УДК 678.05:004.2

І. О. КАЗАК

ДОСЛІДЖЕННЯ ПРОЦЕСУ ТЕПЛОПЕРЕДАЧІ ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ ЧИСЕЛЬНОГО МЕТОДУ ЕЙЛЕРА В ІНЖЕНЕРНІЙ ПРАКТИЦІ МАШИНОБУДІВЕЛЬНИХ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ

В статті розглядається застосування чисельного методу Ейлера для отримання рішень диференційної моделі процесу нестаціонарної теплопередачі, дослідження стійкості та збіжності отриманих рішень на прикладі алгоритмізації і програмування у Фортрані в середовищі MSDev із застосуванням методу Ейлера. Процес теплопередачі часто зустрічається в інженерній практиці машинобудівельних спеціальностей, тому його дослідження при різних умовах із застосуванням методу Ейлера є дуже актуальним.

Ключові слова: диференційна модель, метод Ейлера, чисельний, диференційні рівняння, програма, нестаціонарна, процес, теплопередача, машинобудівельні спеціальності, функція.

Вступ. Завжди було і остається у сучасний час актуальним питанням дослідження для інженерів-механіків хімічного машинобудування вирішення інженерної задачі процесу теплопередачі для тепломеханічного обладнання хімічних виробництв і будівельних підприємств, яку нами пропонується розв'язати на базі звичайних диференційних рівнянь за методом Ейлера. Це пов'язано з тим, що процес теплопередачі відбувається крізь в теплообмінному обладнанні хімічних виробництв і будівельних підприємств, в наслідок чого і підлягає дослідженню в інженерній практиці машинобудівельних спеціальностей.

Мета роботи. Метою даної роботи являється застосування чисельного методу Ейлера для отримання рішень диференційних моделей процесу нестаціонарної теплопередачі за допомогою розробленої програми у Фортрані в середовищі MSDev для дослідження стійкості та збіжності отриманих рішень графічно для подальшого їх аналізу в інженерній практиці машинобудівельних спеціальностей.

Методика експериментів дослідження процесу нестаціонарної теплопередачі із застосуванням чисельного методу Ейлера. Історично першим і найбільш простим способом чисельного розв'язання звичайних диференціальних рівнянь першого порядку наведеного нижче є метод Ейлера. Він може бути використаний для приближеного рішення звичайних диференційних рівнянь [1 - 5].

Тепер розглянемо наше дослідження детальніше. Нехай дано диференційне рівняння першого порядку з початковими даними y(xo)=yo, на відрізку x=xo…xn., у вигляді:

$$y`=f(x,y)$$

Уведемо позначення: $xi=xo+i\cdot h$ та $yi=y(xi)$, де $i=0,1,2…n$, h – крок сітки на відрізку xo…xn.

Згідно методу Ейлера послідовні значення y_i шуканої функції y визначаються виразом:

$$y_{i+1}=y_i+h\cdot f(x,y)$$

Нашою задачею являється скласти математичну модель для визначення температури об'єкту T в залежності від часу t та отримати її вирішення, якщо відомі: K – коефіцієнт теплопередачі; T_o – початкова температура об'єкту; $T_{ср}(t)$ – закон зміни температури оточуючого середовища, $t_{ох}$ – час спостереження. Такі задачі широко застосовуються у дослідженнях інженерів-механіків з напряму підготовки «Машинобудування», як у навчальному процесі, так і у професійній діяльності.

Складемо математичну модель на прикладі визначення температури T=T(t) об'єкту досліджень у будь-який момент часу t>0 за умови відомої температури оточуючого середовища Тсеред=Тсеред(t), яка представлена диференційним рівнянням:

$$dT/dt=K\cdot(T-T_{серед}),$$

де T - температура об'єкту, ^oC; Тсеред - температура оточуючого середовища, ^oC; K – коефіцієнт теплопередачі, $\frac{Вт}{м^2\cdot{}^oC}$; dT/dt – відношення диференціалів зміни температури об'єкту у часі; K=K(t) – досліджуваний коефіцієнт нестаціонарної теплопередачі (може бути константою), що залежить від умов оточення, форми та властивостей самого об'єкту [6, 7].

