

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ХАРЬКОВСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ»

О. В. Потетенко, В. Э. Дранковский, Е. С. Крупа

ОБЩИЕ ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЛОПАСТНЫХ ГИДРОМАШИН

Учебно-методическое пособие по курсу «Механика жидкости и газа» и «Гидродинамическая теория лопастных гидромашин» для иностранных студентов и аспирантов специальности «Гидроэнергетика»

Утверждено
редакционно-издательским
советом университета,
протокол № 1 от 04.06.2014 г.

Харьков
НТУ «ХПИ»
2015

УДК 621.22 (075)

ББК 31.56 я7

П 64

Рецензенты:

А. В. Бондаренко, канд. техн. наук, доцент кафедры «Гидравлические машины», НТУ «ХПИ»;

П. Н. Сухоробрий, канд. техн. наук, ст. научн. сотр. ИПМаш
им. А. Н. Подгорного НАН Украины.

Авторы: О.В. Потетенко, канд. техн. наук, проф; В.Э. Дранковский,
канд. техн. наук, доц., Е.С. Крупа, канд. техн. наук, доц.

Викладаються короткі теоретичні відомості з гідромеханіки та теорії лопатевих гідромашин, що пов'язані з формуванням загальних уявлень про течію рідини в каналах проточної частини гідромашини, а також наведено аналіз балансу енергії в гідромашині. Для іноземних студентів та аспірантів спеціальності «Гідроенергетика».

Потетенко О. В.

П 64 Общие основы теории лопастных гидромашин: учеб.-метод.
пособ. / О. В. Потетенко, В. Э. Дранковский, Е. С. Крупа – Х. :
НТУ «ХПИ», 2014. – 56 с. – На рус. яз.

ISBN

Излагаются краткие теоретические сведения из гидромеханики и теории лопастных гидромашин, связанные с формированием общих представлений о течении жидкости в каналах проточной части гидромашини, а также приведен анализ баланса энергии в гидромашине. Для иностранных студентов и аспирантов специальности «Гидроэнергетика».

Ил. 1. Библиогр. 16 наим.

УДК 621.22 (075)

ББК 31.56 я7

© О. В. Потетенко,

ISBN

В. Э. Дранковский, Е. С. Крупа, 2014.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	5
1. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МАССЫ И УРАВНЕНИЕ НЕРАЗРЫВНОСТИ	7
Вопросы для самоконтроля.....	9
2. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ (ИМПУЛЬСА).....	10
2.1. Уравнение движения (динамики идеальной и вязкой жидкости).....	10
2.2. Уравнение Бернулли.....	15
2.3. Уравнение Гельмгольца.....	16
2.4. Интегральная форма представления уравнения движения и уравнения Бернулли.....	17
2.5. Интегральная форма представления закона изменения количества движения в неподвижной системе координат.....	18
2.6. Сила, действующая со стороны потока на стенки неподвижного канала.....	19
2.7. Сила воздействия жидкости на стенки вращающе- гося канала.....	21
Вопросы для самоконтроля	23
3. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МОМЕНТА КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ.....	24
3.1. Интегральная форма закона сохранения момента количества движения.....	24
3.2. Момент силы воздействия жидкости на стенки неподвижного канала.....	26
3.3. Момент силы, действующей со стороны жидкости на стенки канала, вращающегося относительно оси OZ.....	27
Вопросы для самоконтроля.....	29
4. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ.....	30
4.1. Интегральная форма закона сохранения энергии.....	30
4.2. Дифференциальная форма закона сохранения	

энергии.....	30
4.3. Уравнение переноса энергии.....	31
4.4. Уравнение переноса энергии при движении идеальной жидкости.....	33
4.5. Уравнение переноса энергии для случая, если поле массовых сил \vec{f} порождается не зависящим от времени потенциалом (т. е. консервативно).....	34
4.6. Уравнение переноса энергии для случая идеальной жидкости и поля массовых сил \vec{f} , порождаемого не зависящим от времени потенциалом.....	34
4.7. Уравнение переноса энергии через фиксированную поверхность S для случая, если поле массовых сил \vec{f} порождается не зависящим от времени потенциалом.....	35
4.8. Уравнение переноса энергии через фиксированную поверхность S для случая, если поле массовых сил \vec{f} порождается не зависящим от времени потенциалом и для невязкой несжимаемой жидкости.....	36
4.9. Энергия, передаваемая жидкостью стенкам канала....	37
Вопросы для самоконтроля	43
5. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПОТОКА ЖИДКОСТИ С РАБОЧИМ КОЛЕСОМ	43
5.1. Момент на рабочем колесе относительно оси вращения.....	43
5.2. Гидравлическая мощность на рабочем колесе.....	49
5.3. Теоретический напор. Коэффициент полезного действия.....	50
Вопросы для самоконтроля.....	53
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	54

ВВЕДЕНИЕ

В данном пособии излагаются общие основы теории лопастных гидромашин на базе применения законов сохранения механики, что позволяет получить общие уравнения, которым подчиняется движение в рамках моделей идеальной и вязкой жидкости в проточной части гидромашин.

Теория лопастных гидромашин – это теория, посвященная установлению закономерностей течения жидкости в лопастных системах проточной части гидромашин, поэтому она должна основываться на общих законах механики жидкости.

На базе этой теории может быть основана и разработана модель рабочего процесса всех видов гидромашин, которая позволяет создавать научно обоснованные методы расчета элементов проточной части гидромашин и анализировать данные численных расчетов и экспериментальных данных, накапливая информацию, необходимую для ее модификаций.

В большинстве случаев теорию и рабочий процесс гидротурбин, лопастных насосов и гидродинамических передач излагают для каждого вида гидромашин отдельно, часто не учитывая опыта и достижений в смежных областях. В связи с этим студенты, начинающие изучение гидромашин, осваивают теорию по каждому виду гидромашин отдельно и не видят многих общих закономерностей, а подчас даже противопоставляют эти машины друг другу. В таком подходе скрывается ряд методических неточностей, приводящих к излишнему повторению многих теорем и законов.

Очевидно, что гидротурбины, лопастные насосы и гидродинамические передачи имеют свою специфику, свои отличительные особенности в рабочем процессе, конструктивные различия и т. д. Однако то общее, что существует в этих гидромашинах, позволяет рассматривать их теорию рабочего процесса с единой позиции.

Поток в элементах проточной части гидромашин имеет сложную пространственную структуру. В общем виде течение поддается описанию уравнениями течения вязкой жидкости. На практике применение современных методов расчета трехмерного потока позволяет провести достаточно точный гидродинамический расчет пространственного течения жидкости как во всей проточной части гидромашин в целом, так и в ее отдельных элементах. Уместно отметить, что практические потребности инженерных расчетов трехмерных течений в элементах гидромашин позволяют в конкретных условиях вводить ряд упрощений и для практических целей использовать упрощенные модели течений, расчет которых находится в пределах современных вычислительных возможностей.

Одна из целей написания данного учебно-методического пособия – дать углубленное и подробное изложение таких основных разделов курса как «Механика жидкости и газа» и «Гидродинамическая теория лопастных гидромашин». Содержание и структура учебного материала пособия ориентированы на усвоение студентами и аспирантами фундаментальных понятий и законов с последующим их применением для решения конкретных задач в области гидромашиностроения.

Общие основы теории лопастных гидромашин

В основу механики положены четыре основных (постулируемых) закона сохранения:

1. Закон сохранения массы (вещества).
2. Закон сохранения количества движения (импульса).
3. Закон сохранения момента количества движения (момента импульса).
4. Закон сохранения энергии.

Эти законы в механике жидкости и газа записываются в интегральной и дифференциальной форме, для «жидкого», т. е. перемещающегося вместе с жидкостью объема, поверхности или для фиксированного, т. е. неподвижного в выбранной системе координат объема или поверхности.

В случае применения этих законов к неподвижному, фиксированному объему, через поверхность, ограничивающую этот объем происходит перенос массы жидкости $\int_S \rho v_n ds$, количества движения $\int_S \rho \vec{v} v_n ds$, момента количества движения $\int_S \rho (\vec{r} \times \vec{v}) v_n ds$ и энергии $\int_S E \rho v_n ds$.

Для гидравлических машин, кроме того, эти законы могут рассматриваться в неподвижной, т. е. «абсолютной» системе координат и в относительной, т. е. вращающейся вместе с лопастной системой с угловой скоростью ω системе координат.

Применение законов сохранения к гидромашинам дает возможность получить расчетные уравнения и объяснить многие явления.

Эти законы могут быть записаны в рамках модели идеальной жидкости или применительно к вязкой жидкости, для стационарного поля скоростей и давлений или для нестационарного режима.

Кроме всего вышесказанного, необходимо отметить, что существуют различные формы записи этих законов и полученных на их основе уравнений.

1. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МАССЫ И УРАВНЕНИЕ НЕРАЗРЫВНОСТИ

Подробные выводы и анализ приведенных ниже соотношений изложены в курсе механики жидкости и газа.

Интегральная форма закона сохранения массы для жидкого объема, имеет вид:

$$\frac{d}{dt} \int_{\dot{V}} \rho dV = 0. \quad (1)$$

Интегральная форма закона сохранения массы для фиксированного объема, следующая:

$$\int_V \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} \right) dV = 0 \quad (2)$$

или

$$\int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) \right) dV = 0. \quad (2')$$

Другой вид закона сохранения массы для фиксированного объема, который получается из уравнения (2') посредством применения формулы Гаусса – Остроградского записывается в виде

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_S \rho \vec{n} \cdot \vec{v} ds = 0, \quad (3)$$

где интеграл $\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$ – это изменение массы внутри фиксированного объема, обусловленное изменением плотности жидкости и равное переносу массы через замкнутую фиксированную поверхность S , ограничивающую объем V .

Интеграл $\left[- \int_S \rho \vec{n} \cdot \vec{v} ds = - \int_S \rho v_n ds \right]$ выражает перенос массы внутрь объема, ограниченного поверхностью S , т. е. по направлению внутренней нормали $(-\vec{n})$. Здесь \vec{n} – единичный вектор внешней нормали, v_n – проекция скорости на единичный вектор внешней нормали.

Выражение (3), записанное в виде

$$- \int_S \rho \vec{n} \cdot \vec{v} ds = \int_S \rho (-\vec{n}) \cdot \vec{v} ds = \int_S \rho \vec{v}_{-n} ds = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV,$$

может быть пояснено следующим образом: перенос массы внутрь объема через фиксированную замкнутую поверхность $\int_S \rho \vec{v} \cdot \vec{n} ds$ обуславливает увеличение плотности внутри фиксированного объема $\frac{\partial \rho}{\partial t}$.

Выражения (1), (2), (3) имеют одинаковую запись, как в абсолютной, так и в относительной системе координат.

В дифференциальной форме закон сохранения массы записывается в виде уравнения неразрывности (или сплошности) жидкой среды:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad (4)$$

или в другом виде:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0; \quad (4')$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \rho + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0. \quad (4'')$$

Для несжимаемой жидкости ($\rho = \text{const}$) закон сохранения массы записывается в виде

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0. \quad (5)$$

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте закон сохранения массы и поясните какие уравнения и формулы получаются из этого закона.
2. В каких случаях при математическом моделировании потока применяются интегральные формы законов сохранения.

2. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ (ИМПУЛЬСА)

Интегральные формы этого закона позволяют определить силы, действующие на неподвижные или подвижные (вращающиеся) поверхности лопастей и стенки каналов.

2.1. Уравнение движения (динамики идеальной и вязкой жидкости)

Дифференциальная форма закона сохранения количества движения записывается в виде уравнения динамики (движения) идеальной или вязкой жидкости в неподвижной или вращающейся системе координат и после интегрирования вдоль линии тока в виде уравнения Бернулли в абсолютной (неподвижной) или в относительной (вращающейся относительно оси OZ) системе координат.

Эти выражения были получены в курсе механики жидкости и газа, и поэтому здесь они предлагаются без вывода.

Базой для получения всех вышеперечисленных уравнений является уравнение динамики сплошной среды «в напряжениях»:

$$\vec{f} + \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \vec{T} = \frac{d\vec{v}}{dt}, \quad (6)$$

где \vec{f} – единичная (удельная) массовая сила, $\left[\frac{N}{\text{кг}} = \frac{\text{м}}{\text{сек}^2} \right]$;

$\vec{f} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{\rho \Delta V}$, ρ – плотность среды, $\left[\frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \right]$;

\vec{T} – тензор напряжений (симметричный, второго порядка);

$\frac{d\vec{v}}{dt}$ – ускорение $\left(\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{v^2}{2} \right) - \vec{v} \times \operatorname{rot} \vec{v} \right)$.

