УДК 519.6

В.І.ГНІТЬКО
Інститут проблем машинобудування ім.А.М.Підгорного НАН України
Л.В.РОЗОВА, А.Ю.ГАРМАШ
Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»

АНАЛІЗ ВІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ ОБОЛОНОК ОБЕРТАННЯ З ПЕРЕГОРОДКАМИ ЗА РІЗНІ УМОВИ ЗАКРІПЛЕННЯ

Запропоновано новий варіант методу скінченних елементів для аналізу міцності та коливань оболонок обертання з довільним розгалуженим меридіаном. Рівняння руху оболонки за відсутності зовнішніх збурень отримано на основі принципу Остроградського – Гамільтона. Використовується теорія тонких оболонок Кірхгофа – Лява. Вектор переміщень в циліндричній системі зображено у вигляді ряду Фур'є за окружною координатою. Рівняння коливань отримано для кожної гармоніки окремо. Геометричні характеристики елементу описується за допомогою кубічних поліномів. Функції форми складають повну систему незалежних поліномів третього ступеня і є одновимірними функціями Ерміта. На основі запропонованого методу надано аналіз частот і форм коливань циліндричної оболонки з перегородкою за різні умови закріплення.

Ключові слова: метод скінченних елементів, частоти і форми коливань, вільні коливання, складені оболонки обертання.

В.И.ГНИТЬКО
Институт проблем машиностроения им.А.Н.Подгорного НАН Украины
Л.В.РОЗОВА, А.Ю.ГАРМАШ
Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт»

АНАЛИЗ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ С ПЕРЕГОРОДКАМИ ПРИ РАЗНЫХ УСЛОВИЯХ ЗАКРЕПЛЕНИЯ

Предложен новый вариант метода конечных элементов для анализа прочности и колебаний оболочек вращения с произвольным разветвленным меридианом. Уравнения движения оболочки при отсутствии внешних воздействий получено на основе принципа Остроградского – Гамильтона. Используется теория тонких оболочек Кирхгофа-Лява. Вектор перемещений в цилиндрической системе представлен в виде ряда Фурье по окружной координате. Уравнение колебаний получено для каждой гармоники отдельно. Геометрические характеристики элемента описываются с помощью кубических полиномов. Функции формы составляют полную систему независимых полиномов третьей степени и являются одномерными функциями Эрмита. На основе предложенного метода приведен анализ частот и форм колебаний цилиндрической оболочки с перегородкою при разных условиях закрепления.

Ключевые слова: метод конечных элементов, частоты и формы колебаний, свободные колебания, составные оболочки вращения.

V.I. GNITKO
A.N. Podgorny Institute for Mechanical Engineering Problems
L.V. ROZOVA, A.Y.GARMASH
National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute"

FREE VIBRATION ANALYSIS OF SHELLS OF REVOLUTION WITH BAFFLES UNDER DIFFERENT CONDITIONS OF FIXATION

Knowledge of the smallest free oscillation frequencies of structure elements is a topical problem due possibility to set off unwanted resonant oscillation frequencies in the presence of excitation forces. In this paper a new version of the finite element method for analysis of strength and vibrations of shells of revolution characterized by an arbitrary branched meridian is proposed. The Kirchhoff – Love theory of thin shells is used for studying the shell static and dynamic characteristics. The equation of the shell motion in absence of external perturbations is based on the Ostrogradsky-Hamilton principle. The discrete analog of this equation is obtained with finite element method technique. The displacement vector in the cylindrical coordinate system is depicted as the Fourier series by the circumferential coordinate. The equation of oscillation is obtained for each harmonic separately. The geometric characteristics of elements are described using cubic polynomials. The shape functions constitute the complete system of independent polynomials of the third degree, and each of them is one-dimensional Hermite function. Formulas for mass and stiffness matrixes are received. The integration along the shell meridian is accomplished by summation of integrals along one-dimensional finite elements. The only *meridian is divided into finite elements. It is the main advantage of developed technique. The standard Gauss quadrature formulas are involved. The original computer codes are elaborated for implementation the proposed finite-element based approach. On the basis of the developed method the analysis of modes and frequencies of vibrations of the cylindrical shell with horizontal baffles for different conditions of fastening is provided. The fastening conditions that provide the lowest frequencies are revealed. The influence of baffles on the modes and frequencies of the shells under consideration is estimated. The obtained modes of vibrations may be used as the basis functions for research in the area of forced and parametric vibration of both empty and fluid-filled shells of revolution.*

Key words: method of the finite elements, frequencies and forms of the oscillations, free vibrations, composed shells of the revolution.

