МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до практичних занять з освітнього компонента
«Економіко-математичні методи та моделі»
для студентів спеціальності
D7 «Торгівля»
першого (бакалаврського) рівня усіх форм навчання

Харків
НТУ «ХПІ»
2025

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до практичних занять з освітнього компонента
«Економіко-математичні методи та моделі»

для студентів спеціальності
D7 «Торгівля»
першого (бакалаврського) рівня усіх форм навчання

Затверджено
редакційно-видавничою
радою університету,
протокол № 3 від 30.10.2025 р.

Харків
НТУ «ХПІ»
2025

Методичні вказівки до практичних занять з освітнього компонента «Економіко-математичні методи та моделі» для студентів спеціальності D7 «Торгівля» першого (бакалаврського) рівня усіх форм навчання / уклад. Білоцерківський О. Б., Соснов І. І. – Харків : НТУ «ХПІ», 2025. – 74 с.

Укладачі О. Б. Білоцерківський
І. І. Соснов

Рецензент О. Є. Гапоненко

Кафедра підприємництва, торгівлі і логістики

ЗМІСТ

ВСТУП

Для України як самостійної держави з ринковою економікою особливого значення набувають економіко-математичні методи як один із засобів формування динамічно розвинутої та стійкої економіки з науково обґрунтованими шляхами розвитку й прогнозами на майбутнє.

Економіко-математичні методи – це узагальнена назва комплексу економіко-математичних підходів, об'єднаних сферою застосування та призначених для побудови, реалізації і дослідження економічних моделей.

Математичне моделювання в економіці – це використання математичного моделювання при вирішенні господарських завдань й обґрунтуванні прийнятих рішень з управління виробництвом.

У цих методичних вказівках розглянуто основні числові методи, які застосовуються в освітньому компоненті (ОК) «Економіко-математичні методи та моделі». Кожен розділ присвячений окремій темі ОК. Всі розділи побудовані однаково: спочатку викладаються необхідні теоретичні відомості, потім докладно розглядається хід розв'язання задач, наприкінці кожного розділу наведено варіанти індивідуальних домашніх завдань. Варіанти завдань студент обирає відповідно до свого порядкового номеру в журналі академічної групи.

Теоретичні основи викладаються у стислому вигляді. Даються тільки ті відомості, які необхідні безпосередньо для розв'язання задач. Для більш детального ознайомлення з матеріалом в методичних вказівках наведені рекомендовані джерела інформації.

1 ПОБУДОВА МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ЕКОНОМІЧНИХ ЗАДАЧ

Для побудови математичної моделі економічної задачі, що задана в текстовій формі, необхідно:

1) ввести позначення для невідомих задачі;
2) проаналізувати та зафіксувати обмеження для них (наприклад, невід’ємність);
3) скласти систему обмежень задачі;
4) скласти цільову функцію та встановити вигляд екстремуму.

Як правило, в задачах економічного змісту математична модель має симетричний вигляд; деякі обмеження (нерівності) можуть мати протилежні напрямки або бути рівняннями.

Приклад 1.1 Задача про використання ресурсів (задача планування виробництва). Для виготовлення двох видів продукції P_1 і P_2 використовують чотири види ресурсів S_1, S_2, S_3 і S_4. Дані про запаси ресурсів, кількість одиниць ресурсів, що витрачаються на виготовлення одиниці продукції, наведені в табл. 1.1 (цифри умовні).

Таблиця 1.1 – Умови задачі 1.1

Вид ресурсу	Запас ресурсу	Ресурси, од., затрачувані на виготовлення одиниці продукції	
		P_1	P_2
S_1	18	1	3
S_2	16	2	1
S_3	5	–	1
S_4	21	3	–

Прибуток, одержуваний від одиниці продукції P_1 і P_2, відповідно становить 2 і 3 грн. *Необхідно скласти* такий план виробництва продукції, при якому прибуток від її реалізації буде максимальним.

Розв’язання. Складемо математичну модель задачі. Позначимо x_1, x_2 – кількість одиниць продукції відповідно P_1 і P_2, запланованих до виробництва. Для їх виготовлення (див. табл. 1.1) буде потрібно $(1\cdot x_1 + 3\cdot x_2)$ одиниць ресурсу S_1, $(2\cdot x_1 + 1\cdot x_2)$ одиниць ресурсу S_2, $(1\cdot x_2)$ одиниць ресурсу S_3 та $3\cdot x_1$ одиниць ресурсу S_4. Оскільки споживання ресурсів S_1, S_2, S_3 і S_4 не повинне перевищувати їх запасів (відповідно 18, 16, 5 і 21 одиниць), то зв’язок між споживанням ресурсів і їх запасами виразиться системою нерівностей:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 18; \\ 2x_1 + x_2 \le 16; \\ x_2 \le 5; \\ 3x_1 \le 21. \end{cases} \qquad (1.1)$$

За умовою задачі змінні

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \qquad (1.2)$$

Сумарний прибуток F становить $2 \cdot x_1$ від реалізації продукції P_1 та $3 \cdot x_2$ – від реалізації продукції P_2, тобто:

$$F = 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2. \qquad (1.3)$$

Отже, математична модель задачі: знайти такий план випуску продукції $X = (x_1, x_2)$, що задовольняє систему (1.1) й умову (1.2), при якому функція (1.3) набуває максимального значення.

Приклад 1.2 Складання раціону (задача про дієту, про суміші). При відгодівлі кожна тварина щодня повинна одержати не менше 9 од. поживної речовини S_1, не менше 8 од. поживної речовини S_2, не менше 12 од. поживної речовини S_3. Для складання раціону використовують два види корму – I і II. Вміст кількості одиниць поживних речовин в 1 кг кожного виду корму й вартість 1 кг корму наведені в табл. 1.2. Вартість 1 кг корму I і II відповідно дорівнює 4 і 6 грн. *Необхідно скласти* денний раціон, що має мінімальну вартість, у якому вміст кожного виду поживних речовин був би не меншим від установленої межі.

Таблиця 1.2 – Умови задачі 1.2

Поживна речовина (вітамін)	Необхідний мінімум поживних речовин	Кількість одиниць поживних речовин в 1 кг корму	
		I	II
S_1	9	3	1
S_2	8	1	2
S_3	12	1	6

Розв'язання. Складемо економіко-математичну модель задачі. Позначимо x_1, x_2 – кількість кормів I і II, що входять у денний раціон. Тоді цей раціон (див. табл. 1.2) буде включати $(3 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2)$ одиниць поживної речовини S_1, $(1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2)$ одиниць речовини S_2 і $(1 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2)$ одиниць поживної речовини S_3 оскільки вміст поживних речовин S_1, S_2, S_3 у раціоні повинен бути не менше як 9, 8 і 12 одиниць відповідно, то одержимо таку систему нерівностей:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 9; \\ x_1 + 2x_2 \geq 8; \\ x_1 + 6x_2 \geq 12. \end{cases} \tag{1.7}$$

Крім того, змінні

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \tag{1.8}$$

Загальна вартість раціону, грн, буде такою:

$$F = 4 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2. \tag{1.9}$$

Отже, економіко-математична модель задачі: скласти денний раціон $X = (x_1, x_2)$, що задовольняє систему (1.7) й умову (1.8) і при якому функція (1.9) набуває мінімального значення.

Приклад 1.3 Задача про розкрій матеріалів. Для виготовлення брусів довжиною 1,2, 3 і 5 м у співвідношенні 2:1:3 на розпил надходять 195 колод завдовжки 6 м. *Визначити* план розпилу, що забезпечує максимальну кількість комплектів. Скласти економіко-математичну модель задачі.

Розв'язання. Насамперед розглянемо різні способи розпилювання колод, указавши відповідну кількість одержуваних при цьому брусів (табл. 1.3).

Таблиця 1.3 – Умови задачі 1.3

Спосіб розпилювання i	Кількість одержуваних брусів довжиною, м		
	1,2	3,0	5,0
1	5	–	–
2	2	1	–
3	–	2	–
4	–	–	1

Позначимо: x_i – кількість колод, розпиляних i-м способом ($i = \overline{1, 4}$); x – число комплектів брусів. З огляду на те, що всі колоди повинні бути розпиляні, а кількість брусів кожного розміру має задовольняти умову комплектності, економіко-математична модель задачі набуває вигляду:

$$F = x \to \max$$

при обмеженнях:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 195; \\ 5x_1 + 2x_2 = 2x; \\ x_2 + 2x_3 = x; \\ x_4 = 3x. \end{cases}$$

$$x_i \geq 0 \ (i = 1, 2, 3, 4).$$

Приклад 1.4 Задача про завантаження обладнання. На трьох групах обладнання (I, II, III) необхідно виготовити вироби чотирьох видів. Установлено план виробництва: виробів типу А – 2000 шт., Б – 1000 шт., В – 200 шт., Г – 250 шт. Дані про собівартість кожного виробу, трудомісткість і фонд робочого часу задані в табл. 1.4. Скласти план завантаження обладнання, при якому мінімізується собівартість вироблених товарів.

Таблиця 1.4 – Умови задачі 1.4

Обладнання	Собівартість одного виробу, грн				Час виготовлення одного виробу, хв				Фонд часу
	А	Б	В	Г	А	Б	В	Г	
I	1,5	2,4	0,9	1,4	4,1	2,5	3,5	8,1	35000
II	1,8	1,2	1,0	1,7	2,5	4,0	1,2	1,0	16000
III	2,7	5,4	6,0	5,6	1,7	1,5	1,0	1,2	22000

Розв'язання. Математична модель цієї задачі:

$$\begin{cases} 4{,}1x_{11} + 2{,}5x_{12} + 3{,}5x_{13} + 8{,}1x_{14} \le 35000; \\ 2{,}5x_{21} + 4{,}0x_{22} + 1{,}2x_{23} + 1{,}0x_{24} \le 16000; \\ 1{,}7x_{31} + 1{,}5x_{32} + 1{,}0x_{33} + 1{,}2x_{34} \le 22000. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} = 2000; \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 1000; \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 200; \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 250. \end{cases}$$

$$x_{ij} \ge 0,$$

$$F = 1{,}5x_{11} + 2{,}4x_{12} + 0{,}9x_{13} + 1{,}4x_{14} + 1{,}8x_{21} + 1{,}2x_{22} + 1{,}0x_{23} + 1{,}7x_{24} +$$
$$+ 2{,}7x_{31} + 5{,}4x_{32} + 6{,}0x_{33} + 5{,}6x_{34} \to \min.$$

Приклад 1.5 Транспортна задача. На двох складах A_1 та A_2 є відповідно 11 і 14 од. однорідного вантажу. Попит у ньому магазинів B_1, B_2 та B_3 дорівнює відповідно 10, 8 і 7 од. Ці дані та вартість перевезень одиниці вантажу від складів до магазинів надані у табл. 1.5. Скласти економіко-математичну модель плану перевезень вантажів, щоб витрати були мінімальними.

Таблиця 1.5 – Умови задачі 1.5

$a_i \downarrow$ $b_j \rightarrow$	10	8	7
11	8	6	5
14	4	5	7

Розв'язання. За невідомі x_{ij} приймаються кількість одиниць вантажу, які перевозяться від i-го складу до j-го магазину (i = 1, 2, j = 1, 2, 3). Тоді цільова функція F виражає вартість перевезень з мінімальними витратами.

Обмеження на невідомі використовуються двох типів.

По-перше, вантаж із складів повинен бути вивезений, що в даній задачі описується системою з двох рівнянь за числом складів (розглядаються рядки таблиці):

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 11; \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 14. \end{cases}$$

По-друге, кожен магазин повинен отримати стільки вантажу, скільки йому потрібно, що описується системою рівнянь за числом магазинів (розглядаються стовпці таблиці):

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} = 10; \\ x_{12} + x_{22} = 8; \\ x_{13} + x_{23} = 7. \end{cases}$$

Крім того, слід враховувати умови невід'ємності змінних: $x_{ij} \geq 0$ (i = 1, 2, j = 1, 2, 3). Тоді остаточно економіко-математична модель транспортної задачі буде мати вигляд:

$$F = 8x_{11} + 6x_{12} + 5x_{13} + 4x_{21} + 5x_{22} + 7x_{23} \to \min;$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 11; \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 14; \\ x_{11} + x_{21} \qquad = 10; \\ x_{12} + x_{22} \qquad = 8; \\ x_{13} + x_{23} \qquad = 7; \end{cases}$$

$$x_{ij} \geq 0 \left(i = 1,2;\ j = 1,2,3\right).$$

Завдання до теми 1

Для свого варіанта вихідних даних скласти математичну модель економічної задачі. Варіант вибирати за останньою цифрою номера залікової книжки.

Варіант 0. Фірма виготовляє три види продукції (А, Б, В). Для випуску кожного потрібен певний час обробки на всіх чотирьох пристроях I, II, III, IV (табл. 1.6). Час роботи на пристроях становить відповідно 84, 42, 21 і 42 год. Визначити, яку продукцію та у яких кількостях варто виробляти для максимізації прибутку (ринок збуту для кожного продукту необмежений).

Таблиця 1.6 – Умови задачі

Вид продукції	Час обробки, год				Прибуток, дол.
	I	II	III	IV	
А	1	3	1	2	3
Б	6	1	3	3	6
В	3	3	2	4	4

Варіант 1. Фірмі потрібне вугілля з вмістом фосфору не більше 0,03 % і з домішкою попелу не більше 3,25 %. Доступні три сорти вугілля А, Б, В за такими цінами (за 1 т), поданими у табл. 1.7.

Таблиця 1.7– Умови задачі

Сорт вугілля	Вміст фосфору, %	Вміст попелу, %	Ціна, дол.
А	0,06	2,0	30
Б	0,04	4,0	30
В	0,02	3,0	45

Як потрібно змішати вугілля, щоб задовольнити обмеження на вміст домішок та мінімізувати ціну?

Варіант 2. Фірма виготовляє два продукти *A* і *B*, ринок збуту яких необмежений. Кожен продукт проходить обробку кожною з трьох машин – I, II, III. Час обробки для кожного з виробів *A* і *B* наведено в табл. 1.8.

Таблиця 1.8 – Умови задачі

Продукт	Час обробки машиною, год		
	I	II	III
A	0,5	0,4	0,2
B	0,25	0,3	0,4

Час роботи машин I, II, III відповідно становить 40, 36 і 36 годин на тиждень. Прибуток від виробів *A* і *B* – відповідно 5 і 3 дол. Фірмі треба визначити тижневі норми випуску виробів *A* і *B*, що максимізують прибуток.

Варіант 3. Фірма займається складанням дієти, що повинна містити принаймні 20 од. білків, 30 од. вуглеводів, 10 од. жирів і 40 од. вітамінів. Як найдешевше досягти цього при зазначених у табл. 1.9 цінах за 1 кг (або 1 л) п’яти наявних продуктів?

Таблиця 1.9 – Умови задачі

Показники	Хліб	Соя	Сушена риба	Фрукти	Молоко
Білки, од.	2	12	10	1	2
Вуглеводи, од.	12	0	0	4	3
Жири, од.	1	8	3	0	4
Вітаміни, од.	0,2	2	4	6	2
Ціна, грн	12	36	32	18	10

Варіант 4. Підприємство випускає три види виробів. Місячна програма випуску становить 200 виробів першого виду, 1800 – другого, 1500 – третього. Для випуску виробів використовують матеріали, щомісячні витрати яких не можуть перевищувати 61 000 кг. На один виріб 1-го виду витрачається 8 кг матеріалу, 2-го – 10 кг, 3-го – 11 кг. Оптова ціна одного виробу першого виду – 7 грн, другого й третього – 10 та 19 грн відповідно. Визначити оптимальний план випуску продукції, який забезпечує підприємству максимальний виторг.

Варіант 5. Для виготовлення брусів трьох розмірів (0,6; 1,5 і 2,5 м у співвідношенні 2:1:3) на розпил надходять колоди завдовжки 3 м. Визначити план розпилу, що забезпечує максимальну кількість комплектів.

Таблиця 1.10 – Умови задачі

Параметри	Столи	Стільці	Бюро	Книжкові шафи
Дошки першого виду, м^3	5	1	9	12
Дошки другого виду, м^3	2	3	4	1
Трудові ресурси, люд.·год	3	2	5	10
Прибуток на один виріб, тис. грн	12	5	15	10

Варіант 6. Меблева фабрика виготовляє столи, стільці, бюро й книжкові шафи, використовуючи два різні види дошок, причому фабрика має 500 м^3 дошок першого виду і 1000 м^3 дошок другого виду. Крім того, задано трудові ресурси в кількості 800 люд.год. У табл. 1.10 наведено нормативи витрат кожного виду ресурсів на виготовлення одного виробу й прибуток на один виріб. За цими даними розв’язати задачу: визначити оптимальний асортимент, що максимізує прибуток.

Варіант 7. У чотирьох постачальників I, II, III, IV є відповідно 60, 70, 30, 40 од. однорідного вантажу. Попит у них споживачів 1, 2, 3 дорівнює відповідно 80, 80, 40 од. Ці дані та вартість перевезень одиниці вантажу від постачальників до споживачів наведено в табл. 1.11.

Таблиця 1.11 – Умови задачі

$a_i \downarrow$	$b_j \rightarrow$	80	80	40
60		4	3	7
70		8	7	6
30		4	5	9
40		10	9	7

Скласти план перевезень вантажів, щоб витрати були мінімальними.

Варіант 8. Для перевезення вантажу використовують машини типів А й Б. Вантажопідйомність машин обох типів – 3 т. За один раз машина А витрачає 1,5 кг мастильних матеріалів і 50 л бензину, а машина Б – відповідно – 2 кг і 30 л. На базі є 35 кг мастильних матеріалів і 100 л бензину. Витрати на експлуатацію машини А становлять 80 грн, Б – 50 грн. Необхідно перевезти 60 т вантажу. Скільки потрібно використати машин типу А й Б, щоб експлуатаційні витрати були мінімальними?

Варіант 9. Кондитерська фабрика для виробництва трьох сортів карамелі A_1, A_2, A_3 використовує три види сировини: цукор-пісок, патоку і фруктове пюре. Норми використання сировини кожного виду на виробництво 1 т карамелі кожного сорту наведені в табл. 1.12, а також відома загальна кількість сировини кожного виду й прибуток від реалізації 1 т карамелі цього сорту.

Таблиця 1.12 – Умови задачі

Вид сировини	Норми витрат сировини, т на 1 т продукції			Загальна маса сировини, т
	A_1	A_2	A_3	
Цукор-пісок	0,3	0,2	0,1	1000
Патока	0,8	0,2	0,3	800
Фруктове пюре	0,4	0,1	0,1	150
Прибуток від реалізації 1 т продукції, тис. грн	1,2	3,2	2,5	–

Необхідно розрахувати план виробництва карамелі, який забезпечує максимальний прибуток.