Для общего случая и произвольной системы координат уравнение динамики идеальной жидкости (уравнение Эйлера) записывается в следующем виде:

$$\vec{f} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (7)$$

или

$$\vec{f} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}, \quad (7')$$

или в форме Громека

$$\bar{f} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p - \text{grad } \frac{v^2}{2} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} - \bar{v} \times \text{rot } \bar{v}. \quad (7'')$$

Для общего случая и произвольной системы координат уравнение динамики вязкой (ньютоновской) жидкости запишется в виде

$$\bar{f} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \text{grad } \text{div } \bar{v} + \nu \nabla^2 \bar{v} = \frac{d\bar{v}}{dt} \equiv \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{v} \cdot \nabla) \bar{v}. \quad (8)$$

Это уравнение называется уравнением Навье – Стокса и в более простом виде для несжимаемой жидкости ($\rho = \text{const}$, $\text{div } \bar{v} = 0$) оно имеет вид:

$$\bar{f} - \text{grad } \frac{p}{\rho} + \nu \nabla^2 \bar{v} = \frac{d\bar{v}}{dt} \equiv \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{v} \cdot \nabla) \bar{v}. \quad (8')$$

Уравнения (8) и (8') могут быть записаны также и в форме Громека. Например, уравнение (8') примет вид

$$\bar{f} - \frac{1}{\rho} \text{grad} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right) + \nu \nabla^2 \bar{v} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} - \bar{v} \times \text{rot } \bar{v}. \quad (8'')$$

Для турбулентного движения вязкой жидкости обычно применяется уравнение Рейнольдса

$$\begin{aligned} \bar{f} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \text{grad } \text{div } \bar{v} + \nu \nabla^2 \bar{v} + \frac{1}{\rho} \text{div } \bar{T}_{\text{турб}} &= \\ &= \frac{d\bar{v}}{dt} \equiv \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{v} \cdot \nabla) \bar{v}, \end{aligned} \quad (9)$$

которое для несжимаемой жидкости упрощается:

$$\bar{f} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \nabla^2 \bar{v} + \frac{1}{\rho} \text{div } \bar{T}_{\text{турб}} = \frac{d\bar{v}}{dt} \equiv \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{v} \cdot \nabla) \bar{v}, \quad (9')$$

или которое в форме Громека записывается в виде

$$\bar{f} - \text{grad} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right) + \nu \nabla^2 \bar{v} + \frac{1}{\rho} \text{div } \bar{T}_{\text{турб}} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} - \bar{v} \times \text{rot } \bar{v}. \quad (9'')$$

В уравнении (9) параметры потока ρ , p , \bar{v} и в уравнениях (9') и (9'') p и \bar{v} являются осредненными по времени по закону осреднения:

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0 - \frac{\Delta t}{2}}^{t_0 + \frac{\Delta t}{2}} \varphi dt. \quad (10)$$

Тензор турбулентных напряжений в декартовой (ортогональной прямолинейной) системе координат определяется компонентами

$$\bar{T}_{\text{турб}} = \left\| \begin{array}{c} -\overline{\rho v'_x v'_x}; -\overline{\rho v'_x v'_y}; -\overline{\rho v'_x v'_z} \\ -\overline{\rho v'_y v'_x}; -\overline{\rho v'_y v'_y}; -\overline{\rho v'_y v'_z} \\ -\overline{\rho v'_z v'_x}; -\overline{\rho v'_z v'_y}; -\overline{\rho v'_z v'_z} \end{array} \right\|; \quad (11)$$

здесь v'_x, v'_y, v'_z – пульсационные составляющие скорости; — (черта) означает операцию осреднения по выражению (10).

В гидромашинах часто применяется система координат (абсолютная – неподвижная или относительная – вращающаяся) с осью Z, направленной вертикально вверх. При этом единичная массовая сила тяжести может быть записана в виде

$$\vec{f}_{\text{тяж}} = -g\vec{k} = -\text{grad}(gz) = -g \text{grad } z.$$

Таким образом, в неподвижной системе координат, в которой единственной массовой силой является сила тяжести $\vec{f} = \vec{f}_{\text{тяж}} = -\text{grad}(gz) = -g \text{grad } z$ для случая несжимаемой идеальной (невязкой) жидкости из выражения (2") получим:

$$-g \text{grad } H = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \vec{v} \times \text{rot } \vec{v}, \quad (12)$$

где $H = Z + \frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g}$, [м].

Для турбулентного движения вязкой несжимаемой жидкости в вышерассмотренной системе координат из выражения (8") получим следующий вид уравнения Рейнольдса:

$$-g \text{grad } H + \nu \nabla^2 \vec{v} + \frac{1}{\rho} \text{div } \bar{T}_{\text{турб}} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \vec{v} \times \text{rot } \vec{v}, \quad (13)$$

где $H = Z + \frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g}$, [М].

Напомним, что в уравнениях Рейнольдса (8), (8'), (8'') и (13) параметры потока v , p и для сжимаемой жидкости ρ являются осредненными по времени по закону (10).

Во вращающейся с постоянной угловой скоростью ω относительно вертикальной оси OZ системе координат, наряду с массовой силой тяжести, появятся инерционные (центробежные) массовые силы и кориолисовы силы, т. е.

$$\vec{f} = \vec{f}_{\text{тяж}} + \vec{f}_{\text{центр}} + \vec{f}_{\text{кор}}, \quad (14)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \vec{f}_{\text{тяж}} &= -g\vec{k} = -\text{grad}(gz) = -g \text{grad } z \\ \vec{f}_{\text{центр}} &= \omega^2 \vec{r} = \text{grad}\left(\frac{\omega^2 r^2}{2}\right) = \text{grad}\left(\frac{u^2}{2}\right) \\ \vec{f}_{\text{кор}} &= -2\vec{\omega} \times \vec{w} \end{aligned} \right\} \quad (14')$$

Во вращающейся с угловой скоростью $\vec{\omega} = \text{const}$, т. е. имеющей переносную скорость $\vec{u} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, системе координат, скорость потока будет обозначаться через \vec{w} , в отличие от \vec{v} в абсолютной (неподвижной) системе координат.

Таким образом $\vec{v} = \vec{w} + \vec{u}$, где \vec{v} – абсолютная скорость потока; \vec{w} – относительная скорость; $\vec{u} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ – переносная скорость.

Введем также различие в обозначениях:

\vec{r} – радиус-вектор в произвольной системе координат;

\vec{r} – радиус-вектор вдоль оси OZ в цилиндрической системе координат (компонента произвольного радиуса-вектора, перпендикулярная оси OZ).

На основе вышесказанного для вращающейся с постоянной угловой скоростью системы координат из выражения (7'') получим для несжимаемой невязкой жидкости уравнение Эйлера (в форме Громека) в относительной системе координат:

$$-g \operatorname{grad} Z + \operatorname{grad} \left(\frac{u^2}{2} \right) - 2\vec{\omega} \times \vec{w} - \operatorname{grad} \frac{w^2}{2} - \operatorname{grad} \left(\frac{p}{\rho} \right) = \frac{\partial \vec{w}}{\partial t} - \vec{w} \times \operatorname{rot} \vec{w}$$

или

$$\begin{aligned} -g \operatorname{grad} \left[Z + \frac{p}{\rho g} + \frac{w^2 - u^2}{2g} \right] &= \frac{\partial \vec{w}}{\partial t} - \vec{w} \times \operatorname{rot} \vec{w} - \vec{w} \times 2\vec{\omega} = \\ &= \frac{\partial \vec{w}}{\partial t} - \vec{w} \times (\operatorname{rot} \vec{w} + 2\vec{\omega}). \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \operatorname{rot} (\vec{w} + \vec{u}) = \operatorname{rot} \vec{w} + \operatorname{rot} (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \operatorname{rot} \vec{w} + 2\vec{\omega},$$

окончательно получим

$$-g \operatorname{grad} H_{\text{отн}} = \frac{\partial \vec{w}}{\partial t} - \vec{w} \times \operatorname{rot} \vec{v}, \quad (15)$$

$$\text{где } H_{\text{отн}} = Z + \frac{p}{\rho g} + \frac{w^2 - u^2}{2g}, \quad [\text{М}]. \quad (15')$$

В случае турбулентного движения вязкой жидкости к левой части уравнения (15) добавляются вязкостные члены:

$$-g \operatorname{grad} H_{\text{отн}} + \nu \nabla^2 \vec{w} + \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \vec{T}_{\text{турбонт.}} = \frac{\partial \vec{w}}{\partial t} - \vec{w} \times \operatorname{rot} \vec{v}, \quad (16)$$

$$\text{где } H_{\text{отн}} = Z + \frac{p}{\rho g} + \frac{w^2 - u^2}{2g}, \quad [\text{М}].$$

Здесь параметры потока p , \vec{w} , \vec{v} – осредненные величины:

$$\vec{T}_{\text{турбонт.}} = \left\| \begin{array}{l} -\overline{\rho w'_x w'_x}; -\overline{\rho w'_x w'_y}; -\overline{\rho w'_x w'_z} \\ -\overline{\rho w'_y w'_x}; -\overline{\rho w'_y w'_y}; -\overline{\rho w'_y w'_z} \\ -\overline{\rho w'_z w'_x}; -\overline{\rho w'_z w'_y}; -\overline{\rho w'_z w'_z} \end{array} \right\| = \vec{T}_{\text{турб.}}$$

так как $-\overline{\rho v'_i v'_j} = \overline{\rho w'_i w'_j}$, при $u' = 0$, т.е. при $\omega = \text{const}$.

2.2. Уравнение Бернулли

В курсе «Механика жидкости и газа» было показано, что для установившегося движения жидкости в результате интегрирования уравнения (12) вдоль линии тока получается уравнение Бернулли (для линии тока, т. е. элементарной трубки тока) в неподвижной системе координат для идеальной жидкости:

$$Z + \frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} = \text{const} \quad \text{или} \quad Z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = Z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g}. \quad (17)$$

В реальной жидкости энергия в сечении 2-2 меньше, чем в сечении 1-1 на величину потерь $h_{\text{п}}$, т. е.

$$Z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = Z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + h_{\text{п}}. \quad (18)$$

Также может быть получено из выражения (15) уравнение Бернулли для установившегося движения в относительной (вращающейся с постоянной скоростью $\vec{\omega}$) системе координат для невязкой жидкости

$$Z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{w_1^2 - u_1^2}{2g} = Z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{w_2^2 - u_2^2}{2g} \quad (19)$$

или, с учетом потерь на трение

$$Z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{w_1^2 - u_1^2}{2g} = Z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{w_2^2 - u_2^2}{2g} + h_{\text{п}}. \quad (20)$$

2.3. Уравнение Гельмгольца

Применим операцию rot к обеим частям уравнения (12) Эйлера (динамики идеальной жидкости в форме Громека):

$$\text{rot} \left[-g \text{grad } H = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \vec{v} \times \text{rot } \vec{v} \right].$$

Принимая во внимание, что $\text{rot grad}(gH) \equiv 0$ и что

$\text{rot} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\text{rot } \vec{v})$, вводя обозначение $\text{rot } \vec{v} = \vec{\Omega}$, получим:

$$\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} + \text{rot}(\vec{\Omega} \times \vec{v}) = 0;$$

$$\text{rot}(\vec{\Omega} \times \vec{v}) = \nabla \times (\vec{\Omega} \times \vec{v}) = (\nabla \cdot \vec{v})\vec{\Omega} - (\nabla \cdot \vec{\Omega})\vec{v} = (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{\Omega} + \vec{\Omega}(\nabla \cdot \vec{v}) - (\vec{\Omega} \cdot \nabla)\vec{v} - \vec{v}(\nabla \cdot \vec{\Omega}) = (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{\Omega} - (\vec{\Omega} \cdot \nabla)\vec{v} + \vec{\Omega} \text{div } \vec{v} - \vec{v} \text{div } \vec{\Omega}.$$

Рассматривая случай несжимаемой жидкости ($\text{div } \vec{v} = 0$) и принимая во

внимание, что $\text{div } \vec{\Omega} \equiv 0$; $\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{\Omega} = \frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t}$ окончательно получим уравнение Гельмгольца в абсолютной системе координат для несжимаемой невязкой жидкости:

$$\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} = (\vec{\Omega} \cdot \nabla)\vec{v}. \quad (21)$$

Для получения уравнения Гельмгольца в относительной системе координат применим операцию rot к выражению (15)

$$\text{rot} \left[-g \text{grad } H_{\text{отн}} = \frac{\partial \vec{w}}{\partial t} - \vec{w} \times \text{rot } \vec{v} \right].$$

Введя обозначения $\text{rot } \vec{w} = \vec{\Omega}'$, $\text{rot } \vec{v} = \vec{\Omega}$, получим

$$0 = \frac{\partial \vec{\Omega}'}{\partial t} + \text{rot}[\vec{\Omega} \times \vec{w}];$$

$$0 = \frac{\partial \vec{\Omega}'}{\partial t} + (\vec{w} \cdot \nabla)\vec{\Omega} - (\vec{\Omega} \cdot \nabla)\vec{w} + \vec{\Omega} \text{div } \vec{w} - \vec{w} \text{div } \vec{\Omega}.$$

Для несжимаемой идеальной (невязкой) жидкости уравнение Гельмгольца запишется в относительной системе координат:

$$\frac{\partial \vec{\Omega}'}{\partial t} + (\vec{w} \cdot \nabla)\vec{\Omega} = (\vec{\Omega} \cdot \nabla)\vec{w}. \quad (22)$$

Учитывая, что

$$\frac{\partial \vec{\Omega}'}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\text{rot } \vec{w}) = \frac{\partial}{\partial t} [\text{rot}(\vec{v} - \vec{u})] = \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\Omega} - 2\vec{\omega}) = \frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t}$$

при $\vec{\omega} = \text{const}$ ($\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} = 0$), получим

$$\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} + (\vec{\Omega} \cdot \nabla) \vec{w}. \quad (23)$$

2.4. Интегральная форма представления уравнения движения и уравнения Бернулли

Уравнение динамики идеальной или вязкой жидкости (уравнение движения) справедливо для каждой точки (элементарного объема) и рассматриваемого конечного объема. Поэтому можно написать интегральное представление:

$$\int_V \left(\rho \frac{d\vec{v}}{dt} - \rho \vec{f} + \text{grad } p - \mu \nabla^2 \vec{v} - \text{div } \vec{T}_{\text{Турб}} \right) dV = 0; \quad (24)$$

$$\int_{S_1} \left(Z + \frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} \right) v_n ds = \int_{S_2} \left(Z + \frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} \right) v_n ds + Qh_n, \quad (25)$$

где S_1 и S_2 , например, входное и выходное сечения в межлопаточном канале направляющего аппарата.

$$\int_{S_1} \left(Z + \frac{p}{\rho g} + \frac{w^2 - u^2}{2g} \right) w_n ds = \int_{S_2} \left(Z + \frac{p}{\rho g} + \frac{w^2 - u^2}{2g} \right) w_n ds + Qh_n, \quad (26)$$

где S_1 и S_2 , например, – входное и выходное сечения в межлопаточном канале рабочего колеса.