Постановка проблеми

У машинобудуванні широко використовуються конструкції, елементами яких є оболонки обертання з різними формами меридіана. Це корпуси енергетичних установок, насосів, компенсатори зсувних та осьових переміщень, колони випарних апаратів, нафтосховища і таке інше. Такі оболонки зазвичай є частково заповненими рідиною, працюють в умовах інтенсивних силових впливів. Для оцінки міцності та ресурсу конструкцій, складених з оболонок обертання, важливо визначити спектр частот їх коливань. Визначення найменших частот коливань дає можливість відстроювання від небажаних резонансних частот коливань при наявності сил збудження. Існують потужні сучасні комплекси динамічного та міцносного розрахунків. Але при моніторингу стану обладнання літаків, космічних апаратів, танкерів потрібна оперативна інформація щодо напружено-деформованого стану та спектральних характеристик. Таку інформацію можна отримати із застосуванням сучасних спеціалізованих обчислювальних комплексів, що орієнтовані на розрахунки конкретних елементів конструкцій. В цій роботі запропоновано методику розрахунку динамічних характеристик оболонок обертання, що мають розгалужений меридіан з урахуванням можливості встановлення різних перегородок. Ці оболонки можуть бути заповнені рідиною, мати різні умови закріплення. Методика заснована на використанні одновимірного методу скінченних елементів.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Аналіз останніх публікацій та доповідей на конференціях свідчить, що тематика досліджень в області дослідження міцності та коливань оболонок та оболонкових конструкцій з використанням числового аналізу досить велика. Це легко зрозуміти, якщо врахувати надзвичайне різноманіття сфер застосування оболонок та умов їх експлуатації. Огляди наукових праць за останні роки виявили необхідність проведення досліджень власних частот та форм коливань оболонок обертання. Аналіз робіт, присвячених розрахунку оболонок, у тому числі тих, що моделюють посудини і резервуари з небезпечними заповнювачами, дозволяє виділити в даний час як основні і найбільш ефективні методи чисельного інтегрування, метод скінченних різниць і методи скінченних і граничних елементів. С.Г. Годунов запропонував метод ортогоналізації [1], який дозволяє отримати чисельний розв'язок крайових задач для лінійних диференціальних рівнянь, коли водночас наявні швидко зростаючі та швидко спадаючі розв'язки. На основі цього методу, який може бути легко реалізований на сучасній ЕОМ, розроблені ефективні алгоритми розрахунку оболонок. До задач статики несиметрично навантажених ізотропних оболонок обертання метод вперше був застосований Я.М. Григоренко, А.Т. Василенко [2], а в пізніших працях [3 – 5] – до задач статики та динаміки складених оболонок обертання з розгалуженим меридіаном. Узагальнення даного методу розрахунку на задачі стійкості і коливань вісесиметричних багатозв'язаних ізотропних і ортотропних тонкостінних оболонкових конструкцій було зроблене В.І. М’яченковим і І.В. Григор’євим [6]. На теперішній час з використанням методу скінченних елементів розв’язано задачі щодо вимушених коливань оболонок обертання за дії імпульсних та сейсмічних впливів [7 – 8], вільних коливань слоїстих оболонок [9,10] та оболонок з дефектами [11]. Новий ефективний варіант методу граничних елементів запропоновано в [12].

Мета дослідження

Аналіз власних частот та форм коливань оболонок обертання з довільним меридіаном.

Викладення основного матеріалу дослідження

1. Матриці жорсткості та мас в методі скінченних елементів

Розглянемо задачу про вільні коливання пружної оболонки обертання, частково заповненою ідеальною нестискуваною рідиною.

Систему рівнянь руху символічно запишемо у виді:

$$L(U)+M(\ddot{U})=P, \tag{1}$$

де L, M – оператори пружних і масових сил; P – тиск рідини на змочену поверхню оболонки;

$U=(u_1, u_2, u_3)$ – вектор-функція переміщень.

