Диференціал дорівнює приросту ординати дотичної, проведеної до графіка функції в точці $M(x_0, y_0)$, коли приріст аргументу Δx.
Властивості диференціалу функцій $U = U(x)$, $V = V(x)$, $C = const$	$d(CU) = CdU$, $d(U \pm C) = dU$, $d(aU + b) = adU$, $d(U \pm V) = dU \pm dV$, $d(U \cdot V) = VdU + UdV$, $d\left(\frac{U}{V}\right) = \frac{VdU - UdV}{V^2}$
Інваріантність форми запису першого диференціалу	Якщо $z = z(y(x))$, то $dz = z'(y)dy = z'(y)\,y'(x)\,dx = z'(x)dx$
Диференціали другого та вищих порядків	$d^2y(x) = d(dy) = y''(dx)^2 = y''dx^2$, $d^n y(x) = d(d^{n-1}y) = y^{(n)}(dx)^n = y^{(n)}dx^n$
Наближені обчислення функції $y = y(x)$ в точці $x = x_0 + \Delta x$ за допомогою диференціалу	$y(x) = y(x_0 + \Delta x) \approx y(x_0) + dy = y(x_0) + y'(x_0)\Delta x$

Застосування похідної	
Рівнянні дотичної до графіка функції $y = f(x)$ в точці $\mathrm{M}(x_0, y_0)$	$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$, де $y_0 = f(x_0)$; якщо $f'(x_0) = 0$, то $y = y_0$, тобто дотична паралельна осі ОХ
Рівнянні нормалі до графіка функції $y = f(x)$ в точці $\mathrm{M}(x_0, y_0)$	$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$, де $y_0 = f(x_0)$; якщо $f'(x_0) = 0$, то $x = x_0$, тобто нормаль паралельна осі OY
Правило Лопіталя розкриття невизначеностей вигляду $\left\|\frac{0}{0}\right\|$ або $\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|$	$\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}} \frac{f(x)}{g(x)} = \left\| \left\|\frac{0}{0}\right\|, \left\|\frac{\infty}{\infty}\right\| \right\| = \lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$
Розкриття невизначеності вигляду $\|1^\infty\|$, $\|\infty^0\|$, $\|0^0\|$	$\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}} f(x)^{g(x)} = \lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}} e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^A$, де $A = \lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}} g(x) \ln f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}} \frac{(\ln f(x))'}{(g^{-1}(x))'}$
Необхідні та достатні умови зростання та спадання функції на проміжку X	Якщо $y'(x) > 0$ для $\forall x \in X$, то $y = f(x)$ *зростає на проміжку;* якщо $y'(x) < 0$ для $\forall x \in X$, то $y = f(x)$ *спадає;* *і навпаки: якщо* $f(x)$ *зростає, то* $y'(x) > 0$, *якщо* $f(x)$ *спадає, то* $y'(x) < 0$
Означення локального екстремуму функції	Якщо в околі точки x_0 приріст функції $\Delta y = y(x_0 \pm \Delta x) - y(x_0)$ не змінює знак, то в цій точці функція має локальний екстремум.
Означення локального мінімуму функції	Якщо $\Delta y > 0$ для $\forall x \in (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$, то $x_0 = x_{min}$ та $y_{min} = y(x_{min})$

Означення локального максимуму функції	Якщо $\Delta y<0$ для $\forall x\in\left(x_0-\delta,\ x_0+\delta\right)$, то $x_0=x_{max}$ та $y_{max}=y(x_{max})$
Необхідна умова існування екстремуму функції	Якщо в точці $x=x_0$ існує локальний екстремум, то похідна в цій точці дорівнює нулю або не існує: $y'\left(x_0\right)=0$ або $\nexists y'\left(x_0\right)$
Стаціонарні точки функції	Це множина точок, в яких похідна функції дорівнює нулю
Критичні точки функції	Множина стаціонарних точок, доповнена точками, в яких похідна функції не існує
Достатня умова існування екстремуму функції (перша форма)	Нехай функція існує в *критичній* точки і при переході через критичну точку *похідна змінює знак*, тоді в точці існує екстремум. Якщо $y'>0$ для $\forall x\in(x_0-\delta,x_0)$, і $y'<0$ для $\forall x\in(x_0,x_0+\delta)$ то $x_0=x_{max}$, $y_{max}=y(x_{max})$. Якщо $y'<0$ для $\forall x\in(x_0-\delta,x_0)$, і $y'>0$ для $\forall x\in(x_0,x_0+\delta)$ то $x_0=x_{min}$, $y_{min}=y(x_{min})$
Друга форма достатніх умов існування екстремуму	Якщо в *стаціонарній* точці $y''\left(x_0\right)>0$, то в цій точці функція досягає мінімуму; якщо $y''\left(x_0\right)<0$, то в точці функція має максимум, коли $y''\left(x_0\right)=0$ нічого стверджувати не можна
Умови опуклості та угнутості графіку функції на проміжку X	Якщо $y''(x)>0$ для $\forall x\in X$, то графік функції опуклий униз (опуклий) на проміжку X; якщо $y''(x)<0$ для $\forall x\in X$, то графік функції *опуклий уверх (угнутий) на проміжку* X
Критичні точки 2 роду	Точки, в яких $y''(x)=0$ або не існує

Точки перегину графіка функції	Точки, в яких опуклість графіка функції змінюється на угнутість або навпаки
Необхідна умова існування точки перегину	Якщо графік функції має в точці x_0 перегин, то $y''(x_0) = 0$ або не існує $y''(x_0)$
Достатня умова існування перегину графіка	Нехай функція існує в критичній точці і при переході через неї друга похідна змінює знак, тоді це точка перегину графіка функції
Достатня умова існування екстремуму або точки перегину (третя форма)	Нехай в точці x_0 існує не менш, ніж n похідних, та перші (n-1) похідні дорівнюють нулю в цій точці, а <u>n</u> похідна не дорівнює нулю, тобто: $y'(x_0) = y''(x_0) = \ldots = y^{(n-1)}(x_0) = 0$, а $y^{(n)}(x_0) \neq 0$. Тоді, якщо $n = 2k - 1$ (n похідна непарного порядку), то в точці перегін графіка, якщо $n = 2k$ (n похідна парного порядку), то в точці екстремум, причому максимум якщо $y^{(2k)}(x_0) < 0$ та мінімум якщо $y^{(2k)}(x_0) > 0$
Рівняння похилих та горизонтальних асимптот графіка функції	$y = kx + b$, де $k = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - kx)$; $y = \tilde{k}x + \tilde{b}$, де $\tilde{k} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$, $\tilde{b} = \lim\limits_{x\to-\infty}(f(x) - kx)$; якщо $k = 0$ ($\tilde{k} = 0$), то маємо горизонтальну асимптоту $y = b$ ($y = \tilde{b}$)
Вертикальні асимптоти існують в точках розриву функції 2 роду	Вертикальна асимптота $x = x_0$ існує, якщо $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = \infty$ або $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \infty$,

	або обидві односторонні границі прямують до нескінченості
Формула Тейлора для многочлена або розкладення многочлена за степенями $(x-x_0)$	Якщо $P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n$, то $P_n(x)=P_n(x_0)+\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{P_n^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$
Формула Тейлора для функції або розкладення функції за степенями $(x-x_0)$	$y(x)=y(x_0)+\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{y^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_{n+1}(x)$, де $R_{n+1}(x)=\mathrm{o}\left((x-x_0)^n\right)$ - залишок в формі Піано
Формула Маклорена або розкладення функції за степенями x	$y(x)=y(0)+\frac{y'(0)}{1!}x+\ldots+\frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_{n+1}(x)$, де $R_{n+1}(x)=\mathrm{o}(x^n)$ - залишок в формі Піано
Таблиця розвинення деяких функцій за степенями x	
$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\mathrm{o}(x^n)$; $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\mathrm{o}(x^{2n})$; $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\mathrm{o}(x^{2n+1})$; $(1+x)^\alpha=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\mathrm{o}(x^n)$	

Варіанти контрольних завдань за темою «Похідна та її застосування»

Варіант 1

Завдання 1.

1.1.Знайти похідну функції у заданій точці: $y = \dfrac{x^2 - 7x + 3}{(x-1)^2}$; $y'\left(\dfrac{1}{2}\right) = ?$.