2 ГРАФІЧНИЙ МЕТОД РОЗВ’ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Приклад 2.1 Розв’язати графічним методом таку задачу:

$$Z = -x_1 - 2x_2 \to \min, \max ;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 4; \\ x_1 - 2x_2 \le 0; \\ 2x_1 - 5x_2 \ge -34; \\ x_1 \le 8. \end{cases} \qquad x_1, x_2 \ge 0 .$$

Розв’язання. Побудуємо в декартовій системі координат X_1OX_2 багатокутник розв’язків, що є перетином півплощин кожної з нерівностей системи обмежень. Пронумеруємо нерівності:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 4; & (1) \\ x_1 - 2x_2 \le 0; & (2) \\ 2x_1 - 5x_2 \ge -34; & (3) \\ x_1 \le 8; & (4) \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \ge 0 .$$

Спочатку будуємо відокремлюючу пряму кожної нерівності, що входить у систему обмежень. Потім вибираємо півплощину розв'язку відносно кожної прямої. Для цього беремо координату будь-якої точки, що не лежить на відокремлюючій прямій, і підставляємо у відповідну нерівність. Якщо нерівність виконується, то обрана точка лежить у півплощині розв'язків, якщо не виконується, то не лежить. Багатокутник, у якому перетинаються, накладаються одна на одну всі побудовані півплощини є *областю допустимих розв'язків* (ОДР) або *областю допустимих планів*. Він може бути закритим або відкритим. ОДР для даної задачі набуває такого вигляду, як показано пунктиром на рис. 2.1.

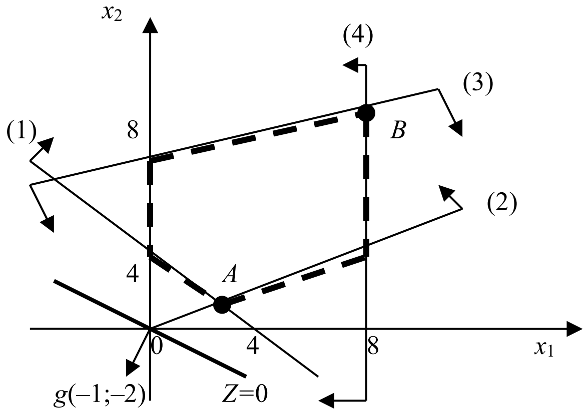

Рисунок 2.1 – Область допустимих розв'язків прикладу 2.1

Прямі (1) – (4) на рис. 2.1 будувалися за такими точками:

Змінна	Номер рівняння									
	(1)		(2)		(3)		(4)		$Z = 0$	
x_1	0	4	0	2	3	–2	8	8	–2	2
x_2	4	0	0	1	8	6	0	8	1	–1

Пряма g(–1; –2) завжди виходить з точки (0; 0) у точку (–1; –2), де (–1; –2) – коефіцієнти при змінних у функції мети $Z = -x_1 - 2x_2$. Умова задачі $x_1, x_2 \geq 0$ означає, що ОДР лежить у першій чверті декартовій системи координат x_1Ox_2.

Для визначення Z_{max} необхідно переміщати лінію рівня $Z = 0$ у напрямку зростання градієнта *g* доти, доки лінія рівня не перетне останню точку ОДР, і ця точка й буде точкою максимуму. Для визначення Z_{min} переміщення відбувається в напрямку *–g*. Якщо багатокутник необмежений, то можливі випадки, коли $Z_{max} \to \pm\infty$ або $Z_{min} \to \pm\infty$.

У розглянутому прикладі переміщення лінії рівня відбувається в напрямку, зворотному напрямку градієнта *g*, тобто в напрямку убування градієнта. Тому перша кутова точка ОДР буде точкою max, а остання точка цього багатокутника розв'язків – точкою min (точки *A* і *B* відповідно). Знайдені в такий спосіб точки будуть доставляти оптимальні значення функції мети.

Знайдемо координати точок *A* і *B* як точок перетину відокремлюючих прямих:

$$A:\begin{cases}x_1+x_2=4;\\x_1-2x_2=0;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=8/3\\x_2=4/3\end{cases}\Rightarrow A(8/3;4/3),$$

$$B:\begin{cases}2x_1-5x_2=-34;\\x_1=8;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=8\\x_2=10\end{cases}\Rightarrow B(8;10).$$

Отже, $Z_{\max}(A) = -16/3$, $Z_{\min}(B) = -28$.

Приклад 2.2 Розв’язати графічним методом таку задачу:

$$Z = 2x_1 + 3x_2 \to \max;$$

$$\begin{cases}x_1+3x_2\le 18; & (1)\\2x_1+x_2\le 16; & (2)\\x_2\le 5; & (3)\\3x_1\le 21. & (4)\end{cases}$$

$$x_1, x_2 \ge 0.$$

Розв’язання. Побудуємо ОДР і знайдемо точку максимуму (рис. 2.2).

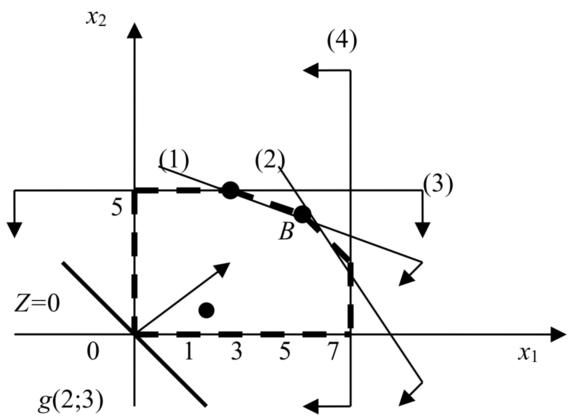

Рисунок 2.2 – Область допустимих розв’язків прикладу 2.2

Кутова точка ОДР, тобто точка B, є точкою max. Знайдемо координати цієї точки:

$$B:\begin{cases}x_1+3x_2=18;\\2x_1+x_2=16;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=6\\x_2=4\end{cases}\Rightarrow B(6;4).$$

Отже, $Z_{\max}(B) = 24$, тобто при продажі 6 одиниць продукту P_1 і 4 одиниць продукту P_2 максимальний прибуток становитиме 24 у.о.

Приклад 2.3 Розв’язати графічним методом таку задачу:

$$Z = 3x_1 + 3x_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 8; & (1) \\ 2x_1 - x_2 \ge 1; & (2) \\ x_1 - 2x_2 \le 2. & (3) \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \ge 0.$$

Розв’язання. Побудуємо ОДР і знайдемо точку максимуму (рис. 2.3).

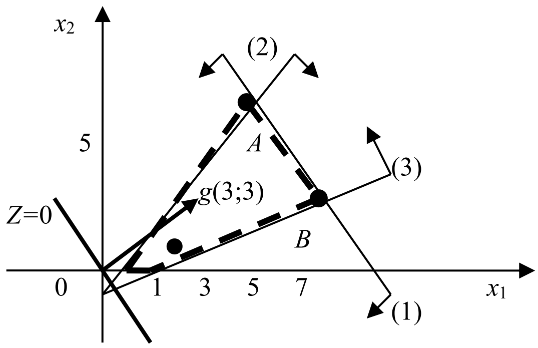

Рисунок 2.3 – Область допустимих розв’язків прикладу 2.3

Оскільки лінія рівня збігається з прямою *AB*: $x_1 + x_2 = 8$, то на всьому відрізку *AB* матимемо $Z = Z_{max} = 3x_1 + 3x_2 = 3(x_1 + x_2) = 3 \cdot 8 = 24$. Тоді задача має нескінченну множину розв’язків, серед яких два базисних оптимальних розв’язки: точки *A*(3;5) і *B*(6;2). Точки відрізка *AB* задаються рівнянням x_2 = = 8 – x_1, де $3 \le x_1 \le 6$. Таким чином, Z_{max} = 24 за нескінченної множини розв’язків x_1 = 3, x_2 = 8 – *c*, де $3 \le c \le 6$.

Приклад 2.4 Розв’язати графічним методом таку задачу:

$$Z = 2x_1 + x_2 + 6x_3 - 12x_4 - 9x_5 \to \max;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 7x_3 - 3x_4 - 7x_5 = 13; (1) \\ x_1 + 2x_2 + 13x_3 + 2x_4 - 14x_5 = 20; (2) - (1) \\ x_1 + 3x_2 + 20x_3 + 6x_4 - 23x_5 = 19. (3) - (1) \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \left(j = \overline{1,5}\right).$$

Розв’язання. Застосовуючи метод Жордано – Гауса, здійснимо виключення з системи обмежень задач базисних змінних.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 7x_3 - 3x_4 - 7x_5 = 13; (1) \\ x_2 + 6x_3 + 5x_4 - 7x_5 = 7; (2) \\ 2x_2 + 13x_3 + 9x_4 - 16x_5 = 6. (3) - (2) \cdot 2 \end{cases}$$

Остаточно маємо:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 7x_3 - 3x_4 - 7x_5 = 13; (1) \\ x_2 + 6x_3 + 5x_4 - 7x_5 = 7; (2) \\ x_3 - x_4 - 2x_5 = -8. (3) \end{cases}$$

Звідси випливає: $x_3 = -8 + x_4 + 2x_5$; $x_2 = 55 - 11x_4 - 5x_5$; $x_1 = 14 + 7x_4 - 2x_5$. А цільова функція набуде вигляду: $Z = 2x_1 + x_2 + 6x_3 - 12x_4 - 9x_5 = 35 - 3x_4 - 6x_5$.

Початкову задачу можна подати у такому вигляді:

$$Z = -3x_4 - 6x_5 + 35 \to \max;$$
$$\begin{cases} -7x_4 + 2x_5 \le 14; (1) \\ 11x_4 + 5x_5 \le 55; (2) \\ x_4 + 2x_5 \ge 8. (3) \end{cases}$$
$$x_4 \ge 0, x_5 \ge 0.$$

Розв'яжемо її графічно.

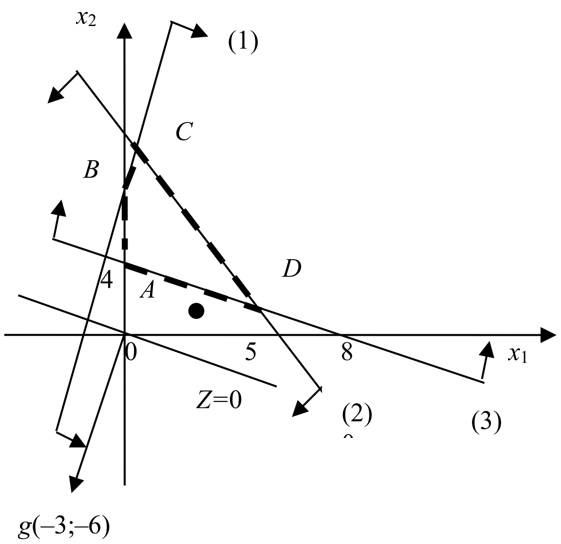

Рисунок 2.4 – Область допустимих розв'язків прикладу 2.4

Координати точки D знайдемо із системи рівнянь:

$$\begin{cases} 11x_4 + 5x_5 = 55; \\ x_4 + 2x_5 = 8. \end{cases}$$

Одержимо $D\left(\frac{70}{17}; \frac{33}{17}\right)$. Оцінимо тепер значення цільової функції у точках

A і D: $Z_A = -3 \cdot 0 - 6 \cdot 4 + 35 = 11$; $Z_D = -3 \cdot \frac{70}{17} - 6 \cdot \frac{33}{17} + 35 = 11$.

Таким чином функція Z набуває однакових значень в точках A і D, тобто в усіх точках відрізку AD. Значить оптимальний розв'язок задачі такий:

$$\left(-2C+8;C\right),\ \text{де}\ C\in\left[\frac{33}{17};4\right].$$

Для відшукання оптимального розв'язку початкової задачі треба підставити знайдені значення x_4, x_5 у формули, що визначають значення базисних змінних x_1, x_2, x_3. У результаті такої підстановки оптимальний розв'язок початкової задачі виявиться таким:

$x_1 = -16C + 70;\ x_2 = 17C - 33;\ x_3 = 0;\ x_4 = -2C + 8;\ x_5 = C.$

А оптимальне значення цільової функції дорівнює: $Z_{\max} = 11.$

Завдання до теми 2

Для свого варіанта вихідних даних розв'язати графічним методом ЗЛП.

Завдання 2.1

Варіант	Задача	Варіант	Задача
0	$Z = x_1 + x_2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 8; \\ x_1 \le 6; \\ x_2 \le 5. \end{cases}$ $x_1, x_2 \ge 0$	5	$Z = 2x_1 + x_2 \to \max$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 5; \\ 10x_1 + 3x_2 \le 30; \\ x_2 \ge 1. \end{cases}$ $x_1, x_2 \ge 0$
1	$Z = x_1 + 2x_2 \to \min(\max)$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 10; \\ x_1 + x_2 \ge 1; \\ x_2 \ge 1; \\ x_2 \le 4. \end{cases}$ $x_1, x_2 \ge 0$	6	$Z = x_1 - 3x_2 \to \min(\max)$ $\begin{cases} 10x_1 + 3x_2 \ge 30; \\ x_1 - x_2 \ge 4; \\ -x_1 + x_2 \ge 3; \\ x_1 + x_2 \le 10. \end{cases}$ $x_1, x_2 \ge 0$
2	$Z = x_1 - 2x_2 \to \min$ $\begin{cases} x_1 - x_2 \le 1; \\ x_1 + x_2 \le 2; \\ x_1 - 2x_2 \ge 0; \\ 2x_1 + 2x_2 \ge 1. \end{cases}$ $x_1, x_2 \ge 0$	7	$Z = 3x_1 + 4x_2 \to \min(\max)$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 20; \\ -x_1 + 4x_2 \le 20; \\ x_1 \ge 5; \\ x_2 \ge 5. \end{cases}$ $x_1, x_2 \ge 0$
3	$Z = x_1 + 3x_2 \to \min(\max)$ $\begin{cases} 10x_1 + 3x_2 \ge 30; \\ -x_1 + x_2 \le 5; \\ x_1 + x_2 \le 10; \\ x_2 \ge 2. \end{cases}$ $x_1, x_2 \ge 0$	8	$Z = x_1 + x_2 \to \min(\max)$ $\begin{cases} x_1 - x_2 \le 2; \\ x_1 + x_2 \le 2; \\ x_1 - 2x_2 \le 1. \end{cases}$ $x_1, x_2 \ge 0$
4	$Z = x_1 + 2x_2 \to \min(\max)$ $\begin{cases} x_1 - x_2 \le 3; \\ x_1 + x_2 \le 6; \\ -x_1 + 3x_2 \le 10; \\ x_1 + 4x_2 \ge 4. \end{cases}$ $x_1, x_2 \ge 0$	9	$Z = x_1 + 2x_2 \to \min(\max)$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 10; \\ -x_1 + x_2 \le 4; \\ x_1 = 5. \end{cases}$ $x_1, x_2 \ge 0$

Завдання 2.2

Варіант	Задача	Варіант	Задача
0	$Z=-x_1+4x_2+2x_4 \to \max$ $\begin{cases} x_1-5x_2+x_3=5; \\ -x_1+x_2+x_4=4; \\ x_1+x_2+x_5=8. \end{cases}$ $x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 \ge 0$	5	$Z=x_1+3x_2-x_4 \to \max$ $\begin{cases} x_1-5x_2+x_3=5; \\ -x_1+x_2+x_4=4; \\ x_1+x_2+x_5=8. \end{cases}$ $x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 \ge 0$
1	$Z=x_2-x_3+x_4 \to \min$ $\begin{cases} x_1-2x_2-x_3+x_4=2; \\ 2x_1-x_2+4x_3-x_4=10. \end{cases}$ $x_1,x_2,x_3,x_4 \ge 0$	6	$Z=3x_2+2x_3-x_4 \to \min$ $\begin{cases} x_1-2x_2-x_3+x_4=2; \\ 2x_1-x_2+4x_3-x_4=10. \end{cases}$ $x_1,x_2,x_3,x_4 \ge 0$
2	$Z=x_1+x_2+5x_3+3x_4 \to \max$ $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+3x_4=9; \\ x_1+x_2+x_3+2x_4=5. \end{cases}$ $x_1,x_2,x_3,x_4 \ge 0$	7	$Z=3x_1+x_2+x_3-5x_4 \to \max$ $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+3x_4=9; \\ x_1+x_2+x_3+2x_4=5. \end{cases}$ $x_1,x_2,x_3,x_4 \ge 0$
3	$Z=-16x_1-x_2+x_3+5x_4+5x_5 \to \max$ $\begin{cases} 2x_1+2x_2+x_3=10; \\ 2x_1+3x_2+x_4=6; \\ 2x_1+4x_2-x_5=8. \end{cases}$ $x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 \ge 0$	8	$Z=6x_1+3x_2-5x_3-3x_4+5x_5 \to \max$ $\begin{cases} 2x_1+2x_2+x_3=10; \\ 2x_1+3x_2+x_4=6; \\ 2x_1+4x_2-x_5=8. \end{cases}$ $x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 \ge 0$
4	$Z=3x_1-x_2+x_3-5x_4+6x_5 \to \max$ $\begin{cases} x_1-x_2+3x_3-18x_4+2x_5=-4; \\ 2x_1-x_2+4x_3-21x_4+4x_5=22; \\ 3x_1-2x_2+8x_3-43x_4+11x_5=38. \end{cases}$ $x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 \ge 0$	9	$Z=6x_1-2x_2+3x_3-x_4+2x_5 \to \max$ $\begin{cases} x_1-x_2+3x_3-18x_4+2x_5=-4; \\ 2x_1-x_2+4x_3-21x_4+4x_5=22; \\ 3x_1-2x_2+8x_3-43x_4+11x_5=38. \end{cases}$ $x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 \ge 0$

3 СИМПЛЕКС-МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Приклад 3.1 Використовуючи симплекс-метод, знайти мінімальне значення лінійної функції:

$$Z = x_1 - x_2 - 3x_3$$

при обмеженнях
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 \le 1; \\ -4x_1 + 2x_2 - x_3 \le 2; \\ 3x_1 + x_3 \le 5. \end{cases} \quad x_j \ge 0\,(j = 1, 2, 3).$$

Розв'язання. Цю задачу можна подати у такій канонічній формі: знайти мінімальне значення лінійної функції:

$$Z = x_1 - x_2 - 3x_3$$

при обмеженнях
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1; \\ -4x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 2; \\ 3x_1 + x_3 + x_6 = 5. \end{cases}$$
$$x_j \ge 0\,(j = \overline{1, 6}).$$

Запишемо систему обмежень у векторній формі:

$$x_1A_1 + x_2A_2 + x_3A_3 + x_4A_4 + x_5A_5 + x_6A_6 = B,$$

де $A_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, A_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, A_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$

Одиничні вектори A_4, A_5, A_6 вибираємо за базис початкового опорного плану, вільні невідомі x_1, x_2, x_3 прирівнюємо до нуля. У результаті одержимо початковий опорний план, якому відповідає розкладання $x_4A_4 + x_5A_5 + x_6A_6 = B$.

$$X_0 = (x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 2, x_6 = 5).$$

Для перевірки плану на оптимум складемо першу симплексну таблицю й обчислюємо значення $Z_j - C_j$:

i	Базис	$C_{баз}$	Опорний план B	1	–1	–3	0	0	0	θ
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	
1	A_4	0	1	2	–1	**1**	1	0	0	1/1
2	A_5	0	2	–4	2	–1	0	1	0	
3	A_6	0	5	3	0	1	0	0	1	5/1
$m+1$	$Z_j - C_j$		0	–1	1	3	0	0	0	

Для векторів базису оцінки є нульовими. Серед отриманих оцінок є дві додатні: $Z_2 - C_2 = 1 > 0$, $Z_3 - C_3 = 1 > 0$, що свідчить про неоптимальність початкового опорного плану. Його можна поліпшити, включивши в базис вектор, якому відповідає оцінка 3. Серед елементів стовпця A_3 будемо розглядати тільки додатні. Знайдемо розв'язуючий елемент, оцінивши значення $\theta = b_i / a_{ik}$ для кожного додатного значення стовпця A_3. Оскільки min (1/1;5/1) = 1/1 = 1, то розв'язуючим елементом буде число 1, що розташоване на перетині першого рядка й третього стовпця. Отже, вектор A_3 необхідно ввести в базис, а вектор A_4 виключити з нього.