Вивчимо малі гармонійні коливання пружної оболонки. Представимо вектор U у формі $U=ue^{i\Omega t}$, де Ω – частота, а u – власна форма коливань даної оболонки з рідиною.

Будемо шукати власні форми коливань в рідині у вигляді:

$$u = \sum_{k=1}^{N} c_k u_k \tag{2}$$

де u_k – власні форми коливань оболонки у вакуумі, c_k – невідомі коефіцієнти.

Іншими словами, форму коливань оболонки з рідиною визначимо, як лінійну комбінацію власних форм її коливань у вакуумі.

Відмітимо, що виконуються наступні співвідношення:

$$L(u_k) = \Omega_k^2 M(u_k), \quad (M(u_k), u_j) = \delta_{kj} . \tag{3}$$

Отже,

$$(L(u_k), u_j) = \Omega_k^2 \delta_{kj} . \tag{4}$$

де Ω_k – k-ая частота власних коливань у вакуумі.

Ці співвідношення показують, що власні форми коливань оболонки у вакуумі мають бути ортонормовані за матрицею мас.

Рівняння руху оболонки за відсутності зовнішніх збурень може бути описане на основі принципу Остроградського - Гамільтона:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\delta\Pi - \delta T\right) dt = 0 , \tag{5}$$

де Π, T – потенційна і кінетична енергія відповідно.

Для дискретизації рівняння (5) скористаємося методом скінченних елементів. Нехай $\boldsymbol{U}=(U_r, U_z, U_\theta)$– вектор переміщень оболонки в циліндричній системі координат r, z, θ. Представимо вектор переміщень у вигляді розкладання в ряд Фур'є по окружній координаті

$$U(r,z,\theta) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} u_\alpha(r,z) C_\alpha(\theta) \tag{6}$$

де

$$C_0 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad C_\alpha = \begin{bmatrix} \cos\alpha\theta & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha\theta & 0 \\ 0 & 0 & \sin\alpha\theta \end{bmatrix}, \qquad \alpha = 1, 2, ...\infty$$

Потенційна енергія деформації може бути представлена в наступній формі:

$$\Pi = \frac{1}{2}\iint_S \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} dS_1 dS_2 , \tag{7}$$

де $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$ – компоненти тензорів напруги і деформацій;

$$dS_1 = A_1\, d\alpha_1 , \; dS_2 = A_2\, d\alpha_2 = r d\theta \tag{8}$$

dS_i – диференціали дуг серединної поверхні, проведених в напрямках координатних ліній α_1, α_2.

Для кінетичної енергії маємо вираз

$$T = \frac{1}{2}\iint_S \rho \dot{u}_i \dot{u}_i dS_1 dS_2 . \tag{9}$$

Зв'язок між компонентами деформацій і переміщеннями оболонки зобразимо в матричному виді:

$$\varepsilon_\alpha = D_\alpha u_\alpha , \tag{10}$$

де D_α - диференціальний оператор, отриманий на основі геометричних співвідношень Коши для тонких оболонок [13].

Залежності між компонентами напружень і деформацій виражаються за допомогою узагальненого закону Гуку

$$\sigma_\alpha = E\, \varepsilon_\alpha . \tag{11}$$

Підстановка співвідношень (2), (10), (11) в рівняння (1) дозволяє записати рівняння коливань оболонки для довільного члена ряду α у вигляді:

$$\int_{S_1}^{S_2}\int_0^{2\pi} \delta u_\alpha^T G_\alpha u_\alpha A_1 d\alpha_1 r d\theta = \int_{S_1}^{S_2}\int_0^{2\pi} \delta u_\alpha^T \rho \ddot{u}_\alpha A_1 d\alpha_1 r d\theta, \quad (12)$$

де $\boldsymbol{G}_\alpha$ – результат добутку матриць.

$$G_\alpha = C_\alpha^T D_\alpha^T E D_\alpha C_\alpha .$$

У подальших викладках опустимо для спрощення запису індекс α.