Знайти перші похідні функцій (приклади 1.2-1.10):

1.2. $y = \sqrt[3]{4x} - \dfrac{5}{\sqrt{x}} - \ln 5$;	1.6. $y = \ln^2(\sqrt{1+e^x} - 1)$;
1.3. $y = \dfrac{1}{3}\operatorname{ctg}^2 5x$;	1.7. $y = 2^{\operatorname{arctg} x^3}$;
1.4. $y = e^{-x}\arcsin x$;	1.8. $y = \dfrac{1}{3}\operatorname{arcctg}\dfrac{1+x}{1-x}$;
1.5. $y = -\dfrac{1}{60(1-3\cos x)^2}$;	1.9. ; $y = x^4(a - 2x^3)^2$
	1.10. $y = x^2 e^x \sin x 2.$

Завдання 2. Знайти перші похідні $\dfrac{dy}{dx}$ (приклади 2.1-2.4):

2.1. Степенево-показникової функції $y = \sqrt[x]{x}$ (знайти $y'(x)$ методом логарифмічного диференціювання);

2.2. $y = \dfrac{(x-2)^9}{\sqrt{(x-1)^5(x-3)^{11}}}$ (знайти $y'(x)$ методом логарифмічного диференціювання);

2.3. Функції, що задана неявно рівнянням $\operatorname{arctg}(x+y) = x$;

2.4. Функції, що задана параметрично $\begin{cases} x = \cos 2t \\ y = \sin^2 t \end{cases}$.

Завдання 3. Знайти другу похідну $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ функції $y = \dfrac{1}{4}x^2(2\ln x - 3)$.

Завдання 4. Записати рівняння дотичної та нормалі до кривої $y = x^2 - 4x + 3$ в точці(0; 3) ,

Завдання 5. Знайти найменше та найбільше значення функції $y = \ln\left(x^2 - 2x + 2\right)$ на відрізку $[0; 3]$.

Завдання 6. Обчислити границі за правилом Лопіталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos 2x}{\sin 2x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} x\ln^2 x$.

Завдання 7. Методами диференціального числення дослідити функції та побудувати графіки:

а) $y = \dfrac{\left(x^2 - 5\right)^3}{125}$; б) $y = \dfrac{x^5 - 8}{x^4}$.

Варіант 2

Завдання 1.

1.1. Знайти похідну функції у заданій точці: $y=\dfrac{\sqrt{2x^2-2x+1}}{x}$; $y'(1)=?$.

Знайти перші похідні функцій (приклади 1.2-1.10):

1.2. $y=-\dfrac{1}{20}\cos\left(5x^2\right)$	1.7. $y=\arccos\dfrac{\sqrt{x}}{x-1}$
1.3. $y=3^{\operatorname{ctg}^2\frac{1}{x}}$	1.8. $y=\dfrac{1}{10}e^{-x}(-\operatorname{tg}3x-\operatorname{ctg}3x)$
1.4. $y=\arcsin^2(\ln x)$	1.9. $y=\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{\log_3 2x}$
1.5. $y=3x^5\left(4-x^2\right)^3$	1.10. $y=\sqrt{x}(e^x-1)\ln x$
1.6. $y=3x^5\left(4-x^2\right)^3$	

Завдання 2. Знайти перші похідні $\dfrac{dy}{dx}$ (приклади 2.1-2.4) :

2.1. Степенево-показникової функції $y=x^{\sin x}$ (знайти $y'(x)$ методом логарифмічного диференціювання);

2.2. $y=x\sqrt[3]{\dfrac{(2x+5)^2}{x^2+1}}$ (знайти $y'(x)$ методом логарифмічного диференціювання);

2.3. Функції, що задана неявно рівнянням $\operatorname{tg}y=xy$;

2.4. Функції, що задана параметрично $\begin{cases} x=\operatorname{arctg}t \\ y=\ln(1+t^2) \end{cases}$.

Завдання 3. Знайти другу похідну $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ функції

$$y=\frac{1}{3}x^2\sqrt{1-x^2}+\frac{2}{3}\sqrt{1-x^2}+x\arcsin x.$$

Завдання 4. Записати рівняння дотичної та нормалі до кривої $y=x^2-2x-3$ в точці(-1; 0).

Завдання 5. Знайти найменше та найбільше значення функції $y=3x/(x^2+1)$ на відрізку $[0;\ 5]$.

Завдання 6. Обчислити границі за правилом Лопіталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{arctg}x}{x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2e^{-x}$.

Завдання 7. Методами диференціального числення дослідити функції та побудувати графіки:

а) $y=32x^2\left(x^2-1\right)^3$; б) $y=\dfrac{x^3}{x^3+1}$.

Варіант 3.

Завдання 1.

1.1. Знайти похідну функції у заданій точці: $y=\frac{x^8}{8(1-x^2)^4}$; $y'(2)=?$.

Знайти перші похідні функцій (приклади 1.2-1.10):

1.2. $y=\ln^2 x-\ln(\ln x)$	1.7. $y=9^{\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{x}}}$
1.3. $y=\operatorname{tg}^3\sqrt{4x-1}$	1.8. $y=\sqrt{2e^{-x}-2^x+1}$
1.4. $y=(1-\arccos 5x)^2$	1.9. $y=\frac{2}{5(3x^2-7)^3}$
1.5. $y=-\frac{\sin x}{5\cos^3 x}$	
1.6. $y=\frac{1}{4}x^3(8-3x)^5$	1.10. $y=x^2\sin\frac{x}{2}\cos x$.

Завдання 2. Знайти перші похідні $\frac{dy}{dx}$ (приклади 2.1-2.4):

2.1. Степенево-показникової функції $y=(\operatorname{arctg} x)^x$ (знайти $y'(x)$ методом логарифмічного диференціювання);

2.2. $y=\frac{(x+2)^2}{(x+1)^3(x+3)^4}$ (знайти $y'(x)$ методом логарифмічного диференціювання);

2.3. Функції, що задана неявно рівнянням $a\cos^2(x+y)=b$;

2.4. Функції, що задана параметрично $\begin{cases} x=\arcsin t \\ y=\sqrt{1-t^2} \end{cases}$.

Завдання 3. Знайти другу похідну $\frac{d^2y}{dx^2}$ функції $y=-\frac{1}{9}x\sin 3x-\frac{2}{27}\cos 3x$.

Завдання 4. Записати рівняння дотичної та нормалі до кривої $y = x^2 - 5x + 4$ в точці(3;-2).

Завдання 5. Знайти найменше та найбільше значення функції $y=(2x-1)/(x-1)^2$ на відрізку [–1/2;0].

Завдання 6. Обчислити границі за правилом Лопіталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} xe^{\frac{1}{x}}$.

Завдання 7. Методами диференціального числення дослідити функції та побудувати графіки:

а) $y=(x+1)^2(x-2)^4$; б) $y=\frac{(x-1)^2}{(x+1)^3}$.

Варіант 4

Завдання 1.

1.1. Знайти похідну функції у заданій точці: $y=\dfrac{1-x-x^3}{\left(1-x^3\right)}$; $y'(0)=?$.

Знайти перші похідні функцій (приклади 1.2-1.10):

1.1. $y=\dfrac{1}{3}\left(5\cos^4 x-7\right)$	1.6. $y=\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{x-1}{x+1}$
1.2. $y=2\operatorname{arctg}\sqrt{\sin x}$	1.7. $y=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\arcsin\sqrt{x}$
1.3. $y=6^{\cos^2\frac{1}{x}}$	1.8. $y=\dfrac{1}{\ln^2 3x}$
1.4. $y=\dfrac{1}{2}\sin x^2-\dfrac{1}{2}\sin^2 x$	1.9. $y=\dfrac{1}{x}2^x\ln x$.
1.5. $y=\sqrt{xe^x+x}$	

Завдання 2. Знайти перші похідні $\dfrac{dy}{dx}$ (приклади 2.1-2.4):

2.1. Степенево-показникової функції $y=\left(1+1/x\right)^x$ (знайти $y'(x)$ методом логарифмічного диференціювання);

2.2. $y=\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{(x+2)^2}\sqrt{(x+3)^3}}$ (знайти $y'(x)$ методом логарифмічного диференціювання);

2.3. Функції, що задана неявно рівнянням $e^x=x+y$;

2.4. Функції, що задана параметрично $\begin{cases}x=e^{-t}\\ y=e^{2t}\end{cases}$.

Завдання 3. Знайти другу похідну $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ функції

$$y=x\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)-\sqrt{x^2+a^2}.$$

Завдання 4. Записати рівняння дотичної та нормалі до кривої $y=x^2-6x+8$ в точці(2; 0).

Завдання 5. Знайти найменше та найбільше значення функції $y=(x+2)e^{1-x}$ на відрізку [–2;2].

Завдання 6. Обчислити границі за правилом Лопіталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-3^x}{1-4^x}$; б) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\left(\operatorname{tg}x-\dfrac{1}{x-\pi/2}\right)$.

Завдання 7. Методами диференціального числення дослідити функції та побудувати графіки:

а) $y=3x-x^3$; б) $y=\dfrac{(a-x)^3}{a-2x}$.

