УДК 539.3

О.К. Морачковський, д-р техн. наук, проф.
Д.В. Лавінський, канд. техн. наук, доц.
С.В. Конкін

Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут» (Харків, Україна, denis.lavinsky@ukr.net)

РОЗРАХУНКОВІ ДОСЛІДЖЕННЯ ТЕРМОДЕФОРМУВАННЯ ЕЛЕКТРОПРОВІДНИХ ТІЛ ПРИ ДІЇ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ

Електромагнітне поле (ЕМП) є невід’ємною складовою функціонування багатьох технічних та технологічних систем. Тут можна відзначити різноманітні енергетичні системи, технологічні системи індукційного нагріву, системи використання сильних ЕМП для обробки матеріалів [1–3]. Дія ЕМП на елементи конструкцій розрізняється в залежності від типів їх матеріалів. Для електропровідних матеріалів превалюючою є силова дія та теплова (наслідок закону Джоуля-Ленца). Зміни теплового поля електропровідного тіла також можуть у значній мірі впливати на його деформування. Розрахунковий аналіз деформування неможливо проводити без попереднього аналізу розповсюдження основних компонентів ЕМП та теплового поля. Сучасний підхід потребує використання єдиних розрахункових моделей, у рамках яких проводиться послідовне розв’язання вказаних задач.

У роботах [4–6] надано повну математичну постановку задач аналізу розповсюдження ЕМП та теплового поля, а також аналізу термо-пружно-пластичного деформування систем контактуючих тіл. При розрахунках реальних технічних та технологічних систем всебічний аналіз може проводитись лише із застосуванням чисельних методів. Найбільш поширеним з яких є метод скінченних елементів (МСЕ), який спирається на варіаційні постановки відповідних задач.

Перший етап розв’язання передбачає знаходження просторово-часових розподілів основних векторних компонентів ЕМП. Для цього введемо до розгляду векторний магнітний $\vec{A}$ та скалярний електричний φ потенціали:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}; \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0; \quad \vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}\varphi, \tag{1}$$

де $\vec{B}, \vec{E}$ – вектори магнітної індукції та напруженості електричного поля. Тоді система фундаментальних рівнянь Максвела із використанням понять про векторний та скалярний потенціали зводиться до двох диференціальних рівнянь (у випадку нехтування рухом електропровідного тіла, а також змінністю його електрофізичних характеристик)

$$\gamma = const; \quad \mu = const; \quad \dot{\vec{u}} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \dfrac{1}{\mu_c \gamma} \vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{A} \right) + \vec{\nabla}\varphi = \vec{J}; \\ \Delta\varphi = \rho_e. \end{cases} \tag{2}$$

де γ, μ_c – електропровідність та магнітна проникність матеріалу, $\vec{J}, \rho_e$ – вектор густини сили струму та густина розподіленого електричного заряду, $\dot{\vec{u}}$ – вектор швидкості точки тіла. Для векторного магнітного та скалярного електричного потенціалів формулюються початкові та граничні умови:

$$\vec{A}(0) = 0; \ \varphi(0) = 0; \tag{3}$$

$$\vec{A}\Big|_{\infty} = 0; \ \varphi\Big|_{\infty} = 0. \tag{4}$$

У випадку, коли на якійсь границі тіла задано компоненти ЕМП, то (у квазістаціонарному випадку) граничні умови для потенціалів мають вигляд:

$$\left.\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i}\right|_{\Gamma} = -E_{\Gamma i}, \quad i = 1,2,3; \left.\left(\frac{\partial A_i}{\partial x_j} - \frac{\partial A_j}{\partial x_i}\right)\right|_{\Gamma} = B_{\Gamma k}, \quad i \neq j \neq k = 1,2,3 \quad , \tag{5}$$

де позначка Г означає приналежність відповідної величини до границі тіла.

Для знаходження векторного магнітного потенціалу достатньо знайти його компоненти, тобто необхідно представити перше з рівнянь (2):

$$\begin{aligned}
MAG_{(x)} &= \int_V \left[\frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial A_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z}\right)^2 \right\} + \varphi \cdot A_x + \mu\gamma \frac{\partial A_x}{\partial t} A_x \right] dV; \\
MAG_{(y)} &= \int_V \left[\frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial A_y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial A_y}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)^2 \right\} + \varphi \cdot A_y + \mu\gamma \frac{\partial A_y}{\partial t} A_y \right] dV; \\
MAG_{(z)} &= \int_V \left[\frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial A_y}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)^2 \right\} + \varphi \cdot A_z + \mu\gamma \frac{\partial A_z}{\partial t} A_z \right] dV.
\end{aligned} \tag{6}$$

У подальшому нехтуємо внеском скалярного електричного потенціалу (електричного поля) у деформування та тепловиділення.