Застосування методу Ейлера дозволяє чисельно проінтегрувати вихідне диференційне рівняння за рахунок переведення його до дискретного аналогу – системи алгебраїчних рівнянь, причому, дуже зручної для рішення методом підставлення. Тоді позначення: $T\rightarrow y$; $t\rightarrow x$; $dT/dt\rightarrow dy/dx=y`$; $dT/dt\rightarrow dy/dx$; $f(T,t)=K\cdot(T-Tср)\rightarrow f(x,y)$; початкові умови : $T(t_0)= T_0$.

Згідно методу Ейлера для визначення T_i: $T_{i+1}=T_i+h\cdot K\cdot(T_i-Tсеред_i)$.

Проілюструємо виповнення розрахунків за методом Ейлера на прикладі, коли згідно завдання: $t=0…10$; $t_0=0$; $T_0=0$; $K = 12$; $Tср=2+t$.

Перший крок : i= 0; T1=0+h·12·(2+0).

Другий крок: i=1; t1=t0+h; T2=T1+h·12·(2+ t1), і т.п.

Як видно з прикладу, для отримання рішення необхідно виконати забагато обчислювальних дій. Такі дії можна виконати за допомогою ЕОМ у Фортрані в середовищі MSDev [8, 9]. Далі наведемо розроблені нами програми для розрахунку досліджуваного процесу нестаціонарної теплопередачі із застосуванням чисельного методу Ейлера. Перша програма PROGRAM EULER розраховує у циклі температуру середовища TCP і температуру об'єкта дослідження у процесі теплопередачі T у залежності від часу t при заданих вихідних параметрах: кроку дослідження H, коефіцієнті теплопередачі K і початковій температурі T0.

```
PROGRAM  EULER
REAL K
DATA H, K, T0 /0.01,12.,0./
WRITE (*,*)'  Нестаціонарна теплопередача ‘
WRITE (*,*)'     Метод Ейлера. ‘
WRITE (*,*)
WRITE (*,*)' t  Значення Tсеред(t) Значення T(t)‘
TCP=2.
WRITE(*,*)TT, TCP, T0
T=T0
DO 1 I=1, 1000
TT=TT+H
TCP=2.+TT
T=T+H*(T-TCP)
1   WRITE(*,*)TT, TCP, T
STOP
END.
```