Складемо другу симплексну таблицю. Спочатку підрахуємо нові елементи розв'язуючого рядка. Для цього старі елементи розв'язуючого рядка розділимо на розв'язуючий елемент (на 1) для того, щоб він став рівним 1. Далі за допомогою рівнянь Жордана – Гаусса перетворимо всі елементи розв'язуючого стовпця, крім розв'язуючого елемента, в нуль. Для цього виконаємо такі перетворення: розв'язуючий рядок додамо до другого рядка, а також до третього, помноживши на (–1). Далі розрахуємо ряд оцінок. У результаті одержимо таблицю:

i	Базис	$C_{баз}$	Опорний план B	1	–1	–3	0	0	0	θ
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	
1	A_3	–3	1	2	–1	1	1	0	0	
2	A_5	0	3	–2	**1**	0	1	1	0	3/1
3	A_6	0	4	1	1	0	–1	0	1	4/1
$m+1$	$Zj - Cj$		–3	–7	4	0	–3	0	0	

Таким чином отримали новий опорний план $X_0^{(1)} = (x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1,\ x_4 = 0,\ x_5 = 3,\ x_6 = 4)$, якому відповідає значення лінійної функції $Z = -3$. У рядку $m+1$ знову є додатний елемент $Z_2 - C_2 = 4 > 0$. Це означає, що новий опорний план неоптимальний і вектор A_2 підлягає включенню в базис. Знайдемо розв'язуючий елемент, оцінивши значення $\theta = b_i / a_{ik}$ для кожного додатного значення стовпця A_2. Оскільки min(3/1;4/1) = 3/1 = 3, то розв'язуючим елементом буде число 1, що розташоване на перетині другого рядка й другого стовпця. Отже, вектор A_5 виключається з базису, а вектор A_2 вводиться у нього. Тоді маємо:

i	Базис	$C_{баз}$	Опорний план B	1	–1	–3	0	0	0	θ
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	
1	A_3	–3	4	0	0	1	2	1	0	
2	A_2	–1	3	–2	1	0	1	1	0	
3	A_6	0	1	**3**	0	0	–2	–1	1	1/3
$m+1$	$Z_j - C_j$		–15	1	0	0	–1	–4	0	

Новий опорний план: $X_0^{(2)} = (x_1 = 0, x_2 = 3, x_3 = 4, x_4 = 0, x_5 = 0, x_6 = 1)$, $Z = -15$. У рядку $m + 1$ знову є додатний елемент: $Z_1 - C_1 = 1 > 0$. Це означає, що новий опорний план неоптимальний і вектор A_1 підлягає включенню в базис. Оскільки $\theta_{min}(1/3) = 1/3$, то розв'язуючим елементом буде число 3, що знаходиться на перетині третього рядка й першого стовпця. Отже, вектор A_6 виключається з базису, а вектор A_1 вводиться у нього. Нова симплексна таблиця має такий вигляд:

i	Базис	$C_{баз}$	Опорний план B	1	–1	–3	0	0	0	θ
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	
1	A_3	–3	4	0	0	1	2	1	0	
2	A_2	–1	11/3	0	1	0	–1/3	1/3	2/3	
3	A_1	1	1/3	1	0	0	–2/3	–1/3	1/3	
$m+1$	Z_j-C_j		–46/3	0	0	0	–19/3	–11/3	–1/3	

Одержали новий опорний план $X_0^{(3)} = (x_1 = 1/3, x_2 = 11/3, x_3 = 4, x_4 = 0, x_5 = 0, x_6 = 0)$, якому відповідає значення лінійної функції $Z = -46/3$.

Оскільки в $m + i$ рядку четвертої ітерації всі оцінки від'ємні та нульові оцінки відповідають лише векторам, які входять у *базис*, то можна зробити *висновок*, що зазначений план для цієї задачі є оптимальним і єдиним.

Приклад 3.2 Розв'язати симплекс-методом таку задачу лінійного програмування (ЗЛП):

$$\text{знайти} \quad Z = -x_5 - 2x_6 \to \min$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} x_1 + x_5 + x_6 = 12; \\ x_2 + 5x_5 - x_6 = 30; \\ x_3 + x_5 - 2x_6 = 6; \\ x_4 + \dfrac{3}{2}x_5 - x_6 = 9. \end{cases} \quad x_j \geq 0 \left(j = \overline{1,6}\right).$$

Розв'язання. Оскільки вектори

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

одиничні, то, вибираючи їх як базисні, заповнимо першу симплексну таблицю. Серед найбільших додатних оцінок m + 1-го рядка є оцінка 4, що відповідає стовпцю A_5, тому п'ятий стовпець буде розв'язуючим.

З першої симплексної таблиці виходить, що

$$\frac{b_1}{a_{15}} = \frac{12}{1} = 12; \ \frac{b_2}{a_{25}} = \frac{30}{5} = 6; \ \frac{b_3}{a_{35}} = \frac{6}{1} = 6; \ \frac{b_3}{a_{35}} = \frac{9}{3/2} = 6.$$

i	Базис	$C_{баз}$	Опорний план B	0	0	0	0	–4	–2	θ	$\frac{a_{i6}}{a_{i5}}$
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6		
1	A_1	0	12	1	0	0	0	1	–1	12	1
2	A_2	0	30	0	1	0	0	5	–1	6	–1/5
3	A_3	0	6	0	0	1	0	1	–2	6	–2
4	A_4	0	9	0	0	0	1	3/2	–1	6	–2/3
$m+1$	$Z_j - C_j$		0	0	0	0	0	4	2		

При цьому існують три відношення, значення яких є однаковими, тому вибрати однозначно розв'язуючий рядок не можна. У зв'язку з цим застосуємо правило для визначення розв'язуючого рядка. Для цього розглянемо відношення елементів наступного стовпчика, що не входить у базис, до елементів $a_{i5} \neq 0$:

$$\frac{a_{16}}{a_{15}} = \frac{1}{1} = 1; \ \frac{a_{26}}{a_{25}} = \frac{-1}{5} = -\frac{1}{5}; \ \frac{a_{36}}{a_{35}} = \frac{-2}{1} = -2; \ \frac{a_{46}}{a_{45}} = \frac{-1}{3/2} = -\frac{2}{3}.$$

Результати обчислень таких відношень запишемо в додатковому стовпці симплексної таблиці. Серед цих відношень мінімальним є $\frac{a_{36}}{a_{35}} = \frac{-2}{1} = -2$. Воно відповідає третьому рядку. Тому як розв'язуючий приймаємо саме третій рядок. Отже, вектор A_5, вводимо до базису, а вектор A_3 виводимо з базису.

Складемо другу симплексну таблицю. Для цього за допомогою третього рядка виконаємо перетворення методом повних виключень, тобто помножимо на (–1) третій рядок і додамо до першого рядка, помножимо його на (–5) і додамо до другого рядка, помножимо його на (–3/2) і додамо до четвертого рядка. При цьому таблиця набуває такого вигляду:

i	Базис	$C_{баз}$	Опорний план B	0	0	0	0	–4	–2	θ	$\frac{a_{i3}}{a_{i6}}$
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6		
1	A_1	0	6	1	0	–1	0	0	3	2	–1/3
2	A_2	0	0	0	1	0	0	0	9	0	–5/9
3	A_5	–4	6	0	0	1	0	1	–2		–1/2
4	A_4	0	0	0	0	–3/2	1	0	2	0	–3/4
$m+1$	$Z_j - C_j$		–24	0	0	–4	0	0	10		

З другої симплексної таблиці видно, що максимальна додатна оцінка 10 перебуває в шостому стовпці. Отже, цей стовпець буде розв'язуючим. Для вибору розв'язуючого рядка розглядаємо відношення $\theta = b_i / a_{ik}$ для додатних елементів *шостого стовпця*: $\frac{b_1}{a_{16}} = \frac{6}{3} = 2$; $\frac{b_2}{a_{26}} = \frac{0}{9} = 0$; $\frac{b_4}{a_{46}} = \frac{0}{2} = 0$. Серед цих відношень мінімальними є два. Тому розглядаємо відношення елементів стовпця, що не входить у базис (тобто третього), до елементів шостого стовпця: $\frac{a_{13}}{a_{16}} = -\frac{1}{3}$; $\frac{a_{23}}{a_{26}} = -\frac{5}{9}$; $\frac{a_{33}}{a_{36}} = -\frac{1}{2}$; $\frac{a_{43}}{a_{46}} = \frac{-3/2}{2} = -\frac{3}{4}$. Серед цих відношень мінімальним є $\frac{a_{43}}{a_{46}} = \frac{-3/2}{2} = -\frac{3}{4}$. Отже, розв’язуючим буде четвертий рядок. Далі розв’язання задачі подано у вигляді таких симплексних таблиць:

i	Базис	$C_{баз}$	Опорний план *B*	0	0	0	0	–4	–2	θ
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	
1	A_1	0	6	1	0	5/4	–3/2	0	0	2
2	A_2	0	0	0	1	7/4	–9/2	0	0	0
3	A_5	–4	6	0	0	–1/2	1	1	0	
4	A_6	–2	0	0	0	–3/4	1/2	0	1	
$m+1$	$Z_j - C_j$		–24	0	0	7/2	–5	0	0	

i	Базис	$C_{баз}$	Опорний план B	0	0	0	0	–4	–2	θ
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	
1	A_1	0	6	1	–5/7	0	12/7	0	0	7/2
2	A_3	0	0	0	4/7	1	–18/7	0	0	
3	A_5	–4	6	0	2/7	0	–2/7	1	0	
4	A_6	–2	0	0	3/7	0	–10/7	0	1	
$m+1$	$Z_j - C_j$		–24	0	–2	0	4	0	0	

i	Базис	$C_{баз}$	Опорний план B	0	0	0	0	–4	–2
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
1	A_4	0	7/2	7/12	–5/12	0	1	0	0
2	A_3	0	9	3/2	–1/2	1	0	0	0
3	A_5	– 4	7	1/6	1/6	0	0	1	0
4	A_6	– 2	5	5/6	–1/6	0	0	0	1
$m+1$	$Z_j - C_j$		–38	–7/3	–1/3	0	0	0	0

Серед оцінок $Z_j - C_j$ в останній симплексній таблиці немає додатних. Тому опорний розв’язок $X = (x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 9, x_4 = 7/2, x_5 = 7, x_6 = 5)$ буде оптимальним, а найменше значення лінійної функції $Z_{\min} = -38$.

Завдання до теми 3

Для свого варіанта вихідних даних розв’язати симплекс-методом ЗЛП.

Варіант	Задача	Варіант	Задача
0	$Z = 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 \to \max$ $\begin{cases} x_1 - x_3 \le 6; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 5; \\ -2x_1 + 2x_3 \ge -4. \end{cases}$ $x_1, x_2, x_3 \ge 0$	5	$Z = 3x_1 - 2x_2 - x_3 \to \min$ $\begin{cases} -x_1 - 3x_2 + 3x_3 \ge -6; \\ -2x_1 + x_2 + x_3 \le 4. \end{cases}$ $x_1, x_2, x_3 \ge 0$
1	$Z = 5x_1 + x_2 + x_3 \to \max$ $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 5; \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 \ge -3. \end{cases}$ $x_1, x_2, x_3 \ge 0$	6	$Z = x_1 - x_2 + 3x_3 \to \max$ $\begin{cases} x_1 + 3x_3 \le 10; \\ x_1 - x_2 - x_3 = -3. \end{cases}$ $x_1, x_2, x_3 \ge 0$
2	$Z = -x_1 - x_2 + 3x_3 \to \max$ $\begin{cases} -x_1 + x_2 - 2x_3 \ge -2; \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \le 8. \end{cases}$ $x_1, x_2, x_3 \ge 0$	7	$Z = x_1 + 3x_2 - 3x_3 \to \min$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 \ge 2; \\ -x_1 - 2x_3 \ge -6. \end{cases}$ $x_1, x_2, x_3 \ge 0$
3	$Z = -x_1 - 2x_2 + 2x_3 \to \min$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 10; \\ x_1 - x_2 \le 2. \end{cases}$ $x_1, x_2, x_3 \ge 0$	8	$Z = x_1 + 3x_2 + 9x_3 \to \max$ $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 10; \\ x_1 - x_2 - 2x_3 \ge -2. \end{cases}$ $x_1, x_2, x_3 \ge 0$
4	$Z = x_1 + 2x_2 - 3x_3 \to \min$ $\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 3x_3 \le 4; \\ 2x_1 + 3x_2 \le 6; \\ x_1 + x_3 \le 2. \end{cases}$ $x_1, x_2, x_3 \ge 0$	9	$Z = x_1 - 3x_2 + x_3 \to \min$ $\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + x_3 \le -2; \\ 2x_2 + 4x_3 \le 7. \end{cases}$ $x_1, x_2, x_3 \ge 0$

4 МЕТОД ШТУЧНОГО БАЗИСУ

Приклад 4.1 Знайти $Z = 8x_1 + 10x_2 - 5x_4 \to \max$ при обмеженнях:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 \le 450; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \le 380; \\ x_3 \ge 9. \end{cases}$$
$$x_j \ge 0 \left(j = \overline{1,4}\right).$$

Розв'язання. Застосуємо для розв'язання задачі симплекс-метод. Для цього спочатку приведемо задачу до канонічної форми, а далі – до векторної. Канонічна форма цієї ЗЛП має вигляд:

$$Z = 8x_1 + 10x_2 - 5x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 \to \max$$

при обмеженнях
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + x_5 = 450; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_6 = 380; \\ x_3 - x_7 = 9. \end{cases}$$
$$x_j \ge 0 \left(j = \overline{1,7}\right).$$

Векторна форма запису ЗЛП така:

$$Z = CX \to \max,$$
$$x_1A_1 + x_2A_2 + x_3A_3 + x_4A_4 + x_5A_5 + x_6A_6 + x_7A_7 = B,$$
$$C = (8, 10, 0, -5, 0, 0, 0),\ X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{pmatrix}^T.$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, A_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, A_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, A_7 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 450 \\ 380 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Серед записаних векторів одиничними є тільки вектори A_5 й A_6. Оскільки у тривимірному просторі базис має складатися з трьох одиничних векторів, то ще один одиничний вектор можна одержати, ввівши в третє обмеження з коефіцієнтом +1 штучну змінну x_8, якій відповідає одиничний вектор

$$A_8 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тепер можна розглянути розширену ЗЛП (M-задача):

$$Z = 8x_1 + 10x_2 - 5x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 - Mx_8 \to \max;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + x_5 = 450; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_6 = 380; \quad x_j \ge 0 \left(j = \overline{1,8}\right). \\ \qquad x_3 - x_7 + x_8 = 9. \end{cases}$$

На відміну від додаткових змінних, штучна змінна x_8 має в цільовій функції Z коефіцієнт «$-M$» (задача на max), де M – дуже велике додатне число. У розширеній задачі базисними змінними є змінні x_5, x_6, x_8, інші змінні – вільні. Запишемо початковий опорний план задачі:

$$X_0 = (0, 0, 0, 0, 450, 380, 0, 9).$$

При цьому

$$Z = 8\cdot 0 + 10\cdot 0 - 5\cdot 0 + 0\cdot 450 + 0\cdot 380 + 0\cdot 0 - M\cdot 9 = -9M.$$

Складемо першу симплексну таблицю задачі. Вона матиме такий вигляд:

i	Базис	$C_{баз}$	Опорний план B	8	10	0	–5	0	0	0	$-M$	θ
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	
1	A_5	0	450	2	3	4	2	1	0	0	0	112,5
2	A_6	0	380	3	2	1	2	0	1	0	0	380
3	A_8	–M	9	0	0	**1**	0	0	0	–1	1	9
$m+1$	$Z_j - C_j$		0	–8	–10	0	5	0	0	0	0	
$m+2$			$-9M$	0	0	$-M$	0	0	0	$+M$	0	

Обчисливши оцінки першого опорного плану, одержимо $Z_0 = 0 - 9M$, $Z_1 - C_1 = -8$, $Z_2 - C_2 = -10$, $Z_4 - C_4 = 0 - M$ та ін. Видно, що значення оцінок складаються з двох частин, одна з яких містить M, а інша – просте число. Тому в ряд $m + 1$ записуємо просте число, а в ряд $m + 2$ – число з коефіцієнтом M.

Оцінки першого плану не задовольняють умову оптимальності. Тому потрібен перехід до нового опорного плану. Для такого переходу необхідно реалізувати черговий крок алгоритму симплекс-методу. Розв’язуючим стовпцем буде третій стовпець з оцінкою ($-M$), оскільки це число є найбільшим за модулем. Подальше розв’язання задачі подане у вигляді таких симплексних таблиць:

i	Базис	$C_{баз}$	Опорний план B	8	10	0	–5	0	0	0	$-M$	θ
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	
1	A_5	0	414	2	3	0	2	1	0	4	4	138
2	A_6	0	371	3	2	0	2	0	1	1	–1	185,5
3	A_3	0	9	0	0	1	0	0	0	–1	1	–
$m+1$	$Z_j - C_j$		0	–8	–10	0	5	0	0	0	0	–
$m+2$			0	0	0	0	0	0	0	0	$+M$	–

i	Базис	$C_{баз}$	Опорний план B	8	10	0	–5	0	0	0	$-M$	θ
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	
1	A_2	10	138	2/3	1	0	2/3	1/3	0	4/3	–4/3	207
2	A_6	0	93	5/3	0	0	2/3	–2/3	1	–5/3	5/3	57
3	A_3	0	9	0	0	1	0	0	0	–1	1	–
$m + 1$	$Z_j – C_j$		1380	–4/3	0	0	35/3	10/3	0	40/3	–40/3	–
$m + 2$			0	0	0	0	0	0	0	0	+M	–

i	Базис	$C_{баз}$	Опорний план B	8	10	0	–5	0	0	0	$-M$	θ
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	
1	A_2	10	100	0	1	0	2/5	3/5	–2/5	2	–2	–
2	A_1	8	57	1	0	0	2/5	–2/5	3/5	–1	1	–
3	A_3	0	9	0	0	1	0	0	0	–1	1	–
$m + 1$	$Z_j – C_j$		1456	0	0	0	61/5	14/5	4/5	12	–12	–
$m + 2$			0	0	0	0	0	0	0	0	+M	–

Оптимальним планом задачі є вектор $X^* = (57, 100, 9, 0, 0, 0, 0, 0)$. При цьому $Z_{\max} = 1456$.

Завдання до теми 4

Для свого варіанта вихідних даних розв'язати задачу методом штучного базису.