2.5. Интегральная форма представления закона изменения количества движения в неподвижной системе координат

Формулировка основного принципа (закона сохранения) динамики движения жидкости следующая: полная производная по времени от количества движения заключенного в жидком объеме, равна главному

вектору всех внешних сил, действующих на перемещающийся жидкий объём:

$$\frac{d}{dt} \int_{\hat{V}} \rho \vec{v} dV = \int_{\hat{V}} \rho \vec{f} dV + \int_{\hat{S}} \vec{\tau}_n ds, \quad (27)$$

где $\vec{\tau}_n = \vec{n} \cdot \vec{T} = -p\vec{n} + \vec{n} \cdot \vec{T}_\tau$; \vec{T}_τ – тензор касательных напряжений.

Выражение (27) подробно проанализировано в курсе механики жидкости и газа.

Для получения других, более удобных для применения форм закона изменения количества движения, обычно используют теорему переноса.

Имеются три формы записи теоремы переноса для произвольной функции F , которые ранее были получены и рассмотрены в курсе механики жидкости и газа:

$$\frac{d}{dt} \int_{\hat{V}} F dV = \int_{\hat{V}} \left(\frac{dF}{dt} F \operatorname{div} \vec{v} \right) dV = \int_{\hat{V}} \left(\frac{dF}{dt} + F \operatorname{div} \vec{v} \right) dV; \quad (28)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\hat{V}} F dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\hat{V}} F dV + \int_{\hat{S}} F \vec{v} \cdot \vec{n} ds = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\hat{V}} F dV + \int_{\hat{S}} F \vec{v} \cdot \vec{n} ds; \quad (29)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\hat{V}} \rho F dV = \int_{\hat{V}} \rho \frac{dF}{dt} dV = \int_{\hat{V}} \rho \frac{dF}{dt} dV. \quad (30)$$

Применяя к уравнению (27) формулу (29) переноса, получим

$$\frac{d\vec{k}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\hat{V}} \rho \vec{v} dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\hat{V}} \rho \vec{v} dV + \int_{\hat{S}} \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) ds, \quad (31)$$

где $\vec{v} \cdot \vec{n} = v_n$.

Для стационарного течения будем иметь

$$\frac{d\vec{k}}{dt} = \int_{\hat{S}} \rho \vec{v} v_n ds. \quad (32)$$

Подставив формулу (31) или (32) в выражение (27), получим соответственно

$$\frac{d\vec{k}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \vec{v} dV + \int_S \rho \vec{v} v_n ds = \int_V \rho \vec{f} dV + \int_S \vec{\tau}_n ds \quad (33)$$

И, окончательно для стационарного течения,

$$\frac{d\vec{k}}{dt} = \int_S \rho \vec{v} v_n ds = \int_V \rho \vec{f} dV + \int_S \vec{\tau}_n ds . \quad (34)$$

Из выражения (33) следует, что сумма главных векторов внешних объемных и поверхностных сил, приложенных к фиксированному объему жидкости V , ограниченному поверхностью S , равна сумме вектора переноса количеств движения через поверхность S и вектора локального изменения количеств движения в объеме V при нестационарном движении.

2.6. Сила, действующая со стороны потока на стенки неподвижного канала

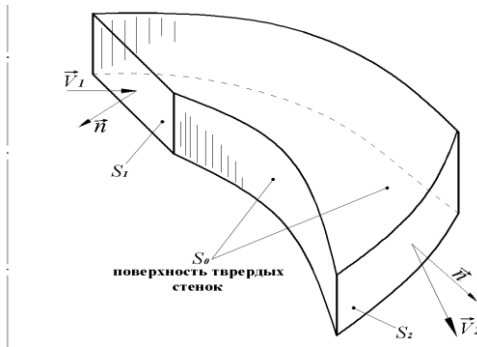


Рисунок 1 – Взаимодействие потока с твердыми стенками

Формулы (33) и (34) могут быть использованы для определения силы, действующей со стороны жидкости на стенки неподвижного канала. Принимая, что S_1 и S_2 – входное и выходное сечения канала (рис. 1) соответственно и что на поверхности твердых стенок $v_n = 0$, запишем:

$$\int_S \rho \vec{v} v_n ds = \rho \int_S \vec{v} v_n ds = \rho \int_{S_2} \vec{v} v_n ds - \rho \int_{S_1} \vec{v} v_{-n} ds ,$$

где v_{-n} – проекция скорости \vec{v}_1 на внутреннюю нормаль $v_{-n} = -\vec{n} \cdot \vec{v}_1$, где \vec{n} – единичный вектор внешней нормали).

Считая, что отсутствуют противотоки во входном и выходном сечениях канала, т. е. $v_1 > 0$ и $v_2 > 0$ во всем сечении, введем обозначения

$$\bar{v}_1 = \frac{1}{Q} \int \bar{v} v_{-n} ds; \quad \bar{v}_2 = \frac{1}{Q} \int \bar{v} v_n ds, \quad (35)$$

при $Q = \int_{S_1} v_{-n} ds = \int_{S_2} v_n ds$, где \bar{v}_1 и \bar{v}_2 – вектора скоростей,

осредненных по количеству движения. Примечание. «—» (черточка), обозначающая осреднение, в дальнейшем будет опущена.

Обозначив через \bar{R} силу воздействия (реакции) жидкости на стенки канала ($\bar{R} = - \int_{S_0} \bar{\tau}_n ds$ в отличие от силы $\bar{F} = \int_{S_0} \bar{\tau}_n ds$ воздействия

стенок на жидкость, где: $\bar{\tau}_n = -\bar{n}p + \bar{n}\bar{T}_\tau$ и \bar{T}_τ – тензор касательных напряжений), получим:

$$\bar{R} = - \int_{S_0} \bar{\tau}_n ds = \int_V \rho \bar{f} dV + \rho Q (\bar{v}_1 - \bar{v}_2) + \int_{S_1+S_2} \bar{\tau}_n ds - \rho \int_V \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} dV. \quad (36)$$

Сила воздействия жидкости на стенки канала складывается:

- 1) из суммарной объемной силы $\int_V \rho \bar{f} dV$;
- 2) силы, определяемой переносом количества движения через входное и выходное сечения канала $\rho Q (\bar{v}_1 - \bar{v}_2)$;
- 3) поверхностной силы, действующей на входное и выходное сечение канала $\int_{S_1+S_2} \bar{\tau}_n ds$;
- 4) изменения количества движения в рассматриваемом объеме $\rho \int_V \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} dV$. Причем уменьшение количества движения в объеме

приводит к увеличению силы реакции жидкости на стенки канала.

В частном случае стационарного течения, когда объемная сила есть сила веса, распределение скорости в сечениях 1 и 2 является

равномерным и жидкость идеальная имеем вместо (36) более простое выражение

$$\bar{R} = \bar{G} + \rho Q (\bar{v}_1 - \bar{v}_2) + \int_{S_1} p \cdot (-\bar{n}) ds - \int_{S_2} p \cdot \bar{n} ds, \quad (37)$$

где $(-\bar{n})$ – направление внутренней нормали к поверхности S_1 .

2.7. Сила воздействия жидкости на стенки вращающегося канала

Получим выражение, связывающее частную производную по времени от скорости \bar{v} в подвижной (вращающейся с угловой скоростью ω) $\frac{\partial' \bar{v}}{\partial t}$ и неподвижной $\frac{\partial \bar{v}}{\partial t}$ системах координат

$$\frac{\partial' \bar{v}}{\partial t} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial r} \frac{dr}{dt} + \frac{\partial \bar{v}}{r \partial \Theta} \frac{rd\Theta}{dt} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial Z} \frac{dZ}{dt}.$$

Так как $\frac{dr}{dt} = 0$ (от вращения системы координат) и $\frac{dZ}{dt} = 0$ (от

вращения системы координат), а $\frac{rd\Theta}{dt} = u$, то получим

$$\frac{\partial' \bar{v}}{\partial t} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{v}}{r \partial \Theta} \cdot u \quad \text{или} \quad \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = \frac{\partial' \bar{v}}{\partial t} - u \frac{\partial \bar{v}}{r \partial \Theta}. \quad (38)$$

Тогда можно записать:

$$\int_V \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} dV = \int_V \frac{\partial' \bar{v}}{\partial t} dV - \int_V u \frac{\partial \bar{v}}{\partial l_u} dV \quad \text{и так как} \quad \frac{\partial u}{\partial l_u} = 0, \quad \text{то}$$

$$\int_V \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} dV = \int_V \frac{\partial' \bar{v}}{\partial t} dV - \int_V \frac{\partial(u \bar{v})}{\partial l_u} dV = \int_V \frac{\partial' \bar{v}}{\partial t} - \int_V \nabla_u (u \bar{v}) dV. \quad (39)$$

Подынтегральное выражение последнего члена является производной от $(u \bar{v})$ по окружному направлению l_u , т. е. является проекцией $\text{grad}(u \bar{v})$ на окружное направление: $\nabla_u (u \bar{v})$.

По формуле Гаусса – Остроградского

$$\int_V \nabla(u \bar{v}) dV = \int_S \bar{n}(u \bar{v}) dS$$

или после проектирования на направление u получаем

$$\int_V \nabla_u (u\vec{v}) dV = \int_S (\vec{u} \circ \vec{n})(u\vec{v}) dS = \int_S (\vec{u} \cdot \vec{n})\vec{v} dS = \int_S \vec{v}u_n dS .$$

Подставив это значение в выражение (39) будем иметь

$$\rho \int_V \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} dV = \rho \int_V \frac{\partial' \vec{v}}{\partial t} dV - \rho \int_S \vec{v}u_n dS . \quad (40)$$

Итак, локальное изменение количеств движения в объем V в подвижной системе координат равно сумме локального изменения количеств движения в том же объеме в неподвижной системе координат и переноса количеств движения через поверхность S с переменной скоростью \vec{u} .

Применим эту формулу для вращающегося канала, т.е. подставим в выражение (33) и получим:

$$\rho \int_V \vec{f} dV + \int_S \vec{\tau}_n ds = \rho \int_V \frac{\partial' \vec{v}}{\partial t} dV + \rho \int_S \vec{v}(v_n - u_n) dS . \quad (41)$$

Напомним, что $v_n - u_n = w_n$.

Из последнего выражения легко получить силу воздействия потока на стенку вращающегося канала (или подставляя (40) в (36)):

$$\begin{aligned} \vec{R} = & - \int_{S_0} \vec{\tau}_n ds = \rho \int_V \vec{f} dV + \rho Q (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) + \int_{S_1+S_2} \vec{\tau}_n ds - \rho \int_V \frac{\partial' \vec{v}}{\partial t} dV - \\ & - \rho \int_{S_0} \vec{v}(v_n - u_n) dS + \int_{S_1+S_2} \vec{v}u_n dS. \end{aligned} \quad (42)$$

При выводе этого выражения имелось в виду:

$$\int_S \vec{v}u_n dS = \int_{S_0} \vec{v}u_n dS + \int_{S_1+S_2} \vec{v}u_n dS .$$

На поверхности S_0 , образующей твердые стенки канала при безотрывном течении жидкости $v_n = u_n$ (т. е. $w_n = 0$) и соответствующий интеграл в выражении (42) обращается в нуль. Последний интеграл в правой части выражения (42) связан с переносом количества движения через входное и выходное сечения, обусловленного вращением канала.

Практически во всех интересных для гидромашин случаях можно принять поверхности S_1 и S_2 как части поверхностей вращения. При этом будет $u_n=0$ и выражение (42) упростится:

$$\vec{R} = - \int_{S_0} \vec{\tau}_n ds = \rho \int_V \vec{f} dV + \int_{S_1+S_2} \vec{\tau}_n ds + \rho Q (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) - \rho \int_V \frac{\partial' \vec{v}}{\partial t} dV. \quad (43)$$

Последнее выражение по форме совпадает с аналогичным для неподвижного канала. Только для подвижного канала локальную производную вектора скорости следует вычислять в подвижной системе координат.

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте закон сохранения (изменения) импульса и перечислите основные уравнения получаемые из этого закона.
2. Поясните физический смысл слагаемых в выражении для силы, действующей со стороны потока на стенки неподвижного и вращающегося канала в случае идеальной несжимаемой жидкости. Для каких элементов гидротурбины находит применение выражения для определения суммарной силы воздействия потока на твердые стенки.
3. Поясните физический смысл массовых сил, действующих во вращающейся системе координат.
4. Поясните, в каких случаях применяется уравнение Гельмгольца.
5. Поясните физический смысл дополнительных напряжений, возникающих в жидкости при турбулентном режиме течения.
6. Поясните физический смысл «принципа прилипания» вязкой жидкости к твердым поверхностям и граничных условий на твердых поверхностях при турбулентном режиме течения.

3. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МОМЕНТА КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ

Как и предыдущие законы сохранения, этот закон может быть записан в дифференциальной и интегральной формах.

Дифференциальная форма этого закона для элементарного объема вязкой неполяризованной жидкости, т. е. у которой действие внешних моментов сил равно нулю, записывается в виде симметричности тензора касательных напряжений:

$$T^{ij} = T^{ji} . \quad (44)$$

3.1. Интегральная форма закона сохранения момента количества движения

Теорема. Для любой сплошной среды, удовлетворяющей уравнению неразрывности

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0 , \quad (45)$$

уравнению движения

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{f} + \operatorname{div} \vec{T} \quad (46)$$

и постулату Больцмана $T^{ij} = T^{ji}$, мы имеем

$$\frac{d}{dt} \int_{\hat{V}} \rho (\vec{r} \times \vec{v}) dV = \int_{\hat{V}} \rho (\vec{r} \times \vec{f}) dV - \int_{\hat{S}} (\vec{r} \times \vec{\tau}_n) ds , \quad (47)$$

где $\vec{\tau}_n = \vec{n} \cdot \vec{T} = -\vec{n} p + \vec{n} \cdot \vec{T}_\tau$; ($\vec{T} = -p\vec{I} + \vec{T}_\tau$)

для произвольного жидкого объема \hat{V} (т. е. движущегося вместе с жидкостью и состоящего из одних и тех же частиц движущейся жидкости), ограниченного жидкой поверхностью \hat{S} (т. е. поверхностью, состоящей из одних и тех же частиц движущейся жидкости). Воспользовавшись формулой переноса

$$\frac{d}{dt} \int_{\hat{V}} F dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_V F dV - \int_S F \vec{v} \cdot \vec{n} ds , \quad (48)$$

с учетом, что
$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V F dV = \int_V \frac{\partial F}{\partial t} dV,$$

и перейдя к фиксированному объему, совпадающему в данный момент времени с жидким, из выражения (47) получим

$$\vec{L} = \int_V \rho \frac{\partial(\vec{r} \times \vec{v})}{\partial t} dV + \int_S \rho(\vec{r} \times \vec{v}) v_n ds = \int_V \rho(\vec{r} \times \vec{f}) dV + \int_S (\vec{r} \times \vec{\tau}_n) ds. \quad (49)$$

Для стационарного движения жидкости уравнение (49) упростится:

$$\vec{L} = \int_S \rho(\vec{r} \times \vec{v}) v_n ds = \int_V \rho(\vec{r} \times \vec{f}) dV + \int_S (\vec{r} \times \vec{\tau}_n) ds. \quad (50)$$

Спроектируем выражение (49) на ось Z (цилиндрической системы координат), т. е. найдем момент количества движения жидкости в межлопастном канале относительно оси вращения гидромашины. При

этом будем учитывать, что $(\vec{r} \times \vec{v})_Z = \begin{vmatrix} \vec{r}^\circ & \vec{u}^\circ & \vec{Z}^\circ \\ r & 0 & r_Z \\ v_r & v_u & v_Z \end{vmatrix}_Z = v_u r;$

$$L_Z = \int_S \rho(r v_u) v_n ds + \int_V \rho \frac{\partial(r v_u)}{\partial t} dV = \int_V \rho(r f_u) dV + \int_S (r \tau_{nu}) ds. \quad (51)$$

В том случае, когда ось Z есть вертикальная линия и массовые силы состоят только из сил тяготения, т. е. $\vec{f} = -g\vec{k} = -g\vec{Z}^\circ$, величина $f_u = 0$, выражение (51) упростится:

$$L_Z = \int_S (r \tau_{nu}) ds = \int_S \rho(r v_u) v_n ds + \int_V \rho \frac{\partial(r v_u)}{\partial t} dV. \quad (52)$$

В случае стационарного движения несжимаемой жидкости получим

$$L_Z = \int_S (r \tau_{nu}) ds = \int_S \rho(r v_u) v_n ds, \quad (53)$$

где $\vec{\tau}_n = -\vec{n}p + \vec{n}\vec{T}_\tau$.

В случае идеальной жидкости $\vec{\tau}_n = -\vec{n}p$; $\vec{\tau}_{nu} = -n_u p$, имеем

$$L_Z = -\int_S (rp) n_u ds = \int_S \rho (rv_u) v_n ds. \quad (54)$$

3.2. Момент силы воздействия жидкости на стенки неподвижного канала

Применим уравнение (52) для определения момента силы воздействия потока на стенки неподвижного канала, изображенного на рис. 1 (раздел 2.6):

$$M = -\int_{S_0} r \tau_{nu} ds = \rho \int_V r f_u dV + \int_{S_1+S_2} r \tau_{nu} ds - \rho \int_{S_1+S_2} (rv_u) v_n ds - \rho \int_V \frac{\partial (rv_u)}{\partial t} dV - \rho \int_{S_0} (rv_u) v_n ds. \quad (55)$$

Последний интеграл в этом выражении из предположения безотрывного течения вдоль твердых границ ($v_n = 0$) равен нулю.

Здесь, как и раньше, будем считать, что противотоки отсутствуют, т. е. v_n не меняет своего знака на поверхностях S_1 и S_2 .

Вводя осредненные значения удельных моментов количества движения на входе и выходе в рассматриваемый канал (по теореме о среднем), получим

$$\left. \begin{aligned} \overline{(rv_u)}_1 &= \frac{1}{Q_1} \int_{S_1} (rv_u) v_{-n} ds; & \overline{(rv_u)}_2 &= \frac{1}{Q_2} \int_{S_2} (rv_u) v_n ds \\ Q_1 &= \int_{S_1} v_{-n} ds = Q_2 = \int_{S_1} v_n ds = Q \end{aligned} \right\}. \quad (56)$$

Подставив эти значения в предыдущее выражение, имеем

$$M = \rho Q [\overline{(rv_u)}_1 - \overline{(rv_u)}_2] + \int_{S_1+S_2} r \tau_{nu} ds - \rho \int_V \frac{\partial (rv_u)}{\partial t} dV + \rho \int_V r f_u dV. \quad (57)$$

Для невязкой жидкости $\bar{\tau}_n = -p\bar{n}$ и если S_1 и S_2 являются поверхностями вращения ($\tau_{nu} = 0$), то выражение (3) упростится:

$$M = \rho Q [\overline{(rv_u)}_1 - \overline{(rv_u)}_2] - \rho \int_V \frac{\partial (rv_u)}{\partial t} dV + \rho \int_V r f_u dV. \quad (58)$$

Из выражения (57) видно, что момент сил относительно оси OZ, действующий со стороны жидкости на неподвижный канал, включает:

1. Перенос момента количества движения с потоком жидкости через входное и выходное сечение

$$\rho Q [\overline{(rv_u)}_1 - \overline{(rv_u)}_2] = \rho \int_{S_1} (rv_u) v_{-n} ds - \rho \int_{S_2} (rv_u) v_n ds .$$

2. Момент поверхностных сил, действующих на входное и выходное сечения $\int_{S_1+S_2} r \tau_{nu} ds .$

3. Момент определяемого локальным изменением момента количества движения в рассматриваемом канале $-\rho \int_V \frac{\partial (rv_u)}{\partial t} dV ,$

причем при возрастании момента количества движения жидкости в канале момент силы, действующий со стороны жидкости на стенки, уменьшается.

4. Момент массовых сил, действующих на жидкость в канале $\rho \int_V r f_u dV .$

В условиях нестационарного движения все члены, за исключением последнего зависят от времени.

В том случае, если массовые силы не дают момента (например, направлены вдоль оси OZ) для стационарного движения невязкой жидкости получим

$$M = \rho Q [\overline{(rv_u)}_1 - \overline{(rv_u)}_2] . \quad (59)$$

3.3. Момент силы, действующей со стороны жидкости на стенки канала, вращающегося относительно оси OZ

Используя ранее применявшееся правило дифференцирования, получим

$$\int_V \frac{\partial (rv_u)}{\partial t} dV = \int_V \frac{\partial' (rv_u)}{\partial t} dV - \int_S (rv_u) u_n ds \quad (60)$$

Подставив это значение в выражение (55), получим, с учетом (56)

$$M = \rho Q \left[\overline{(rv_u)_1} - \overline{(rv_u)_2} \right] + \int_{S_1+S_2} r \tau_{nu} ds - \rho \int_V \frac{\partial'(rv_u)}{\partial t} dV + \rho \int_V r f_u dV - \rho \int_{S_0} r v_u (v_n - u_n) ds, \quad (61)$$

где $v_n - u_n = w_n = 0$ в случае безотрывного обтекания твердых поверхностей (S_0) и последний интеграл становится равным нулю.

Таким образом, полученное выражение совпадает с выражением (57) для неподвижного канала. Разница в том, что производную в последнем выражении надо брать во вращающейся системе координат.

Для определения момента, действующего со стороны канала на протекающую жидкость, следует в выражении (61) поменять знак всех слагаемых на противоположный:

$$M_{ж} = \rho Q \left[\overline{(rv_u)_2} - \overline{(rv_u)_1} \right] - \int_{S_1+S_2} r \tau_{nu} ds + \rho \int_V \frac{\partial'(rv_u)}{\partial t} dV - \rho \int_V r f_u dV. \quad (62)$$

Упростим выражения (61) и (62):

1) для стационарного движения жидкости

$$\rho \int_V \frac{\partial'(rv_u)}{\partial t} dV = 0;$$

2) поверхности S_1 и S_2 являются поверхностями вращения и для идеальной жидкости

$$\int_{S_1+S_2} r \tau_{nu} ds = - \int_{S_1+S_2} p n_u ds = 0;$$

3) массовые силы не дают момента относительно оси вращения $f_{iu}=0$.

В этом случае получим момент передаваемый жидкостью на канал рабочего колеса

$$M = \rho Q \left[\overline{(rv_u)_1} - \overline{(rv_u)_2} \right] \quad (63)$$

и момент, передаваемый каналом рабочего колеса на жидкость

$$M_{ж} = \rho Q \left[\overline{(rv_u)_2} - \overline{(rv_u)_1} \right]. \quad (64)$$

Выражения (63) и (64) могут применяться и для всего рабочего колеса, не только для одного межлопастного канала. В этом случае Q – это расход через рабочее колесо; $\overline{(rv_u)}_1$ и $\overline{(rv_u)}_2$ – моменты количества движения (отнесенные к единице массового расхода), осредненного по площади входа и выхода рабочего колеса.

Из формул для определения момента можно записать $v_u = u + w_u$;

$ru = r^2\omega$, тогда

$$\rho \int_V \frac{\partial'(rv_u)}{\partial t} dV = \rho \int_V \frac{\partial'(rw_u)}{\partial t} + \frac{d\omega}{dt} \rho \int_V r^2 dV = \rho \int_V \frac{\partial'(rw_u)}{\partial t} dV + I_Z \frac{d\omega}{dt}, \quad (65)$$

где $I_Z = \rho \int_V r^2 dV$ – момент инерции массы жидкости в объеме V относительно OZ .

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте закон сохранения (изменения) момента импульса и перечислите основные уравнения получаемые из этого закона.

2. В каких случаях при математическом моделировании потока применяются интегральные формы законов сохранения.

3. Поясните физический смысл слагаемых в выражении для момента силы, действующей со стороны потока на стенки неподвижного и вращающегося канала в случае идеальной несжимаемой жидкости. Для каких элементов гидротурбины находит применение выражение для определения суммарного момента силы воздействия потока на твердые стенки.

4. Поясните физический смысл слагаемых, входящих в интегральные (суммарные) характеристики взаимодействия потока с рабочим колесом гидротурбины.

5. Выражение связывающее гидравлический момент, передаваемый потоком на рабочее колесо и «сработку» циркуляции потока на рабочем колесе.

4. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ

4.1. Интегральная форма закона сохранения энергии

Полная производная по времени от полной энергии движущегося (жидкого) объема среды равна сумме мощностей, приложенных к выделенному объему и его поверхности внешних массовых и поверхностных сил, и отнесенного к единице времени количества энергии, подведенного извне к объему.

Этот закон в интегральной форме записывается следующим образом:

$$\frac{d}{dt} \int_{\hat{V}} \rho \left(U + \frac{v^2}{2} \right) d\hat{V} = \int_{\hat{V}} \rho \vec{f} \cdot \vec{v} dV + \int_{\hat{S}} \vec{\tau}_n \cdot \vec{v} ds + \int_{\hat{V}} \rho q dV, \quad (66)$$

где U – удельная (отнесенная к единице массы) внутренняя энергия среды, включающая в себя все возможные виды энергии внутренних движений материи (применительно к механике жидкости и газа это, в первую очередь, тепловая энергия, пропорциональная кинетической энергии внутреннего теплового движения молекул); q – удельное количество энергии (обычно тепла), подведенное в единицу времени к данной точке среды извне. Сумма величин внутренней и кинетической (внешней) энергии носит название полной энергии.

4.2. Дифференциальная форма закона сохранения энергии

Применяя к выражению $\int_{\hat{S}} \vec{\tau}_n \cdot \vec{v} ds$, где $\vec{\tau}_n = \vec{n} \cdot \vec{T}$ и $\vec{T} = -p\vec{I} + \vec{T}_\tau$

формулу Гаусса – Остроградского и интегрируя выражение (66), получим

$$\rho \frac{d}{dt} \left(U + \frac{v^2}{2} \right) = \rho \vec{f} \cdot \vec{v} + \text{div}(\vec{T} \cdot \vec{v}) + \rho q. \quad (67)$$

4.3. Уравнение переноса энергии

Кинетическая энергия движущегося жидкого объема \hat{V} определяется как $E_k = \frac{1}{2} \int_{\hat{V}} \rho v^2 dV$.