Нижче наведені програма PROGRAM EulerT і інші програми робочого проекту, де у програмі SUBROUTINE Euler застосовується метод Ейлера.

```
PROGRAM EulerT
! Масиви для результатів роботи функцій пошуку мин. и макс.
DIMENSION mLocMaxT1(1), mLocMaxT2(1), mLocMaxT3(1),&
mLocMinT1(1), mLocMinT2(1), mLocMinT3(1), mLocMaxTcp(1), mLocMinTcp(1)
Allocatable :: T1(:), T2(:), T3(:), Tcp(:) ! Динамічні масиви
OPEN(1,file='EulerTin.txt')        ! Файл вихідних даних
  READ (1,*) ! Перша строка не містить даних
  READ (1,*) TauMax, mMax, T0, aK1, aK2, aK3  ! Вихідні дані
  CLOSE(1) !Файл не потрібен - закриваємо
  ALLOCATE(T1(mMax), T2(mMax), T3(mMax), Tcp(mMax)) ! Виділимо
  Dtau=TauMax/(mMax-1) ! Крок
  CALL SolveTcp(mMax, Dtau, Tcp) ! Розраховуємо Tcp()
  CALL Euler(mMax, Dtau, T0,aK1, T1) ! Розраховуємо T1()
  CALL Euler(mMax, Dtau, T0,aK2, T2) ! Розраховуємо T2()
  CALL Euler(mMax, Dtau, T0,aK3, T3) ! Розраховуємо T3()
  T1max=MAXVAL(T1)        ! Макс. T1
  T2max=MAXVAL(T2)        ! Макс. T2
  T3max=MAXVAL(T3)        ! Макс. T3
  T1min=MINVAL(T1)        ! Мин. T1
  T2min=MINVAL(T2)        ! Мин. T2
  T3min=MINVAL(T3)        ! Мин. T3
  TcpMax=MAXVAL(Tcp) !Макс. Tcp
  TcpMin=MINVAL(Tcp) !Мин. Tcp
  mLocMaxT1=MAXLOC(T1)  ! Індекс Макс. T1
  mLocMaxT2=MAXLOC(T2)  ! Індекс Макс. T2
  mLocMaxT3=MAXLOC(T3)  ! Індекс Макс. T3
  mLocMinT1=MINLOC(T1)  ! Індекс Мин. T1
  mLocMinT2=MINLOC(T2)  ! Індекс Мин. T2
  mLocMinT3=MINLOC(T3)  ! Індекс Мин. T3
  mLocMaxTcp=MAXLOC(Tcp) ! Індекс Макс. Tcp
  mLocMinTcp=MINLOC(Tcp)  ! Індекс Мин. Tcp
  WRITE(*,*)' ******Input data:'
  WRITE(*,*)'  TauMax=',TauMax,'  mMax=',mMax,' T0=',T0
  WRITE(*,*)' aK1=',aK1,' aK2=',aK2,' aK3=',aK3
  WRITE(*,*)' ******Output data:'
  OPEN(2, file='EulreTout.txt')
  WRITE(2,*)' ******Input data:'
   WRITE(2,*)' aK1=',aK1,' aK2=',aK2,' aK3=',aK3
    WRITE(2,*)' TauMax=',TauMax,' mMax=',mMax,' T0=',T0
     WRITE(2,*)' ******Output data:'
  WRITE(2,*)'  T1max=',  T1max,  ' mLocMaxT1=',mLocMaxT1
  WRITE(2,*)'  T2max=',  T2max,  ' mLocMaxT2=',mLocMaxT2
  WRITE(2,*)'  T3max=',  T3max,  ' mLocMaxT3=',mLocMaxT3
  WRITE(2,*)'  T1min=',  T1min,  ' mLocMinT1=',mLocMinT1
  WRITE(2,*)'  T2min=',  T2min,  ' mLocMinT2=',mLocMinT2
  WRITE(2,*)'  T3min=',  T3min,  ' mLocMinT3=',mLocMinT3
  WRITE(2,*)'  TcpMax=',  TcpMax,  ' mLocMaxTcp=',mLocMaxTcp
  WRITE(2,*)'  TcpMin=',  TcpMin,  ' mLocMinTcp=',mLocMinTcp
   WRITE(2,*)  '_______________________________________________'
  Tau=0.
  WRITE(*,*) '    m      Tau Tcp  T1  T2  T3'! шапка
  WRITE(2,*) ' m    Tau  Tcp  T1  T2 T3'! шапка
  DO m=1, mMax
  WRITE(*,10) m, Tau, Tcp(m), T1(m), T2(m), T3(m) ! На екран
  WRITE(2,10) m, Tau, Tcp(m), T1(m), T2(m), T3(m) ! До файлу
  Tau=Tau+Dtau
  ENDDO
  10 FORMAT(2x, i5, F12.7, 4F12.2)
  CLOSE(2)
  DEALLOCATE(T1, T2, T3, Tcp)
  END PROGRAM EulerT
  SUBROUTINE SolveTcp(iMax, Dtau, Tcp) ! Розраховуємо Tcp()
  DIMENSION Tcp(iMax)      !Масив Tcp
  Tau=0.
  DO i=1, iMax
```

Tcp(i)=FTcp(Tau) *! Заповнюємо масив Tcp за функцією FTcp(Tau)*
Tau=Tau+Dtau
ENDDO
END SUBROUTINE SolveTcp
FUNCTION FTcp(Tau) *!Функція температури середовища*
FTcp=32.2-.12*Tau*Tau
END FUNCTION FTcp
SUBROUTINE Euler(iMax, Dx, U0, aK, U) *! Метод Ейлера*
DIMENSION U(iMax)
U(1)=U0 *!Початкові умови*
x=0.
DO i=2, iMax
x=x+Dx *! Координата*
U(i)=U(i-1)+Dx*F(aK,U(i-1),x) *! Формула Ейлера*
ENDDO
END SUBROUTINE Euler
FUNCTION F(aK,T,Tau) *! Права частина діф. рівняння*
F=-aK*(T-FTcp(Tau))
END FUNCTION F

