промежуточного типоразмера и производится деление поля заявок на части, обслуживаемые КТС максимального и промежуточного типоразмеров; по формуле (9) находится экономический эффект от введения в эксплуатацию наряду с КТС максимального типоразмера КТС промежуточного типоразмера.

Поступила 20 сентября 1978 г.

УДК 330.115

А. Е. ГОЛОСКОКОВ, Ю. Л. ГИТТИК

ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ДЕКОМПОЗИЦИЯ И КООРДИНАЦИЯ В ИЕРАРХИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Рассматривается общая схема метода параметрической декомпозиции и применение этого метода к задаче распределения ресурсов. На основе полученной двухуровневой схемы решения данной задачи дается интерпретация проблемы координации в иерархических системах.

Планирование и управление в реальных экономических системах связано с решением задач математического программирования большой размерности. Размерность задачи определяется количеством переменных, числом и характером ограничений, видом целевой функции. Эффективным подходом решения таких задач является создание иерархических процедур оптимизации. К методам этой группы относится оптимизация на двух уровнях, когда исходная задача разбивается на подзадачи меньшей размерности, зависящие от некоторых связующих параметров. Нахождение оптимальных связующих параметров, т. е. координация, происходит на верхнем уровне. При этом для нахождения оптимального решения между нижним и верхним уровнями происходит некоторый итеративный процесс с помощью обмена информацией. Координация в такой двухуровневой системе наглядно иллюстрирует различные аспекты общей проблемы координации в иерархических системах по М. Месаровичу [1].

Будем рассматривать двухуровневую систему оптимизации, получаемую на основе параметрической декомпозиции задачи определенного типа. Опишем общую схему метода параметрической декомпозиции [2].

Пусть дана задача $A = [X, f]$ нахождения наименьшего значения функции $f(x)$ на множестве $X \subseteq E^n$. Параметризация задачи A означает такая ее замена новой задачей $B = [Z, f_0]$ нахождения наименьшего значения функции $f_0(x, y)$ на множестве $Z = X + Y$, $Y \subseteq E^m$, что если $(\hat{x}, \hat{y})$ — решение задачи B, то $\hat{x}$ — решение задачи A. Параметрическая декомпозиция задачи A

означает получение ее решения, при использовании следующей двухуровневой схемы решения задачи B. На нижнем уровне решается задача $B_1 = [X(y), f_0]$ нахождения наименьшего значения $F(y)$ функции $f_0(x, y)$ при фиксированном значении параметра y; здесь $X(y)$ — соответствующее сечение множества Z. На верхнем уровне решается так называемая координирующая задача $B_2 = [Y, F]$ минимизации функции $F(y)$ на множестве Y допустимых значений параметра y.

Известные варианты параметрической декомпозиции [3] отличаются друг от друга способом формирования задачи B и методом решения задачи B_2. Используя специфические особенности рассматриваемых классов задач, параметризация обычно проводится таким образом, чтобы задача B_1 оказалась сравнительно простой, в частности, распалась на ряд независимых задач меньшей размерности.

Многие математические модели в экономике сводятся к задаче распределения ресурсов $P = [X, f]$, где $f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i)$; $X = \left\{(x_1, \ldots, x_n) : \sum_{i=1}^{n} g_i(x_i) \leqslant b,\ x_i \in X_i,\ i = \overline{1, n}\right\}$. Здесь $g_i(x_i) = (g_{1i}(x_i), \ldots, g_{mi}(x_i))$, $b = (b_1, \ldots, b_m)$. Задача такого вида возникает, например, при распределении парка самолетов по авиалиниям [4].

Разложим задачу P на подзадачи на основе метода параметрической декомпозиции [4, 5]. Получим подзадачи $P_i = [S_i(y_i), f_i]$ нахождения наименьшего значения $\varphi_i(y_i)$ функции $f_i(x_i)$ на множестве $S_i(y_i) = \{x_i : x_i \in X, g_i(x_i) \leqslant y_i\}$, где $y = (y_1, \ldots, y_n)$ — параметр (координирующий вход). Координирующей служит задача $P_0 = [Y, \varphi]$, где $\varphi(y) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(y_i)$, $Y = \left\{(y_1, \ldots, y_n) : \sum_{i=1}^{n} y_i \leqslant b,\right.$ $\left.\exists\, x_i \in X_i \text{ такие, что } g_i(x_i) \leqslant y_i,\ i = \overline{1, n}\right\}$.