Варіант 5

Завдання 1.

1.1. Знайти похідну функції у заданій точці: $y=\dfrac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$; $y'\left(\dfrac{1}{4}\right)=?$.

Знайти перші похідні функцій (приклади 1.2-1.10):

1.2. $y=\sqrt[x]{3}+\dfrac{1}{2^{\sqrt{x}}}$ 1.3. $y=\arccos^3\left(e^{-x}\right)$ 1.4. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1+x}{2}$ 1.5. $y=\dfrac{1}{4}\ln^2(1+\sin x)$ 1.6. $y=e^{2x}\ln\left(\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right)$	1.7. $y=\sqrt[5]{\operatorname{tg}\dfrac{1}{x^4-1}}$ 1.8. $y=2\cos^3\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{3}\sin\dfrac{x^2}{2}$ 1.9. $y=\operatorname{arcctg}\dfrac{3x-x^3}{1-3x^2}$ 1.10. $y=\sqrt[3]{x}e^{-x}\operatorname{tg}x$.

Завдання 2. Знайти перші похідні $\dfrac{dy}{dx}$ (приклади 2.1-2.4):

2.1. Степенево-показникової функції $y=(\sin x)^{\cos x}$ (знайти $y'(x)$ методом логарифмічного диференціювання);

2.2. $y=\sqrt{\dfrac{x(x-2)}{x-1}}$ (знайти $y'(x)$ методом логарифмічного диференціювання);

2.3. Функції, що задана неявно рівнянням $xy=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$;

2.4. Функції, що задана параметрично $\begin{cases} x=a(\cos t+\sin t) \\ y=a(\sin t-\cos t) \end{cases}$.

Завдання 3. Знайти другу похідну $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ функції $y=\dfrac{1}{2}\ln\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{2}\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$.

Завдання 4. Записати рівняння дотичної та нормалі до кривої $y = x^2+2x-3$ в точці(-2;-3).

Завдання 5. Знайти найменше та найбільше значення функції $y=\ln\left(x^2-2x+4\right)$ на відрізку $[-1;3/2]$.

Завдання 6. Обчислити границі за правилом Лопіталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\sin x}{\ln\sin 2x}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{5}{x^2-x-6}\right)$.

Завдання 7. Методами диференціального числення дослідити функції та побудувати графіки:

а) $y=1+x^2-\dfrac{x^4}{2}$; б) $y=\dfrac{x}{x^3+2}$.

Варіант 6

Завдання 1.

1.1. Знайти похідну функції у заданій точці: $y=\dfrac{5x^3-7x+1}{4+3x^2-x^3}$; $y'(-1)=?$.

Знайти перші похідні функцій (приклади 1.2-1.10):

1.2. $y=\sqrt[3]{1+2\operatorname{tg}x}$ 1.3. $y=\operatorname{arcctg}^2\dfrac{1}{x}$ 1.4. $y=9^{2x-x^2}$ 1.5. $y=\log_3(x^2-1)$ 1.6. $y=\ln^4\sin 2x$	1.7. $y=\left(\dfrac{2}{\sqrt{x}}-\sqrt{3}\right)\left(4x\sqrt[3]{x}+\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{3x}\right)$ 1.8. $y=\dfrac{1}{\operatorname{arctg}2x^2}$ 1.9. $y=xe^{1-\cos x}$ 1.10. $y=\sqrt{x+1}\operatorname{ctg}x\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$.

Завдання 2. Знайти перші похідні $\dfrac{dy}{dx}$ (приклади 2.1-2.4):

2.1. Степенево-показникової функції $y=x^{x^2}$ (знайти $y'(x)$ методом логарифмічного диференціювання);

2.2. $y=\sqrt[3]{x^2}\dfrac{1-x}{1+x}\sin^3x\cos^2x$ (знайти $y'(x)$ методом логарифмічного диференціювання);

2.3. Функції, що задана неявно рівнянням $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[3]{a^2}$;

2.4. Функції, що задана параметрично $\begin{cases} x=\operatorname{arctg}t \\ y=\dfrac{1}{2}t^2 \end{cases}$.

Завдання 3. Знайти другу похідну $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ функції $y=\sin\ln x+\cos\ln x$.

Завдання 4. Записати рівняння дотичної та нормалі до кривої $y=-x^2-2x+3$ в точці(0;3).

Завдання 5. Знайти найменше та найбільше значення функції $y=x^3/(x^2-x+1)$ на відрізку [–1;1].

Завдання 6. Обчислити границі за правилом Лопіталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\arcsin x}$;   б) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$.

Завдання 7. Методами диференціального числення дослідити функції та побудувати графіки:

а) $y=x^2e^{-x^2}$;   б) $y=\dfrac{x^3-3x}{x^2-1}$.

Варіант 7

Завдання 1.

1.1. Знайти похідну функції у заданій точці: $y=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}$; $y'(a)=?$.

Знайти перші похідні функцій (приклади 1.2-1.10):

1.2. $y=\sin 2^x$	1.7. $y=\frac{1}{18}\sin^6 3x-\frac{1}{24}\sin^8 3x$
1.3. $y=\ln\arccos\frac{1}{x+1}$	1.8. $y=\frac{1-e^{-x}}{1+e^x}$
1.4. $y=\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 x}}$	1.9. $y=\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x}-\frac{1}{2}$
1.5. $y=\mathrm{arctg}\frac{1-x}{1+x}$	1.10. $y=x^3\sin 2x\cos x$.
1.6. $y=\left(1-2\sqrt{x}\right)^4$	

Завдання 2. Знайти перші похідні $\dfrac{dy}{dx}$ (приклади 2.1-2.4):

2.1. Степенево-показникової функції $y=(\cos x)^{\sin 2x}$ (знайти $y'(x)$ методом логарифмічного диференціювання);

2.2. $y=(x-1)\sqrt[5]{(x+1)^2(x-2)^3}$ (знайти $y'(x)$ методом логарифмічного диференціювання);

2.3. Функції, що задана неявно рівнянням $e^y\sin x=e^{-x}\cos y$;

2.4. Функції, що задана параметрично $\begin{cases} x=\ln t \\ y=\dfrac{1}{1-t} \end{cases}$.

Завдання 3. Знайти другу похідну $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ функції $y=\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)$.

Завдання 4. Записати рівняння дотичної та нормалі до кривої $y=x^2-x-3$ в точці(-1; -1).

Завдання 5. Знайти найменше та найбільше значення функції $y=\left((x+1)/x\right)^3$ на відрізку [1;2].

Завдання 6. Обчислити границі за правилом Лопіталя:

а) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{5}}{\sqrt{x}-\sqrt{5}}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{1}{x}$.

Завдання 7. Методами диференціального числення дослідити функції та побудувати графіки:

а) $y=-\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{5}{6}$; б) $y=\dfrac{x^3-1}{4x^2}$.

Варіант 8

Завдання 1.

1.2. Знайти похідну функції у заданій точці: $y = \dfrac{2+\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}$; $y'\left(\dfrac{1}{4}\right) = ?$.

Знайти перші похідні функцій (приклади 1.2-1.10):

1.2. $y = \cos^2\left(\sin\dfrac{x}{3}\right)$	1.7. $y = \dfrac{1}{\arcsin(1/x)}$
1.3. $y = \ln\arccos\dfrac{x}{2}$	1.8. $y = \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$
1.4. $y = \log_2\sqrt[3]{1-x^2}$	1.9. $y = \dfrac{3}{\mathrm{tg}^2\, 2x}$
1.5. $y = \sqrt{\mathrm{tg}\sqrt{x}}$	
1.6. $y = 3^{\sqrt[3]{\mathrm{ctg}^2 x}}$	1.10. $y = (2-x)^2 \sin x \cos 2x$.

Завдання 2. Знайти перші похідні $\dfrac{dy}{dx}$ (приклади 2.1-2.4):

2.1. Степенево-показникової функції $y = x^{e^x}$ (знайти $y'(x)$ методом логарифмічного диференціювання);

2.2. $y = \sqrt[5]{\dfrac{x(x^2+1)}{(1-x)^2}}$ (знайти $y'(x)$ методом логарифмічного диференціювання);

2.3. Функції, що задана неявно рівнянням $y = \mathrm{tg}(x+y)$;

2.4. Функції, що задана параметрично $\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^3} \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^3} \end{cases}$.

Завдання 3. Знайти другу похідну $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ функції $y = \ln\sqrt[3]{1+x^2} + \dfrac{1-x}{\sqrt{3}}$.

Завдання 4. Записати рівняння дотичної та нормалі до кривої $y = x^2 - 4x + 3$ в точці(-1; 8).

Завдання 5. Знайти найменше та найбільше значення функції $y = \sqrt{x - x^3}$ на відрізку [-2;2].