Нестаціонарне розповсюдження теплового поля може бути визначене з умови стаціонарності наступного функціоналу:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Temp} &= \int_V \left\{ \frac{\lambda}{2} \left[\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)^2 \right] - QT + \rho c \frac{\partial T}{\partial t} T \right\} dV + \\
&+ \int_{A_q} qTdS + \int_{A_\alpha} \frac{\alpha}{2} \left[T^2 - 2T_\infty T\right] dV; \, Q = \frac{1}{\gamma} \left(\vec{\nabla} \times \vec{H}\right)^2,
\end{aligned} \tag{7}$$

де λ – теплопровідність матеріалу; ρ – густина матеріалу, c – питома теплоємність; q – функція теплового потоку; α – коефіцієнт конвекційного теплообміну; T_∞ – температура навколишнього середовища; A_q, A_α – області границі тіла на яких задано тепловий потік та умови конвекційного теплообміну відповідно, Q – інтенсивність тепловиділення при розповсюдженні ЕМП; $\vec{H}$ – вектор напруженості магнітного поля.

Компоненти НДС при пружному деформуванні (в умовах нехтування внеском електричного поля та у відсутності поверхневих струмів) можуть бути визначені з умови стаціонарності потенційної енергії, яку представимо так:

$$U=\frac{1}{2}\int_V \hat{\varepsilon}\cdot\cdot{}^{(4)}\hat{C}\cdot\cdot\hat{\varepsilon}dV-\int_V\left(\vec{j}\times\vec{B}\right)\cdot\vec{u}dV-\int_S\vec{p}\cdot\vec{u}dS-\int_V\Delta T\cdot\cdot{}^{(4)}\hat{C}\cdot\cdot\hat{\varepsilon}dV; \qquad (8)$$

$${}^{(4)}\hat{C}=-\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\hat{I}\otimes\hat{I}+\frac{E}{2(1+\nu)}\left(e_k\otimes\hat{I}\otimes e^k+e_i\otimes e_k\otimes e^i\otimes e^k\right). \qquad (9)$$

Тут ми врахували дію електромагнітних сил (друга складова), наявність поверхневих розподілених сил (третя складова) та наявність приросту температури (четверта складова).

Розв’язок відшукується з відповідних умов стаціонарності функціоналів (6), (7), (8), причому, для нестаціонарних ЕМП та теплового поля ці умови повинні виконуватись на кожному кроці за часом – k

$$\delta\left(MAG^k_{(x)}\right)=0;\quad \delta\left(MAG^k_{(y)}\right)=0;\quad \delta\left(MAG^k_{(z)}\right)=0;\quad \delta\left(\mathrm{Temp}^k\right)=0;\quad \delta U=0. \qquad (10)$$

Шукані змінні задачі: компоненти векторного магнітного потенціалу, температура та переміщення. Тоді умови стаціонарності потребують рівності нулю наступних похідних:

$$\frac{\partial \mathrm{M}AG^k_{(x)}}{\partial \mathrm{A}_x}=0;\quad \frac{\partial \mathrm{M}AG^k_{(y)}}{\partial \mathrm{A}_y}=0;\quad \frac{\partial \mathrm{M}AG^k_{(z)}}{\partial \mathrm{A}_z}=0;\quad \frac{\partial \mathrm{Temp}^k}{\partial T}=0;\quad \frac{\partial U}{\partial \vec{u}}=0. \qquad (11)$$

Що призводить до наступної системи алгебраїчних рівнянь відносно шуканих змінних, яку представляємо у векторно-матричній формі

$$[M]\{A_x\}+[M\gamma]\left\{\frac{\partial A_x}{\partial t}\right\}=\{J_x\};\ [M]\{A_y\}+[M\gamma]\left\{\frac{\partial A_y}{\partial t}\right\}=\{J_y\};$$

$$[M]\{A_z\}+[M\gamma]\left\{\frac{\partial A_z}{\partial t}\right\}=\{J_z\};\ [\Lambda]\{T\}+\{C\}^T\left\{\frac{\partial T}{\partial t}\right\}=\{Q\}+\{Q\}^q+\{Q\}^\alpha; \qquad (12)$$

$$[K]\{u\}=\{p\}+\{f_{em}\},$$

Матриці та вектори-стовпці, що входять до співвідношень (12) відшукуються наступним чином:

$$[M]_{(el)}=\int_{V_{(el)}}\{B\}^T[\mu]\{B\}dV_{(el)},\ \{B\}^T=\left\{\frac{\partial N}{\partial x}\ \frac{\partial N}{\partial y}\ \frac{\partial N}{\partial z}\right\}^T.\ [M\gamma]_{(el)}=\mu\gamma\int_{V_{(el)}}\{N\}^T\{N\}dV_{(el)}$$

$$[\Lambda]=\int_V\{B\}^T[\lambda]\{B\}dV\ \{B\}^T=\left\{\frac{\partial N}{\partial x}\ \frac{\partial N}{\partial y}\ \frac{\partial N}{\partial z}\right\}[\lambda]=\begin{bmatrix}\lambda&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda\end{bmatrix}$$

$$[C_T]=c\rho\int_{V_{(el)}}\{N\}^T\{N\}dV_{(el)}$$

$$\{Q\}=\int_V Q\{N\}^T dV;\{Q\}^q=\int_V q\{N\}^T dV;\{Q\}^\alpha=\int_V\alpha\{N\}^T\{T_\infty\}dV.$$