Варіант	Задача	Варіант	Задача
0	$Z=-2x_1-6x_2+5x_3-x_4-4x_5\to\max;$ $\begin{cases}x_1-4x_2+2x_3-5x_4+9x_5=3;\\ x_2-3x_3+4x_4-5x_5=6;\\ x_2-x_3+x_4-x_5=1.\end{cases}$ $x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\ge 0$	5	$Z=x_1+2x_2-x_3+4x_4\to\max;$ $\begin{cases}2x_1+3x_2+x_3+x_4=6;\\ x_1+2x_3+x_4=2.\end{cases}$ $x_1,x_2,x_3,x_4\ge 0$
1	$Z=2x_1+2x_2+3x_3+4x_4\to\min;$ $\begin{cases}x_1+x_2+x_4\le 150;\\ 2x_1+2x_2+3x_3+3x_4\le 600;\\ 3x_1+4x_3=400;\\ 3x_2+5x_4=500.\end{cases}$ $x_1,x_2,x_3,x_4\ge 0$	6	$Z=3x_1+5x_2+4x_3\to\max;$ $\begin{cases}3x_1+4x_2+2x_3\le 9;\\ 2x_1+5x_2+x_3\le 8;\\ x_1+2x_2+4x_3\ge 7.\end{cases}$ $x_1,x_2,x_3\ge 0$
2	$Z=5x_1+2x_2-x_3\to\max;$ $\begin{cases}2x_1+x_2+x_3\le 5;\\ 3x_1+2x_2+x_3=6;\\ 5x_1+3x_2+4x_3\ge 1.\end{cases}$ $x_1,x_2,x_3\ge 0$	7	$Z=12x_1+27x_2+6x_3\to\min;$ $\begin{cases}2x_1+3x_2+2x_3\ge 14;\\ x_1+3x_2+x_3\ge 6;\\ 6x_1+9x_2+2x_3\ge 22.\end{cases}$ $x_1,x_2,x_3\ge 0$
3	$Z=x_1+4x_2+x_3\to\min;$ $\begin{cases}5x_1+12x_2+2x_3=9;\\ 3x_1+4x_2+4x_3=11.\end{cases}$ $x_1,x_2,x_3\ge 0$	8	$Z=-2x_1+x_2-x_3\to\min;$ $\begin{cases}2x_1+x_2+x_3=4;\\ x_1-2x_3\le 5;\\ 2x_1+2x_2\ge 3.\end{cases}$ $x_1,x_2,x_3\ge 0$
4	$Z=2x_1+x_2-x_3-x_4\to\min;$ $\begin{cases}x_1+x_2+2x_3+x_4=2;\\ 2x_1+x_2+3x_3+x_4=6.\end{cases}$ $x_1,x_2,x_3,x_4\ge 0$	9	$Z=-x_1+x_2\to\max;$ $\begin{cases}-x_1+3x_2\le 3;\\ -2x_1+x_2\ge 2;\\ x_1+x_2\le 1.\end{cases}$ $x_1,x_2\ge 0$

5 ДВОЇСТА ЗАДАЧА ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Приклад 5.1 Скласти задачу, двоїсту такій задачі:

$$Z = -x_1 + 2x_2 \to \max$$

при обмеженнях
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \ge 1; \\ -x_1 + 4x_2 \le 24; \\ x_1 - x_2 \le 3; \\ x_1 + x_2 \ge 5. \end{cases} \quad x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

Розв'язання. 1) Оскільки вихідна задача на максимізацію, то приведемо всі нерівності системи обмежень до вигляду «≤», для чого обидві частини першої й четвертої нерівностей помножимо на (–1). Одержимо:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le -1; \\ -x_1 + 4x_2 \le 24; \\ x_1 - x_2 \le 3; \\ -x_1 - x_2 \le -5. \end{cases}$$

2) Складемо розширену матрицю системи:

$$A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & 24 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & -5 \\ -1 & 2 & Z \end{pmatrix}.$$

3) Знайдемо матрицю A_1', транспоновану до A:

$$A_1' = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 24 & 3 & -5 & F \end{pmatrix}.$$

5) Сформулюємо двоїсту задачу:

$$F = -y_1 + 24y_2 + 3y_3 - 5y_4 \to \min$$

при обмеженнях
$$\begin{cases} 2y_1 - y_2 + y_3 - y_4 \ge -1; \\ y_1 + 4y_2 - y_3 - y_4 \ge 2. \end{cases}$$

$$y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, \dots, y_4 \ge 0.$$

Приклад 5.2 Знайти оптимальний план двоїстої ЗЛП, попередньо розв'язавши пряму ЗЛП (див. приклад 3.1):

$$Z = x_1 - x_2 - 3x_3 \to \min$$

при обмеженнях $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 \le 1; \\ -4x_1 + 2x_2 - x_3 \le 2; \quad x_j \ge 0\,(j = 1, 2, 3). \\ 3x_1 + x_3 \le 5. \end{cases}$

Двоїста задача: $F = y_1 + 2y_2 + 5y_3 \to \max$

$$\begin{cases} 2y_1 - 4y_2 + 3y_3 \le 1; \\ -y_1 + 2y_2 \le -1; \quad y_j \ge 0\,(j = 1, 2, 3). \\ y_1 - y_2 + y_3 \le -3. \end{cases}$$

Розв'язання. Розв'язування прямої ЗЛП симплекс-методом було наведено у прикладі 3.1.

Остання симплексна таблиця мала такий вигляд:

i	Базис	$C_{баз}$	Опорний план B	1	–1	–3	0	0	0
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
1	A_3	–3	4	0	0	1	2	1	0
2	A_2	–1	11/3	0	1	0	–1/3	1/3	2/3
3	A_1	1	1/3	1	0	0	–2/3	–1/3	1/3
$m+1$	$Z_j - C_j$		–46/3	0	0	0	–19/3	–11/3	–1/3

Оптимальний план при цьому був таким: $X^* = (x_1 = 1/3, x_2 = 11/3, x_3 = 4, \quad x_4 = 0, x_5 = 0, x_6 = 0)$, $Z_{\min} = -46/3$. Отже, необхідно знайти оптимальний план двоїстої задачі. Згідно з першою теоремою двоїстості $Y^* = \vec{C}_{баз} D^{-1}$ та з урахуванням того, що $\vec{C}_{баз} = (-3;-1;1)$ (див. стовпець $C_{баз}$ наведеної симплексної таблиці):

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1/3 & 1/3 & 2/3 \\ -2/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

(див. на стовпці A_4, A_5, A_6 наведеної симплексної таблиці. У першій симплексній таблиці цими стовпцями визначалася одинична матриця), оптимальний план двоїстої задачі матиме вигляд

$$Y^* = (-3;-1;1)\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1/3 & 1/3 & 2/3 \\ -2/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19/3 \\ -11/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}.$$

При цьому: $F_{\max} = y_1^* + 2y_2^* + 5y_3^* = -\dfrac{19}{3} + 2\cdot\left(-\dfrac{11}{3}\right) + 5\cdot\left(-\dfrac{1}{3}\right) = -\dfrac{46}{3}$,

$$Z_{\min} = F_{\max}.$$

Приклад 5.3 Вихідна задача

$$Z = 3x_1 - x_3 + 12x_4 \to \min$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 1; \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 2. \end{cases} \quad x_j \ge 0;\ j = \overline{1,4}.$$

Двоїста задача: $F = y_1 + 2y_2 \to \max$;

$$\begin{cases} -y_1 + y_2 \le 3; & (1) \\ y_1 - 2y_2 \le 0; & (2) \\ -y_1 \le -1; & (3) \\ 2y_1 + y_2 \le 12. & (4) \end{cases}$$

$$y_j \ge 0;\ j = \overline{1,2}.$$

Розв'язання. Розв'яжемо цю задачу графічно (рис. 5.1).

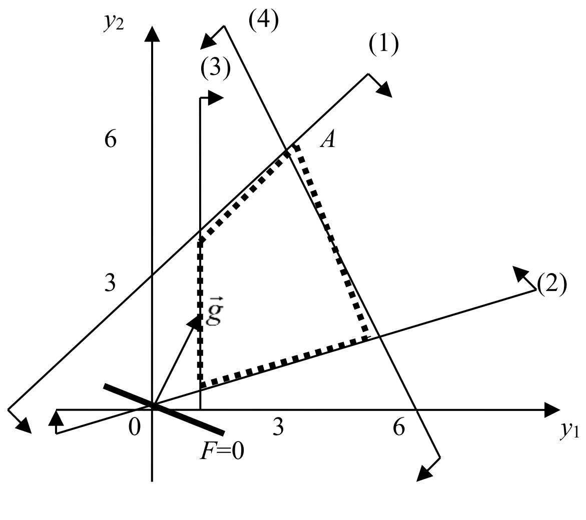

Рисунок 5.1 – Розв'язок двоїстої задачі прикладу 5.3 графічним методом

Цільова функція $F(\vec{Y})$ досягає максимального значення на лінії рівня, що проходить через точку A: $\begin{cases} -y_1 + y_2 = 3, \\ 2y_1 + y_2 = 12' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 3, \\ y_2 = 6. \end{cases}$

Оптимальний вектор двоїстої задачі $\vec{Y}_{\text{opt}} = (3;\,6)$. Позначимо його компоненти $y_1^0 = 3; y_2^0 = 6$ та знайдемо $\max F(\overline{Y}_{\text{opt}}) = y_1^0 + 2y_2^0 = 3 + 12 = 15.$

Маючи розв'язок двоїстої задачі, знайдемо розв'язок вихідної задачі за другою теоремою двоїстості. Для визначення оптимального вектору вихідної задачі $\vec{X}_{opt} = (x_1^0; x_2^0; x_3^0; x_4^0)$ за другою теоремою складемо умови доповнювальної нежорсткості:

1) $x_j^0\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^0 - c_j\right) = 0,\ j = \overline{1,n}$:

$$\begin{cases} x_1^0(-y_1^0 + y_2^0 - 3) = 0, \\ x_2^0(y_1^0 - 2y_2^0) = 0, \\ x_3^0(y_1^0 - 1) = 0, \\ x_4^0(2y_1^0 + y_2^0 - 12) = 0. \end{cases}$$

Підставимо відомі значення $y_1^0 = 3; y_2^0 = 6$ в рівняння першої умови доповнювальної нежорсткості та отримаємо такі значення:

$$\begin{cases} x_1^0 \cdot 0 = 0, \\ x_2^0 \cdot (-3) = 0, \\ x_3^0 \cdot 2 = 0, \\ x_4^0 \cdot 0 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^0 \neq 0, \\ x_2^0 = 0, \\ x_3^0 = 0, \\ x_4^0 \neq 0. \end{cases}$$

2) $y_i^0\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_j^0 - b_i\right) = 0, i = \overline{1,m}$:

$$\begin{cases} y_1^0(-x_1^0 + x_2^0 - x_3^0 + 2x_4^0 - 1) = 0; \\ y_2^0(x_1^0 - 2x_2^0 \qquad + x_4^0 - 2) = 0, \end{cases}$$

оскільки $y_1^0 \neq 0,\ y_2^0 \neq 0$ за отриманим розв'язком двоїстої задачі, то

$$\begin{cases} -x_1^0 + x_2^0 - x_3^0 + 2x_4^0 - 1 = 0; \\ x_1^0 - 2x_2^0 \qquad + x_4^0 - 2 = 0. \end{cases}$$

Врахуємо в другій умові доповнювальної нежорсткості, що оптимальний вектор вихідної задачі має тільки дві ненульові компоненти:

$$\begin{cases} -x_1^0 + 2x_4^0 - 1 = 0; \\ x_1^0 + x_4^0 - 2 = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^0 = 1, \\ x_4^0 = 1. \end{cases}$$

Таким чином, $\vec{X}_{\text{opt}} = (1;\,0;\,0;\,1)$. Значення цільової функції: $\min Z(\vec{X}_{\text{opt}}) = 3x_1^0 - x_3^0 + 12x_4^0 = 15.$ Оскільки $\min Z(\vec{X}_{\text{opt}}) = \max F(\vec{Y}_{\text{opt}}) = 15,$ то виконується перша теорема двоїстості.

Завдання до теми 5

Завдання 5.1 Для поданої ЗЛП скласти двоїсту задачу. Розв'язати одну із задач симплекс-методом і визначити оптимальний план іншої задачі.

Варіант	Задача	Варіант	Задача
0	$Z = -30x_1 + 10x_2 \to \max$; $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 \ge -2; \\ -3x_1 + 2x_2 - x_3 \le 3. \end{cases}$ $x_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1,3}\right)$	5	$Z = 5x_1 + 12x_2 - 4x_3 \to \max$; $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \le 10; \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8. \end{cases}$ $x_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1,3}\right)$
1	$Z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \to \max$; $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \le 50; \\ 3x_1 + x_3 \ge 15; \\ x_1 + 4x_2 \le 40. \end{cases}$ $x_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1,3}\right)$	6	$Z = -x_1 + x_2 \to \min$; $\begin{cases} 2x_1 - x_2 \le 4; \\ x_1 + 2x_2 \ge 2; \\ x_1 + x_2 \le 6. \end{cases}$ $x_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1,2}\right)$
2	$Z = -3x_1 - 4x_2 - 5x_3 \to \min$; $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 \ge -4; \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 6. \end{cases}$ $x_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1,3}\right)$	7	$Z = 5x_1 + 6x_2 \to \max$; $\begin{cases} x_1 + x_2 = 5; \\ x_1 + x_2 \ge 3; \\ 2x_1 + x_2 \le 8. \end{cases}$ $x_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1,2}\right)$
3	$Z = 2x_1 + 3x_2 \to \max$; $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 30; \\ x_1 + x_2 = 6; \\ 2x_1 + x_2 \ge 10. \end{cases}$ $x_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1,2}\right)$	8	$Z = 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 \to \min$; $\begin{cases} -x_2 + 4x_3 \ge 1; \\ -x_1 + 5x_2 \le 1; \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 9. \end{cases}$ $x_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1,3}\right)$
4	$Z = 5x_1 + 2x_2 \to \min$; $\begin{cases} x_1 + 3x_2 \ge 8; \\ 3x_1 + 4x_2 \le 20; \\ 3x_1 + x_2 \ge 6. \end{cases}$ $x_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1,2}\right)$	9	$Z = 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 \to \max$; $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 \le 2; \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \ge 1. \end{cases}$ $x_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1,3}\right)$

Завдання 5.2 Для поданої ЗЛП скласти двоїсту задачу і розв'язати її графічно. Визначити оптимальний план прямої задачі, застосувавши другу теорему двоїстості.

Варіант	Задача	Варіант	Задача
0	$Z = 2x_1 + 4x_2 + 24x_3 + 6x_4 \to \min$; $\begin{cases} x_1 - 3x_3 + x_4 \le -2; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 \ge -2. \end{cases}$ $x_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1,4}\right)$	5	$Z = -x_1 + x_2 + x_3 \to \max$; $\begin{cases} -x_1 + x_2 + 2x_3 \le 3; \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \ge -2. \end{cases}$ $x_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1,3}\right)$
1	$Z = 8x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \to \max$; $\begin{cases} 4x_1 + x_3 + x_4 = 16; \\ 6x_1 - 4x_2 - x_3 + x_4 = 4. \end{cases}$ $x_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1,4}\right)$	6	$Z = 8x_1 + 8x_2 + x_3 \to \min$; $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 \ge 1; \\ x_1 + 4x_2 - x_3 \ge 3. \end{cases}$ $x_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1,3}\right)$
2	$Z = 2x_1 + x_2 + 3x_3 \to \min$; $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = -3; \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = -2. \end{cases}$ $x_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1,3}\right)$	7	$Z = x_1 + 4x_2 + x_3 \to \max$; $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2; \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$ $x_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1,3}\right)$
3	$Z = 9x_1 + 8x_2 + 10x_3 \to \max$; $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 \le 4; \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 \le 6. \end{cases}$ $x_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1,3}\right)$	8	$Z = 14x_1 + 15x_2 - 24x_3 \to \min$; $\begin{cases} x_1 - 5x_2 - 4x_3 \ge 1; \\ -2x_1 - 3x_2 + 6x_3 \le -3. \end{cases}$ $x_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1,3}\right)$
4	$Z = -x_1 + 8x_2 + 20x_3 + 6x_4 \to \min$; $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 4x_3 + 2x_4 \le 2; \\ -x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 \ge 1. \end{cases}$ $x_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1,4}\right)$	9	$Z = x_1 + 8x_2 + 10x_3 \to \max$; $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4; \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = -1. \end{cases}$ $x_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1,3}\right)$

6 ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА

Приклад 6.1 Знайти оптимальний план перевезень вантажу зі складів a_i в магазини b_j. Вартість перевезення однієї одиниці вантажу зі складу a_i в магазин b_j наведено в таблиці:

$a_i \downarrow$	$b_j \rightarrow$	230	420	650	400
300		5	1	2	3
200		6	3	7	1
500		4	5	3	2
700		2	4	6	8

Розв'язок. 1) Знаходимо клітину з найменшою вартістю перевезень і поставимо в неї найбільш можливу кількість перевезень. Оскільки $c_{12} = c_{24} = 1$, але $x_{12} = 300$, а $x_{24} = 200$, отже, найбільше з можливих перевезень $x_{12} = 300$. Тепер постачальник a_i повністю вичерпав свої запаси, й надалі в перший рядок нічого не заносимо (заштриховуємо):

$a_i \downarrow$	$b_j \rightarrow$	230	420	650	400
300		5	1 300	2	3
200		6	3	7	1
500		4	5	3	2
700		2	4	6	8

2) Знаходимо наступну клітину з мінімальною вартістю: $c_{24} = 1$, і заносимо в неї $x_{24} = 200$. Тепер другий постачальник повністю вичерпав свої запаси – заштриховуємо другий рядок:

$a_i \downarrow$	$b_j \rightarrow$	230	420	650	400
300		5	1 300	2	3
200		6	3	7	1 200
500		4	5	3	2
700		2	4	6	8

3) Далі діємо аналогічно: $c_{41} = c_{34} = 2$, $x_{34} = 200$ (тому що споживач b_4 уже одержав 200 у.о. вантажу від постачальника a_2); а $x_{41} = 230$. Тому заповнюємо

$x_{41} = 230$ – перший споживач повністю одержав вантаж, отже, заштриховуємо перший стовпець:

$a_i \downarrow$ $b_j \rightarrow$	230	420	650	400
300	5	1 300	2	3
200	6	3	7	1 200
500	4	5	3	2
700	2 230	4	6	8

4) Серед тих клітин, що залишилися незаповненими й незаштрихованими, обираємо з найменшою вартістю: $c_{34} = 2$. Поставимо в неї перевезення $x_{34} = 200$ Тепер споживач b_4 одержав увесь необхідний вантаж, тому заштриховуємо четвертий стовпець:

$a_i \downarrow$ $b_j \rightarrow$	230	420	650	400
300	5	1 300	2	3
200	6	3	7	1 200
500	4	5	3	2 200
700	2 230	4	6	8

5) Тепер у клітину $c_{33} = 3$ ставимо перевезення $x_{33} = 300$, тоді повністю вичерпані запаси третього постачальника (заштриховуємо третій рядок):

$a_i \downarrow$ $b_j \rightarrow$	230	420	650	400
300	5	1 300	2	3
200	6	3	7	1 200
500	4	5	3 300	2 200
700	2 230	4	6	8

6) Далі у клітину $c_{42} = 4$ ставимо перевезення $x_{42} = 120$, щоб повністю задовольнити вимоги другого споживача, а потім в $c_{43} = 6$ ставимо перевезення $x_{43} = 350$:

$a_i \downarrow$	$b_j \rightarrow$	230	420	650	400
300		5	1 300	2	3
200		6	3	7	1 200
500		4	5	3 300	2 200
700		2 230	4 120	6 350	8

Тепер підсумуємо перевезення за горизонтальними і вертикальними рядками в останній таблиці. Одержимо рівні значення запасів і потреб, тобто система обмежень виконується. Перевезення, які відповідають заповненим клітинам називаються *базисними*, інші, значення яких дорівнюють «0», – *вільними*. Таким чином, отримали вартість перевезень при цьому розподілі перевезень – *початковий опорний план*:

$$Z = 300 \cdot 1 + 300 \cdot 3 + 200 \cdot 2 + 230 \cdot 2 + 120 \cdot 4 + 350 \cdot 6 = 4840 \text{ у.о.}$$