Завдання 6. Обчислити границі за правилом Лопіталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{\ln\cos 4x}$; б) $\lim\limits_{x\to\pi}(\pi - 1)\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}$.

Завдання 7. Методами диференціального числення дослідити функції та побудувати графіки: а) $y = e^{2x-x^2}$; б) $y = \dfrac{x^2-5}{x-3}$.

Варіант 9

Завдання 1.

1.1. Знайти похідну функції у заданій точці: $y=\dfrac{x^4-3x^2+1}{x^4+1}$; $y'(-2)=?$.

Знайти перші похідні функцій (приклади 1.2-1.10):

1.2. $y=\sqrt{3e^{-\frac{x}{2}}+3^x-2}$	1.7. $y=\log_5\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$
1.3. $y=\ln\arcsin^2 x$	1.8. $y=\dfrac{1}{\sqrt{\operatorname{arcctg}(4x-1)}}$
1.4. $y=\left(3-\sin\dfrac{x}{3}\right)^3$	1.9. $y=\dfrac{\sin x}{\cos x+1}$
1.5. $y=\operatorname{ctg}^2(\arccos\sqrt{x})$	1.10. $y=\dfrac{(x^3-1)e^{-x}}{\operatorname{tg} x}$.
1.6. $y=2^{\arccos x}$	

Завдання 2. Знайти перші похідні $\dfrac{dy}{dx}$ (приклади 2.1-2.4):

2.1. Степенево-показникової функції $y=\sqrt{x}^{\sqrt[3]{x}}$ (знайти $y'(x)$ методом логарифмічного диференціювання);

2.2. $y=\sqrt[4]{\dfrac{(x+2)(x-1)^3}{x^5}}$ (знайти $y'(x)$ методом логарифмічного диференціювання);

2.3. Функції, що задана неявно рівнянням $y-0.3\sin y=x$;

2.4. Функції, що задана параметрично $\begin{cases} x=\arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} \\ y=\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} \end{cases}$.

Завдання 3. Знайти другу похідну $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ функції $(1+x^2)\operatorname{arctg}^2 x$.

Завдання 4. Записати рівняння дотичної та нормалі до кривої $y=x^2-6x+8$ в точці (2; 0).

Завдання 5. Знайти найменше та найбільше значення функції $y=4-e^{-x^2}$ на відрізку [0;1].

Завдання 6. Обчислити границі за правилом Лопіталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x-5^x}{2x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} x\operatorname{tg}\dfrac{1}{x}$.

Завдання 7. Методами диференціального числення дослідити функції та побудувати графіки: а) $y=\dfrac{1}{x^2+3}$; б) $y=\dfrac{1}{x}+4x^2$.

Варіант 10

Завдання 1.

1.1. Знайти похідну функції у заданій точці: $y=\sqrt[3]{\dfrac{1+x^3}{1-x^3}}$; $y'(2)=?$.

Знайти перші похідні функцій (приклади 1.2-1.10):

1.2. $y=2^{\frac{1}{\operatorname{tg} x}}$	1.7. $y=\operatorname{arcctg}^5\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$
1.3. $y=\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{x^4}{1+x^4}$	1.8. $y=\dfrac{\sin^2 x}{\sin x^2}$
1.4. $y=e^x\left(1+\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}\right)$	1.9. $y=\dfrac{1}{e^{2x}+1}$
1.5. $y=\sqrt{1-x^2}\arccos x$	1.10. $y=\dfrac{e^x}{\ln x(x-1)}$
1.6. $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{\cos 2x}}$	

Завдання 2. Знайти перші похідні $\dfrac{dy}{dx}$ (приклади 2.1-2.4):

2.1. Степенево-показникової функції $y=x^{2^x}$ (знайти $y'(x)$ методом логарифмічного диференціювання);

2.2. $y=\dfrac{\sqrt[5]{(x-1)^2}}{\sqrt[4]{(x-2)^3}\sqrt[3]{(x-3)^7}}$ (застосувати логарифмічне диференціювання));

2.3. Функції, що задана неявно рівнянням $y^3=\dfrac{x-y}{x+y}$;

2.4. Функції, що задана параметрично $\begin{cases} x=\operatorname{tg} t \\ y=\sin 2t+2\cos 2t \end{cases}$.

Завдання 3. Знайти другу похідну $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ функції $y=(\arcsin x)^2+\dfrac{x-1}{2}$.

Завдання 4. Записати рівняння дотичної та нормалі до кривої $y=x^2-3x+5$ в точці(1; 3).

Завдання 5. Знайти найменше та найбільше значення функції $y=(x^3+4)/x^2$ на відрізку [1;2].

Завдання 6. Обчислити границі за правилом Лопіталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{3}{x^2-3x+2}\right)$.

Завдання 7. Методами диференціального числення дослідити функції та побудувати графіки: : а) $y=x^3-3x^2$; б) $y=\dfrac{e^x}{x}$.

Варіант 11

Завдання 1.

1.1. Знайти похідну функції у заданій точці: $y=\dfrac{(x-1)^2}{x^2+x+1}$; $y'\left(-\dfrac{1}{2}\right)=?$.

Знайти перші похідні функцій (приклади 1.2-1.10):

1.2. $y=\sqrt[3]{x}e^{2x}$	1.7. $y=\dfrac{\mathrm{tg}\,2x}{3}+\dfrac{2}{\mathrm{ctg}\,3x}$
1.3. $y=\mathrm{arctg}^3\,\dfrac{3}{x^3}$	1.8. $y=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$
1.4. $y=4^{\cos^2\frac{1}{x^2}}$	1.9. $y=\dfrac{1}{3(5-3\sin 2x)^3}$
1.5. $y=\ln\sin^2\dfrac{x}{2}$	1.10. $y=x^3\,\mathrm{arctg}\,xe^{-x}$.
1.6. $y=\sqrt[4]{1-e^{-\frac{1}{x}}}$	

Завдання 2. Знайти перші похідні $\dfrac{dy}{dx}$ (приклади 2.1-2.4):

2.1. Степенево-показникової функції $y=x^{\ln x}$ (знайти $y'(x)$ методом логарифмічного диференціювання);

2.2. $y=\dfrac{(x+1)^3\sqrt[4]{(x-2)^3}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}$ (знайти $y'(x)$ методом логарифмічного диференціювання);

2.3. Функції, що задана неявно рівнянням $2^x+2^y=2^{x+y}$;

2.4. Функції, що задана параметрично $\begin{cases} x=\sqrt[3]{1-\sqrt{t}} \\ y=\sqrt{1-\sqrt[3]{t}} \end{cases}$.

Завдання 3. Знайти другу похідну $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ функції

$$y=\left(x-\frac{1}{2}\right)\arcsin\sqrt{x}+\frac{1}{2}\sqrt{x-x^2}.$$

Завдання 4. Записати рівняння дотичної та нормалі до кривої $y = x^2 +8x-9$ в точці(-8; -9).

Завдання 5. Знайти найменше та найбільше значення функції $y=xe^x$ на відрізку [–2;1].

Завдання 6. Обчислити границі за правилом Лопіталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x-\mathrm{tg}x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} xe^{-2x}$.

Завдання 7. Методами диференціального числення дослідити функції та побудувати графіки:

а) $y=\ln(x^2+1)$; б) $y=x^2+\dfrac{1}{x^2}$.

Варіант 12

Завдання 1.

1.1. Знайти похідну функції у заданій точці: $y=\dfrac{x^4-1}{x^4+1}$; $y'\left(-\dfrac{1}{2}\right)=?$.

Знайти перші похідні функцій (приклади 1.2-1.10):

1.2. $y=\cos^2\left(\dfrac{4}{x^2}\right)$	1.7. $y=\dfrac{1}{\sin^3 e^{2x}}$
1.3. $y=2^{\arccos\frac{1}{x}}$	1.8. $y=\left(\dfrac{1}{\operatorname{arcctg}\left(3x^2-8\right)}\right)$
1.4. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{x}+3}{5}$	1.9. $y=\dfrac{e^{\sin\pi}}{\ln\operatorname{arctg}3x}$
1.5. $y=\operatorname{tg}^3 3^{-x}$	1.10. $y=\sqrt[3]{x}e^{\frac{1}{x}}\sin x$.
1.6. $y=\operatorname{ctg}^2 2x+5\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{3}$	

Завдання 2. Знайти перші похідні $\dfrac{dy}{dx}$ (приклади 2.1-2.4):

2.1. Степенево-показникової функції $y=(\operatorname{tg}x)^{\frac{1}{x}}$ (знайти $y'(x)$ методом логарифмічного диференціювання);

2.2. $y=\dfrac{x^2\sqrt{x+1}}{(x-1)^3\sqrt[5]{5x-1}}$ (знайти $y'(x)$ методом логарифмічного диференціювання);

2.3. Функції, що задана неявно рівнянням $e^x+e^y-2^{xy}-1=0$;

2.4. Функції, що задана параметрично $\begin{cases} x=a\left(\ln\operatorname{tg}\dfrac{t}{2}+\cos t-\sin t\right) \\ y=a(\sin t+\cos t)\end{cases}$.