Обговорення результатів дослідження стійкості та збіжності отриманих рішень для нестаціонарної теплопередачі методом Ейлера. У проведеному дослідженні результатами являються наступні дії. Створений файл вихідних даних *EulerTin.txt,* які змінюються за завданням:

TauMax mMax T0 aK1 aK2 aK3

12. 6 16. 2 .6 .8

В результаті компіляції розроблених нами вище програм у робочому проекті у Фортрані F90 в середовищі MSDev отримуємо файл результатів розрахунку *EulerTout.txt*:

```
******Input data:
aK1=  2.000000E-01 aK2=  6.000000E-01 aK3=
=8.000000E-01
TauMax=      12.000000  mMax=           6  T0=
=16.000000
******Output data:
T1max=    26.319890 mLocMaxT1=     3
T2max=    38.332680 mLocMaxT2=     2
T3max=    45.776900 mLocMaxT3=     2
T1min=    16.000000 mLocMinT1=     1
T2min=    13.158650 mLocMinT2=     6
T3min=     6.889544 mLocMinT3=     5
TcpMax=   32.200000 mLocMaxTcp=    1
TcpMin=   14.920000 mLocMinTcp=    6
```

m	Tau	Tcp	T1	T2	T3
1	.0000000	32.20	16.00	16.00	16.00
2	2.4000000	31.51	23.44	38.33	45.78
3	4.8000000	29.44	26.32	25.52	14.40
4	7.2000000	25.98	26.16	26.18	36.63
5	9.6000000	21.14	23.75	18.92	6.89
6	12.0000000	14.92	19.51	13.16	22.31

На рис. 1 наочно демонструється, що для трьох об'єктів з різним коефіцієнтом теплопередачі за умовами дослідження при заданій температурі оточуючого середовища за допомогою математичної моделі для визначення температури об'єкту T в залежності від часу t, отримано для першого об'єкта з температурою T1 – стійке рішення, а для другого і третього об'єктів відповідно з температурами T2 і T3 – нестійкі рішення, тому що вони, як видно за графіками ведуть себе не фізично.

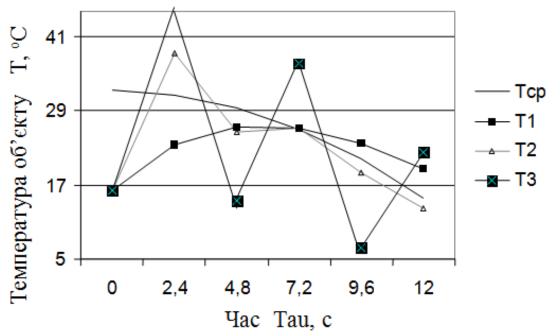

Рис. 1 – Результати розрахунку за програмами зміни температур трьох об'єктів і середовища у часі для процесу теплопередачі

Підвищити точність розрахунків у дослідженнях за методом Ейлера завжди можна шляхом зменшення кроку сітки розрахунків при збільшенні числа вузлів [10].

Висновки. За допомогою ЕОМ отримана таблиця шуканих значень для 6 вузлів дослідження температури трьох об'єктів у часі за розробленими у робочому проекті програмами розрахунку із застосуванням чисельного методу Ейлера у Фортрані в середовищі MSDev. За результатами дослідження на ЕОМ із застосуванням методу Ейлера стійке рішення отримали тільки для першого об'єкта з температурою T1 і відповідно збіжність його значень температур з реальним фізичним процесом нестаціонарної теплопередачі.