Далі застосуємо *метод потенціалів.* Складемо рівності для базисних (заповнених) клітин:

$$\begin{cases} U_1 + V_1 = 1, & (1,2) \\ U_2 + V_4 = 1, & (2,4) \\ U_3 + V_3 = 3, & (3,3) \\ U_3 + V_4 = 2, & (3,4) \\ U_4 + V_1 = 2, & (4,1) \\ U_4 + V_2 = 4, & (4,2) \\ U_4 + V_3 = 6. & (4,3) \end{cases} \qquad (6.1)$$

Оскільки невідомих величин більше, ніж рівнянь у системі (6.1), припустимо, що $U_4 = 0$. Тоді

$$\begin{aligned} &(4,1) \Rightarrow V_1 = 2, \\ &(4,2) \Rightarrow V_2 = 4, \\ &(4,3) \Rightarrow V_3 = 6, \\ &(1,2) \Rightarrow U_1 = -3, \\ &(3,3) \Rightarrow U_3 = -3, \\ &(3,4) \Rightarrow V_4 = 5, \\ &(2,4) \Rightarrow U_2 = -4. \end{aligned} \qquad (6.2)$$

$a_i \downarrow$	$b_j \rightarrow$	230	420	650	400	U_i
300		5	1 300	2	3	–3
200		6	3	7	1 200	–4
500		4	5	3 300	2 200	–3
700		2 230	4 120	6 350	8	0
V_j		2	4	6	5	

Перевіримо умову оптимальності у вільних клітинах:

$$
\begin{array}{lll}
(1,1) & U_1 + V_1 \le c_{11} & -3+2<5 \\
(1,3) & U_1 + V_3 \le c_{13} & -3+6=3>2 - \textit{не виконується} \\
(1,4) & U_1 + V_4 \le c_{14} & -3+5<3 \\
(2,1) & U_2 + V_1 \le c_{21} \quad \Longrightarrow & -4+2<6 \\
(2,2) & U_2 + V_2 \le c_{22} & -4+4<3 \\
(2,3) & U_2 + V_3 \le c_{23} & -4+6<7 \\
(3,1) & U_3 + V_1 \le c_{31} & -3+2<4 \\
(3,2) & U_3 + V_2 \le c_{32} & -3+4<5 \\
(4,4) & U_4 + V_4 \le c_{44} & 0+5<8
\end{array}
$$

Оскільки в одній клітині умова оптимальності плану не виконується, то потрібне поліпшення плану – *перекидання по циклу.* Починаємо цикл з клітини (1,3), тому що в ній не виконується умова оптимальності плану:

$a_i \downarrow$	$b_j \rightarrow$	230	420	650	400	U_i
300		5	– 1 300	2 +	3	–3
200		6	3	7	1 200	–4
500		4	5	3 300	2 200	–3
700		2 230	4 120 +	6 350 –	8	0
V_j		2	4	6	5	

$a_i \downarrow$	$b_j \rightarrow$	230	420	650	400	U_i
300		5	1	2 300	3	–3
200		6	3	7	1 200	–4
500		4	5	3 300	2 200	–3
700		2 230	4 420	6 50	8	0
V_j		2	4	6	5	

Перевіряємо отриманий план на оптимальність, обчисливши потенціали за базисними клітинами і перевіривши умову оптимальності у вільних клітинах. Останній план виявився *оптимальним* (значення виявились меншими ніж на попередньому початковому плані), отже, вартість перевезень:

$$Z = 300 \cdot 2 + 200 \cdot 1 + 300 \cdot 3 + 200 \cdot 2 + 230 \cdot 2 + 420 \cdot 4 + 50 \cdot 6 = 4560 \text{ у.о.}$$

Таким чином, розв’язком транспортної задачі буде такий план перевезень:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 300 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 200 \\ 0 & 0 & 300 & 200 \\ 230 & 420 & 50 & 0 \end{pmatrix}, \text{ при цьому } Z_{\min} = 4540 \text{ у.о.}$$

Завдання до теми 6

Розв’язати транспортну задачу. Початковий опорний план побудувати методом мінімальної вартості.

Варіант 0					
$a_i \downarrow$	$b_j \rightarrow$	40	25	50	35
55		5	5	1	2
60		1	4	2	1
35		1	2	3	2

Варіант 5					
$a_i \downarrow$	$b_j \rightarrow$	50	35	50	65
70		5	2	1	0
80		4	5	4	1
45		2	1	4	3

Варіант 1					
$a_i \downarrow$	$b_j \rightarrow$	35	45	25	45
40		2	3	0	2
60		3	4	1	4
50		1	3	1	5

Варіант 6					
$a_i \downarrow$	$b_j \rightarrow$	15	25	25	85
70		1	1	1	0
20		2	3	5	1
60		3	2	4	5

Варіант 2					
$a_i \downarrow$	$b_j \rightarrow$	20	65	20	50
40		3	1	2	1
55		1	4	1	3
60		1	2	2	3

Варіант 7					
$a_i \downarrow$	$b_j \rightarrow$	35	25	60	30
50		3	4	4	3
50		4	4	2	1
50		3	2	1	2

Варіант 3					
$a_i \downarrow$	$b_j \rightarrow$	40	20	50	40
70		2	3	4	6
45		3	6	6	6
35		4	5	5	7

Варіант 8					
$a_i \downarrow$	$b_j \rightarrow$	40	20	60	30
55		6	4	4	4
50		1	2	0	2
45		5	3	4	2

Варіант 4					
$a_i \downarrow$	$b_j \rightarrow$	40	40	50	70
8		4	0	3	2
60		1	1	2	0
60		5	1	6	5

Варіант 9					
$a_i \downarrow$	$b_j \rightarrow$	60	25	70	45
90		2	4	1	3
75		3	4	3	5
35		6	6	4	5

7 ЗАДАЧІ ЦІЛОЧИСЛОВОГО ПРОГРАМУВАННЯ

7.1 Метод Гоморі

Алгоритм розв'язання задачі цілочислового програмування (ЗЦП) такий.

Крок 1. Знаходять розв'язок послабленої ЗЛП симплекс-методом. Якщо серед елементів оптимального плану ЗЛП немає дробових чисел, то цей план є оптимальним і для ЗЦП. Оптимальний план ЗЛП при цьому називається умовно-оптимальним для ЗЦП.

Крок 2. Якщо в умовно-оптимальному плані є дробові значення, то серед них вибирають те, що має найбільшу дробову частину. На його основі (на основі елементів відповідного рядка останньої симплексної таблиці, в якому міститься це значення) формується додаткове обмеження Гоморі:

$$\sum_{j=1}^{n} \{a_{ij}\} x_j \geq \{b_i\}, \tag{7.1}$$

де $\{\ \}$ – дробова частина числа: $\{q\} = q - [q]$ (тут $[\ ]$ – ціла частина числа).

Крок 3. Сформоване додаткове обмеження (7.1) після зведення його до канонічного вигляду та введення базисного елемента приєднують до останньої симплексної таблиці, що містить умовно-оптимальний план. Отриману при цьому розширену задачу розв'язують, а далі перевіряють її розв'язок на цілочисельність. Якщо він не цілочисловий, то виконують перехід до кроку 2 цього алгоритму. Так діють доти, доки не буде знайдено цілочислового розв'язку або доведено, що ЗЦП не має допустимих розв'язків у множині цілих чисел.

Приклад 7.1 Знайти $Z = x_1 - x_2 - 3x_3 \to \min$ при обмеженнях

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 \leq 1; \\ -4x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 2; \quad x_j \geq 0\ (j = 1,2,3),\ x_j \in Z. \\ 3x_1 + x_3 \leq 5. \end{cases}$$

Розв'язання. В результаті розв'язання послабленої ЗЛП можна отримати таку останню симплексну таблицю:

i	Базис	$C_{баз}$	Опорний план B	1	–1	–3	0	0	0	θ
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	
1	A_3	–3	4	0	0	1	2	1	0	
2	A_2	–1	11/3	0	1	0	–1/3	1/3	2/3	
3	A_1	1	1/3	1	0	0	–2/3	–1/3	1/3	
$m+1$	$Z_j - C_j$		–46/3	0	0	0	–19/3	–11/3	–1/3	

Нецілими є такі компоненти опорного плану: $x_2 = \frac{11}{3}$, $x_3 = \frac{1}{3}$. Отже,

$$\{b_2\} = b_2 - [b_2] = \frac{11}{3} - \left[\frac{11}{3}\right] = \frac{11}{3} - \frac{9}{3} = \frac{2}{3}.\ \{b_1\} = \frac{1}{3} - \left[\frac{1}{3}\right] = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}.$$

Очевидно, що $\{b_2\} > \{b_1\}$, тому додаткове обмеження (7.1) у цьому випадку буде сформоване для $i = 2$. З урахуванням того, що

$$\left\{-\frac{1}{3}\right\} = -\frac{1}{3} - \left[-\frac{1}{3}\right] = -\frac{1}{3} - (-1) = -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3},$$

це обмеження можна подати у вигляді

$$\frac{2}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_5 + \frac{2}{3}x_6 \geq \frac{2}{3}.$$

Зведемо його до канонічного вигляду з виділенням базисної змінної:

$$\frac{2}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_5 + \frac{2}{3}x_6 - x_7 + x_8 = \frac{2}{3}.$$

Далі включимо його в останню симплексну таблицю та виконаємо один крок її перерахунку. Результати виконання цих дій можна оцінити з таких симплексних таблиць:

i	Базис	$C_{баз}$	Опорний план	1	–1	–3	0	0	0	0	M	θ
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	
1	A_3	–3	4	0	0	1	2	1	0	0	0	
2	A_2	–1	11/3	0	1	0	–1/3	1/3	2/3	0	0	11/2
3	A_1	1	1/3	1	0	0	–2/3	–1/3	1/3	0	0	1
4	A_8	M	2/3	0	0	0	2/3	1/3	2/3	–1	1	1
$m+1$	$Z_j - C_j$		–46/3	0	0	0	–19/3	–11/3	–1/3	0	0	
$m+2$	M		2/3	0	0	0	2/3	1/3	2/3	–1	0	

Як виходить з останньої симплексної таблиці, умова оптимальності опорного плану виконується. При цьому всі $x_j \in Z$. Отже, оптимальний розв'язок початкової задачі такий:

$$X^* = (0;\ 3;\ 4;\ 0;\ 0;\ 1),$$

тобто $x_1 = 0, x_2 = 3, x_3 = 4$. При цьому $Z_{\min} = -15$.

i	Базис	$C_{баз}$	Опорний план	1	–1	–3	0	0	0	0	M
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8
1	A_3	–3	4	0	0	1	2	1	0	0	0
2	A_2	–1	3	0	1	0	–1	0	0	1	–1
3	A_1	1	0	1	0	0	–1	–1/2	0	1/2	–1/2
4	A_6	M	1	0	0	0	1	1/2	1	–3/2	3/2
$m+1$	Z_j-C_j		–15	0	0	0	–6	–7/2	0	–1/2	1/2
$m+2$	M		0	0	0	0	0	0	0	0	–1

7.2 Метод «гілок і меж»

Алгоритм використання методу «гілок і меж» для ЗЦП буде таким.

Крок 1. За допомогою симплекс-методу розв'язують послаблену ЗЦП. Інакше кажучи, на першому кроці знаходять умовно-оптимальний план ЗЦП. Якщо деяка компонента x_j^* опорного плану останньої симплексної таблиці, тобто компонента умовно-оптимального плану ЗЦП, є дробовою, то можна стверджувати, що в інтервалі ($\left[x_j^*\right]; \left[x_j^*\right]+1$) цілих значень взагалі немає.

Крок 2. Для однієї з дробових компонент x_j^* опорного плану останньої симплексної таблиці формують додаткові обмеження:

$$x_j \le \left[x_j^*\right], \quad x_j \ge \left[x_j^*\right]+1. \tag{7.2}$$

Крок 3. Початкову задачу цілочислового програмування розбивають на дві задачі з урахуванням умов цілочисельності змінних та додаткових обмежень (7.2). При цьому задачі матимуть такий вигляд.

Перша задача. Знайти
$$Z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max(\min) \tag{7.3}$$

при обмеженнях
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \{\le, \ge, =\} b_i, \quad (i=\overline{1,m}), \tag{7.4}$$

$$x_j \ge 0 \quad \left(j=\overline{1,n}\right), \tag{7.5}$$

$$x_j \in Z, \tag{7.6}$$

$$x_j \le \left[x_j^*\right]. \tag{7.7}$$

Друга задача. Знайти
$$Z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max(\min) \tag{7.8}$$

при обмеженнях
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \{\le, \ge, =\} b_i, \quad (i=\overline{1,m}), \tag{7.9}$$

$$x_j \ge 0 \quad \left(j=\overline{1,n}\right), \tag{7.10}$$

$$x_j \in Z, \tag{7.11}$$

$$x_j \geq [x_j^*] + 1. \tag{7.12}$$

Крок 4. Далі симплекс-методом розв'язують послаблені задачі (7.3)–(7.7) і (7.8)–(7.12), тобто відповідні ЗЛП без обмежень (7.6) і (7.11). Якщо знайдені оптимальні плани цих задач задовольняють умову цілочисельності, то ці плани визначають розв'язок початкової ЗЦП. Інакше пошук розв'язку задачі триває. Для подальшого розгалуження беруть задачу з більшим значенням цільової функції, якщо йдеться про задачу на max, чи з меншим значенням цільової функції, якщо йдеться про задачу на min. Подалі розгалуження виконують доти, доки не буде встановлено неможливість поліпшення розв'язку. Отриманий план – оптимальний.

Зауваження. Розв'язування цілочислових завдань методом «гілок і меж» можна значно прискорити, приєднуючи обмеження вигляду (7.7) і (7.12) до останньої симплексної таблиці не початкової ЗЦП, а відповідних задач.

Приклад 7.2 Розв'язати ЗЦП прикладу 7.1 методом «гілок і меж».

Розв'язання. У результаті розв'язування послабленої ЗЛП з останньої симплексної таблиці виходить, що нецілими є такі компоненти опорного плану:

$$x_2 = \frac{11}{3},\ x_3 = \frac{1}{3}.$$

Для формування додаткових обмежень вигляду $x_j \leq [x_j^*]$, $x_j \geq [x_j^*] + 1$ виберемо компоненту $x_2 = \dfrac{11}{3}$. При цьому вказані обмеження матимуть вигляд:

$$x_2 \leq [x_2^*] = \left[\frac{11}{3}\right] = 3;\ x_2 \geq [x_2^*] + 1 = \left[\frac{11}{3}\right] + 1 = 4.$$

З урахуванням цього початкова ЗЦП розіб'ється на такі дві задачі.

Перша задача. Знайти $\quad Z = x_1 - x_2 - 3x_3 \to \min$

при обмеженнях
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 \leq 1; \\ -4x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 2; \\ 3x_1 + x_3 \leq 5; \\ x_2 \leq 3. \end{cases} \quad x_j \geq 0\ (j = 1,2,3),\ x_j \in Z.$$

Друга задача. Знайти $\quad Z = x_1 - x_2 - 3x_3 \to \min$

при обмеженнях
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 \le 1; \\ -4x_1 + 2x_2 - x_3 \le 2; \\ 3x_1 + x_3 \le 5; \\ x_2 \ge 4. \end{cases} \quad x_j \ge 0 \; (j = 1,2,3), \; x_j \in Z.$$

Далі кожну із задач зводять до канонічної форми й розв'язують як послаблену задачу симплекс-методом або методом штучного базису.

Канонічна форма першої задачі має вигляд: знайти

$$Z = x_1 - x_2 - 3x_3 \to \min$$

при обмеженнях
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1; \\ -4x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 2; \\ 3x_1 + x_3 + x_6 = 5; \\ x_2 + x_7 = 3. \end{cases} \quad x_j \ge 0 \; \left(j = \overline{1,7}\right), \; x_j \in Z.$$

Канонічна форма другої задачі має вигляд: знайти

$$Z = x_1 - x_2 - 3x_3 \to \min$$

при обмеженнях
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1; \\ -4x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 2; \\ 3x_1 + x_3 + x_6 = 5; \\ x_2 - x_7 + x_8 = 4. \end{cases} \quad x_j \ge 0 \; \left(j = \overline{1,8}\right), \; x_j \in Z.$$

Результат розв'язання першої задачі такий: $Z_{\min} = -15$, $X^* = (0; 3; 4; 0; 0; 1)$.

Результат розв'язання другої задачі такий: $Z_{\min} = -9$, $X^* = (1; 4; 2; 1; 0; 0)$.

У цьому випадку розв'язки обох задач цілочислові. Однак у першій задачі $Z_{\min}$ є меншим, ніж у другій. Тому розв'язок початкової задачі такий: $x_1 = 0, x_2 = 3, x_3 = 4$. При цьому $Z_{\min} = -15$.

Завдання до теми 7

Літак завантажується зброєю двох типів. Значення маси m_i, об'єму V_i і вартості R_i однієї одиниці зброї i-го типу подано в табл. 7.1.

Таблиця 7.1 – Умови задачі

i	m_i	V_i	R_i
1	$N+2$	$16-N$	5
2	$11-N$	$N+1$	N

Максимальна маса й об'єм зброї, які можуть бути завантажені в літак, становлять $m = 100 + 2N$, $V = 124 - N$ відповідно. Необхідно *визначити* кількість одиниць зброї кожного типу, щоб ефективність її застосування була максимальною (ефективність застосування зброї прямо пропорційна її вартості).

Математичну модель задачі розв'язати методом Гоморі та методом «гілок і меж». Отримані результати порівняти.

У табл. 7.1 значення N залежно від варіанта може змінюватися в межах $N = 1 \div 10$. Варіант вибирати за останньою цифрою номера студента в журналі групи (для номерів, що закінчуються на нуль, $N = 10$).

8 ЗАДАЧІ НЕЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

8.1 Графічний метод розв'язування задач нелінійного програмування

Суть графічного методу для задач нелінійного програмування (ЗНП) у такому:

- ✓ будують ОДР, що визначається обмеженнями;
- ✓ будують лінії рівня, які визначаються цільовою функцією задачі;
- ✓ установлюють точки, підозрілі на екстремум. Такими точками є точки, які належать і графікові цільової функції, і ОДР, і які в досить малій околиці інших точок ОДР не містять;
- ✓ перебирають значення цільової функції у знайдених точках і серед них вибирають ті, у яких досягається найбільше й найменше значення. В окремих випадках на основі застосування достатніх умов екстремуму визначаються точки екстремуму.

Приклад 8.1 Знайти мінімальне значення сепарабельної функції $Z = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 6)^2$ при обмеженнях $\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1; \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 12. \end{cases}$ $x_1, x_2 \geq 0.$

Розв'язання. Область допустимих розв'язків (ОДР) являє собою чотирикутник *ABCD* (рис. 8.1).