Завдання 3. Знайти другу похідну $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ функції

$$y=\ln\arcsin x+\frac{1}{2}\ln^2 x+\arcsin\ln x.$$

Завдання 4. Записати рівняння дотичної та нормалі до кривої $y=x^2-5x+4$ в точці(3; -2).

Завдання 5. Знайти найменше та найбільше значення функції $y=(x-2)e^x$ на відрізку $[-2;1]$.

Завдання 6. Обчислити границі за правилом Лопіталя:

$$\text{а) } \lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{\sqrt{x-1}};\quad \text{б) } \lim_{x\to\infty} x^3 e^{-\frac{x}{2}}.$$

Завдання 7. Методами диференціального числення дослідити функції та побудувати графіки: а) $y=\dfrac{x^2-1}{x^2+2}$; б) $y=\dfrac{x^2}{x^2-1}$.

Приклади розв'язання варіанту контрольних завдань за темою «Похідна та її застосування»

Завдання 1. Знайти похідну функції в заданій точці.

(У подвійних вертикальних дужках надано пояснень до застосування правил диференціювання при вирішенні прикладів).

1) $y=\dfrac{\sqrt{2+x^2}}{\sqrt[3]{3+x^3}};\ \ y'(1)=?$

Обчислюємо похідну функції:

$$y'=\left(\frac{\sqrt{2+x^2}}{\sqrt[3]{3+x^3}}\right)'=\left\|\begin{array}{l}\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}\\ \left(u^n\right)'=nu^{n-1}u'\end{array}\right\|=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{2+x^2}\right)'\cdot\sqrt[3]{3+x^3}-\sqrt{2+x^2}\cdot\left(\sqrt[3]{3+x^3}\right)'}{\left(\sqrt[3]{3+x^3}\right)^2}=\left\|\begin{array}{l}\left(\sqrt{2+x^2}\right)'=\frac{2x}{2\sqrt{2+x^2}}=\frac{x}{\sqrt{2+x^2}}\\ \left(\sqrt[3]{3+x^3}\right)'=\frac{3x^2}{3(3+x^3)^{\frac{2}{3}}}=\frac{x^2}{(3+x^3)^{\frac{2}{3}}}\end{array}\right\|=$$

$$=\frac{\dfrac{x}{\sqrt{2+x^2}}\cdot\sqrt[3]{3+x^3}-\sqrt{2+x^2}\cdot\dfrac{x^2}{\left(3+x^3\right)^{\frac{2}{3}}}}{\left(\sqrt[3]{3+x^3}\right)^2}=$$

$$=\frac{x\cdot\sqrt[3]{3+x^3}\left(3+x^3\right)^{\frac{2}{3}}-\sqrt{2+x^2}\sqrt{2+x^2}\cdot x^2}{\sqrt{2+x^2}\left(\sqrt[3]{3+x^3}\right)^4}=$$

$$=\frac{x\cdot\left(3+x^3\right)-\left(2+x^2\right)\cdot x^2}{\sqrt{2+x^2}\left(\sqrt[3]{3+x^3}\right)^4}=\frac{3x+x^4-2x^2-x^4}{\sqrt{2+x^2}\left(\sqrt[3]{3+x^3}\right)^4}=\frac{3x-2x^2}{\sqrt[3]{3+x^3}\sqrt{2+x^2}\left(3+x^3\right)}.$$

Підставляємо в отриману похідну задане значення аргументу, у цьому прикладі $x=1$, і знаходимо значення похідної функції у цій точці:

$$y'(1)=\frac{3\cdot1-2\cdot1^2}{\sqrt[3]{3+1^3}\sqrt{2+1^2}\left(3+1^3\right)}=\frac{1}{4\sqrt[3]{4}\sqrt{3}}.$$

Відповідь:

$$y'(1)=\frac{1}{4\sqrt{3}\sqrt[3]{4}}=\frac{\sqrt[3]{16}}{48}\sqrt{3}$$

Знайти перші похідні функцій (приклади 1.2-1.10 в контрольному завданні), для розв'язку застосовуємо правила диференціювання та таблицю похідних. Розглянемо 12 різних прикладів обчислення похідної до завдання 1.

1) $y = x\sin\left(\ln x - \frac{\pi}{4}\right).$

$$y' = \left(x\sin\left(\ln x - \frac{\pi}{4}\right)\right)' = \left\| \begin{array}{l} (uv)' = u'v + uv' \\ (\sin z)' = \cos z \cdot z' \\ z' = \left(\ln x - \frac{\pi}{4}\right)' = \frac{1}{x} \end{array} \right\| =$$

$$= x'\sin\left(\ln x - \frac{\pi}{4}\right) + x\left(\sin\left(\ln x - \frac{\pi}{4}\right)\right)' = \sin\left(\ln x - \frac{\pi}{4}\right) + x\cos\left(\ln x - \frac{\pi}{4}\right)\frac{1}{x} =$$

$$= \sin\left(\ln x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\ln x - \frac{\pi}{4}\right).$$

2) $y = 2^{\arcsin^2 3x}.$

$$y' = \left(2^{\arcsin^2 3x}\right)' = \left\| \begin{array}{l} (a^u)' = a^u \ln a \cdot u' \\ (u^n)' = nu^{n-1}u' \\ (\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u' \end{array} \right\| =$$

$$= 2^{\arcsin^2 3x} \ln 2 \cdot 2\arcsin 3x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-9x^2}} \cdot 3 = \frac{6 \cdot 2^{\arcsin^2 3x} \ln 2 \cdot \arcsin 3x}{\sqrt{1-9x^2}}.$$

3) $y = 2x\,\mathrm{arctg}\sqrt{\sin x}$.

$$y' = \left(2x\,\mathrm{arctg}\sqrt{\sin x}\right)' = \left\| \begin{array}{l} (uv)' = u'v + uv' \\ (\mathrm{arctg}u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u' \\ (u^n)' = nu^{n-1}u' \\ (\sin u)' = \cos u \cdot u' \end{array} \right\| = 2x'\,\mathrm{arctg}\sqrt{\sin x} +$$

$$+ 2x\left(\mathrm{arctg}\sqrt{\sin x}\right)' == 2\,\mathrm{arctg}\sqrt{\sin x} + 2x\frac{1}{1+\sin x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\sin x}} \cdot \cos x =$$

$$= 2\,\mathrm{arctg}\sqrt{\sin x} + \frac{x\cos x}{(1+\sin x)\sqrt{\sin x}}.$$

4) $y=\frac{1}{3}\ln\cos\frac{x-1}{x}$.

$$y'=\left(\frac{1}{3}\ln\cos\frac{x-1}{x}\right)'=\left\|\begin{matrix}(\ln u)'=\frac{1}{u}\cdot u'\\(\cos u)'=-\sin u\cdot u'\\\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}\end{matrix}\right\|=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\cos\frac{x-1}{x}}\left(-\sin\frac{x-1}{x}\right)\cdot\frac{(x-1)'x-(x-1)x'}{x^2}=-\frac{1}{3}\cdot tg\,\frac{x-1}{x}\left(\frac{x-x+1}{x^2}\right)=$$

$$=-\frac{1}{3x^2}\cdot tg\,\frac{x-1}{x}$$

5) $y=\frac{2}{3}\operatorname{tg}^4\left(\frac{5\operatorname{tg}\frac{x}{2}+4}{3}\right)$

$$y'=\left(\frac{2}{3}\operatorname{tg}^4\left(\frac{5\operatorname{tg}\frac{x}{2}+4}{3}\right)\right)'=\left\|\begin{matrix}(u^n)'=nu^{n-1}u'\\(tgu)'=\frac{1}{\cos^2 u}\cdot u'\end{matrix}\right\|=$$

$$=\frac{2}{3}\cdot 4\operatorname{tg}^3\left(\frac{5\operatorname{tg}\frac{x}{2}+4}{3}\right)\cdot\frac{1}{\cos^2\left(\frac{5\operatorname{tg}\frac{x}{2}+4}{3}\right)}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2}=$$

$$=\frac{20}{9}\operatorname{tg}^3\left(\frac{5\operatorname{tg}\frac{x}{2}+4}{3}\right)\cdot\frac{1}{\cos^2\left(\frac{5\operatorname{tg}\frac{x}{2}+4}{3}\right)\cos^2\frac{x}{2}}.$$