Розіб'ємо меридіан оболонки на ряд криволінійних скінченних елементів. Геометрія елементу описується кубічними поліномами та їх похідними вздовж S_1 і виражається через координати граничних вузлів з індексами i, j у вигляді:

$$z = z_i\psi_1^i + z_i'\psi_2^i + z_j\psi_1^j + z_j'\psi_2^j,\ r = r_i\psi_1^i + r_i'\psi_2^i + r_j\psi_1^j + r_j'\psi_2^j .$$

Функції ψ складають повну систему незалежних поліномів третього ступеня і є одновимірними функціями Ерміта:

$$\psi_1^i = 1 - 3t^2 + 2t^3, \quad \psi_2^i = t - 2t^2 + t^3, \quad \psi_1^j = 3t^2 - 2t^3, \quad \psi_2^j = -t^2 + t^3 . \quad (13)$$

Параметр t набуває значень $0 \le t \le 1$ і є безрозмірною довжиною, що відповідає кожному елементу. Функції (13) задовольняють умовам

$$\begin{bmatrix} \psi_1^i & \psi_2^i \\ \psi_1'^i & \psi_2'^i \end{bmatrix} = E|_{t=0},\ 0|_{t=1}, \qquad \begin{bmatrix} \psi_1^j & \psi_2^j \\ \psi_1'^j & \psi_2'^j \end{bmatrix} = E|_{t=1},\ 0|_{t=0};$$

в силу цих властивостей співвідношення (13) в точках i, j є тотожністю.

Для подання функцій переміщень використовуються ті ж функції форми, що і для опису геометрії елементу:

$$u = \psi^i u_i + \psi^j u_j, \quad (14)$$

де $\psi^i = \lfloor \psi_1^i \quad \psi_2^i \rfloor$ - матриця функцій форми; u_i - вектор вузлових параметрів (детальний опис надано в роботі [14,15]).

Відповідно до концепції методу скінченних елементів (МСЕ) інтегрування по поверхні оболонки в (12) зводиться до підсумовування інтегралів по поверхнях скінченних елементів. Підставивши апроксимації (13) в (12), отримаємо вирази коефіцієнтів матриць жорсткості і мас елементу:

$$g_e^{ij} = f_\alpha \int_0^1 \psi_e^{i^T} G_e \psi_e^j A_{1e} r_e dt, \qquad m_e^{ij} = f_\alpha \int_0^1 \psi_e^{i^T} \rho \psi_e^j A_{1e} r_e dt, \quad (15)$$

де $f_\alpha = 2\pi$ при α=0 и $f_\alpha = \pi$ при $\alpha > 0$.

Інтеграли в (15) обчислюються чисельно по 6-ти вузловим формулам Гауса.

Після формування глобальних матриць жорсткості K і мас M системи шляхом підсумовування матриць елементів рівняння коливань оболонки набирає вигляду

$$Ku + M\ddot{u} = 0 \quad (16)$$

Рішенням цього рівняння є функція

$$u = v cos\omega t \quad (17)$$

при виконанні умови

$$\left(K - \omega^2 M\right)v = 0 \quad (18)$$

що є характеристичним рівнянням для визначення частот вільних коливань.

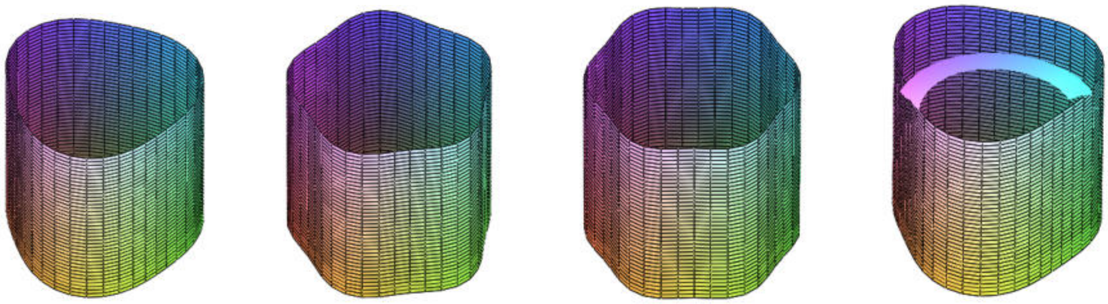
2. Числовий аналіз і обговорення результатів.