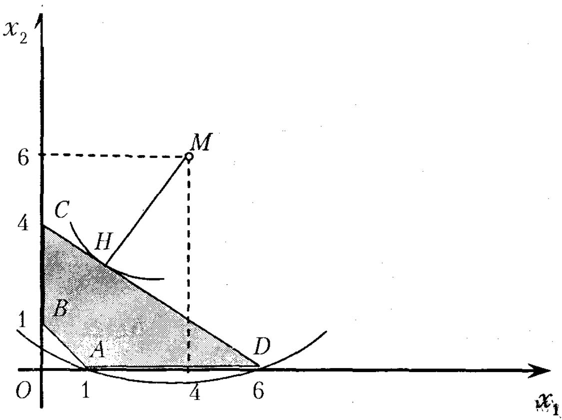

Рисунок 8.1 – ОДР для прикладу 8.1

Якщо прийняти $Z = Q$ $(Q > 0)$, то одержимо, що цільова функція визначає геометричне місце точок, яким є коло $(x_1 - 4)^2 + (x_2 - 6)^2 = Q$. Зі зменшенням (збільшенням) Q (квадрата радіуса) значення функції Z відповідно зменшуються (збільшуються).

Для визначення точок, підозрілих на екстремум, з точки M як з центра будують кола різних радіусів і відзначають точки, які належать і графіку цільової функції, і ОДР та які в досить малому своєму околі інших точок ОДР не містять. Очевидно, що такими точками є H, A та D. Далі встановлюють координати цих точок і значення цільової функції в них. Очевидно, що $A(1,\ 0)$, $D(6,\ 0)$. Значення цільової функції в цих точках дорівнюють: $Z(A) = (1-4)^2 + (0-6)^2 = 45,$

$Z(D)=(6-4)^2+(0-6)^2=40.$

Оскільки $Z(A)>Z(D)$, то точка $A(1, 0)$ є *точкою глобального максимуму*.

Для обчислення координат точки H необхідно розв'язати таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2=12; \\ \dfrac{x_1-4}{2}=\dfrac{x_2-6}{3}. \end{cases}$$

У результаті її розв'язання визначено координати точки H: $H\left(\dfrac{24}{13};\dfrac{36}{13}\right)$. При цьому $Z(D)=\dfrac{196}{13}$. Отже, знайдена точка H є *точкою мінімуму*.

Приклад 8.2 Знайти максимальне та мінімальне значення функції $Z=x_1^2+x_2^2$ при обмеженнях

$$\begin{cases} x_1\cdot x_2\le 4; \\ x_1+x_2\ge 5; \\ x_1\le 7; \\ x_2\le 6. \end{cases} \quad x_1, x_2\ge 0.$$

Розв'язання. У цьому випадку ОДР не є опуклою й складається з двох окремих частин (див. рис. 8.2).

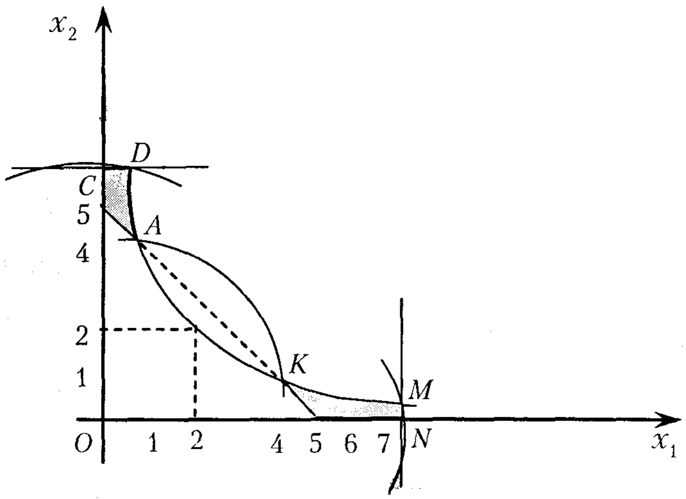

Рисунок 8.2 – ОДР для прикладу 8.2

Мінімальне значення функції Z = 17 досягається в точках A(1, 4) і K(4, 1). Функція Z має два локальних максимуми: у точці $D\left(\dfrac{2}{3};6\right)$ та в точці $M\left(7;\dfrac{4}{7}\right)$. Оскільки $Z(D)=\dfrac{328}{9}$, а $Z(M)=\dfrac{2417}{49}$ та $Z(M)>Z(D)$, то точкою глобального максимуму є точка M.

8.2 Метод множників Лагранжа

Метод множників Лагранжа базується на функції Лагранжа

$$L(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2) + \lambda[b - \varphi(x_1, x_2)],$$

де λ – постійний множник (множник Лагранжа); $f(x_1, x_2)$ – цільова функція, значення якої треба знайти; $\varphi(x_1, x_2) = b$ – додаткове обмеження. Розглянемо алгоритм цього методу на прикладі.

Приклад 8.3 Знайти умовний екстремум функції $f = 6 - 4x_1 - 3x_2$, якщо $x_1^2 + x_2^2 = 1$.

Розв'язання. 1) Складаємо функцію Лагранжа

$$L(x_1, x_2, \lambda) = (6 - 4x_1 - 3x_2) + \lambda(1 - x_1^2 - x_2^2).$$

2) Формуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = -4 - 2\lambda x_1 = 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = -3 - 2\lambda x_2 = 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 1 - x_1^2 - x_2^2 = 0. \end{cases}$$

3) У результаті розв'язання системи отримуємо такі стаціонарні точки:

$$\lambda' = -\frac{5}{2},\ x_1' = \frac{4}{5},\ x_2' = \frac{3}{5};\ \lambda'' = \frac{5}{2},\ x_1'' = -\frac{4}{5},\ x_2'' = -\frac{3}{5}.$$

4) Визначаємо точки, у яких досягається екстремальне значення. Оскільки

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} = -2\lambda,\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} = -2\lambda,\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} = 0,$$

то $$d^2 L = -2\lambda dx_1^2 - 2\lambda dx_2^2 = -2\lambda(dx_1^2 + dx_2^2).$$

Якщо $\lambda' = -\frac{5}{2}$, $x_1' = \frac{4}{5}$, $x_2' = \frac{3}{5}$, то $d^2 L > 0$. А це означає, що в точці $A\left(\frac{4}{5}; \frac{3}{5}\right)$ функція f має умовний мінімум. Якщо $\lambda'' = \frac{5}{2}$, $x_1'' = -\frac{4}{5}$, $x_2'' = -\frac{3}{5}$, то $d^2 L < 0$ й у точці $B\left(-\frac{4}{5};-\frac{3}{5}\right)$ функція f має умовний максимум. При цьому $f_{\min} = 1, f_{\max} = 11$.

Приклад 8.4 Знайти точку умовного екстремуму функції $Z = x_1x_2 + x_2x_3$ при обмеженнях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2; \\ x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$$

Розв'язання. 1) Складаємо функцію Лагранжа

$$L(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2) = x_1x_2 + x_2x_3 + \lambda_1(2 - x_1 - x_2) + \lambda_2(2 - x_2 - x_3).$$

2) Формуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1} = x_2 - \lambda_1 = 0; \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = x_1 + x_3 - \lambda_1 - \lambda_2 = 0; \\ \frac{\partial L}{\partial x_3} = x_2 - \lambda_2 = 0; \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 2 - x_1 - x_2 = 0; \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 2 - x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

3) У результаті розв'язання системи отримуємо такі стаціонарні точки:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1, x_1 = x_2 = x_3 = 1.$$

4) Точка $A(1,1,1)$ є точкою умовного екстремуму. При цьому $Z = 2$.

8.3 Теорема Куна – Таккера

Теорема Куна – Таккера є узагальненням класичного методу множників Лагранжа у сучасній теорії пошуку екстремуму опуклих функцій на опуклих множинах. Розглянемо застосування цієї теореми на прикладі.

Приклад 8.5 Знайти $Z = -x_1^2 - x_2^2 \to \max$ при обмеженнях

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 2; \\ 2x_1 + x_2 \leq 8; \quad x_1, x_2 \geq 0. \\ x_1 + x_2 \leq 6. \end{cases}$$

Розв'язання. Застосування графічного методу розв'язування ЗНП дозволяє отримати точку $H(0{,}8;0{,}4)$, що є підозрілою на екстремум (рис. 8.3). Для того щоб довести, що в цій точці дійсно досягається максимальне значення функції *Z*, необхідно перевірити виконання умов Куна – Таккера в ній. З цією метою сконструюємо функцію Лагранжа та знайдемо всі часткові похідні останньої.

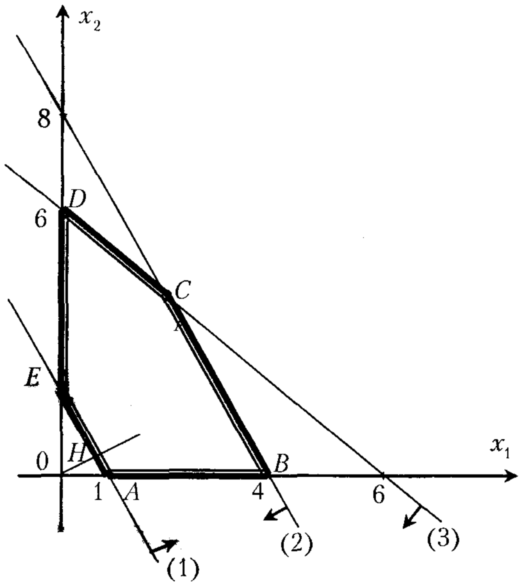

Рисунок 8.3 – ОДР для прикладу 8.5

$$L(X,\lambda) = -x_1^2 - x_2^2 + \lambda_1(2x_1 + x_2 - 2) + \lambda_2(8 - 2x_1 - x_2) + \lambda_3(6 - x_1 - x_2);$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -2x_1 + 2\lambda_1 - 2\lambda_2 - \lambda_3; \quad \frac{\partial L}{\partial x_2} = -2x_2 + \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3;$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 2x_1 + x_2 - 2; \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 8 - 2x_1 - x_2; \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda_3} = 6 - x_1 - x_2.$$

Враховуючи отримані вирази часткових похідних, а також те, що $X^{(0)} = (0{,}8;0{,}4)$, а $\lambda^{(0)}$ є невідомим, неважко зрозуміти, що

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \lambda_1}\right)_{X^{(0)},\lambda^{(0)}} = 2 \cdot 0{,}8 + 0{,}4 - 2 = 0, \quad \left(\frac{\partial L}{\partial \lambda_2}\right)_{X^{(0)},\lambda^{(0)}} = 8 - 2 \cdot 0{,}8 - 0{,}4 = 6 > 0,$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \lambda_3}\right)_{X^{(0)},\lambda^{(0)}} = 6 - 0{,}8 - 0{,}4 = 4{,}8 > 0.$$

Тоді, з урахуванням умов Куна – Таккера, неважко зрозуміти, що $\lambda_2^{(0)} = \lambda_3^{(0)} = 0$, а $\lambda_1^{(0)}$ підлягає відшуканню з урахуванням того, що $\lambda_1^{(0)} \geq 0$. Для знаходження $\lambda_1^{(0)}$ визначимо:

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x_1}\right)_{X^{(0)},\lambda^{(0)}} = -2\cdot 0{,}8 + 2\cdot\lambda_1^{(0)} - 2\cdot 0 - 0 = -1{,}6 + 2\cdot\lambda_1^{(0)}.$$

З останнього виразу з урахуванням локальних умов Куна – Таккера неважко зрозуміти, що $\lambda_1^{(0)} = 0{,}8$.

Перевірка умов при $X^{(0)} = (0{,}8;0{,}4)$ та $\lambda^{(0)} = (0{,}8;0;0)$ вказує на їх повне виконання.

У результаті розв’язання ЗНП одержано такий вектор: $\lambda^{(0)} = (0{,}8;\,0;\,0)$, який забезпечив виконання всіх локальних умов Куна – Таккера при $X^{(0)} = (0{,}8;\,0{,}4)$, тобто в точці $H(0{,}8;\,0{,}4)$. Останнє свідчить про те, що точка $H(0{,}8;\,0{,}4)$ є точкою, у якій досягається максимальне значення функції Z. При цьому $Z_{\max} = -0{,}8^2 - 0{,}4^2 = -0{,}8.$

Завдання до теми 8

Завдання 8.1 Розв’язати ЗНП графічним методом. Перевірити знайдену точку на оптимальність за допомогою локальних умов Куна – Таккера.

Варіант	Задача	Варіант	Задача
0	$Z = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 1)^2 \to \max\ (\min);$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 10; \\ x_1 + x_2 \le 6. \end{cases}$ $x_1, x_2 \ge 0$	5	$Z = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 3)^2 \to \max\ (\min);$ $\begin{cases} x_1 x_2 \ge 5; \\ x_1 + x_2 \le 6. \end{cases}$ $x_1, x_2 \ge 0$
1	$Z = x_1^2 + x_2^2 \to \max(\min);$ $\begin{cases} x_1 x_2 \ge 1; \\ x_1 + 3x_2 \le 6; \\ x_1 \le 3. \end{cases}$ $x_1, x_2 \ge 0$	6	$Z = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \to \max\ (\min)$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8; \\ 2x_1 + x_2 \le 6. \end{cases}$ $x_1, x_2 \ge 0$
2	$Z = x_1 + x_2 \to \max(\min);$ $\begin{cases} x_1 x_2 \ge 1; \\ x_2 \le \sqrt{x_1}; \\ x_1 \le 4. \end{cases}$ $x_1, x_2 \ge 0$	7	$Z = x_1 + x_2 \to \max(\min);$ $\begin{cases} x_1 x_2 \ge 2; \\ x_1^2 + x_2^2 \le 16. \end{cases}$ $x_1, x_2 \ge 0$

Варіант	Задача	Варіант	Задача
3	$Z = 2x_1 + 2x_2 \to \max(\min)$; $\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \le 16; \\ x_1 + 2x_2 \ge 2; \ \ x_1, x_2 \ge 0 \\ 2x_1 + x_2 \ge 2. \end{cases}$	8	$Z = x_1 x_2 \to \max$; $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 2; \\ 2x_1 + x_2 \ge 2; \ \ x_1, x_2 \ge 0 \\ x_1 + x_2 \le 4. \end{cases}$
4	$Z = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 \to \max(\min)$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 7; \\ 2x_1 - x_2 \le 8. \end{cases} \ x_1, x_2 \ge 0$	9	$Z = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 3)^2 \to \max(\min)$; $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 6; \\ 2x_1 - x_2 \le 8. \end{cases} \ x_1, x_2 \ge 0$

Завдання 8.2 Знайти умовний екстремум функції Z за допомогою методу множників Лагранжа.

Варіант	Задача	Варіант	Задача
0	$Z = 2x_1^2 + x_2^2$, $2x_1 + 3x_2 = 5$	5	$Z = 2x_1^2 + 5x_1 + x_2^2 + 3x_2$, $x_1 + 5x_2 = 12$
1	$Z = x_1^2 - x_2^2$, $3x_1 + 4x_2 = 12$	6	$Z = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 3)^2$, $3x_1 + 6x_2 \le 30$
2	$Z = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 3)^2$, $2x_1 - x_2 = 5$	7	$Z = 3x_1^2 + 2x_2^2$, $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 4, \\ x_1 + 2x_2 = 8 \end{cases}$
3	$Z = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2$, $x_1 + 2x_2 + x_3 = 8$	8	$Z = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3$, $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 6, \\ x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$
4	$Z = x_1^2 + 2x_1 + x_2^2 - 5x_2$, $x_1 + 3x_2 = 6$	9	$Z = 2x_1x_2 + x_1x_3 - x_2x_3$, $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 4 \end{cases}$

9 ЗАДАЧІ ДИНАМІЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Динамічне програмування (ДП) – метод оптимізації, пристосований до операцій, у яких процес ухвалення рішення може бути розбитий на етапи (кроки). Такі операції називаються *багатокроковими.* Початок розвитку ДП відноситься до 50-х років XX ст. Воно пов’язане з ім’ям американського математика Р. Беллмана. Розглянемо задачі ДП на прикладах.

Приклад 9.1 Задача про маршрут. Необхідно перевезти вантаж з міста *A* в місто *B*. Дорожня мережа, що сполучає ці міста, наведена на рис. 9.1.

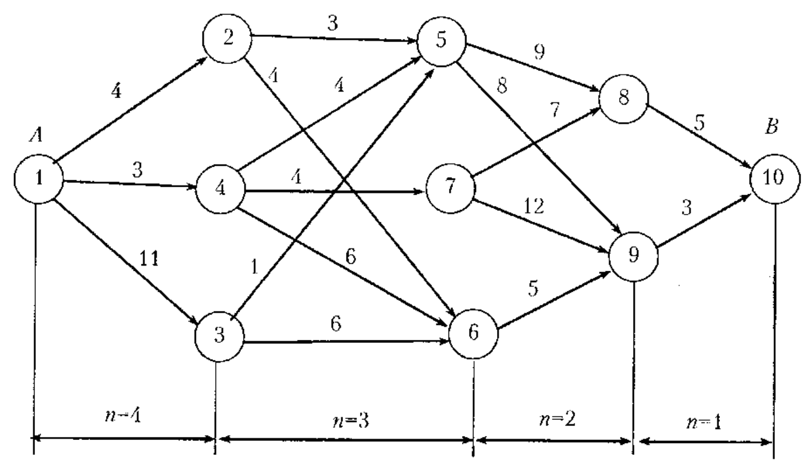

Рисунок 9.1 – Дорожня мережа

Вартість перевезення вантажу з міста $s\left(s=\overline{1,9}\right)$ в місто $j\left(j=\overline{2,10}\right)$ проставлена над відповідними дугами мережі. Необхідно знайти маршрут *A* і *B*, для якого сумарні витрати на перевезення вантажу були б найменшими.

Розв’язання. Розіб’ємо всю множину вершин (міст) на підмножини. У першу підмножину включимо початкову вершину 1. У другу – вершини, у які входять дуги, що виходять із вершини 1. У третю – вершини, в які входять дуги, що виходять із вершин другої підмножини. Таким чином, продовжуючи розбивку далі, одержимо 5 підмножин: {1}, {2, 3, 4}, {5, 6, 7}, {8, 9}, {10}. Очевидно, що довільний маршрут з міста 1 у місто 10 містить рівно чотири дуги, кожна з яких сполучає вершини, які належать відповідним підмножинам. Отже, процес розв’язування задачі (знаходження оптимального маршруту) розбивається на чотири етапи. На першому етапі приймається рішення, через яке місто, що належить другій підмножині, везти вантаж з міста 1. На другому етапі необхідно визначити, через яке місто третьої підмножини везти вантаж з деякого міста, що належить другій підмножині й т. ін.

Перенумеруємо етапи від кінцевої вершини мережі до початкової (рис. 9.1) і введемо позначення: n – номер кроку (n = 1, 2, 3, 4); $f_n(s)$ – мінімальні витрати на перевезення вантажу з міста s до кінцевого міста, якщо до кінцевого міста залишилося n кроків; $j_n(s)$ – номер міста, через яке необхідно їхати з міста s, щоб досягти $f_n(s)$; c_{sj} – вартість перевезення вантажу з міста s у місто j.

Тут всі позначення мають важливе змістовне навантаження: f визначає цільову функцію, s – стан системи (номер міста), індекс n несе динамічну інформацію про те, що з міста s до кінцевого міста залишилося n кроків.