6) $y=\left(\frac{1}{2}-x\right)\arccos\sqrt{x}$

$$y'=\left(\left(\frac{1}{2}-x\right)\arccos\sqrt{x}\right)'=\left\|\begin{matrix}(uv)'=u'v+uv'\\(\arccos u)'=-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'\\(u^n)'=nu^{n-1}u'\end{matrix}\right\|=$$

$$=\left(\frac{1}{2}-x\right)'\arccos\sqrt{x}+\left(\frac{1}{2}-x\right)\left(\arccos\sqrt{x}\right)'=$$

$$=-\arccos\sqrt{x}+\left(\frac{1}{2}-x\right)\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

7) $y=\dfrac{3}{e^{\text{arcctg }2x}}=3\cdot e^{-\text{arcctg }2x}$

$$y'=\left(3\cdot e^{-\text{arcctg }2x}\right)'=\left\|\begin{matrix}\left(e^{u}\right)'=e^{u}\cdot u'\\ \left(\text{arcctg}u\right)'=-\dfrac{1}{1+u^{2}}\cdot u'\end{matrix}\right\|=3\cdot e^{-\text{arcctg }2x}\cdot\frac{1}{1+4x^{2}}\cdot 2=$$

$$=\frac{6}{\left(1+4x^{2}\right)e^{\text{arcctg }2x}}$$

8) $y=\sqrt[3]{x+\sqrt{2x}}$.

$$y'=\left(\sqrt[3]{x+\sqrt{2x}}\right)'=\left\|\left(u^{n}\right)'=nu^{n-1}u'\right\|=\frac{1}{3}\left(x+\sqrt{2x}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\left(1+\frac{1}{2\sqrt{2x}}2\right)=$$

$$=\frac{1+\sqrt{2x}}{3\sqrt[3]{\left(x+\sqrt{2x}\right)^{2}}\sqrt{2x}}.$$

9) $y=\dfrac{1}{15}\cos^{3}x\left(3\cos^{2}x-5\right)$.

$$y'=\left(\frac{1}{15}\cos^{3}x\left(3\cos^{2}x-5\right)\right)'=\left\|\begin{matrix}(uv)'=u'v+uv'\\ \left(u^{n}\right)'=nu^{n-1}u'\\ (\cos u)'=-\sin u\cdot u'\end{matrix}\right\|=$$

$$=\frac{1}{15}\left(\left(\cos^{3}x\right)'\left(3\cos^{2}x-5\right)+\cos^{3}x\left(3\cos^{2}x-5\right)'\right)=$$

$$=\frac{1}{15}\left(3\cos^{2}x(-\sin x)\left(3\cos^{2}x-5\right)+\cos^{3}x\cdot 6\cos x(-\sin x)\right)=$$

$$=-\frac{3}{15}\cos^{2}x\sin x\left(3\cos^{2}x-5+2\cos^{2}x\right)=-\cos^{2}x\sin x\left(\cos^{2}x-1\right)=\cos^{2}x\sin^{3}x$$

10) $y=x^{4}\left(a-2x^{3}\right)^{2}$

$$y'=(x^{4}(a-2x^{3})^{2})'=\left\|\begin{matrix}(uv)'=u'v+uv'\\ (u^{n})'=nu^{n-1}u'\end{matrix}\right\|=$$

$$=(x^{4})'(a-2x^{3})^{2}+x^{4}((a-2x^{3})^{2})'=$$

$$=4x^{3}(a-2x^{3})^{2}+x^{4}2(a-2x^{3})(-6x^{2})=4x^{3}(a-2x^{3})\big((a-2x^{3})-3x^{3}\big)=$$

$$= 4x^3(a - 2x^3)(a - 5x^3)$$

11) $y = \frac{1}{\sqrt{6}} \arcsin\left(\sqrt{\frac{b}{a}x}\right)$

$$y' = \left(\frac{1}{\sqrt{6}} \arcsin\left(\sqrt{\frac{b}{a}x}\right)\right)' = \left\| (\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u' \right\| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{b}{a}x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{b}{a}x}} \cdot \frac{b}{a} = \frac{1}{2\sqrt{6}\sqrt{x}\sqrt{1-\frac{b}{a}x}} \sqrt{\frac{b}{a}}.$$

12) $y = \arcsin 3x \cdot \frac{1}{x} \cdot 5^{-x}$

$$y' = \left(\arcsin 3x \cdot \frac{1}{x} \cdot 5^{-x}\right) = \left\| \begin{array}{c} (uvw)' = u'vw + uv'w + uvw' \\ (\arcsin a)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u' \\ (u^n)' = nu^{u-1} \cdot u' \\ (a^u)' = a^u \ln a \cdot u' \end{array} \right\| =\cdot$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-9x^2}} \cdot 3 \cdot \frac{1}{x} \cdot 5^{-x} + \arcsin 3x \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cdot 5^{-x} + \arcsin 3x \cdot \frac{1}{x} \cdot 5^{-x} \ln 5\,(-1).$$

Завдання 2. Знайти $\frac{dy}{dx}$ для заданих функцій

2.1. Степенево-показникова функція $y = (\mathrm{ctg}\,3x)^{3^x}$.

Для обчислення похідної згадаємо властивості логарифма:

$$ln\big(f(x) + g(x)\big) = ln\, f(x) + ln\, g(x)$$
$$ln\big(f(x)\,/\,g(x)\big) = ln\, f(x) - ln\, g(x)$$
$$ln\, f(x)^{g(x)} = g(x)\, ln\, f(x)$$

Застосуємо логарифмічне диференціювання:

$$\ln y = \ln(\mathrm{ctg}\,3x)^{3^x} \Rightarrow \ln y = 3^x \ln(\mathrm{ctg}\,3x) \Rightarrow (\ln y)' = (3^x \mathrm{c\,tg}\,3x)'$$

$$\frac{1}{y} y' = \left(3^x\right)' \ln(\mathrm{ctg}\,3x) + 3^x \left(\ln(\mathrm{ctg}\,3x)\right)'$$

$$\frac{1}{y} y' = 3^x \ln 3 \ln(\mathrm{ctg}\,3x) + 3^x \frac{1}{\mathrm{ctg}\,3x}\left(-\frac{1}{\sin^2 3x}\right) \cdot 3$$

$$y' = \left(3^x \ln 3 \ln(\mathrm{ctg}\,3x) - \frac{3^{x+1}}{\cos 3x \sin 3x}\right) y$$

$$y' = \left(3^x \ln 3 \ln(\mathrm{ctg}\,3x) - \frac{3^{x+1}}{\cos 3x \sin 3x}\right) (\mathrm{ctg}\,3x)^{3^x}.$$

2.2. $y=\dfrac{\sqrt[3]{(4-x)^2}\cdot(3x^2+5)^4}{\sqrt[5]{(1+x)^2}}$ - для знаходження похідної застосуємо логарифмічне диференціювання та властивості логарифма:

$$\ln y=\ln\left(\frac{\sqrt[3]{(4-x)^2}\cdot(3x^2+5)^4}{\sqrt[5]{(1+x)^2}}\right)$$

$$\ln y=\ln\sqrt[3]{(4-x)^2}+\ln(3x^2+5)^4-\ln\sqrt[5]{(1+x)^2}$$

$$\ln y=\frac{2}{3}\ln(4-x)+4\ln(3x^2+5)-\frac{2}{5}\ln(1+x)$$

$$\frac{1}{y}y'=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4-x}(-1)+\frac{4\cdot 6x}{3x^2+5}-\frac{2}{5(1+x)}$$

$$y'=\left(\frac{-2}{3(4-x)}+\frac{24x}{3x^2+5}-\frac{2}{5(1+x)}\right)y$$

$$y'=\left(\frac{-2}{3(4-x)}+\frac{24x}{3x^2+5}-\frac{2}{5(1+x)}\right)\frac{\sqrt[3]{(4-x)^2}\cdot(3x^2+5)^4}{\sqrt[5]{(1+x)^2}}.$$

2.3. Диференціюємо функцію, що задана неявно рівнянням

$$x^5-3x^3y^2+2y^5-5x^2+10xy-90=0,$$

при цьому враховуємо, що за правилом диференціювання складної функції

$$\left(f\left(y(x)\right)\right)'=f'(y)y'(x),$$

тоді

$$(x^5-3x^3y^2+2y^5-5x^2+10xy-90)'=0$$

$$5x^4-3(3x^2y^2+x^3 2yy')+10y^4y'-10x+10y+10xy'=0$$

$$5x^4-9x^2y^2-6x^3yy'+10y^4y'-10x+10y+10xy'=0$$

Розв’язуємо це рівняння алгебраїчно відносно похідної $y'(x)$

$$y'(-6x^3y+10y^4+10x)=9x^2y^2+10x-10y-5x^4$$

$$y'=\frac{9x^2y^2+10x-10y-5x^4}{-6x^3y+10y^4+10x}.$$

2.4. Знаходимо похідну $y'(x)$ для параметрично заданої функції $\begin{cases}x=\ln\dfrac{1-t}{1+t}\\ y=\sqrt{1-t^2}\end{cases}$

