УДК 518.9

А. В. ДАБАГЯН, д-р техн. наук,
В. Я. ЗАРУБА

ОБ ОДНОМ ОПРЕДЕЛЕНИИ РЕШЕНИЯ ИГРЫ В ФОРМЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

При анализе многих процессов управления разработка практических рекомендаций возможна или целесообразна в условиях выделения отдельных оперирующих сторон и учете различия их интересов. Общими математическими моделями указанных процессов являются стратегические коалиционные игры. Следуя классической кооперативной теории стратегических игр, последние можно свести к играм в форме характеристической функции. Задачи, возникающие при таком переходе, относятся к классу задач математического программирования. Таким образом, в играх с характеристической функцией сохраняются теоретико-игровые проблемы, присущие играм вообще.

Пусть $\Omega = \{1, \ldots, n\}$ — множество всех оперирующих сторон, множество игроков; $\Gamma = \{S/S \subseteq \Omega\}$ — множество всех подмножеств множества Ω, элементы множества Γ называются коалициями; $x = \{x_1, \ldots, x_n\}$ — вектор выигрышей, получаемых игроками. Каждой коалиции $S \in \Gamma$ будем ставить в соответствие ее максимальный гарантированный выигрыш $v(S)$, представляющий собой сумму выигрышей игроков из коалиции S, которую они могут получить, выступая согласованно, независимо от действий остальных игроков. Множество S можно рассматривать как аргумент, а $v(S)$ как функцию множеств. Функция $v(S)$ полностью задает игру и называется характеристической функцией игры.

Множество $E(v)$ называется множеством дележей, а вектор выигрышей $x \in E(v)$ — дележом в игре v, если

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = v(\Omega); \qquad (1) \qquad\qquad x_i \geqslant v(i), \; i = 1, \ldots, n. \qquad (2)$$

Условие (1) означает, что все игроки объединяются с целью получить максимальную сумму выигрышей. Условие (2) означает, что каждый игрок получит не меньше своего максимального гарантированного выигрыша. Мы говорим, что дележ y доминирует дележ x по коалиции S, если

$$S \neq \varnothing; \; v(S) \geqslant \sum_{i \in S} y_i; \; y_i > x_i; \; \forall i \in S.$$

Множество $V(v)$ дележей называется решением игры v по фон Нейману и Моргенштерну (Н-М-решением), если никакой элемент множества $V(v)$ не доминирует другой элемент этого множества и любой дележ, не принадлежащий $V(v)$, доминируется каким-нибудь дележом из $V(v)$. Множество $C(v)$ дележей называется c-ядром, если

$$\sum_{i \in S} x_i \geqslant v(S); \quad \forall S \in \Gamma; \quad \forall x \in C(v).$$

Исследование игр с характеристическими функциями может вестись в двух направлениях. Использование Н-М-решений позволяет указать, какими будут взаимоотношения между игроками, «нормы», линии их поведения, приводящие к равновесному устойчивому исходу игры. При этом предполагается, что реализация конкретного дележа в конце игры зависит от неформализованных факторов, например от деловых способностей игроков. Иначе говоря, в конструкции Н — М-решения не заложено решение вопроса о том, какие выигрыши получат игроки в конце игры.

Во многих практически важных случаях игру желательно характеризовать реализующимся по окончании ее дележом. Такой дележ может быть «предсказан», если известно правило, определяющее рациональные (устойчивые, равно приемлемые для всех игроков) дележи, правило, которое игроки вырабатывают до момента, когда они оценят свои возможности в игре. Можно заметить, что уже само определение дележей из всех возможных выигрышей выделяет такие, которые обладают определенной рациональностью. Более узким, чем множество дележей $E(v)$, является множество $C(v) \subseteq E(v)$, состоящее из всех недоминируемых дележей. Очевидно, что дележи из множества $C(v)$ можно рассматривать как рациональные, а с помощью какого-нибудь произвольного дополнительного правила — устанавливать единственный дележ $\sigma \in C(v)$. Поскольку множество $C(v)$ может быть пустым, возникает задача конструирования правил, по которым для любой игры можно определить единственный дележ, являющийся рациональным.