Припустимо, що вантаж доставлений у місто 10. Отже, число кроків, що залишилися, дорівнює *нулю* ($n = 0$) і $f_n(s) = f_0(10) = 0$, оскільки вантаж з міста 10 везти не потрібно. Розглянемо останній крок ($n = 1$) та обчислимо для нього значення функції. Очевидно, що в місто 10 вантаж може бути доставлений або з міста 8, або з міста 9. Обчислимо витрати на перевезення для цих двох станів:

$$f_1(8) = c_{8,10} + f_0(10) = 5 + 0 = 5, \quad s = 8, \quad j_1(8) = 10,$$
$$f_1(9) = c_{9,10} + f_0(10) = 3 + 0 = 3, \quad s = 9, \quad j_1(9) = 10.$$

Для того, щоб здійснити розрахунок для $n = 2$, висунемо гіпотезу про місце знаходження вантажу: 1-ша гіпотеза – вантаж перебуває в місті 5, 2-га гіпотеза – вантаж перебуває в місті 6, 3-тя гіпотеза – вантаж перебуває в місті 7.

З міста 5 у місто 10 вантаж можна провезти або через місто 8, або через місто 9. Тому оптимальний маршрут з міста 5 знайдемо з виразу

$$f_2(5) = \min_j \left[c_{58} + f_1(8); c_{59} + f_1(9)\right] = \min(9 + 8, 8 + 3) = 11.$$

Тут $s = 5$ й $j_2(5) = 9$. Тобто умовно-оптимальний маршрут проходить через місто 9. Аналогічно знаходимо значення функції для $s = 6$ й $s = 7$:

$$f_2(6) = c_{69} + f_1(9) = 8, \; f_2(7) = \min_j \left[c_{78} + f_1(8); c_{79} + f_1(9)\right] = 12.$$

Всі обчислення зручно виконувати в таблицях. Розрахунки першого $[n = 1, c_{sj} + f_0(j)]$ й $[n = 2, c_{sj} + f_1(j)]$ другого етапів розміщені в табл. 9.1 і табл. 9.2 відповідно.

Таблиця 9.1 – Результати розрахунків

s/j	10	$f_1(s)$	$j_1(s)$
8	5 + 0	5	10
9	3 + 0	3	10

Таблиця 9.2 – Результати розрахунків

s/j	8	9	$f_2(s)$	$j_2(s)$
5	9 + 5	8 + 3	11	9
6		5 + 3	8	9
7	7 + 5	12 + 3	12	8

Розрахунки для третього $[n = 3, c_{sj} + f_2(j)]$ та четвертого кроків $[n = 4, c_{sj} + f_3(j)]$ наведені в табл. 9.3.

Таблиця 9.3 – Результати розрахунків

s/j	5	6	7	$f_3(s)$	$j_3(s)$
2	3 + 11	4 + 8		12	6
3	1 + 11	6 + 8		12	5
4	4 + 11	6 + 8	4 + 12	14	6

Таблиця 9.4 – Результати розрахунків

s/j	2	3	4	f_4(s)	$j_4(s)$
1	4 + 12	11 + 12	3 + 14	16	2

Висновок: рухаючись від таблиці 9.4 до таблиці 9.1, визначимо оптимальний маршрут μ = (1–2–6–9–10), витрати на перевезення вантажу по якому становлять $f_4(1) = 4 + 4 + 5 + 3 = 16$.

Приклад 9.2 Задача про рюкзак. Літак завантажується предметами 3-х різних типів. Предмет 1-го типу дає дохід 65 тис. грн і важить 2 т, 2-го типу – 80 тис. грн, 3 т, 3-го типу – 30 тис. грн, 1 т. Вантажопідйомність літака − 5 т. Вибрати предмети, завантаження яких дозволить отримати максимальний дохід без перевищення вантажопідйомності літака.

Розв'язання. Умову задачі запишемо у вигляді:

$$f_1(y_1) = \max_{x_1, x_2, x_3} \{65x_1 + 80x_2 + 30x_3\},$$
$$2x_1 + 3x_2 + x_3 \le y_1,$$
$$x_j \ge 0 - \text{цілочислові},\ y_1 = 5.$$

Рекурентні рівняння Беллмана для процедури оберненого прогону визначаються за формулами:

$$f_n(y_n) = \max_{x_n = 0,1,\ldots,[b/a_n]} \{c_n x_n\},$$
$$f_j(y_j) = \max_{x_j = 0,1,\ldots,[b/a_j]} \{c_j x_j + f_{j+1}(y_j - a_j x_j)\},$$
$$j = n-1,\ldots,2,1,$$

де квадратні дужки у виразі $[b/a_j]$ означають цілу частину числа b/a_j; c_j − дохід, що одержується від перевезення одного предмету типу j; a_j − вага цього предмету; x_j − кількість предметів j-го типу (керування); y_j − частина вантажопідйомності літака, виділена для предметів j, $j+1$, …, n (стан); $f_j(y_j)$ − максимальний дохід від завантаження предметів $j, j+1, \ldots, n$, якщо у літаку виділено y_j тон під ці предмети.

Розв'язання задачі складається з трьох етапів, на кожному з яких розглядаються предмети відповідного типу. У таблицях 9.5–9.7 виконані всі обчислення, необхідні для одержання оптимального розв'язку.

Етап 3 Розглядаються предмети 3-го типу:

$$f_3(y_3) = \max_{x_3} \{30x_3\}, \max x_3 = [5/1] = 5.$$

Таблиця 9.5 – Розрахунки за 3-м етапом

y_3	$30x_3$						Оптимальний розв'язок	
	$x_3 = 0$	$x_3 = 1$	$x_3 = 2$	$x_3 = 3$	$x_3 = 4$	$x_3 = 5$	$f_3(y_3)$	x_3^*
0	0	–	–	–	–	–	0	0
1	0	30	–	–	–	–	**30**	**1**
2	0	30	60	–	–	–	60	2
3	0	30	60	90	–	–	90	3
4	0	30	60	90	120	–	120	4
5	0	30	60	90	120	150	150	5

Етап 2 Розглядаються предмети 2-го і 3-го типів:

$$f_2(y_2) = \max_{x_2} \{80x_2 + f_3(y_2 - 3x_2)\}, \max x_2 = [5/3] = 1.$$

Таблиця 9.6 – Розрахунки за 2-м етапом

y_2	$80x_2 + f_3(y_2 - 3x_2)$		Оптимальний розв'язок	
	$x_2 = 0$	$x_2 = 1$	$f_2(y_2)$	x_2^*
0	0 + 0 = 0	–	0	0
1	0 + 30 = 30	–	**30**	**0**
2	0 + 60 = 60	–	60	0
3	0 + 90 = 90	80 + 0 = 80	90	0
4	0 + 120 = 120	80 + 30 = 110	120	0
5	0 + 150 = 150	80 + 60 = 140	150	0

Етап 1 Розглядаються предмети 1, 2 та 3-го типів:

$$f_1(y_1) = \max_{x_1} \{65x_1 + f_2(y_1 - 2x_1)\}, \max x_1 = [5/2] = 2.$$

Таблиця 3 – Розрахунки за 1-м етапом

y_1	$65x_1 + f_2(y_1 - 2x_1)$			Оптимальний розв’язок	
	$x_1 = 0$	$x_1 = 1$	$x_1 = 2$	$f_1(y_1)$	x_1^*
0	0 + 0 = 0	–	–	0	0
1	0 + 30 = 30	–	–	30	0
2	0 + 60 = 60	65 + 0 = 65	–	65	1
3	0 + 90 = 90	65 + 30 = 95	–	95	1
4	0 + 120 = 120	65 + 60 = 125	130 + 0 = 130	130	2
5	0 + 150 = 150	65 + 90 = 150	130 + 30 = 160	**160**	**2**

При заданому y_1 = 5 оптимальним розв’язком є x^* = (2; 0; 1), а сумарна вартість вантажу дорівнює 160 тис. грн.

Завдання до теми 9

Завдання 9.1 Необхідно перевезти вантаж з міста *A* в місто *B*. Мережу доріг, що сполучають ці міста, наведено на рис. 9.2. Вартість перевезення вантажу з міста $s\left(s=\overline{1,6}\right)$ в місто $j\left(j=\overline{2,7}\right)$ проставлена над відповідними дугами мережі. Необхідно знайти маршрут між *A* і *B*, для якого сумарні витрати на перевезення вантажу були б найменшими (*N* – номер прізвища студента у журналі групи: *N* = 1 ÷ 10).

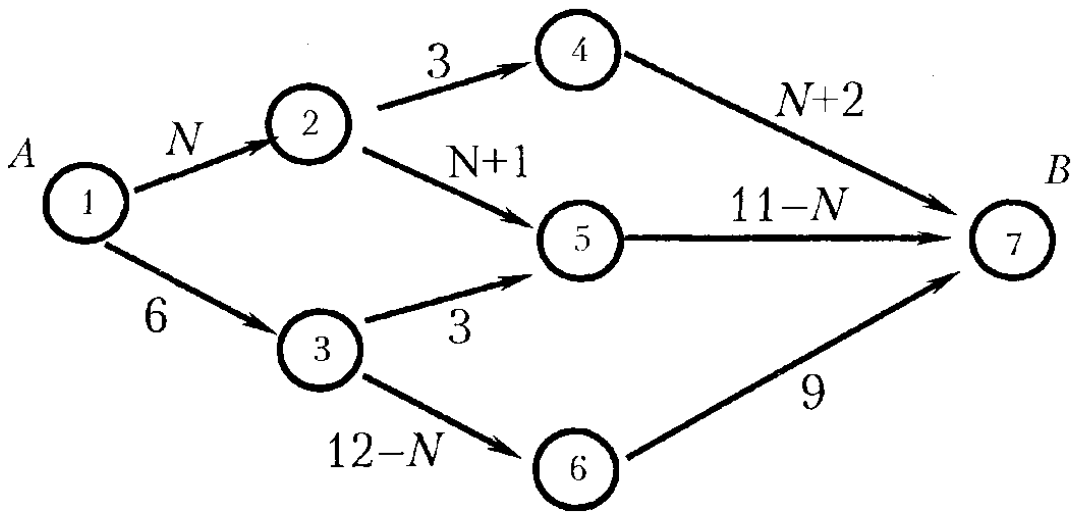

Рисунок 9.2 – Дорожня мережа

Завдання 9.2 Розв’язати задачу про рюкзак.

Варіант	Задача	Варіант	Задача
0	$f_1(y_1)=\max\limits_{x_1,x_2,x_3}\{30x_1+60x_2+80x_3\}$, $x_1+2x_2+3x_3\le y_1$, $x_j\ge 0$ − цілочислові, $y_1=4$.	5	$f_1(y_1)=\max\limits_{x_1,x_2,x_3}\{27x_1+58x_2+75x_3\}$, $x_1+2x_2+3x_3\le y_1$, $x_j\ge 0$ − цілочислові, $y_1=9$.
1	$f_1(y_1)=\max\limits_{x_1,x_2,x_3}\{70x_1+20x_2+40x_3\}$, $4x_1+x_2+2x_3\le y_1$, $x_j\ge 0$ − цілочислові, $y_1=6$.	6	$f_1(y_1)=\max\limits_{x_1,x_2,x_3}\{65x_1+17x_2+34x_3\}$, $4x_1+x_2+2x_3\le y_1$, $x_j\ge 0$ − цілочислові, $y_1=8$.
2	$f_1(y_1)=\max\limits_{x_1,x_2,x_3}\{31x_1+47x_2+14x_3\}$, $2x_1+3x_2+x_3\le y_1$, $x_j\ge 0$ − цілочислові, $y_1=4$.	7	$f_1(y_1)=\max\limits_{x_1,x_2,x_3}\{28x_1+45x_2+12x_3\}$, $2x_1+3x_2+x_3\le y_1$, $x_j\ge 0$ − цілочислові, $y_1=6$.
3	$f_1(y_1)=\max\limits_{x_1,x_2,x_3}\{10x_1+23x_2+28x_3\}$, $x_1+2x_2+3x_3\le y_1$, $x_j\ge 0$ − цілочислові, $y_1=7$.	8	$f_1(y_1)=\max\limits_{x_1,x_2,x_3}\{8x_1+20x_2+25x_3\}$, $3x_1+x_2+2x_3\le y_1$, $x_j\ge 0$ − цілочислові, $y_1=7$.
4	$f_1(y_1)=\max\limits_{x_1,x_2,x_3}\{20x_1+30x_2+40x_3\}$, $2x_1+3x_2+4x_3\le y_1$, $x_j\ge 0$ − цілочислові, $y_1=8$.	9	$f_1(y_1)=\max\limits_{x_1,x_2,x_3}\{15x_1+25x_2+37x_3\}$, $2x_1+3x_2+4x_3\le y_1$, $x_j\ge 0$ − цілочислові, $y_1=9$.

10 ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ІГОР

Приклад 10.1 Визначити нижню та верхню ціни для ігор, заданих платіжними матрицями A_1 та A_2. Встановити, яка з ігор має сідлову точку. Визначити при можливості ціну гри.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 6 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. 1) $\left.\begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 6 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{matrix}\right\} \max\min = \alpha_1 = 3$

$$\begin{matrix} 4 & 5 & 6 & 5 \end{matrix}$$

$$\min_j \max_i = \beta_1 = 4\,.$$

Оскільки $\alpha \neq \beta$, то ця гра не має сідлової точки, тоді ціна гри $3 \leq v \leq 4$.

$$2)\ \left.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{matrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{matrix}\right\} \max\min = \alpha_2 = 2$$

$$\begin{matrix} 3 & 2 & 4 & 5 \end{matrix}$$

$$\min_j \max_i = \beta_2 = 2\,.$$

Оскільки $\alpha = \beta$, то ця гра має сідлову точку, а ціна гри $v = 2$.

Приклад 10.2 Розв'язати матричну гру, задану матрицею

$$\left.\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 3 & 6 & 8 \\ 5 & 9 & 8 & 10 \\ 4 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}\begin{matrix} \to 1 \\ \to 2 \\ \to 5 \\ \to 4 \end{matrix}\right\} \max_i \min_j = \alpha = 5$$

$$\begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 5 & 9 & 8 & 10 \end{matrix}$$

$$\min_j \max_i = \beta = 5\,.$$

Відповідь: ціна гри $v = \alpha = \beta = 5$. Сідлова точка $a_{31} = 5$. Оптимальні стратегії: гравця A – A_3, гравця B – B_1. Рішення $(A_3, B_1, 5)$.

Приклад 10.3 Розв'язати матричну гру, задану матрицею $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Перевіримо матрицю на сідлову точку:

$$\begin{array}{l} \left.\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \to 1 \\ \to -1 \end{matrix}\right\} \max\limits_i \min\limits_j a_{ij} = \alpha = 1 \\ \;\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \;4 \quad 4 \quad 3 \;\} \min\limits_j \max\limits_i = \beta = 3 \end{array}$$

$$\alpha = \max(1,-1) = 1,\ \beta = \min(4,4,3) = 3,\ 1 \le v \le 3.$$

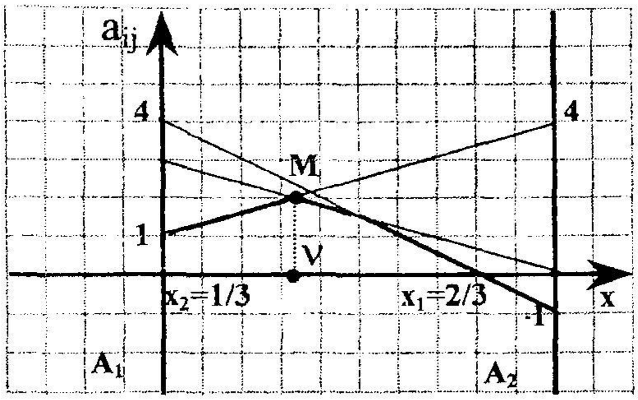

Рисунок 10.1 – Чисті стратегії гравця *A* для прикладу 10.3

Сідлової точки немає. Гра ведеться в змішаних стратегіях. Оскільки матриця має розмір 2х3, пошук оптимальних змішаних стратегій починаємо з гравця *A* – у нього дві чисті стратегії. Будуємо прямі 1 – 4, 4 – (–1), 3 – 0 (рис. 9.1). Жирно виділена лінія, що визначає нижню межу гри. Точка з найбільшою ординатою на цій лінії – *M*. Вона лежить на перетині прямих 1 – 4 і 3 – 0, які відповідають стратегіям B_1 і B_3 гравця *B*. Можна відразу зробити висновок, що у гравця *B* *активними* будуть стратегії B_1 і B_3, тобто ймовірність їх застосування буде відмінною від нуля, а ймовірність застосування стратегії B_2 дорівнює нулю ($y_1 \ne 0; y_2 = 0; y_3 \ne 0$, тобто $y_1 + y_3 = 1$). Цей висновок використовується при розв'язанні задачі для гравця *B*.

Для гравця *A* складемо систему рівнянь, що відображає той факт, що він отримає свій середній виграш при використанні гравцем *B* як першої, так і третьої стратегій:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 = v;\ B_1 \\ 3x_1 = v;\ B_3 \\ x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$$

Розв'язання: $\begin{cases} x_1 + 4x_2 = 3x_1 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}; \begin{cases} 2x_2 = x_1 \\ 3x_2 = 1 \end{cases}; x_2 = 1/3; x_1 = 2/3; v = 2.$

Для гравця *B* система рівнянь (з урахуванням $y_2 = 0$):

$$\begin{cases} y_1 + 3y_3 = v;\ A_1 \\ 4y_1 = v;\ A_2 \\ y_1 + y_3 = 1, \end{cases} \text{ або } \begin{cases} y_1 + 3y_3 = 2; \\ 4y_1 = 2; \\ y_1 + y_3 = 1; \end{cases} \quad y_1 = 1/2; y_3 = 1/2; v = 2.$$

На рис. 10.1 можна перевірити цей результат за клітинами.

Відповідь: для гравця *A*: $\vec{X} = (2/3; 1/3)$, для гравця *B*: $\vec{Y} = (1/2; 0; 1/2)$, ціна гри $v = 2$.

Приклад 10.4 Розв'язати матричну гру, задану матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 4 \\ 0 & 5 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання:

$$\left.\begin{matrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 4 \\ 0 & 5 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \to 3 \\ \to 2 \\ \to 0 \\ \to -1 \end{matrix} \end{matrix}\right\} \max_i \min_j a_{ij} = \alpha = 3$$

$$\begin{matrix} \downarrow & \downarrow \\ 4 & 6 \end{matrix} \Big\} \min_j \max_i a_{ij} = \beta = 4.$$

Знайдемо $\alpha = \max(3;2;0;-1) = 3$, $\beta = \min(4;6) = 4$, $3 \le v \le 4$.

Сідлової точки немає. Оскільки матриця має розмір 4х2, розв'язок шукаємо спочатку для гравця *B*. Зробимо рисунок, щоб визначити *верхню межу гри* (рис. 9.2), оскільки гравець *B* вибирає з максимальних програшів мінімальний (мінімаксна стратегія).

Жирною лінією виділена *верхня межа* гри *M* – точка з min ординатою, яка відповідає ціні гри. Активними стратегіями гравця *A* будуть перша та четверта. Це означає, що ймовірність вибору другої та третьої стратегій дорівнюють нулю, тобто $x_2 = 0$; $x_3 = 0$.