За правилом знаходження такої похідної $y'(x)=y'(t)\ /\ x'(t)$.

$$x'_t=\frac{1+t}{1-t}\cdot\frac{(1-t)'(1+t)-(1-t)(1+t)'}{(1+t)^2}=\frac{-(1+t)-1+t}{(1-t)(1+t)}=$$

$$=\frac{-1-t-1+t}{1-t^2}=\frac{-2}{1-t^2},$$

$$y'_t = \frac{1}{2\sqrt{1-t^2}}(-2t) = -\frac{t}{\sqrt{1-t^2}},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}}{\frac{-2}{1-t^2}} = \frac{t(1-t^2)}{2\sqrt{1-t^2}} = \frac{t\sqrt{1-t^2}}{2}.$$

Завдання 3. Знайти другу похідну $\frac{d^2y}{dx^2}$ функції $y = e^{-x}(\cos 2x - 6\sin 2x)$,

$$\frac{dy}{dx} = -e^{-x}(\cos 2x - 6\sin 2x) + e^{-x}(-2\sin 2x - 12\cos 2x) =$$

$$= e^{-x}(-\cos 2x + 6\sin 2x - 2\sin 2x - 12\cos 2x) = e^{-x}(4\sin 2x - 13\cos 2x).$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \left(e^{-x}(4\,sin\,2x - 13\,cos\,2x)\right)'$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -e^{-x}(4\sin 2x - 13\cos 2x) + e^{-x}(26\sin 2x + 8\cos 2x) =$$

$$= e^{-x}(13\cos 2x - 4\sin 2x + 26\sin 2x + 8\cos 2x) = e^{-x}(22\sin 2x + 21\cos 2x).$$

Завдання 4. Записати рівняння дотичної та нормалі до кривої $y = -x^2 + 3x - 5$ в точці $(-1; -9)$.

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \text{– рівняння дотичної,}$$

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \text{– рівняння нормалі}$$

В даному прикладі $x_0 = -1$, обчислимо похідну $y'(x) = -2x + 3$.

$y'(x_0) = y^1(-1) = -2(-1) + 3 = 5$ – кутовий коефіцієнт дотичної

$$y_0 = y(x_0) = y(-1) = -9,$$

Рівняння дотичної:

$$y + 9 = 5(x + 1) \text{ або } \quad y = 5x - 4 \text{ або } \quad 5x - y - 4 = 0.$$

Рівняння нормалі:

$$y + 9 = -\frac{1}{5}(x + 1) \text{ або } \quad y = \frac{1}{5}x - \frac{46}{5} \text{ або } \quad x - 5y - 46 = 0.$$

Завдання 5. Знайти найменше та найбільше значення функції $y = x^4/4 - 6x^3 + 7$ на відрізку [16; 20].

Найменше та найбільше значення досягаються або у стаціонарних точках, або на границях відрізка. Знайдемо стаціонарні точки, тобто точки, в яких похідна дорівнює нулю (або не існує похідна, а функція існує). Для цього обчислюємо похідну

$$y' = \left(\frac{x^4}{4} - 6x^3 + 7\right)' = 4\frac{x^3}{4} - 18x^2 = x^3 - 18x^2$$

та прирівнюємо її до нуля, та знаходимо корені рівняння, які є стаціонарними точками функції.

$x^3 - 18x^2 = 0,$ $\quad x^2(x-18) = 0,$ стаціонарні точки (корені) $x = 0$ та $x = 18$.

Але $x = 0 \notin [16;20]$, тому обчислюємо значення функції у стаціонарній точці x=18 та на границях відрізку в точках x=16, x=20:

$y(16) = 16484 - 24576 + 7 = -8085,$

$y(18) = 26244 - 34992 + 7 = -8741,$ – найменше значення функції;

$y(20) = 40000 - 48000 + 7 = -7993.$ – найбільше значення функції.

Відповідь: найменшого значення $y = -8741$ функція набуває в стаціонарній точки $x = 18$, яка внутрішньої є точкою відрізка; найбільше значення $y = -7993$ функція має в точці $x = 20$, яка є правою межею відрізка.

Завдання 6. Обчислити границі за правилом Лопіталя.

а)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos 2x}{\sin 2x} = \left\|\frac{0}{0}\right\| = \lim_{x\to 0}\frac{(\ln\cos 2x)'}{(\sin 2x)'} =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{2\sin 2x}{\cos 2x}}{2\cos 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin 2x}{\cos^2 2x} = \left\|-\frac{0}{1}\right\| = 0;$$

б) у цьому прикладі правило Лопіталя неможливо застосувати безпосередньо до невизначеності $\|0 \cdot \infty\|$, тому її потрібно перетворити на невизначеність $\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|$ або $\left\|\frac{0}{0}\right\|$, до яких можна застосовувати правіло Лопіталя.

$$\lim_{x\to +0} x^2 e^{\frac{1}{x}} = \left\|0 \cdot e^{\frac{1}{+0}}\right\| = \|0 \cdot e^{+\infty}\| = \|0 \cdot \infty\| =$$

$$= \lim_{x\to +0}\frac{e^{1/x}}{1/x^2} = \left\|\frac{e^{1/-0^1}}{1/+0}\cdot\right\| = \left\|\frac{\infty}{\infty}\right\| = \lim_{x\to +0}\frac{\left(e^{1/x}\right)'}{(x^{-2})'} =$$

$$= \lim_{x\to +0}\frac{e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-2x^{-3}} = \lim_{x\to +0}\frac{x^3 e^{\frac{1}{x}}}{2x^2} = \lim_{x\to +0} x \cdot e^{\frac{1}{x}} = \|0 \cdot \infty\| =$$

$$= \lim_{x\to +0}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \left\|\frac{\infty}{\infty}\right\| = \lim_{x\to +0}\frac{\left(e^{1/x}\right)'}{\left(1/x\right)'} = \lim_{x\to +0}\frac{e^{1/x}\left(-1/x^2\right)}{-1/x^2} =$$

$$\lim_{x\to +0} e^{1/x} = \left\|e^{1/+0}\right\| = \|e^{+\infty}\| = +\infty\,.$$

Завдання 7. Методами диференціального числення дослідити функції та побудувати графіки.

а) $y = x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$

1. Область визначення $x \in (-\infty; \infty)$.
2. Точки перетину з осями координат: $\begin{matrix} x = 0 \Rightarrow y(0) = 0 \\ y = 0 \Rightarrow x = 0 \end{matrix}$.

   Тобто осі координат графік функції перетинає в точці (0; 0)
3. $y(-x) = -x \cdot e^{-\frac{(-x)^2}{2}} = -x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = -y(x)$ - функція непарна
4. Функція неперіодична.
5. Вертикальних асимптот немає, так як функція визначена всюди і у неї відсутні точка розриву.
6. З'ясуємо, чи є горизонтальні або похилі асимптоти:

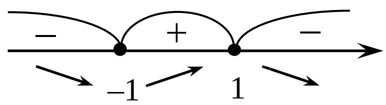
$$y = kx + b;\; k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} = 0.$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} - 0 \right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{e^{\frac{x^2}{2}}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{e^{\frac{x^2}{2}} \cdot x} = 0.$$

   $y = 0$ – горизонтальна асимптота.
7. Дослідимо проміжки зростання та спадання функції, і знайдемо екстремуми. Знаходимо похідну функції та досліджуємо зміну знаку:

$$y' = e^{-\frac{x^2}{2}} + x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \left(-\frac{2x}{2} \right) = e^{-\frac{x^2}{2}} \left(1 - x^2\right).$$

$$y' = 0, \Rightarrow \qquad e^{-\frac{x^2}{2}} \left(1 - x^2\right) = 0,\;\; e^{-\frac{x^2}{2}} > 0, \qquad 1 - x^2 = 0,\; x = \pm 1$$



   Проміжки спадання функції: $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$;
   проміжок зростання функції: $x \in (-1; 1)$.