Выражение

$$\frac{dE_k}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \int_{\hat{V}} \rho v^2 dV \right) = \int_{\hat{V}} \rho \vec{f} \cdot \vec{v} dV + \int_{\hat{S}} \vec{\tau}_n \cdot \vec{v} ds + \int_{\hat{V}} \vec{T} : \vec{D} dV \quad (68)$$

называется уравнением переноса энергии и формулируется следующим образом: скорость изменения кинетической энергии в движущемся объеме равна разности мощности внешних сил (массовых и поверхностных), действующих на объем, и отнесенной к единице времени величины «диссипации», вызванной работой сил напряжений по деформации объема,

где \vec{f} – вектор единичной массовой силы: $\vec{f} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{\rho \Delta V}$;

$\vec{\tau}_n$ – вектор напряжений: $\vec{\tau}_n = \vec{n} \cdot \vec{T}$;

\vec{T} – тензор напряжений: $\vec{T} = -p\vec{I} + \vec{T}_\tau$, где $\vec{I} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ –

единичный тензор;

\vec{T}_τ – тензор касательных напряжений;

\vec{D} – тензор скоростей деформаций или симметричный тензор, определяемый как $\vec{D}_{ij} = \frac{1}{2} (v_{i,j} + v_{j,i})$;

$\vec{T} : \vec{D}$ – бискалярное произведение тензора напряжений на тензор скоростей деформации: $\vec{T} : \vec{D} = T^{ij} D_{ij}$;

$\int_{\hat{V}} \vec{T} : \vec{D} dV$ – работа, затрачиваемая за единицу времени на

изменение объема и формы элемента жидкости. Некоторая часть энергии переходит при этом в теплоту.

Выведем уравнение (68) переноса энергии.

На основании теоремы переноса

$$\frac{d}{dt} \int_{\hat{V}} \rho F dV = \int_{\hat{V}} \rho \frac{dF}{dt} dV \quad (30)$$

и уравнения в напряжениях

$$\vec{f} + \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \vec{T} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (6)$$

получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \int_{\hat{V}} \rho v^2 dV \right) &= \frac{1}{2} \int_{\hat{V}} \rho \frac{d}{dt} v^2 dV = \frac{1}{2} \int_{\hat{V}} \rho \frac{d}{dt} (\vec{v} \cdot \vec{v}) dV = \\ &= \int_{\hat{V}} \rho \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dV = \int_{\hat{V}} \rho \left(\vec{f} + \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \vec{T} \right) \cdot \vec{v} dV = \int_{\hat{V}} \rho \vec{f} \cdot \vec{v} dV + \int_{\hat{V}} (\nabla \cdot \vec{T}) \cdot \vec{v} dV. \end{aligned} \quad (69)$$

Преобразуем последний интеграл, используя формулу Гаусса – Остроградского:

$$\begin{aligned} \int_{\hat{V}} (\nabla \cdot \vec{T}) \cdot \vec{v} dV &= \int_{\hat{V}} \nabla \cdot (\vec{T} \cdot \vec{v}) dV - \int_{\hat{V}} \vec{T} : \nabla \vec{v} dV = \int_{\hat{S}} \vec{n} \cdot \vec{T} \cdot \vec{v} ds - \\ &- \int_{\hat{V}} \vec{T} : \operatorname{grad} \vec{v} dV = \int_{\hat{S}} \vec{\tau}_n \cdot \vec{v} ds - \int_{\hat{V}} \vec{T} : (\vec{D} + \vec{\Omega}) dV, \end{aligned} \quad (70)$$

здесь $\operatorname{grad} \vec{v} = \vec{D} + \vec{\Omega}$,

\vec{D} – тензор скоростей деформации – симметричный тензор;

$\vec{\Omega}$ – тензор скорости вращения – антисимметричный тензор, а

значит, $\vec{T} : \vec{\Omega} = 0$, так как

$$T^{ij} = T^{ji}, \quad \bar{\Omega}_{ij} = -\bar{\Omega}_{ji};$$

$$\vec{T} : \vec{\Omega} = T^{ij} \bar{\Omega}_{ji} = T^{ij} (-\bar{\Omega}_{ji}) = -T^{ij} \bar{\Omega}_{ij} = 0.$$

Используя соотношения (69) и (70), получим уравнение переноса энергии (68).

4.4. Уравнение переноса энергии при движении идеальной жидкости

Математическая запись

$$\frac{dE_k}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \int_{\hat{V}} \rho v^2 dV \right) = \int_{\hat{V}} \rho \vec{f} \cdot \vec{v} dV - \int_{\hat{S}} p v_n ds + \int_{\hat{V}} p \operatorname{div} \vec{v} dV. \quad (71)$$

Скорость изменения кинетической энергии в движущемся объеме равна разности мощности внешних сил (массовых $\int_{\hat{V}} \rho \vec{f} \cdot \vec{v} dV$ и поверхностных $-\int_{\hat{S}} p v_n ds$) и работы сил давления по изменению объема жидкости ($-\int_{\hat{V}} p \operatorname{div} \vec{v} dV$).

Положительная работа, совершаемая с жидким объемом, соответствует сжатию этого объема, т.е. $(-)\operatorname{div} \vec{v}$.

Доказательство:

В случае движения идеальной жидкости уравнение в напряжениях преобразуется в:

$$\vec{f} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

уравнение Эйлера (динамики идеальной жидкости).

Используя теорему переноса получим:

$$\begin{aligned} \frac{dE_k}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \int_{\hat{V}} \rho v^2 dV \right) = \frac{1}{2} \int_{\hat{V}} \rho \frac{d}{dt} (v^2) dV = \int_{\hat{V}} \rho \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dV = \int_{\hat{V}} \rho \vec{f} \cdot \vec{v} dV - \\ &- \int_{\hat{V}} \nabla p \cdot \vec{v} dV = \int_{\hat{V}} \rho \vec{f} \cdot \vec{v} dV - \int_{\hat{V}} \nabla \cdot (p \vec{v}) dV + \int_{\hat{V}} p (\nabla \cdot \vec{v}) dV = \int_{\hat{V}} \rho \vec{f} \cdot \vec{v} dV - \\ &- \int_{\hat{S}} \vec{n} \cdot (p \vec{v}) ds + \int_{\hat{V}} p \operatorname{div} \vec{v} dV = \int_{\hat{V}} \rho \vec{f} \cdot \vec{v} dV - \int_{\hat{S}} p v_n ds + \int_{\hat{V}} p \operatorname{div} \vec{v} dV; \end{aligned}$$

таким образом теорема доказана.

4.5. Уравнение переноса энергии для случая, если поле массовых сил \vec{f} порождается не зависящим от времени потенциалом (т. е. консервативно)

Здесь используется ранее введенное в курсе механики жидкости и газа понятие потенциальной функции U или потенциальной энергии (удельной): $\vec{f} = -\text{grad } U$, где $U = U(\vec{r})$.

Уравнение переноса энергии запишется в этом случае в виде

$$\frac{d}{dt}(E_k + E_{\Pi}) = \int_{\hat{S}} \vec{t}_n \cdot \vec{v} ds - \int_{\hat{V}} \vec{T} : \vec{D} dV, \quad (72)$$

где $E_{\Pi} = \int_{\hat{V}} \rho U dV$ – потенциальная энергия жидкого объема V ;

U – удельная потенциальная энергия (единицы массы).

Формулировка: скорость изменения полной энергии (суммы кинетической и потенциальной) в движущемся объеме равна разности мощности внешних поверхностных сил и отнесенной к единице времени величины «диссипации», вызванной работой сил напряжений по деформации объема.

Вывод:

$$\begin{aligned} \int_{\hat{V}} \rho \vec{f} \cdot \vec{v} dV &= - \int_{\hat{V}} \rho \text{grad } U \cdot \vec{v} dV = - \int_{\hat{V}} \rho \frac{\partial U}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt} dV = \\ &= - \int_{\hat{V}} \rho \frac{\text{grad } U \cdot d\vec{r}}{dt} dV = - \int_{\hat{V}} \rho \frac{dU}{dt} dV = - \frac{d}{dt} \int_{\hat{V}} \rho U dV = - \frac{dE_{\Pi}}{dt} \end{aligned} \quad (73)$$

(с использованием теоремы переноса).

Подставив полученное значение в выражение (68), получим окончательное выражение (72).

4.6. Уравнение переноса энергии для случая идеальной жидкости и поля массовых сил \vec{f} , порождаемого не зависящим от времени потенциалом

Данное уравнение имеет следующий вид:

$$\frac{d}{dt}(E_k + E_n) = -\int_{\hat{S}} p v_n ds + \int_{\hat{V}} p \operatorname{div} \vec{v} dV, \quad (74)$$

где $E_n = \int_{\hat{V}} \rho U dV$.

Это уравнение получается, если выражение (73) подставить в (71).

В случае несжимаемой жидкости выражение (74) упростится:

$$\frac{d}{dt}(E_k + E_n) = -\int_{\hat{S}} p v_n ds. \quad (75)$$

4.7. Уравнение переноса энергии через фиксированную поверхность S для случая, если поле массовых сил \vec{f} порождается не зависящим от времени потенциалом

Применим к левой части выражения (73) теорему переноса:

$$\frac{d}{dt} \int_{\hat{V}} F dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\hat{V}} F dV + \int_S F \vec{v} \cdot \vec{n} ds. \quad (29)$$

Переходя к фиксированному объему, с учетом стационарности потенциала массовых сил, получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(E_k + E_n) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \int_{\hat{V}} \rho v^2 dV + \int_{\hat{V}} \rho U dV \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \int_{\hat{V}} \rho v^2 dV + \int_{\hat{V}} \rho U dV \right) + \\ &+ \int_S \rho \frac{v^2}{2} v_n ds + \int_S \rho U v_n ds = \int_S \vec{\tau}_n \cdot \vec{v} ds - \int_V \vec{T} : \vec{D} dV \quad \text{при} \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_V \rho U dV \right) = 0, \end{aligned}$$

откуда

$$\frac{d}{dt} \left(\int_V \rho \frac{v^2}{2} dV \right) + \int_S \rho \left(\frac{v^2}{2} + U \right) v_n ds = \int_S \vec{\tau}_n \cdot \vec{v} ds - \int_V \vec{T} : \vec{D} dV; \quad (76)$$

$$\text{так как} \quad \vec{\tau}_n \cdot \vec{v} = \tau_{nn} \cdot v_n + \tau_{n\tau} \cdot v_\tau = \left(\tau_{nn} + \tau_{n\tau} \frac{v_\tau}{v_n} \right) v_n, \quad (76')$$

то введем обозначение

$$E = -\frac{1}{\rho} \frac{\bar{\tau}_n \cdot \vec{v}}{v_n} + U + \frac{v^2}{2} = -\frac{1}{\rho} \left(\tau_{nm} + \tau_{n\tau} \frac{v_\tau}{v_n} \right) + U + \frac{v^2}{2}. \quad (77)$$

Подставив его значение в выражение (76) получим:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \frac{v^2}{2} dV + \int_S \rho E v_n ds + \int_V \vec{T} : \vec{D} dV = 0. \quad (78)$$

Имеем уравнение переноса энергии через фиксированную поверхность S .

4.8. Уравнение переноса энергии через фиксированную поверхность S для случая, если поле массовых сил \vec{f} порождается не зависящим от времени потенциалом и для невязкой несжимаемой жидкости

Для невязкой жидкости

$$\bar{\tau}_n = -p\vec{n}; \quad \tau_{nm} = -p; \quad \tau_{n\tau} = 0.$$

В соответствии с выражением (76')

$$\bar{\tau}_n \cdot \vec{v} = -p v_n.$$

Для несжимаемой невязкой жидкости $\vec{T} : \vec{D} = 0$.

Введя обозначение
$$E = U + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} \quad (79)$$

и подставив полученное ранее соотношение в выражение (76), будем окончательно иметь

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \frac{v^2}{2} dV + \int_S \rho E v_n ds = 0, \quad (80)$$

где
$$E = U + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2}.$$

Для стационарного движения жидкости получим более простое выражение

$$\int_S \rho E v_n ds = 0, \quad (81)$$

где $E = U + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2}$.

4.9. Энергия, передаваемая жидкостью стенкам канала

Мощность, переданная жидкостью стенкам канала (рис.1, параграф 2.6), определяется выражением

$$N = \frac{dA}{dt} = - \int_{S_0} \vec{\tau}_n \cdot \vec{v} ds. \quad (82)$$

Взятая с обратным знаком величина соответствует мощности, передаваемой жидкостью стенками канала.

В дальнейшем N будем называть гидравлической мощностью.

Если канал неподвижен, то $N=0$, так как для модели вязкой жидкости $\vec{v}=0$ на стенке, а для модели идеальной жидкости $\vec{\tau}_n = -\vec{n}p \perp \vec{v}$ ($\vec{\tau}_n \cdot \vec{v} = -p(\vec{n} \cdot \vec{v}) = -pv_n = 0$ на стенке).

Для подвижного канала $\vec{v} = \vec{w} + \vec{u}$ при граничном условии на стенке (при выполнении условия безотрывного течения) для модели вязкой жидкости $\vec{w}=0$, т. е. $\vec{\tau}_n \vec{w} = -\vec{n}p \cdot \vec{w} = -pw_n = 0$.