Ниже рассмотрим одно такое правило, в котором существенно используется понятие c-ядра. Это правило естественно рассматривать как определение решения игры.

Введем множество векторов

$$Z(v) = \left\{ z / \sum_{i \in S} z_i \geqslant v(S), \quad \forall S \in \Gamma, \quad \forall z \in Z(v) \right\}.$$

Множество является выпуклым, оно не пусто. Кроме того, $E(v) \cap Z(v) = C(v)$.

Рассмотрим задачу: минимизировать

$$f(x, z) = \sum_{i=1}^{n} (z_i - x_i)^2 \tag{3}$$

при ограничениях

$$x \in E(v); \; z \in Z(v). \tag{4}$$

Эта задача может быть интерпретирована как задача нахождения минимального расстояния между выпуклыми множествами $E(v)$, $Z(v)$. Очевидно, множество Y решений этой задачи всегда не пусто: если $E(v) \cap Z(v) \neq \varnothing$, то $f(x, z) = 0$; если $E(v) \cap Z \times \times (v) = \varnothing$, то $f(x, z) > 0$. Множество $C^*(v)$ дележей назовем c^*-ядром игры, если $C^*(v) = \{x^0/(x^0, z^0) \in Y\}$. Очевидно, если $E(v) \cap Z(v) \neq \varnothing$, то $C^*(v) = E(v) \cap Z(v) = C(v)$. Введем в рассмотрение функцию $g(x, z) = \sum_{i=1}^{n} |z_i - x_i|$. Нетрудно видеть, что данная функция монотонно связана с функцией $f(x, z)$. Поэтому, если в задаче (3), (4) целевую функцию $f(x, z)$ заменить на функцию $g(x, z)$, множество решений этой задачи не изменится. Полученную таким образом новую задачу можно свести к задаче линейного программирования следующего вида: минимизировать $\sum_{i=1}^{n} \zeta_i$ при ограничениях $\zeta_i \geqslant z_i - x_i$; $\zeta_i \geqslant x_i - z_i$; $i = 1, \ldots, n$ и ограничениях (4). Поскольку целевая функция $\sum_{i=1}^{n} \zeta_i$ минимизируется, то, очевидно,

$$\zeta_i^0 = |z_i^0 - x_i^0|; \quad i = 1, \ldots, n; \quad \forall (x^0, z^0) \in Y.$$

Учитывая, что множество решений задачи линейного программирования является выпуклым, а проекция множества, определенного в l-мерном евклидовом пространстве, на любое m-мерное евклидово пространство ($m \leqslant l$) также выпуклое множество, мы приходим к выводу, что множество $c^*(v)$ является выпуклым. Дележи, образующие c^*-ядро, можно считать рациональными: дележи из множества $C(v)$ идеально удовлетворяют игроков. Если ни один из таких дележей нереализуем, то игроки соглашаются на дележи, минимально отличающиеся от дележей из множества $C(v)$. В качестве дележа σ, образующегося в конце игры, можно выбрать центр тяжести фигуры, образованной множеством $C^*(v)$. Поскольку эта фигура целиком лежит в гиперплоскости, описываемой уравнением (1), то $\sigma \in C^*(v)$.

Список литературы: 1. *Фон Нейман Дж., Моргенштерн О.* Теория игр и экономическое поведение. М., «Наука», 1970. 707 с. 2. *Оуэн Г.* Теория игр. М., «Мир», 1971. 221 с.

УДК 621.391

В. Л. ЛИСИЦКИЙ, канд. техн. наук

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ КОНФЛИКТНОЙ СИТУАЦИИ

Оценка выживаемости сложных систем, функционирующих в условиях вредных воздействий агрессивной внешней среды [1], — актуальная проблема, имеющая важное прикладное зна-