Під час розрахунків проведених за запропонованою методикою з використанням розробленого скінченно-елементного програмного комплексу, були отримані власні частоти та форми коливань циліндричних оболонок. Метою розрахунків було виявити при яких граничних умовах частоти власних коливань найнижчі.

Спочатку розглядались циліндричні оболонки без перегородки з двома варіантами закріплення.

В першому вважалось, що оболонка закріплена шарнірно з одного краю, другий край вільний. Для другого розрахунку оболонка була жорстко защемлена з одного краю.

Для обох видів закріплення: перша найнижча частота - відповідає 3-й гармоніці, друга найнижча частота отримана на 5-й гармоніці, третя найнижча частота - отримана на 6-й гармоніці при розрахунках. Форми власних коливань, що відповідають найнижчим частотам наведено на рис.1.а,б,в. Числові значення власних перших трьох частот наведено у таблиці 1.



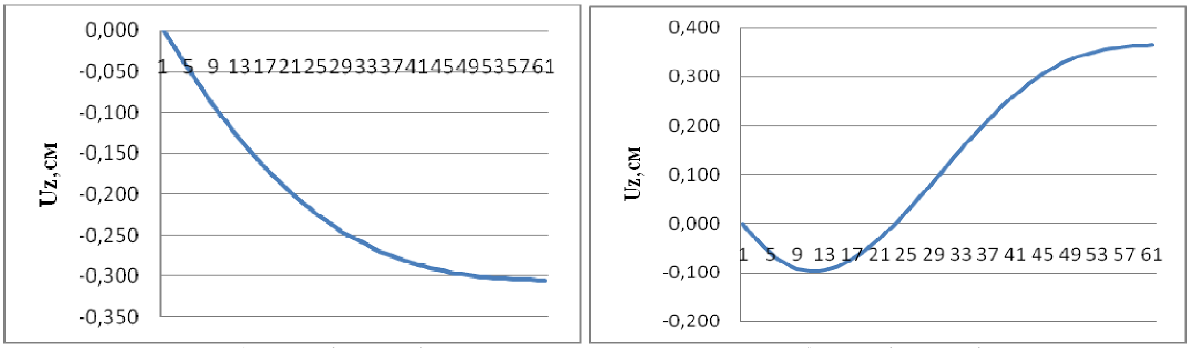
а) третя гармоніка б)п'ята гармоніка в)шоста гармоніка г)третя гармоніка

Рис. 1. Форми власних коливань для оболонки без перегородки: а)на першій частоті ; б)на другій частоті; в)на третій частоті. Форма власних коливань оболонки з перегородкою: г)на другій частоті.

Таблиця 1

Найнижче значення власних частот оболонки без перегородки для перших трьох частот, Гц.

Вид закріплення	Перша частота	Друга частота	Третя частота
	Третя гармоніка	П'ята гармоніка	Шоста гармоніка
шарнір	152,06	385,07	658,78
жорстке защемлення	153,27	390,95	673,49



а)на першій частоті б)на другій частоті

Рис.2. Переміщення U_z вздовж твірної оболонки, шарнірно закріпленої з одного краю.

Розрахунки довели, що найнижчі власні частоти притаманні циліндричній оболонці, що закріплена шарнірно по одному краю.

Також проведено розрахунок циліндричної оболонки з перегородкою. Аналіз впливу перегородок на частоти та форми коливань циліндричної оболонки показав, що найнижча перша власна частота коливань відповідає нульовій гармониці, є меншою у порівнянні найнижчою частотою коливань оболонки без перегородки. Внаслідок цього вимушені коливання будуть відбуватися з меншою частотою. Отримані результати дають змогу відстроюватись від небажаних резонансних частот. На рис.1г зображена форма коливань оболонки з перегородкою на третій гармоніці, для третьої частоти. Числові значення власних перших трьох частот наведено у таблиці 2.

Таблиця 1

Найнижче значення власної частоти для перших трьох частот для оболонки з перегородкою, Гц.