Из выражения (82) для вращающегося канала имеем

$$N = - \int_{S_0} \vec{\tau}_n \cdot \vec{w} ds - \int_{S_0} \vec{\tau}_n \cdot \vec{u} ds = - \int_{S_0} \vec{\tau}_n \cdot \vec{u} ds = - \int_{S_0} u \tau_{nu} ds = -\omega \int_{S_0} r \tau_{nu} ds. \quad (83)$$

Известно, что $N=M\omega$. (84)

Используя выражение для момента (61), при $v_n - u_n = w_n = 0$ на твердых стенках, и подставляя его в (84) получим

$$N = \rho Q \left[\overline{(uv_u)}_1 - \overline{(uv_u)}_2 \right] + \int_{S_1+S_2} u \tau_{nu} ds - \rho \omega \int_V \frac{\partial'(rv_u)}{\partial t} dV + \rho \int_V uf_u dV. \quad (84')$$

Воспользовавшись далее уравнением переноса энергии (78), в котором $E = -\frac{1}{\rho} \frac{\bar{\tau}_n \cdot \bar{v}}{v_n} + U + \frac{v^2}{2}$, т. е.

$$\int_{S_0} \rho E v_n ds + \int_{S_1+S_2} \rho E v_n ds = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \frac{v^2}{2} dV + \int_V \bar{T} : \bar{D} dV, \quad (85)$$

а также

$$\begin{aligned} \int_{S_0} \rho E v_n ds + \int_{S_0} \rho \left[-\frac{1}{\rho} \frac{\bar{\tau}_n \cdot \bar{v}}{v_n} + U + \frac{v^2}{2} \right] v_n ds = \\ = -\int_{S_0} \bar{\tau}_n \cdot \bar{v} ds + \int_{S_0} \rho \left(U + \frac{v^2}{2} \right) v_n ds, \end{aligned} \quad (86)$$

мощность, переданная поверхности S_0 канала, в общем случае будет определяться, путем подстановки (86) в (85), выражением

$$\begin{aligned} N = -\int_{S_0} \bar{\tau}_n \cdot \bar{v} ds = -\int_{S_1+S_2} \rho E v_n ds - \int_{S_0} \rho \left(U + \frac{v^2}{2} \right) v_n ds - \\ - \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \frac{v^2}{2} dV - \int_V \bar{T} : \bar{D} dV. \end{aligned} \quad (87)$$

Введем понятие осредненной величины мощности потока во входном и выходном сечениях (осредненные энергии, переносимые через входное и выходное сечения в единицу времени):

$$\bar{E}_1 = \frac{1}{Q_1} \int_{S_1} E v_{-n} ds; \quad \bar{E}_2 = \frac{1}{Q_2} \int_{S_2} E v_n ds. \quad (88)$$

В дальнейшем знак осреднения «—» (черточка) будет опущен.

Мощность, переносимая потоком жидкости, определяется как

$$N_{\Pi} = \rho(Q_1 \bar{E}_1 - Q_2 \bar{E}_2) = -\int_{S_1+S_2} \rho E v_n ds. \quad (89)$$

Предположим, что $\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0$, т. е. поле объемных (массовых) сил стационарно. Поэтому допустимо написать (используется ранее

применяемое в параграфе 2.7 правило дифференцирования) следующее:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{v^2}{2} \right) dV = \int_V \frac{\partial'}{\partial t} \rho \left(U + \frac{v^2}{2} \right) dV - \int_S \rho \left(U + \frac{v^2}{2} \right) u_n ds. \quad (90)$$

Подставив значения (89) и (90) в выражение (87), получим

$$\begin{aligned} N = & - \int_{S_0} \bar{\tau}_n \cdot \vec{v} ds = \rho (Q_1 \bar{E}_1 - Q_2 \bar{E}_2) - \int_{S_0} \rho \left(U + \frac{v^2}{2} \right) v_n ds - \int_V \frac{\partial'}{\partial t} \rho \left(U + \frac{v^2}{2} \right) dV + \\ & + \int_{S=S_0+S_1+S_2} \rho \left(U + \frac{v^2}{2} \right) u_n ds - \int_V \bar{T} : \bar{D} dV. \end{aligned}$$

После несложного преобразования принимая во внимание, что $\frac{\partial}{\partial t} U = 0$, будем иметь

$$\begin{aligned} N = & - \int_{S_0} \bar{\tau}_n \cdot \vec{v} ds = \rho (Q_1 \bar{E}_1 - Q_2 \bar{E}_2) - \rho \frac{\partial'}{\partial t} \int_V \frac{v^2}{2} dV - \int_V \bar{T} : \bar{D} dV - \\ & - \int_{S_0} \rho \left(U + \frac{v^2}{2} \right) (v_n - u_n) ds + \int_{S_1+S_2} \left(U + \frac{v^2}{2} \right) u_n ds. \end{aligned} \quad (91)$$

Поскольку (из условий безотрывного обтекания твердых поверхностей) на поверхности S_0 $w_n = v_n - u_n = 0$; $Q_1 = Q_2 = Q$ (в частном случае, когда сечения S_1 и S_2 принадлежат поверхностям вращения, т.е. на поверхностях S_1 и S_2 $u_n = 0$), то последние два интеграла будут равны нулю.

Этот случай представляет наибольший интерес для приложений в гидромашинах, поэтому запишем его отдельно:

$$N = \rho Q (\bar{E}_1 - \bar{E}_2) - \rho \int_V \frac{\partial'}{\partial t} \left(\frac{v^2}{2} \right) dV - \int_V \bar{T} : \bar{D} dV \quad (92)$$

или

$$N_{\Pi} = \rho Q (\overline{E_1} - \overline{E_2}) = M\omega + \rho \int_V \frac{\partial'}{\partial t} \left(\frac{v^2}{2} \right) dV + \int_V \vec{T} : \vec{D} dV. \quad (93)$$

Итак, мощность, расходуемая потоком и равная разности переноса в единицу времени энергии через входное и выходное сечения, передается стенкам вращающегося канала и затрачивается на локальное изменение кинетической энергии массы жидкости в канале и на преодоление внутреннего трения в жидкости.

Мощность, затрачиваемую на локальное изменение кинетической энергии массы жидкости, не следует рассматривать как потерю. Ее интегральное значение может быть и положительным, и отрицательным в отдельные моменты времени. При периодических процессах кинетическая энергия накапливается в одни периоды времени и расходуется в другие так, что суммарное изменение энергии за время одного периода должно быть равно нулю.

Подставим в выражение (93) значение $N = M\omega$ из (84'), в результате чего получим

$$N = \rho Q (\overline{E_1} - \overline{E_2}) = \rho Q \left[(\overline{uv_u})_1 - (\overline{uv_u})_2 \right] + \int_{S_1+S_2} u \tau_{nu} ds + \rho \int_V u f_u dV + \int_V \vec{T} : \vec{D} dV + \rho \int_V \frac{\partial'}{\partial t} \left(\frac{v^2}{2} \right) dV - \rho \omega \int_V \frac{\partial'}{\partial t} (rv_u) dV. \quad (94)$$

Напомним, что левая часть этого соотношения выражает мощность, расходуемую потоком.

Рассмотрим частный случай невязкой, несжимаемой жидкости, если массовые силы имеют проекцию на окружное направление, равную нулю ($f_u = 0$). В этом случае, считая дополнительно, что S_1 и S_2 являются поверхностями вращения, получим

$$M_{\text{гл}} = - \int_{S_{\text{ол}}} r \tau_{nu} \cdot ds = \rho Q_{\text{к}} \left[(\overline{rv_u})_1 - (\overline{rv_u})_2 \right] - M_{\text{тр}}^* - M_{\text{и}};$$

$$\rho \int_V u f_u dV = 0, \text{ так как } f_u = 0;$$

$\int_V \vec{T} : \vec{D} dV = 0$, т.к. $\vec{T} : \vec{D} = 0$ (для невязкой несжимаемой жидкости).

Для преобразования последних двух интегралов (94) рассмотрим выражение:

$$\begin{aligned} \frac{\partial'}{\partial t} \left(\frac{v^2}{2} \right) - \omega \frac{\partial'}{\partial t} (rv_u) &= \frac{\partial'}{\partial t} \left(\frac{v^2}{2} \right) - \frac{\partial'}{\partial t} \left(\frac{2uv_u}{2} \right) + rv_u \frac{\partial' \omega}{\partial t} + \frac{\partial'}{\partial t} \left(\frac{u^2}{2} \right) - \\ - \frac{\partial'}{\partial t} \left(\frac{u^2}{2} \right) &= \frac{\partial'}{\partial t} \left(\frac{v^2 - 2uv_u + u^2}{2} \right) + rv_u \frac{\partial' \omega}{\partial t} - ru \frac{\partial' \omega}{\partial t} = A. \end{aligned}$$

Примем во внимание следующее:

$$1) \quad v^2 - 2uv_u + u^2 = v^2 - 2uv \cos(uv) + u^2 = w^2,$$

где w – относительная скорость, v – абсолютная скорость, u – переносная скорость, $\vec{v} = \vec{u} + \vec{w}$;

$$2) \quad rv_u - ru = r(v_u - u) = r(\vec{v} - \vec{u})u = rw_u;$$

$$3) \quad \frac{\partial' \omega}{\partial t} = \frac{d' \omega}{dt} = \frac{d\omega}{dt} + \underbrace{\frac{\partial \omega}{\partial r} \frac{dr}{dt}}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial \omega}{r \partial \Theta} \frac{rd\Theta}{dt}}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial \omega}{\partial Z} \frac{dZ}{dt}}_{=0} = \frac{d\omega}{dt}.$$

Исходя из этого получим $A = \frac{\partial'}{\partial t} \left(\frac{w^2}{2} \right) - rw_u \frac{d\omega}{dt}$.

С учетом вышеизложенного, выражение (94) запишем в виде

$$\begin{aligned} N_n &= \rho Q (\overline{E_1} - \overline{E_2}) = \rho Q \left[\overline{(uv_u)_1} - \overline{(uv_u)_2} \right] + \rho \int_V \frac{\partial'}{\partial t} \left(\frac{w^2}{2} \right) dV + \\ &+ \rho \frac{d\omega}{dt} \int_V rw_u dV. \end{aligned} \quad (95)$$

При стационарном режиме течения выражение (95) упростится и мы получим

$$N_n = \rho Q (\overline{E_1} - \overline{E_2}) = \rho Q \left[\overline{(uv_u)_1} - \overline{(uv_u)_2} \right] \quad (96)$$

или

$$\overline{E_1} - \overline{E_2} = \omega \left[\overline{(rv_u)_1} - \overline{(rv_u)_2} \right]. \quad (97)$$

Следовательно, при отсутствии в канале гидравлических потерь, связанных с затратами энергии на преодоление внутренних сил трения, удельная энергия, расходуемая потоком и отдаваемая стенкам канала, равна произведению угловой скорости и разности моментов количеств движения во входном и выходном сечениях канала.

Итак, получены общие выражения в интегральной форме для мощности, передаваемой потоком жидкости стенкам канала.

Очевидно, может иметь место течение, когда от стенок канала передается механическая энергия к жидкости.

В этом случае

$$N_{\text{ж}} = \int_{S_0} \bar{\tau}_n \cdot \bar{v} ds; \quad M_{\text{ж}} = \int_{S_0} r \tau_{nu} ds \quad (98)$$

и вместо (11) можно записать:

$$N_{\text{ж}} = \rho Q (\bar{E}_2 - \bar{E}_1) + \rho \int_V \frac{\partial'}{\partial t} \left(\frac{v^2}{2} \right) dV + \int_V \bar{T} : \bar{D} dV. \quad (99)$$

Механическая энергия, передаваемая от стенок канала к жидкости в единицу времени, затрачивается на увеличение механической энергии жидкости, определяемой разностью переноса энергии через выходное и входное сечения, а также на локальное изменение кинетической энергии жидкости в канале (во вращающейся системе координат) и на работу внутренних сил.

Аналогично (94) запишем:

$$\begin{aligned} \rho Q \left[(\overline{uv_u})_2 - (\overline{uv_u})_1 \right] &= \rho Q (\bar{E}_2 - \bar{E}_1) + \rho \int_V \frac{\partial'}{\partial t} \left(\frac{v^2}{2} \right) dV - \\ &- \rho \omega \int_V \frac{\partial'}{\partial t} (rv_u) dV + \int_V \bar{T} : \bar{D} dV + \int_{S_1+S_2} u \tau_{nu} ds + \rho \int_V u f_u dV. \end{aligned} \quad (100)$$

Для частного случая невязкой несжимаемой жидкости при $f_u = 0$ и при условии, если S_1 и S_2 являются поверхностями вращения, аналогично (95) получим

$$\rho Q \left[(\overline{uv_u})_2 - (\overline{uv_u})_1 \right] = \rho Q (\bar{E}_2 - \bar{E}_1) + \rho \int_V \frac{\partial'}{\partial t} \left(\frac{w^2}{2} \right) dV - \rho \frac{d\omega}{dt} \int_V r w_u dV; \quad (101)$$

при стационарном режиме течения

$$\rho Q \left[\overline{(uv_u)}_2 - \overline{(uv_u)}_1 \right] = \rho Q (\overline{E}_2 - \overline{E}_1) \quad (102)$$

или

$$\omega \left[\overline{(rv_u)}_2 - \overline{(rv_u)}_1 \right] = \overline{E}_2 - \overline{E}_1. \quad (103)$$

Следовательно, для невязкой жидкости удельная энергия, переданная потоку, равна произведению угловой скорости и разности моментов количеств движения в выходном и входном сечениях.