   Екстремуми функції: $y_{\min} = y(-1) = -e^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{e}} = -\frac{\sqrt{e}}{e}$, $x_{min} = -1$,

$$y_{\max} = y(1) = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}} = \frac{\sqrt{e}}{e},\;\; x_{max} = 1.$$

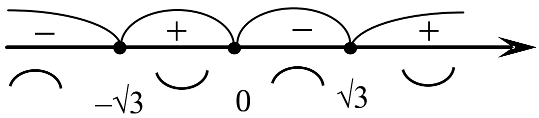
8. Знайдемо другу похідну функції та встановимо за знаком другої похідної проміжки опуклості та угнутості графіка і точки перегину:

$$y''=\left[e^{-\frac{x^2}{2}}\left(1-x^2\right)\right]'=e^{-\frac{x^2}{2}}\left(-\frac{2x}{2}\right)\left(1-x^2\right)+(-2x)e^{-\frac{x^2}{2}}=$$

$$=-xe^{-\frac{x^2}{2}}\left(1-x^2+2\right)=-xe^{-\frac{x^2}{2}}\left(3-x^2\right).$$

$y''=0,$ $\qquad -xe^{-\frac{x^2}{2}}\left(3-x^2\right)=0$

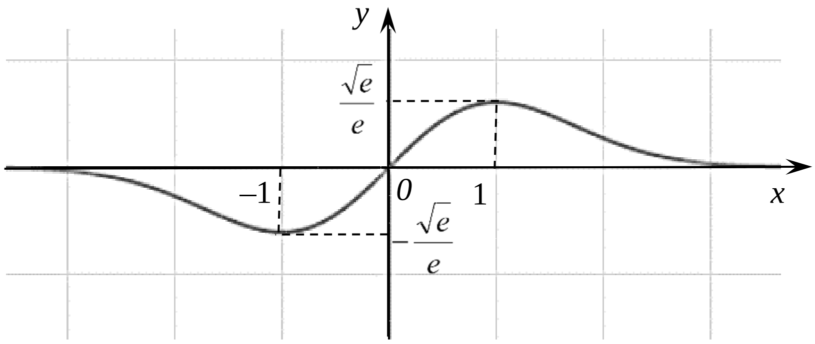
$x_1=0,$ $\qquad x_{2,3}=\pm\sqrt{3}$ - точки перегину графіка функції,



На проміжках $x\in\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)\cup\left(0;\sqrt{3}\right)$ $y''<0$ – графік опуклий догори; на проміжках $x\in\left(-\sqrt{3};0\right)\cup\left(\sqrt{3};\ +\infty\right)$ $y''>0$ – графік опуклий донизу; точки перегину графіка $x=-\sqrt{3}; x=0; x=\sqrt{3}$. Значення функції в цих точках:

$$y\left(-\sqrt{3}\right)=-\sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}}=-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{e^3}}=-\frac{\sqrt{3e^3}}{e^3},.\ y\left(\sqrt{3}\right)=\sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{e^3}}=\frac{\sqrt{3e^3}}{e^3},\ y(0)=0.$$

9. За результатами дослідження будуємо графік функції.



б) $y=\dfrac{3}{(x-8)^2}$

1. Область визначення функції: $x\in(-\infty;8)\cup(8;-\infty)$
2. $y(-x)=\dfrac{3}{(-x-8)^2}=\dfrac{3}{(x+8)^2}$ – функція загального вигляду
3. Неперіодична.
4. Ось ОY графік перетинає в точці (0; 3/64), ось ОХ графік не перетинає, бо $y(x)\neq 0; y(x)>0$.
5. Дослідимо точку розриву функції і встановимо наявність вертикальної асимптоти:

$$\lim_{x\to 8-0} f(x) = \lim_{x\to 8-0} \frac{3}{(x-8)^2} = \left\| \frac{3}{(8-0-8)^2} \right\| = \infty$$

$$\lim_{x\to 8+0} f(x) = \lim_{x\to 8+0} \frac{3}{(x-8)^2} = \left\| \frac{3}{(8+0-8)^2} \right\| = \infty$$

$x=8$ – вертикальна асимптота.

6. Дослідимо наявність похилих або горизонтальних асимптот:

$$y = kx + b;\ k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{3}{(x-8)^2}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3}{x(x-8)^2} = 0,$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - kx) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{3}{(x-8)^2} - 0\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3}{(x-8)^2} = 0.$$

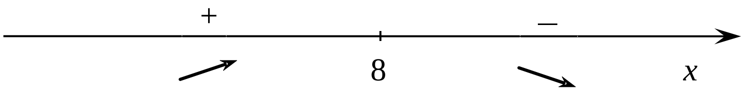
$y = 0$ – горизонтальна асимптота.

7. Дослідимо проміжки зростання та спадання функції та екстремуми

$$y' = \left[\frac{3}{(x-8)^2}\right]' = \frac{3\cdot(-2)}{(x-8)^3} = -\frac{6}{(x-8)^3}.$$

$$y' = 0, \qquad -\frac{6}{(x-8)^3} \neq 0, \qquad x \neq 8.$$

Стаціонарних точок немає, є критична точка $x = 8$.

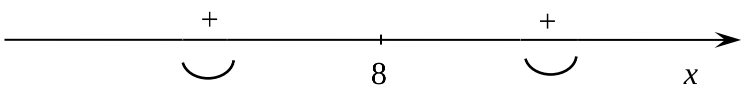


На проміжку $x \in (-\infty; 8)$ функція зростає, так як похідна на цьому проміжку додатна;
на проміжку $x \in (8; +\infty)$ похідна від'ємна і функція спадає.
Екстремумів функція не має, бо в точці $x = 8$ функція не існує.

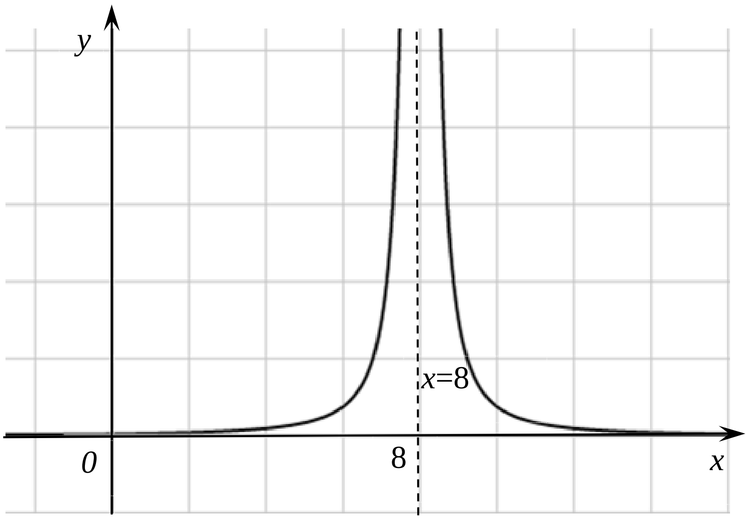
8. Знайдемо другу похідну функції та встановимо за знаком другої похідної проміжки опуклості та угнутості графіка і точки перегину:

$$y'' = \left[-\frac{6}{(x-8)^3}\right]' = \frac{18}{(x-8)^4}; \quad y'' = 0, \quad \frac{18}{(x-8)^4} \neq 0, \quad y''(x) > 0;$$

$x \neq 8$. Точок перегину графіка функції немає, графік всюди опуклий донизу.



9. За результатами дослідження будуємо графік функції:


y
x=8
0
8
x

Список літератури

1. Г.М.Тимченко, О.В. Одинцова, Н.О. Кириллова, К.І. Любицька. Стислий курс вищої математики:ч.2 : Математичний аналіз. Теорія границь. Диференціальне числення функції однієї змінної: навч.посіб. – Харків : Видавництво Іванченка І.С.,2023. – 232с.
2. Вища математика в прикладах і задачах. У 2-х томах. Т. 1.: Аналітична геометрія та лінійна алгебра. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної: навчальн. посіб. Курпа Л.В., Кашуба Ж.Б., Лінник Г.Б.; за ред. Проф. Л.В.Курпи – Х.:НТУ «ХПІ», 2008. – 528 с.

Навчальне видання

Методичні вказівки
для самостійної роботи за темою
ПОХІДНА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ:
основні поняття, формули, варіанти контрольних завдань,
приклади розв'язку
з курсу «Вища математика»
для студентів заочної форми навчання

Укладачі:

КИРИЛЛОВА Наталія Олександрівна

ОДИНЦОВА Олена Володимирівна

ТИМЧЕНКО Галина Миколаївна

Відповідальний за випуск проф. В.Н. Бурлаєнко

Роботу до видання рекомендував проф. Д.В. Бреславський

В авторській редакції

План 2024 р., поз. 536

Підп. до друку Формат 60х84 1/16. Папір офсет. Друк ризографічний.
Ум. друк. арк. 1,6. Обл.вид. арк. Наклад 50 прим. Замовлення №

Видавничий центр НТУ «ХПІ»,
вул. Кирпичова, 2, м. Харків, 61002
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 5478 від 21.08.2017 р

Електронна версія