Розв'язок для гравця *B* отримаємо з такої системи:

$$\begin{cases} 4y_1 + 3y_2 = v;\ A_1 \\ -y_1 + 6y_2 = v;\ A_4 \\ y_1 + y_2 = 1. \end{cases} \Rightarrow y_1 = 3/8; y_2 = 5/8; v = 27/8.$$

Вірогідність вибору першої стратегії гравцем *B*: $y_1 = 3/8$; другої – $y_2 = 5/8$, ціни гри $v = 27/8 = 3\,3/8$. Тепер знайдемо x_1, x_4 з будь-яких двох рівнянь з трьох можливих:

$$\begin{cases} 4x_1 - x_4 = 27/8 \\ 3x_1 + 6x_4 = 27/8 \\ x_1 + x_4 = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 7/8; x_4 = 1/8. \\ \vec{X} = \left(7/8; 0; 0; 1/8\right). \end{array}$$

Відповідь: для гравця *A*: $\vec{X} = \left(7/8; 0; 0; 1/8\right)$, для гравця *B*: $\vec{Y} = \left(3/8; 5/8\right)$, ціна гри $v = 3\,3/8$.

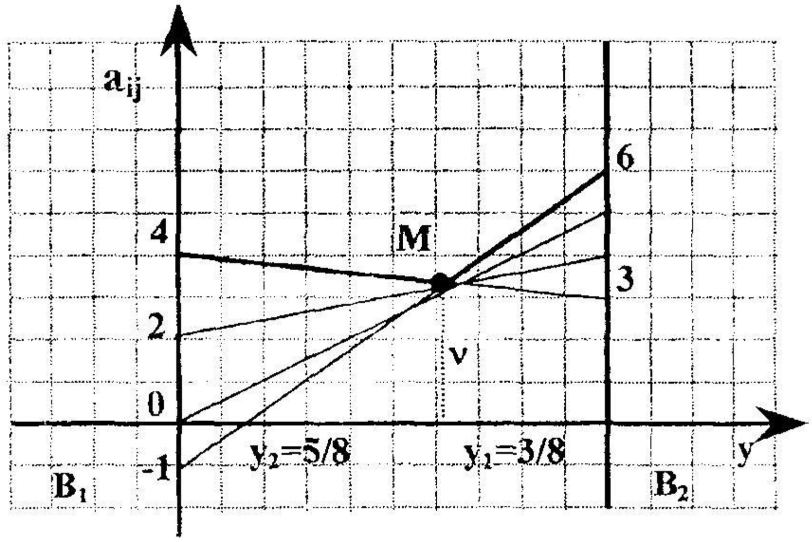

Рисунок 10.2 – Чисті стратегії гравця *A* для прикладу 9.4

Завдання до теми 10

Розв'язати дві матричні гри.

Варіант	**Задача**	Варіант	**Задача**
0	$A=\begin{pmatrix}2 & 8\\ 4 & 3\\ 0 & 6\\ 3 & 4\\ 5 & 2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}7 & 0 & 2\\ 2 & -1 & -6\end{pmatrix}$	5	$A=\begin{pmatrix}2 & 4 & 0 & 3 & 5\\ 6 & 3 & 8 & 4 & 2\end{pmatrix},$ $B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 5 & 7\\ 9 & 11\end{pmatrix}$
1	$A=\begin{pmatrix}8 & 5 & 3 & 6 & 7\\ 4 & 7 & 9 & 5 & 8\end{pmatrix},$ $B=\begin{pmatrix}-1 & -3\\ -5 & -7\\ -9 & -11\end{pmatrix}$	6	$A=\begin{pmatrix}6 & 4\\ 5 & 3\\ 3 & 6\\ 1 & 8\\ 2 & 5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}6 & -10 & 3\\ 4 & 4 & 4\end{pmatrix}$
2	$A=\begin{pmatrix}5 & 4 & 6 & 4 & 6\\ 4 & 1 & 8 & 4 & 2\end{pmatrix},$ $B=\begin{pmatrix}4 & 6\\ 7 & 1\\ 1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$	7	$A=\begin{pmatrix}7 & 0 & 2\\ 2 & -1 & -6\end{pmatrix},$ $B=\begin{pmatrix}3 & 12\\ 8 & 7\\ 6 & -1\\ 5 & 0\end{pmatrix}$
3	$A=\begin{pmatrix}-2 & -6 & -5 & -1\\ -3 & -7 & -6 & -2\end{pmatrix},$ $B=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 5\\ 3 & -7\\ 6 & 0\end{pmatrix}$	8	$A=\begin{pmatrix}4 & 0 & 2\\ 6 & 7 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}4 & 5\\ 7 & 6\\ 1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}$
4	$A=\begin{pmatrix}2 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 3 & 2 & 2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 5\\ 4 & 6\\ 7 & 8\\ 3 & 9\end{pmatrix}$	9	$A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 5 & -7 & 9\\ -2 & 4 & 6 & 8 & -10\end{pmatrix},$ $B=\begin{pmatrix}7 & -1\\ 2 & 0\\ 4 & 2\\ 8 & 3\end{pmatrix}$

11 ІГРИ З ПРИРОДОЮ

Особливе місце в теорії ігор займають ігри проти природи, які ще називаються **прийняттям рішень в умовах невизначеності**. Природа хоча й робить випадкові ходи, але не є зловмисним гравцем, тому що вона не прагне зробити якнайгірше своєму супротивникові й не має розуму. Тому й прийняття рішення в такій ситуації має свої особливості. Розглянемо приклад.

Приклад 11.1 Припустимо, що планується військова операція: нанесення авіацією гравця Г1 удару по об'єкту гравця Г2 (природи). Гравець Г1 може вибрати 4 стратегії нанесення удару з 4-х сторін: С11 – з півночі, С12 – зі сходу, С13 – з півдня, С14 – із заходу. Ефективність дій авіації Г1 залежить від стратегії С2 – стану «природи» та ймовірностей $P2$ використання цих стратегій: С21 – ясно, ймовірність $P2_1$; С22 – похмуро, ймовірність Р22; С23 – туман, дощ.

Кожна пара стратегій Г1 та Г2 дає результат, ефективність якого показана у табл. 11.1.

Таблиця 11.1 – Вхідні дані до задачі 11.1

Спосіб дії Г1	Стратегії природи		
	С21	С22	С23
С11	0,32	0,4	0,25
С12	0,6	0,7	0,4
С13	0,8	0,65	0,2
С14	0,65	0,25	0,3

Треба забезпечити найбільш можливий виграш у найгірших умовах при різних ймовірностях $P2_j$ використання погодою Г2 стратегій С2j.

Розв'язання

1 Припустимо, що ці ймовірності відомі: $P2_1 = 0{,}6$; $P2_2 = 0{,}3$; $P2_3 =$ $= 0{,}1$. Тоді оцінка стратегій гравця Г1 для кожного рядка визначається за формулою:

2

$$G_i = \sum_{j=1}^{n} P2_j a_{ij}. \qquad (11.1)$$

Тоді

$G_1 = 0{,}6 \cdot 0{,}32 + 0{,}3 \cdot 0{,}4 + 0{,}1 \cdot 0{,}25 = 0{,}343.$

$G_2 = 0{,}6 \cdot 0{,}6 + 0{,}3 \cdot 0{,}7 + 0{,}1 \cdot 0{,}4 = 0{,}61.$

$G_3 = 0{,}6 \cdot 0{,}8 + 0{,}3 \cdot 0{,}25 + 0{,}1 \cdot 0{,}2 = 0{,}695$ (max).

$G_4 = 0{,}6 \cdot 0{,}65 + 0{,}3 \cdot 0{,}25 + 0{,}1 \cdot 0{,}3 = 0{,}495.$

Відповідь: обирається стратегія С13: гравець Г1 повинен виконати напад з півдня.

2 Критерій Лапласа (стратегії є ймовірними) $G_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$.

$$G_1 = (0{,}32 + 0{,}4 + 0{,}25)/3 = 0{,}323.$$
$$G_2 = (0{,}6 + 0{,}7 + 0{,}4)/3 = 0{,}567.$$
$$G_3 = (0{,}8 + 0{,}65 + 0{,}2)/3 = 0{,}55.$$
$$G_4 = (0{,}65 + 0{,}25 + 0{,}3)/3 = 0{,}4.$$

Відповідь: обирається стратегія С12: гравець Г1 повинен виконати напад зі сходу.

3 Критерій Вальда Вибираємо з табл. 11.1 рядок з мінімальними значеннями елементів, з яких обираємо максимальне значення.

min рядків:
0,25
0,4 – max
0,2
0,2

Відповідь: гравець Г1 обирає стратегію С12 – напад зі сходу.

4 Критерій Севіджа Будуємо матрицю ризику зі значеннями елементів матриці:

$$b_{ij} = a_{ij}^{\max} - a_{ij}, \tag{11.2}$$

де $a_{ij}^{\max}$ – максимальне значення елементів a_{ij} для j-го стовпця; a_{ij} – поточне значення коефіцієнтів a_{ij} для поточного стовпця.

Матриця ризику наведена в табл. 11.2.

Таблиця 11.2 – Матриця ризику

Спосіб дії Г1	Стратегії природи			max рядків
	С21	С22	С23	
С11	0,48	0,3	0,15	0,48
С12	0,2	0	0	0,2 (min)
С13	0	0,05	0,2	0,2 (min)
С14	0,15	0,45	0,1	0,45

Відповідь: вибираємо дві рівноцінні стратегії С12 та С13.

5 Критерій Гурвіца Розрахунок критерію виконується за формулою:

$$G_i = \chi \min a_{ij} + (1 - \chi)\max a_{ij}, \tag{11.3}$$

де $\chi = 0{,}5$.

Результати розрахунків за формулою (11.3) наведено в табл. 11.4.

Таблиця 11.4

Спосіб дії Г1	Мінімальне значення рядків	Максимальне значення рядків	χ min рядків + (1 – χ) max рядків
С11	0,25	0,4	0,5·(0,25 + 0,4) = 0,325
С12	0,4	0,7	0,5·(0,4 + 0,7) = 0,55 (max)
С13	0,2	0,8	0,5·(0,2 + 0,8) = 0,5
С14	0,25	0,65	0,5·(0,25 + 0,65) = 0,45

Відповідь: вибираємо стратегію С12.

Завдання до теми 11

За умовами прикладу 11.1 визначити найбільш можливий виграш у найгірших умовах при різних ймовірностях $P2_j$ використання погодою Г2 стратегій С2*j*. Кожна пара стратегій Г1 та Г2 дає результат, ефективність якого показана у табл. 11.5.

Таблиця 11.5

Спосіб дії Г1	Стратегії природи (Г2)		
	С21	С22	С23
С11	0,32	0,05*N*	0,25
С12	0,022*N*	0,03*N*	0,02*N*
С13	0,03*N*	0,025*N*	0,2
С14	0,25*N*	0,25	0,3

Випадок 1. Імовірності дорівнюють $P2_1 = 0{,}06N$; $P2_2 = 0{,}03N$; $P2_3 = 0{,}01N$.
Випадок 2. Всі стратегії є рівноймовірними.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Розкрийте предмет та основні поняття математичного моделювання в економіці та менеджменті.
2. Розкажіть про історію розвитку економіко-математичних методів.
3. Охарактеризуйте сучасний стан економіко-математичного моделювання.
4. Наведіть класифікацію економіко-математичних моделей.
5. Які існують етапи економіко-математичного моделювання?
6. Охарактеризуйте загальну, стандартну та канонічну задачі лінійного програмування.
7. Поясніть особливості матричної та векторної форм запису канонічної задачі.
8. Які правила зведення будь-якої лінійної задачі до стандартного вигляду?
9. Наведіть визначення основних понять геометрії опуклих множин.
10. Надайте формулювання та математичну модель задачі про використання ресурсів.
11. Надайте формулювання та математичну модель задачі складання раціону.
12. Наведіть формулювання та математичну модель задачі про використання потужностей.
13. Сформулюйте та наведіть математичну модель задачі про розкрій матеріалів.
14. Сформулюйте і наведіть математичну модель транспортної задачі.
15. Поясніть геометричний зміст нерівностей, умови невід'ємності змінних і цільової функції.
16. Опишіть алгоритм графічного методу розв'язування задачі лінійного програмування, його переваги та недоліки.
17. Як можна виконати зведення загальної задачі лінійного програмування до канонічної форми?
18. Розкрийте зміст поняття симплекс-методу та наведіть його алгоритм.
19. Яка ознака оптимальності опорного плану?
20. Охарактеризуйте метод штучного базису.
21. Розкрийте поняття і вид двоїстої задачі лінійного програмування.
22. Наведіть правила побудови двоїстих задач.
23. Сформулюйте першу теорему двоїстості.
24. Сформулюйте другу та третю теореми двоїстості.
25. Наведіть економічну інтерпретацію двоїстої задачі.
26. Охарактеризуйте постановку задачі цілочислового програмування.
27. У чому полягає сутність методів відтинання?
28. Наведіть алгоритм методу Гоморі.
29. Наведіть алгоритм методу «гілок і меж».
30. Опишіть постановку загальної задачі математичного програмування.
31. Які особливості задач нелінійного програмування і методів їх

розв'язання?

32. Наведіть алгоритм графічного методу розв'язання задач нелінійного програмування.
33. Які необхідні та достатні умови екстремуму функції Лагранжа?
34. Поясніть алгоритм методу множників Лагранжа.
35. Розкрийте зміст понять поняття опуклих, вгнутих, строго опуклих і строго вгнутих функцій.
36. Назвіть алгебраїчні та аналітичні властивості опуклих функцій.
37. Сформулюйте теорему Куна – Таккера.
38. Опишіть постановку задачі динамічного програмування.
39. Які особливості моделі динамічного програмування?
40. Розкрийте принцип оптимальності Беллмана.
41. Наведіть рівняння Беллмана.
42. Розкрийте зміст понять теорії ігор та її основної задачі, гри, гравців, виграшу та правил.
43. Поясніть зміст понять ходу гравця, його стратегії, рішення гри, умови стійкості оптимальної стратегії, мети теорії ігор.
44. Що таке платіжна матриця, нижня та верхня ціна гри?
45. У чому особливість прийняття рішень в умовах невизначеності?
46. Поясніть суть критерію Лапласа.
47. Охарактеризуйте критерій Вальда.
48. Що таке критерій Гурвіца?
49. У чому суть критерію Севіджа?
50. Наведіть загальні рекомендації щодо вибору критерію для прийняття рішення в умовах невизначеності.

СПИСОК ДЖЕРЕЛ ІНФОРМАЦІЇ

Основні

1. Оптимізаційні методи та моделі в підприємницькій діяльності: Навчальний посібник. / Волонтир Л.О, Потапова Н.А., Ушкаленко І.М., І.А.Чіков., Вінницький національний аграрний університет. – Вінниця: ВНАУ, 2020. – 404 с.

2. Економіко-математичні методи та моделі: оптимізація : навч. посібник [Електронний ресурс]/ Вітлінський В. В., Терещенко Т. О., Савіна С. С. – К. : КНЕУ, 2016. – 303 с.

3. Оптимізаційні методи і моделі: навч. посібник / Н.В. Бурєннікова, О.В. Зелінська, І.М. Ушкаленко, Ю.Ю. Бурєнніков – Вінниця: ВНТУ, 2019. – 121 с.

4. Hillier F.S., Lieberman G.J., Introduction to operations research, 11-th edition. NY.: McGraw-Hill Higher Education, 2021.

5. «Робота з надбудовою Solver MS Excel». Методичні вказівки до самостійної роботи студентів з дисципліни «Оптимізаційні методи та моделі» для студентів денної та заочної форми навчання спеціальності 076 «Підприємництво, торгівля та біржова діяльність» / уклад.: О. В. Замула, О. О. Замула. – Харків: НТУ «ХПІ», 2019. – 30 с. Режим доступу: http://repository.kpi.kharkov.ua/handle/KhPI-Press/42086

6. Методичні вказівки до практичних занять за темою «Транспортна задача» з дисципліни «Оптимізаційні методи та моделі» для студентів усіх форм навчання спеціальності 076 «Підприємництво, торгівля та біржова діяльність»/ О. В. Замула, О. О. Замула – Харків: НТУ «ХПІ», 2019. – 33 с. Режим доступу: http://repository.kpi.kharkov.ua/handle/KhPIPress/42087

7. Козьменко, О. В. Економіко-математичні методи та моделі (економетрика) [Текст] : навч. посібник / О. В. Козьменко, О. В. Кузьменко. Суми : Університетська книга, 2014.

8. Оптимізаційні методи і моделі : підручник/ Л.В. Забуранна Н.В. Попрозман Н.А. Клименко О.І. Попрозман С.В. Забуранний. К. , 2014. [електронний підручник].

Додаткові

9. Математичні методи дослідження операцій : підручник / Є. А. Лавров, Л. П. Перхун, В. В. Шендрик та ін. Суми : Сумський державний університет, 2017. 212 с. [електронний підручник]

10. Методи та моделі: навч. посіб. Одеса: ОНЕУ, 2018. 404 с. [електронний підручник]

3. Економіко-математичні методи та моделі: оптимізація : навч. посіб. / Вітлінський В. В., Терещенко Т. О., Савіна С. С. К. : КНЕУ, 2016. 303 с. [електронний підручник]

11. Економіко-математичні методи і моделі в галузі управління персоналом: навчальний посібник: /Л.В. Мазник, Т.В. Березянко, О.В. Безпалько, А.Д. Бергер, Ю.М. Гринюк, О.І. Драган, О.М. Олійниченко. [Заг. редакцією Л.В. Мазник]. К. : Кафедра, 2019. 290 с. [електронний підручник]

12. Білоцерківський О. Б. Математичне моделювання в економіці та менеджменті : текст лекцій / О. Б. Білоцерківський ; Нац. техн. ун-т «Харків. політехн. ін-т». – Харків : НТУ "ХПІ", 2018. – 90 с. Режим доступу: http://repository.kpi.kharkov.ua/handle/KhPI-Press/37095

13. Методичні вказівки до самостійної роботи студентів за темою «Основи роботи в Excel» дисципліни «Оптимізаційні методи та моделі», для студентів денної та заочної форми навчання спеціальності 076 «Підприємництво, торгівля та біржова діяльність» / О. В. Замула, О. О. Замула,– Харків: НТУ «ХПІ», 2019. – 119 с. Режим доступу: http://repository.kpi.kharkov.ua/handle/KhPI-Press/42085

14. Ільман В. М., Михайлова Т. Ф., Самойлов С. П., Панік Л. О. Оптимізаційні методи і моделі : навч. посіб.. Дніпро : Дріант, 2020. 240 с.

15. Методичні вказівки до виконання курсового проєкту з дисципліни "Економіко-математичні методи та моделі" [Електронний ресурс] : для студентів спец. 076 "Підприємництво та торгівля" першого (бакалаврського) рівня усіх форм навчання / уклад.: І. І. Соснов, Є. М. Шапран, О. А. Сергієнко, С. О. Степуріна. – Електрон. текстові дані. – Харків : НТУ "ХПІ", 2024. – 50 с. – URL: https://repository.kpi.kharkov.ua/handle/KhPI-Press/75207

Навчальне видання

Методичні вказівки до практичних занять
з освітнього компонента «Економіко-математичні методи та моделі»
для студентів спеціальності
D7 «Торгівля»
першого (бакалаврського) рівня усіх форм навчання

Укладачі
БІЛОЦЕРКІВСЬКИЙ Олександр Борисович
СОСНОВ Ігор Ігорович

Відповідальна за випуск проф. Мащенко М. А.
Роботу до видання рекомендувала проф. Райко Д. В.

В авторській редакції

План 2025 р., поз. _766_
Підп. до друку _30.10.25_ р.
Гарнітура Times New Roman. Обсяг _2_

Видавничий центр НТУ «ХПІ».
вул. Кирпичова, 2, м. Харків, 61002
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи ДК № 5478 від 21.08.2017 р.