Обозначим через $x_i(y_i)$ решение подзадачи P_i на координирующем входе y_i, $i = \overline{1, n}$. Предположим, что задача P имеет допустимое решение, множества X_i — выпуклые компакты, $f_i(x_i)$ и каждая компонента $g_i(x_i)$ непрерывны и выпуклы на X_i ($i = \overline{1, n}$).

Обозначим $\partial\varphi(y)$ — множество всех обобщенных градиентов (субградиентов) функции φ в точке y, $u(y) = (u_1(y_1), \ldots, u_n(y_n))$ — вектор множителей Лагранжа подзадач при значении координирующего входа $y = (y_1, \ldots, y_n)$.

В работе [5] доказано, что при сделанных предположениях $-u(y) \in \partial\varphi(y)$. Следовательно, для нахождения решения координирующей задачи $\hat{y}$ можно использовать процедуру обобщенного градиентного спуска [6]

$$y_{k+1} = \pi(y_k + \alpha_k u(y_k)), \ k = 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

где π — операция проектирования на Y, $\{\alpha_k\}$ правильна, т. е. удовлетворяет условиям $\alpha_k \in (0, 1)$, $\alpha_k \to 0$, $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = \infty$ последовательности чисел. Доказано, что при сделанных предположениях процесс (1) сходится [6], т. е. существует $\lim_{k\to\infty} y_k = \hat{y}$. Итеративная процедура приводит к последовательности $\{x(y_k)\}$ допустимых планов задачи P, причем последовательность $\{f(x(y_k))\}$ сходится к $f(\hat{x})$, где $\hat{x}$ — решение задачи P [4].

В работе [7] рассмотренный метод использовался для декомпозиции линейных задач, матрица ограничений которых имеет большое число нулевых элементов.

Предположим дополнительно, что функция $f(x)$ строго выпукла на X.

Теорема. *Пусть*

$$f(\hat{x}) = \min_{x \in X} f(x) \tag{2}$$

и последовательность $\{x_k\} \subset X$ *такова, что*

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k) = f(\hat{x}). \tag{3}$$

Тогда

$$\lim_{k\to\infty} x_k = \hat{x}. \tag{4}$$

Доказательство. По предположению, функция $f(x)$ строго выпукла на множестве X, поэтому, поскольку $\{x_k\} \subset X$, для любого $a \in [0, 1]$ справедливо неравенство $f(a\hat{x} + (1-a)x_k) < af(\hat{x}) + (1-a)f(x_k)$. Так как это неравенство для любого $k = 1, 2, \ldots$, то можно перейти к пределу при $k \to \infty$: $\lim_{k\to\infty} f(a\hat{x} + (1-a)x_k) \leqslant af(\hat{x}) + (1-a)\lim_{k\to\infty} f(x_k)$. В силу (3) и непрерывности $f(x)$ отсюда получаем $f(a\hat{x} + (1-a)\lim_{k\to\infty} x_k) \leqslant f(\hat{x})$. Но имеет место (2), поэтому

$$f(a\hat{x} + (1-a)\lim_{k\to\infty} x_k) = f(\hat{x}).$$

При сделанных предположениях точка минимума $\hat{x}$ — единственная, поэтому $a\hat{x} + (1-a)\lim_{k\to\infty} x(k) = \hat{x}$ или $(1-a)\lim_{k\to\infty} x_k =$

$= (1 - a)\hat{x}$. Поскольку это равенство справедливо и для $a \neq 1$, то отсюда следует (4).

Из доказанной теоремы следует, что нахождение координирующего входа $\hat{y}$ такого, что

$$x(\hat{y}) = \hat{x} \tag{5}$$

может быть итеративной процедурой (1).

Дадим интерпретацию основных аспектов проблемы координации в иерархических системах (ср. [1]) на основе описанной двухуровневой схемы решения задачи P.

Синтез координирующего элемента. Поскольку задачи нижнего уровня предопределены структурой глобальной задачи P, задача верхнего уровня P_0 заключается в нахождении входа $\hat{y}$ такого, что выполняется (5). В этом смысле задача P_0 формулируется как глобальная задача P. Поэтому в схеме параметрической декомпозиции координируемость на основе задачи P (это обеспечивает выбранный метод координации) означает также и координируемость по отношению к задаче P_0.

Метод координации. На основе итеративного алгоритма (1) решения задачи P_0 осуществляется «многофазная» координация. В силу теоремы этот алгоритм позволяет получать вход $\hat{y}$, который решает глобальную задачу, т. е. координирует эту двухуровневую систему.