Вид закріплення	Перша частота	Друга частота	Третя частота
	Нульова гармоніка	Перша гармоніка	третя гармоніка
шарнір	91,93	256,67	343,97
жорстке защемлення	101,07	256,67	345,07

Висновки

Запропоновано ефективний підхід до аналізу напружено-деформованого стану та частот і форм коливань оболонок обертання з довільним розгалуженим меридіаном. Метод заснований на використанні одновимірних скінченних елементів, тобто дискретизації піддається лише меридіан оболонки. Це суттєво зменшує обчислювальні витрати. Тому запропонований метод може використовуватись як для оперативної оцінки міцносних та динамічних характеристик оболонкової конструкції, так і в складі обчислювальних комплексів для аналізу міцності конструкцій під впливом різних факторів. В результаті проведеного числового аналізу було встановлено, що найнижчі частоти вільних коливань досягаються для циліндричної оболонки, що закріплена шарнірно по одному краю. Якщо відома частота коливань сили збудження, то можна провести відстроювання від небезпечного режиму коливань за рахунок зміни умов закріплення або шляхом встановлення горизонтальної перегородки. У подальшому передбачається розвинути запропонований метод щодо аналізу вимушених та параметричних коливань.

Список використаної літератури

1. Годунов С.К. О численном решении краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. *Успехи мат. наук*. 1961. Вип.3. С.171−174.
2. Григоренко Я.М., Василенко А.Т. О расчете и выборе рациональных параметров оболочечных конструкций из композиционных материалов. *Механика композит. материалов*. 1981. № 1. С.64−69.
3. Gnitko V., Degtyarev K., Naumenko V., Strelnikova E. Coupled BEM and FEM Analysis of fluid-structure interaction in dual compartment tanks. *Int. Journal of Computational Methods and Experimental Measurements*. 2018. Vol. 6(6). P. 976-988.
4. Zarutskii V.A., Lugovoi P.Z., Meish V.F. Dynamic problems for and stress–strain state of inhomogeneous shell structures under stationary and nonstationary loads. *International Applied Mechanics*. 2009. Vol. 45. No 3. P. 245-271.
5. Gnitko V., Degtyarev K., Naumenko V., Strelnikova E. Reduced Boundary Element Method for Liquid Sloshing Analysis of Cylindrical and Conical Tanks with Baffles. *Int. Journal of Electronic Engineering and Computer Sciences*. 2016. Vol. 1. № 1. P.14-27.
6. Мяченков В.И., Григорьев В.И. Расчет составных оболочечных конструкций на ЭВМ: справочник. Москва: Машиностроение, 1981. 216 с.
7. Strelnikova E.,Yeseleva E., Gnitko V., Naumenko V. Free and forced vibrations of the shells of revolution interacting with the liquid. *Proc. of XXXII Conference Boundary elements and other mesh reduction methods, WITPress, Transaction on Modeling and Simulation*. 2010. Vol.50. P. 203-211.
8. Gnitko V., Marchenko U., Naumenko V., Strelnikova E. Forced vibrations of tanks partially filled with the liquid under seismic load. *Proc. of XXXIII Conference Boundary elements and other mesh reduction methods, WITPress, Transaction on Modeling and Simulation*. 2011. Vol. 52. P. 285-296.
9. Caliri M. F., Ferreira A. J. M., Tita V. A review on plate and shell theories for laminated and sandwich structures highlighting the Finite Element Method. *Composite Structures.* 2016. Vol. 156. P. 63–77.
10. Carrera E., Pagani A. Valvano S. Shell elements with through-the-thickness variable kinematics for the analysis of laminated composite and sandwich structure. *Composites. Part B: Engineering.* 2017. Vol. 111. P. 294–31.
11. Gavrilenko G.D., Matsner V. I., Kutenkova O.A. Free vibrations of ribbed cylindrical shells with local axisymmetric deflections. *International Applied Mechanics*. 2008. Vol.44. Issue 9. P.1006–1014.
12. Kim J.G., Lee J.K., Yoon H.J. Free vibration analysis for shells of revolution based on p-version mixed finite element formulation. *Finite Elements in Analysis and Design*. 2015. Vol.95. P.12-19.
13. Новожилов В.В. Теория тонких оболочек. Л.: Судпромгиз. 1962. 432 с.
14. Ravnik J., Strelnikova E., Gnitko V., Degtyarev K., Ogorodnyk U. BEM and FEM analysis of fluid-structure interaction in a double tank. *Engineering Analysis with Boundary Elements.* 2016. Vol.67. P.13-25.
15. Еселева Е.В., Гнитько В.И., Стрельникова Е.А. Собственные колебания сосудов высокого давления при взаимодействии с жидкостью. *Проблемы машиностроения.* Харків, 2006. №1. С.105-118.