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте закон сохранения (изменения) энергии и перечислите основные уравнения получаемые из этого закона.
2. В каких случаях при математическом моделировании потока применяются интегральные формы законов сохранения.
3. Поясните физический смысл слагаемых входящих в уравнение переноса энергии для случая идеальной жидкости и поля массовых сил, порожденным не зависящим от времени потенциалом, а также в каких случаях при математическом моделировании потока может быть использовано это уравнение.
4. Поясните физический смысл слагаемых, входящих в выражение для энергии передаваемой жидкостью стенкам канала, в случае идеальной и вязкой жидкости.

5. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПОТОКА С РАБОЧИМ КОЛЕСОМ

5.1. Момент на рабочем колесе относительно оси вращения

Обозначим поверхность, через которую жидкость втекает в рабочее колесо через S_1 (рис. 1 параграф 2.6) и вытекает через S_2 . Пусть S_0 – поверхность проточной части рабочего колеса, представляющая

собой твердую непроницаемую поверхность, вращающуюся вместе с колесом.

Для рабочего колеса с наружным ободом

$$S_{\text{ор}} = S_{\text{ол}} + S_{\text{оа}} + S_{\text{ов}}; S_0 = S_{\text{ор}}, \quad (104)$$

где $S_{\text{ол}}$ – поверхность лопастей колеса; $S_{\text{оа}}$ – поверхность втулки (ступицы) колеса; $S_{\text{ов}}$ – поверхность обода.

Для рабочего колеса осевой или диагональной гидромашины без наружного обода

$$S_{\text{ор}} = S_{\text{ол}} + S_{\text{оа}}; S_0 = S_{\text{ор}} + S_{\text{ов}}; \quad (105)$$

здесь $S_{\text{ов}}$ – поверхность, ограничивающая проточную часть рабочего колеса, но не принадлежащая колесу и не вращающаяся вместе с ним.

Поверхность S , ограничивающая жидкость в области рабочего колеса, представляется в виде суммы:

$$S = S_0 + S_1 + S_2. \quad (106)$$

Принимаем далее, что центр масс жидкости в области колеса находится на оси вращения (оси симметрии).

Для колеса, имеющего наружный обод, гидравлический момент сил воздействия потока, протекающего через колесо, в соответствии с выражением (61) при условии, что $f_u = 0$ и $w_n = 0$ на поверхности твердых стенок, будет определяться как

$$M_{\Gamma} = - \int_{S_0} r \tau_{nu} ds = \rho Q_{\text{к}} \left[\overline{(rv_u)}_1 - \overline{(rv_u)}_2 \right] + \int_{S_1+S_2} r \tau_{nu} ds - \rho \int_V \frac{\partial'(rv_u)}{\partial t} dV; \quad (107)$$

здесь $Q_{\text{к}}$ – расход через рабочее колесо.

Момент трения сил воздействия жидкости, заключенной в объеме V через поверхности S_1 и S_2 на жидкость вне объема V , определяется выражением

$$M_{\text{тр}} = - \int_{S_1+S_2} r \tau_{nu} ds$$

Инерционный момент, появляющийся при нестационарном течении записывается

$$M_{\text{и}} = \rho \int_V \frac{\partial'(rv_u)}{\partial t} dV.$$

Следовательно

$$M_{\Gamma}^{(\text{т})} = \rho Q_{\text{к}} [\overline{(rv_u)}_1 - \overline{(rv_u)}_2] - M_{\text{тр}} - M_{\text{и}}. \quad (108)$$

Момент, развиваемый жидкостью на рабочем колесе гидротурбины, равен изменению момента количества движения между входным и выходным сечениями за вычетом момента $M_{\text{тр}}$ сил трения в этих сечениях и инерционного момента $M_{\text{и}}$, затрачиваемого на увеличение момента количества движения жидкости в области рабочего колеса.

Не составляет труда написать аналогичное выражение и для насосного рабочего колеса. В соответствии с выражением (62) имеем

$$M_{\Gamma}^{(\text{н})} = \int_{S_0} r \tau_{nu} ds = \rho Q_{\text{к}} [\overline{(rv_u)}_2 - \overline{(rv_u)}_1] + M_{\text{тр}} + M_{\text{и}}. \quad (109)$$

Это означает, что гидравлический момент, переданный от рабочего колеса к жидкости, равен сумме изменения момента количества движения в выходном и входном сечениях, момента трения $M_{\text{тр}}$ и инерционного момента $M_{\text{и}}$.

Объединяя формулы (108) и (109), получим общую формулу, справедливую как для турбинного, так и для насосного колес:

$$\left(\begin{matrix} \text{т} \\ \pm \\ \text{н} \end{matrix} \right) M_{\Gamma} = \rho Q_{\text{к}} [\overline{(rv_u)}_1 - \overline{(rv_u)}_2] - M_{\text{тр}} - M_{\text{и}}, \quad (110)$$

где знак (+) соответствует турбинному колесу, а знак (–) – насосному.

При условии стационарного течения $M_{\text{и}} = 0$. В большинстве практически интересных режимов работы гидромашин момент силы трения в сечениях S_1 и S_2 существенно меньше, чем момент на рабочем колесе. Поэтому распространена приближенная формула для стационарного течения

$$\left(\begin{matrix} \text{т} \\ \pm \\ \text{н} \end{matrix} \right) M_{\Gamma} = \rho Q_{\text{к}} [\overline{(rv_u)}_1 - \overline{(rv_u)}_2]. \quad (111)$$

В большинстве расчетов эта формула дает удовлетворительную точность.

Введем понятие средней циркуляции для входного и выходного сечений:

$$\overline{\Gamma}_1 = 2\pi \overline{(rv_u)}_1 \quad \text{и} \quad \overline{\Gamma}_2 = 2\pi \overline{(rv_u)}_2. \quad (112)$$

Тогда

$$\begin{matrix} (\tau) \\ \pm \\ (\text{н}) \end{matrix} M_{\Gamma} = \frac{\rho Q_{\kappa}}{2\pi} (\overline{\Gamma}_1 - \overline{\Gamma}_2). \quad (113)$$

При условии $\overline{\Gamma}_1 = \overline{\Gamma}_2$ гидравлический момент на рабочем колесе будет равен нулю.

Формулы (111) и (113) являются точными для стационарного движения невязкой жидкости.

Гидравлический момент на лопастях рабочего колеса определяется выражением

$$\pm M_{\text{ГЛ}} = - \int_{S_{\text{ОЛ}}} r \tau_{nu} \cdot ds = \rho Q_{\kappa} [\overline{(rv_u)}_1 - \overline{(rv_u)}_2] - M_{\text{ТР}}^* - M_{\text{и}}, \quad (114)$$

где
$$M_{\text{ТР}}^* = - \int_{S-S_{\text{ОЛ}}} r \tau_{nu} \cdot ds = M_{\text{ТР}} + M'_{\text{ТР}}, \quad (M'_{\text{ТР}} = - \int_{S_{\text{ОА}}-S_{\text{ОВ}}} r \tau_{nu} \cdot ds)$$

есть момент сил трения в сечениях S_1 и S_2 , а также на ограничивающих поверхностях $S_{\text{ОА}}$ и $S_{\text{ОВ}}$.

Если из формулы (110) вычесть (114), то получим

$$M_{\Gamma} = M_{\text{ГЛ}} \pm M'_{\text{ТР}}. \quad (115)$$

Итак, гидравлический момент на колесе складывается из момента гидравлической силы $M_{\text{ГЛ}}$, действующей на лопасти колеса, и из момента трения жидкости $M'_{\text{ТР}}$ на ограничивающих проточную часть колеса поверхностях $S_{\text{ОА}}$ и $S_{\text{ОВ}}$.

Можно показать, что в большинстве случаев $M'_{\text{ТР}}$ – отрицательная величина, действующая против направления вращения рабочего колеса. Следовательно, в турбинном колесе момент на лопастях больше, чем на колесе, а в насосном меньше.

Гидравлический момент на колесе без наружного обода можно найти используя те же формулы:

$$\pm M_{\Gamma} = \rho Q_{\kappa} \left[\overline{(rv_u)}_1 - \overline{(rv_u)}_2 \right] - M_{\text{тр}} - M_{\text{и}}, \quad (116)$$

где

$$M_{\text{тр}} = - \int_{S_1-S_2} r \tau_{nu} \cdot ds - \int_{S_{\text{ов}}} r \tau_{nu} \cdot ds, \quad (117)$$

здесь последний интеграл в правой части представляет собой момент сил трения, действующий со стороны жидкости в рабочем колесе на поверхность неподвижной камеры. В турбине и насосе этот член дает момент, совпадающий по знаку с направлением вращения колеса.

Следовательно, трение на поверхности неподвижной камеры в турбине уменьшает величину гидравлического момента на колесе, а в насосе увеличивает, при условии сохранения неизменной величины разности циркуляций.

Оценим члены, входящие в формулу (117). Первый член определяет момент от сил трения по поверхностям S_1 и S_2 , проведенным внутри жидкости, а второй член – по ограничивающей поток твердой поверхности. Известно, что наибольшее проявление вязкости жидкости и наибольшие касательные напряжения имеют место не внутри жидкости, а на твердых ограничивающих поверхностях в пределах тонкого пограничного слоя. Напряжения τ_{nu} на S_1 и S_2 весьма малы и в ряде случаев первым интегралом в формуле (117) можно пренебречь. В то же время напряжения τ_{nu} на $S_{\text{ов}}$ при турбулентном течении существенны и момент, определяемый вторым интегралом, может играть заметную роль в балансе моментов.

Итак, получены общие выражения для определения момента на рабочем колесе от протекающей через него жидкости.

В колесе имеется также группа поверхностей, которые непосредственно не обтекаются рабочим потоком, но в то же время находятся в контакте с жидкостью и на них также возможно гидравлическое воздействие (поверхности колеса, контактирующие с жидкостью, расположенной между неподвижными частями турбины и

вращающимся ободом и втулкой). Все эти поверхности являются поверхностями вращения и в общем случае на них действует момент

$$M_{\text{т.нар}} = - \int_{S_{\text{нар}}} r \tau_{ni} \cdot ds, \quad (118)$$

где $S_{\text{нар}}$ – это наружная поверхность колеса, τ_{ni} – касательное напряжение на $S_{\text{нар}}$

Момент $M_{\text{т.нар}}$ противоположен направлению вращения колеса и представляет собой момент сопротивления.

Следовательно, момент на валу

$$M_{\text{в}} = M_{\text{г}} \begin{matrix} (\text{н}) \\ + \\ (\text{т}) \end{matrix} M_{\text{т.нар}}, \quad (119)$$

где верхний знак соответствует насосу, а нижний – турбине.

В общем случае для турбулентного течения напряжения необходимо определять по формулам, включающим пульсационные компоненты скорости, обуславливающие перенос количества движения.

Однако турбулентные напряжения на твердой стенке равны нулю, так как благодаря «прилипанию» жидкости к стенке на ней $\vec{v}' = 0$ и $\vec{\tau}'_n = 0$. Следовательно, турбулентные напряжения необходимо учитывать только при вычислении интегралов по поверхностям S_1 и S_2 .

При этом

$$\tau_{ni} = \bar{\tau}_{ni} + \tau'_{ni}, \quad (120)$$

$$\text{где } \bar{\tau}_{ni} = \mu \left(\frac{\partial \bar{v}_n}{r \partial \Theta} + \frac{\partial v_u}{\partial n} \right), \quad \tau'_{ni} = -\overline{\rho v'_n v'_u}. \quad (121)$$

Инерционный момент в соответствии с формулой (65) определяется выражением

$$M_{\text{и}} = \rho \int_V \frac{\partial'(r v_u)}{\partial t} dV = \rho \int_V \frac{\partial'(r w_u)}{\partial t} dV + I_Z \frac{d\omega}{dt}, \quad (122)$$

где I_Z – момент инерции жидкости в колесе (в объеме V) относительно оси OZ .

5.2. Гидравлическая мощность на рабочем колесе

Применим формулы, полученные в параграфе (4.9) для энергии, передаваемой жидкостью стенкам канала, к рабочему колесу гидравлической турбины при наличии наружного обода.

Из формулы (92) следует, что энергия, отданная в единицу времени рабочему колесу при протекании через него жидкости,

$$N = \rho Q_k (\bar{E}_1 - \bar{E}_2) - \rho \int_V \frac{\partial'}{\partial t} \left(\frac{v^2}{2} \right) dV - \int_V \bar{T} : \bar{D} dV, \quad (123)$$

где V – объем, заключенный в рабочем колесе и ограниченный поверхностью S ; $\bar{T} : \bar{D}$ – удельная, отнесенная к единице объема, мощность внутренних сил. Второй член в правой части уравнения зависит от локального изменения кинетической энергии жидкости и отличен от нуля при неустановившемся течении.

Механическая энергия, отданная жидкостью рабочему колесу гидротурбины, преобразуется в механическую энергию вращающегося колеса ($N_\Gamma = M_\Gamma \omega$) и частично теряется ($N_{\text{пот}} = \rho Q_k \bar{e}_k$), т. е.

$$\rho Q_k (\bar{E}_1 - \bar{E}_2) = M_\Gamma \omega + N_{\text{пот}} = N_\Gamma^{(\Gamma)}. \quad (124)$$

Для насоса справедливо следующее выражение:

$$N_\Gamma^{(\text{H})} = M_\Gamma \omega = \rho Q_k (\bar{E}_2 - \bar{E}_1) + N_{\text{пот}}, \quad (125)$$

где $N_{\text{пот}} = \rho Q_k \bar{e}_k$.