Для розв'язку у часі розглядається схема, котра на кожному кроці k за часом приводить до наступних рівнянь відносно компонент векторного магнітного потенціалу та температури:

$$\left[M^{k-1}\right]\left\{A_i^{\,k}\right\} = -\left[M\gamma^{k-1}\right]\frac{\left\{A_i^{\,k}\right\} - \left\{A_i^{\,k-1}\right\}}{\Delta t} + \left\{J_i^{\,k-1}\right\}, \quad i = 1,2,3.$$

$$\left[\Lambda^{k-1}\right]\left\{T^{k}\right\} = -\left\{C^{k-1}\right\}^{T}\frac{\left\{T^{k}\right\} - \left\{T^{k-1}\right\}}{\Delta t} + \left\{Q^{k-1}\right\} + \left\{Q^{k-1}\right\}^{q} + \left\{Q^{k-1}\right\}^{\alpha}.$$

Якщо властивості матеріалу залежать від температури, то на кожному кроці за часом відбувається їх корегування за схемою, подібною до корегування магнітної проникності.

У випадку визначення НДС при пружно-пластичному деформуванні розглянемо слабку форму рівнянь рівноваги, розв'язок відшукуємо з умови

$$G\left(\hat{\sigma}, \delta\vec{u}\right) = 0,\; G\left(\hat{\sigma}, \delta\vec{u}\right) = \int\limits_V \hat{\sigma}\cdot\cdot\delta\hat{\varepsilon}\,dV - \int\limits_V \left(\vec{j}\times\vec{B}\right)\delta\vec{u}\,dV - \int\limits_{A_p} \vec{p}\cdot\delta\vec{u}\,dA,$$

тут $\delta\vec{u}$ – вектор віртуальних переміщень, який пов'язаний із деформаціями наступним чином: $\delta\hat{\varepsilon} = \frac{1}{2}\left[\vec{\nabla}\delta\vec{u} + \left(\vec{\nabla}\delta\vec{u}\right)^{\mathrm{T}}\right]$. Чисельна процедура розв'язання полягає в наступному. Наприклад, розглядаються два кроки розв'язку n та n+1, вважаємо, що на кроці n відомі тензори напружень, пружних та пластичних деформацій, також відомі механічні навантаження та електромагнітні сили. Тоді, необхідність виконання умови стаціонарності на кожному кроці призводить до рівняння

$$\hat{\sigma}_{n+1} = \hat{\sigma}_n + {}^{(4)}\hat{C}^{\mathrm{ep}}\cdot\cdot\Delta\hat{\varepsilon}, \tag{13}$$

де $\Delta\hat{\varepsilon}$ – тензор приросту деформацій, ${}^{(4)}\hat{C}^{\mathrm{ep}}$ – пружно-пластичний тензор.

Наведені варіаційні постановки відповідних задач та наступні системи лінійних алгебраїчних рівнянь можуть бути використаними для створення алгоритмів відповідно до схем МСЕ.

1. Подольцев А.Д., Кучерявая И.Н. Элементы теории и численного расчета электромагнитных процессов в проводящих средах. Киев: Изд. Ин-та электродинамики НАН Украины, 1999. 363 с.

2. Белый И.В., Фертик С.М., Хименко Л.Т. Справочник по магнитно-импульсной обработке металлов. Харьков: Вища школа, 1977. 189 с.

3. Миронов В.А. Магнитно-импульсное прессование порошков. Рига: Зинатне, 1980. 196 с.

4. Altenbach H., Morachkovsky O., Lavinsky D., Naumenko K. Inelastic deformation of conductive bodies in electromagnetic fields. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*. 2016. Vol. 28. No. 5. P. 1421–1433. https://doi.org/10.1007/s00161-015-0484-8

5. Lavinskii D.V., Morachkovskii O.K. Elastoplastic Deformation of Bodies Interacting Through Contact Under the Action of Pulsed Electromagnetic Field. *Strength of Materials*. 2016. Vol. 48. No. 6. P. 760–767. https://doi.org/10.1007/s11223-017-9822-3

6. Lavinskii D.V., Bondar' S.V. Study of thermoelastoplastic contact deformation of production tooling mixed structures . *Strength of Materials*. 2011. Vol. 43. No. 4. P. 447–454. https://doi.org/10.1007/s11223-011-9314-9