References

1. Godunov S.K. O chislennom reshenii kraevyih zadach dlya sistem obyiknovennyih differentsialnyih uravneniy. Uspehi mat. nauk. 1961. Vip.3. S.171−174.
2. Grigorenko Ya.M., Vasilenko A.T. O raschete i vyibore ratsionalnyih parametrov obolochechnyih konstruktsiy iz kompozitsionnyih materialov. Mehanika kompozit. materialov 1981. № 1. S.64−69.
3. Gnitko V., Degtyarev K., Naumenko V., Strelnikova E. Coupled BEM and FEM Analysis of fluid-structure interaction in dual compartment tanks. *Int. Journal of Computational Methods and Experimental Measurements*. 2018. Vol. 6(6). P. 976-988.
4. Zarutskiy V.A., Lugovoi P.Z., Meish V.F. Dynamic problems for and stress–strain state of inhomogeneous shell structures under stationary and nonstationary loads. *International Applied Mechanics*. 2009. Vol. 45. No 3. P. 245-271.

5. Gnitko V., Degtyarev K., Naumenko V., Strelnikova E. Reduced Boundary Element Method for Liquid Sloshing Analysis of Cylindrical and Conical Tanks with Baffles. *Int. Journal of Electronic Engineering and Computer Sciences*. 2016. Vol. 1. № 1. P.14-27.
6. Myachenkov V.I., Grigorev V.I. Raschet sostavnyih obolochechnyih konstruktsiy na EVM: spravochnik. Moskva: Mashinostroenie, 1981. 216 s.
7. Strelnikova E., Yeseleva E., Gnitko V., Naumenko V. Free and forced vibrations of the shells of revolution interacting with the liquid. *Proc. of XXXII Conference Boundary elements and other mesh reduction methods, WITPress, Transaction on Modeling and Simulation*. 2010. Vol.50. P. 203-211.
8. Gnitko V., Marchenko U., Naumenko V., Strelnikova E. Forced vibrations of tanks partially filled with the liquid under seismic load. *Proc. of XXXIII Conference Boundary elements and other mesh reduction methods, WITPress, Transaction on Modeling and Simulation*. 2011. Vol. 52. P. 285-296.
9. Caliri M.F., Ferreira A.J.M., Tita V. A review on plate and shell theories for laminated and sandwich structures highlighting the Finite Element Method. *Composite Structures.* 2016. Vol. 156. P. 63–77.
10. Carrera E., Pagani A. Valvano S. Shell elements with through-the-thickness variable kinematics for the analysis of laminated composite and sandwich structure. *Composites. Part B: Engineering.* 2017. Vol.111. P. 294–31.
11. Gavrilenko G.D., Matsner V.I., Kutenkova O.A. Free vibrations of ribbed cylindrical shells with local axisymmetric deflections. *International Applied Mechanics*. 2008. Vol.44. Issue 9. P.1006–1014.
12. Kim J.G., Lee J.K., Yoon H.J. Free vibration analysis for shells of revolution based on p-version mixed finite element formulation. *Finite Elements in Analysis and Design*. 2015. Vol.95. P.12-19.
13. Novozhilov V.V. Teoriya tonkih obolochek. L.: Sudpromgiz. 1962. 432 s.
14. Ravnik J., Strelnikova E., Gnitko V., Degtyarev K., Ogorodnik U. BEM and FEM analysis of fluid-structure interaction in a double tank. *Engineering Analysis with Boundary Elements.* 2016. Vol.67. P.13-25.
15. Eseleva E.V., Gnitko V.I., Strelnikova E.A. Sobstvennyie kolebaniya sosudov vyisokogo davleniya pri vzaimodeystvii s zhidkostyu. Problemyi mashinostroeniya. HarkIv, 2006. #1. S.105-118.