Список літератури: 1. *Самійленко, А. М.* Диференціальні рівняння: навч.посіб. [Текст] / *А. М. Самійленко, С. А. Кривошия, М. О. Перестюк.* – К.: Либідь, 2003. – 504 с. **2.** *Турчак, Л. И.* Основы численных методов: учеб.пособ. [Текст] / *Л. И. Турчак, П. В. Плотников*. – М.: Физматлит, 2003. – 304 с. **3.** *Формалев, В. Ф.* Численные методы. Учебник [Текст] / *В. Ф. Формалев, Д. Л. Ревизников.* – М.: Физматлит, 2004. – 400 с. **4.** *Бахвалов, Н. С.* Численные методы: учеб.пособ. для студ. физ.-математ. спец. вузов [Текст] / *Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков*.- М.: Физматлит: Лаборатория Базовых Знаний; СПб.: Невский диалект, 2002. - 632 с. **5.** *Бахвалов, Н. С.* Численные методы в задачах и упражнениях: учеб.пособ. [Текст] / *Н. С. Бахвалов, А. В. Лапин, Е. В. Чижонков.* - М.: Высшая школа, 2000. - 192 с. **6.** *Коваленко, І. В.* Основні процеси, машини та апарати хімічних виробництв. Підручник [Текст] / *І. В. Коваленко, В. В. Малиновський.* – К.: Інрес, Воля, 2006. - 261с. **7.** *Коваленко, І. В.* Розрахунки основних процесів, машин та апаратів хімічних виробництв: навч.посіб. [Текст] / *І. В. Коваленко, В. В. Малиновський.* – К.: Норіта-плюс, 2007. – 212 с. **8.** *Мак-Кракен, Д.* Численные методы и программирование на Фортране [Текст] / *Д. Мак-Кракен, У. Дорн*; пер. с англ. – М.: Мир, 1977. - 584 с. **9.** *Уорд, Т.* Фортран и искусство программирования персональных ЭВМ [Текст] / *Т. Уорд, Э. Бромхед*; пер. с англ. - М.: Радио и связь, 1993. – 351 с. **10.** *Шахно, С.* Застосування прискоренного методу Ньютона та різницевих методів до розв'язування задачі пошуку періодичних режимів у нелінійних динамічних системах [Текст] / *С. Шахно, Д. Узбізський, Г. Ярмола* // Вісник Львівського університету. Серія прикладної математики і інформатики. - 2013.- Вип.19. - С.39-46

Bibliography (transliterated): 1. *Samijlenko, A. M., Krivoshiya, S. A., Perestuk, M. O.* (2003). Diferencialni rivnyannya: navch.posib. Kiev. Libid, 504. **2.** *Turchak, L. I., Plotnikov, P. V.* (2003). Fundamentals of numerical methods: Navch.posib. / L. I. Turchak, P. V. Plotnikov. M. – Moscow, 304. **3.** *Formales, V. F., Revision, D. L.* (2004). Numerical methods. Textbook. M. – Moscow, 400. **4.** *Bakhvalov, N. C., Zhidkov, N. P., Kobel'kov, G. M.* (2002). Numerical methods: Navch.posib., 632. **5.** *Bakhvalov, N. C., Lapin, A. V., Chigonkov, E. V.* (2000). Numerical methods in problems and exercises: Navch.posib., 192. **6.** *Kovalenko, I. V., Malinovsky, V. V.* (2006). Basic processes, machines and apparatuses of chemical productions. The tutorial, 261. **7.** *Kovalenko, I. V., Malinovsky, V. V.* (2007). The calculations of basic processes, machines and apparatuses of chemical productions: Navch.posib., 212. **8.** *Mac-Kraken, D., Dorn, U.* (1977). Numerical methods and programming Fortran, 584. **9.** *Ward, T., Bromhead, E.* (1993). Fortran and the art of programming a personal computer, 351. **10.** *Sahno, S., Usbsi, D., Yarmola, G.* (2013). Application prescoring of Newton's method and finite-difference methods to the solution of the problem of finding periodic modes in nonlinear dynamical systems. Bulletin of Lviv University. Series applied mathematics and Informatics, 19, 41, 39-46.

Надійшла (received) 27.05.2015

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Казак Ірина Олександрівна – кандидат педагогічних наук, Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут», асистент кафедри хімічного, полімерного та силікатного машинобудування; тел.: 050-600-86 – 08 ; e-mail: AsistentIA@meta.ua.

Казак Ирина Александровна – кандидат педагогических наук, Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт», ассистент кафедры химического, полимерного и силикатного машиностроения; тел.: 050-60-86-08; e-mail: AsistentIA@meta.ua.

Kazak Irina Alexsandrovna - Candidate of Pedagogical Sciences (Ph. D.), National Technical University of Ukraine "Kyiv Polytechnic Institute", assistant at the Department of Chemical, polymer and silicate engineering; tel.: 050-60-86-08; e–mail: AsistentIA@meta.ua.