В насосном колесе энергия, подведенная от внешнего источника, затрачивается на увеличение механической энергии жидкости, выражаемой первым членом выражения (125), и частично теряется на преодоление сопротивления внутренних сил трения.

Формулы (124) и (125) можно объединить:

$$\begin{pmatrix} \Gamma \\ \text{H} \end{pmatrix} M_\Gamma \omega = \rho Q_k (\bar{E}_1 - \bar{E}_2) - \rho Q_k \bar{e}_k, \quad (126)$$

где $\rho Q_k \bar{e}_k = N_{\text{пот}}$.

Знак (+) соответствует турбинному колесу, а знак (–) – насосному.

Для потока невязкой жидкости получим

$$\frac{(\tau)}{(\text{н})} M_{\Gamma} \omega = \rho Q_{\text{к}} (\overline{E_1} - \overline{E_2}), \quad (127)$$

т. е. гидравлическая мощность на колесе равна изменению мощности потока.

Момент на валу отличается от гидравлического момента на величину момента трения на наружных поверхностях колеса.

Следовательно, мощность на валу

$$N_{\text{в}} = M\omega = M_{\Gamma} \omega \pm \frac{(\text{н})}{(\tau)} N_{\text{т.нар}}, \quad (128)$$

где $N_{\text{т.нар}}$ – мощность трения на наружных поверхностях. Верхний знак (+) – для насоса.

Для переходных режимов можно написать:

$$\pm M_{\Gamma} \omega = \rho Q_{\text{к}} (\overline{E_1} - \overline{E_2}) - \rho Q_{\text{к}} \overline{e_{\text{к}}} - \rho Q_{\text{к}} \overline{e_{\text{и}}}, \quad (129)$$

где
$$\overline{e_{\text{к}}} = \frac{1}{\rho Q_{\text{к}} \dot{V}} \int \vec{T} : \vec{D} dV, \quad \overline{e_{\text{и}}} = \frac{1}{Q_{\text{к}} \dot{V}} \int \frac{\partial'}{\partial t} \left(\frac{v^2}{2} \right) dV.$$

5.3. Теоретический напор. Коэффициент полезного действия

Широкое распространение имеет запись уравнения (126), в котором используется выражение удельной энергии

$$H = Z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g}.$$

В этом случае вместо выражения (126) можем записать:

$$\pm M_{\Gamma} \omega = \gamma Q_{\text{к}} (\overline{H_1} - \overline{H_2}) - \rho Q_{\text{к}} \overline{h_{\text{к}}}, \quad (130)$$

где $\overline{h_{\text{к}}} = \frac{\overline{e_{\text{к}}}}{g}$ – потеря напора в рабочем колесе.

Обозначим:

$$\pm H_{\kappa} = \overline{H_1} - \overline{H_2}; \quad H_T = \frac{M_T \omega}{\gamma Q_{\kappa}}. \quad (131)$$

Здесь H_{κ} – напор рабочего колеса, который представляет собой разность полных напоров на входе и выходе колеса; H_T – теоретический напор, который является удельной энергией, полученной колесом от жидкости (турбина) или подведенной извне (насос).

Используя обозначение (131), напомним:

$$\pm H_T = \pm H_{\kappa} - h_{\kappa} \text{ (верхний знак для турбины)}. \quad (132)$$

Воспользуемся формулой (116) для определения теоретического напора при стационарном режиме течения:

$$\pm H_T = \frac{\omega}{g} \left[\overline{(rv_u)_1} - \overline{(rv_u)_2} \right] - h_{\text{тр}}, \quad (133)$$

где $h_{\text{тр}} = \frac{M_{\text{тр}} \omega}{\gamma Q_{\kappa}}$ – удельная энергия, затраченная на трение по поверхностям ($S_1 + S_2$) и $S_{\text{об}}$.

Отмечалось, что момент трения на поверхностях S_1 и S_2 относительно невелик. Интеграл по поверхности $S_{\text{об}}$ вычисляется только в колесе без наружного обода. Поэтому часто пренебрегают относительно малой величиной $h_{\text{тр}}$ на основных рабочих режимах.

Тогда, приближенно, для рабочего колеса турбины можно записать выражение

$$H_T^{(\text{т})} = \frac{\omega}{g} \left[\overline{(rv_u)_1} - \overline{(rv_u)_2} \right] = \frac{\omega}{2\pi g} (\overline{\Gamma_1} - \overline{\Gamma_2}), \quad (134)$$

а для насосного колеса – выражение

$$H_T^{(\text{н})} = \frac{\omega}{g} \left[\overline{(rv_u)_2} - \overline{(rv_u)_1} \right] = \frac{\omega}{2\pi g} (\overline{\Gamma_2} - \overline{\Gamma_1}). \quad (135)$$

Выражения (134) и (135) являются одной из форм записи уравнения Эйлера для гидромашин и играют весьма важную роль в теории рабочего процесса лопастных гидромашин. Они связывают осредненные кинематические параметры потока в двух контрольных сечениях (перед и за колесом) с теоретическим напором.

В турбинном колесе осуществляется передача энергии от жидкости в том случае, если циркуляция (момент скорости) перед колесом больше, чем соответствующая величина за колесом. Теоретический напор пропорционален разности циркуляций и угловой скорости.

В насосном колесе циркуляция увеличивается от входа а выходу.

Введем понятие гидравлического коэффициента полезного действия (КПД) колеса $\eta_{ГК}$ для насосного колеса в соответствии с выражениями (131) и (132):

$$\eta_{ГК}^{(H)} = \frac{\gamma Q_k H_k}{M_{Г} \omega} = \frac{H_k}{H_T} = \frac{H_k}{H_k + h_k} = \frac{1}{1 + \frac{h_k}{H_k}}, \quad (136)$$

здесь $\eta_{ГК}^{(H)}$ – отношение полезной мощности, сообщённой жидкости, к мощности потребляемой рабочим колесом.

Для турбинного колеса запишем выражение

$$\eta_{ГК}^{(T)} = \frac{M_{Г} \omega}{\gamma Q_k H_k} = \frac{H_T}{H_k} = \frac{H_k - h_k}{H_k} = 1 - \frac{h_k}{H_k}; \quad (137)$$

здесь $\eta_{ГК}^{(T)}$ – отношение гидравлической мощности, развиваемой колесом на валу турбины, к полной мощности, израсходованной потоком при протекании через рабочее колесо.

Коэффициентом полезного действия насосного колеса назовем отношение полезной мощности к мощности, подведенной от вала насоса к колесу:

$$\eta_k^{(H)} = \frac{\gamma Q_k H_k}{M \omega} = \frac{\gamma Q_k H_k}{M_{Г} \omega} \frac{M_{Г} \omega}{M \omega} = \eta_{ГК}^{(H)} \cdot \eta_{МК}^{(H)}, \quad (138)$$

$$\eta_{МК}^{(H)} = \frac{M_{Г} \omega}{M \omega} = \frac{M_{Г} \omega}{M_{Г} \omega + N_{Т.нар}} = \frac{1}{1 + \frac{N_{Т.нар}}{N_{Г}}}, \quad (139)$$

здесь $\eta_{МК}^{(H)}$ – механический КПД насоса, зависящий от относительной величины потерь на трение на наружных поверхностях колеса (потерь на дисковое трение).

Следовательно, КПД колеса насоса определяется произведением гидравлического $\eta_{ГК}^{(Т)}$ и механического $\eta_{МК}^{(Н)}$ коэффициентов полезного действия.

Аналогично получим коэффициент полезного действия для турбинного колеса:

$$\eta_{К}^{(Т)} = \frac{M\omega}{\gamma Q_{К} H_{К}} = \frac{M_{Г}\omega}{\gamma Q_{К} H_{К}} \frac{M\omega}{M_{Г}\omega} = \eta_{ГК}^{(Т)} \cdot \eta_{МК}^{(Т)}, \quad (140)$$

где

$$\eta_{МК}^{(Т)} = \frac{M\omega}{M_{Г}\omega} = \frac{M_{Г}\omega - N_{Т.нар}}{M_{Г}\omega} = 1 - \frac{N_{Т.нар}}{N_{Г}}. \quad (141)$$

В этих выражениях $Q_{К}$ – это теоретический (т. е. без учета потерь на протечки, минуя лопастную систему) расход. Правильнее было бы его обозначить как $Q_{ТК}$.

Учитывая объемные потери, получим для турбины

$$Q_{К}^{(Т)} = Q_{ТК}^{(Т)} - \Delta Q = Q_{ТК}^{(Т)} \left(1 - \frac{\Delta Q}{Q_{ТК}^{(Т)}} \right) = Q_{ТК}^{(Т)} \left(1 - \zeta_{Пот} \right) = \eta_{Об} Q_{ТК}^{(Т)}, \quad (142)$$

т. е. $Q_{ТК}^{(Т)} = \frac{Q_{К}^{(Т)}}{\eta_{Об}};$

для насоса

$$Q_{К}^{(Н)} = Q_{ТК}^{(Н)} + \Delta Q, \quad \text{откуда } Q_{ТК}^{(Н)} = Q_{К} - \Delta Q = \eta_{Об} Q_{К}^{(Н)}. \quad (143)$$

Таким образом, для турбины и насоса

$$\eta_{К} = \eta_{ГК} \cdot \eta_{МК} \cdot \eta_{Об.К}, \quad (144)$$

т. е. суммарный КПД рабочего колеса равен произведению гидравлического, механического и объемного КПД.

Вопросы для самоконтроля

1. Поясните физический смысл слагаемых, входящих в интегральные (суммарные) характеристики взаимодействия потока с рабочим колесом гидротурбины.

2. Выражение связывающее гидравлический момент, передаваемый потоком на рабочее колесо и «сработку» циркуляции потока на рабочем колесе.

3. Поясните физический смысл слагаемых в выражениях для определения гидравлической мощности на рабочем колесе и виды потерь.

4. Гидравлический, механический, объемный и полный коэффициент полезного действия рабочего колеса гидротурбины и их физический смысл.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Викторов Г. В. Гидродинамическая теория решеток / Г.В. Викторов. – М. : Высш. шк., 1969.

2. Викторов Г. В. Общие основы теории : учеб. пособие по курсу "Теория лопастных гидромашин" / Г. В. Викторов. – М. : МЭИ, 1978.

3. Викторов Г. В. Классификация гидромашин и баланс энергии : учеб. пособ. / Г. В. Викторов. – М. : МЭИ, 1979.

4. Гутовский Е. В. Теория и гидродинамический расчет гидротурбин / Е. В. Гутовский, А. Ю. Колтон. – Л. : Машиностроение, 1974.

5. Этинберг И. Э. Теория и расчет проточной части поворотно-лопастных гидротурбин / И. Э. Этинберг. – Л. : Машиностроение, 1965.

6. Этинберг И. Э. Гидродинамика гидротурбин / И. Э. Этинберг, В. С. Раухман. – Л.: Машиностроение, 1978.

7. Топаж Г. И. Расчет интегральных гидравлических показателей гидротурбин / Г. И. Топаж. – Л.: изд-во Ленинград. ун-та, 1989.

8. Орго В. М. Гидротурбины. / В. М. Орго. – Л. : изд-во Ленинград. ун-та, 1975.

9. Кривченко Г. И. Гидравлические машины. / Г. И. Кривченко. – М. : Энергия, 1983.

10. Смирнов И. Н. Гидравлические турбины и насосы / И. Н. Смирнов. – М. : Высш. шк., 1969.
11. Степанов Г. Ю. Гидродинамика решеток турбомашин / Г. Ю. Степанов. – М. : Физматгиз, 1962.
12. Гряно Л. П. Обратимые гидромашины / Л. П. Гряно. – Л. : Машиностроение, 1981.
13. Рудаев С. С. Основы теории лопастных решеток : учеб. пособ. / С. С. Рудаев. – М. : МВТУ, 1976.
14. Кириллов И. И. Теория турбомашин / И. И. Кириллов. – Л. : Машиностроение, 1972.
15. Барлит В. В. Гидравлические турбины / В. В. Барлит. – К. : Высш. шк., 1977.
16. Количев В. О. Кінематичні характеристики потоку в лопатевих гідромашинах : навч. посіб. / В. О. Количев. – К. : ІЗМН, 1997. – 264 с.

Навчальне видання

ПОТЕТЕНКО Олег Васильович
ДРАНКОВСЬКИЙ Віктор Едуардович
КРУПА Євгеній Сергійович

ЗАГАЛЬНІ ОСНОВИ ТЕОРІЇ ЛОПАТЕВИХ ГІДРОМАШИН

Навчально-методичний посібник з курсу «Механіка рідини та газу» та «Гідродинамічна теорія лопатевих гідромашин» для іноземних студентів і аспірантів спеціальності «Гідроенергетика»

Російською мовою

Відповідальний за випуск К. А. Миронов
Роботу до видання рекомендував Г. А. Крутиков

Редактор Л. Л. Яковлева

План 2014 р., поз. 190

Підп. до друку 2015 р. Формат 60x84 1/16. Папір офсетний.
Riso-друк. Гарнітура Таймс. Ум. друк. арк.
Наклад 100 прим. Зам. № Ціна договірна

Видавничий центр НТУ «ХП».
Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 3657 від 24.12.2009 р.
61002, Харків, вул. Фрунзе, 21

Друкарня НТУ «ХП». 61002, Харків, вул. Фрунзе, 21