Проблема модификации. Задача верхнего уровня P_0 координирующим входом y осуществляет модификацию образов подзадач P_i, $i = \overline{1, n}$. Параметрическая декомпозиция, согласно которой используется такой метод модификации, позволяет находить решение глобальной задачи. Поэтому модифицированные подзадачи координируемы относительно задачи P_0.

Декомпозиция. Задачи верхнего и нижнего уровня определяются по описанной схеме декомпозиции. Метод координации (1) обеспечивает координируемость по отношению к глобальной задаче, а значит, и по отношению к задаче верхнего уровня P_0.

Синтез координирующего элемента основывается на принятом принципе координации. Как показано в работе [8], в схеме параметрической декомпозиции используется принцип прогнозирования.

Список литературы: 1. *Месарович М., Мако Д., Такахара Н.* Теория иерархических многоуровневых систем.— М.: Мир, 1973.—344 с. 2 *Левин Г. М., Танаев В. С.* О параметрической декомпозиции экстремальных задач.— Кибернетика, 1977, № 3, с. 123—128. 3. *Верина Л. Ф., Танаев В. С.* Декомпозиционные подходы к решению задач математического программирования.— Экономика и математические методы, 1975, 11, вып. 6, с. 1160—1172. 4. *Голосков А. Е., Емельянов В. И., Гиттик Ю. Л.* Об одном подходе к решению распределительной задачи большой размерности.— Исследование больших систем в гражданской авиации. Труды ГосНИИ ГА, 1977, вып. 149, с. 63—68. 5. *Лэдон Л. С.* Оптимизация больших систем.— М.: Наука, 1975.— 432 с. 6. Итеративные методы в теории игр и программировании / *В. З. Беленький, В. А. Волконский, С. А. Иванов* и др.— М.: Наука, 1974.—240 с. 7. *Ермольева Ю. М.* Метод параметрической декомпозиции.— Кибернетика, 1973, № 2, с. 66—69. 8. *Гиттик Ю. Л., Голоскоков А. Е.* О связи между принципом прогнозирования и параметрической декомпозицией.—См. статью настоящего вестника.

Поступила 12 октября 1978 г.

УДК 330.115

Ю. Л. ГИТТИК,
А. Е. ГОЛОСКОКОВ

О СВЯЗИ МЕЖДУ ПРИНЦИПОМ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ И ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ДЕКОМПОЗИЦИЕЙ

В работе устанавливается связь между принципом прогнозирования [1] и методом параметрической декомпозиции [2]. Показано, что специальный выбор оценки качества прогнозирования позволяет трактовать этот метод декомпозиции как частное применение общего принципа координации.

Пусть дана задача $A = [X, f]$ нахождения наименьшего значения функции $f(\boldsymbol{x})$ на множестве $X = \{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \leqslant 0, \ \boldsymbol{x} \in X_1 \times \times X_2 \ldots X_n\}$. Здесь $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$, $\boldsymbol{x}_i = (x_{i1}, \ldots, x_{ik_i})$ — в общем случае векторы; $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ — m-мерная функция.

Разложим задачу A некоторым образом на подзадачи $A_i = [S_i(\beta_i), f_i(\alpha_i)]$, $i = \overline{1, n}$. При фиксированном $\gamma_i = (\alpha_i, \beta_i)$ обозначим решение (не обязательно единственное) подзадачи A_i через $\boldsymbol{x}_i(\gamma_i)$ $(i = \overline{1, n})$. Задача второго уровня (центра) состоит в нахождении координирующих входов $\hat{\gamma}_i$ таких, что $\boldsymbol{x}_i(\hat{\gamma}_i) = \hat{\boldsymbol{x}}_i$, $i = \overline{1, n}$, где $\hat{\boldsymbol{x}} = (\hat{\boldsymbol{x}}_1, \ldots, \hat{\boldsymbol{x}}_n)$ — решение задачи A. В подзадачах A_i $(i = \overline{1, n})$ осуществляется так называемая бикоординация: входы α_i изменяют целевые функции подзадач и осуществляют координацию путем изменения целей, влияние входов β_i связано с изменением множества ограничений — происходит координация путем изменения образов.

Для осуществления процесса координации введем [1] некоторые функции оценки качества прогнозирования $\tilde{q}(\gamma)$ и $q(\boldsymbol{x}(\gamma), \gamma)$, где $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ — некоторый координирующий вход; $\boldsymbol{x}(\gamma) = (\boldsymbol{x}_1(\gamma_1), \ldots, \boldsymbol{x}_n(\gamma_n))$ — вектор решений подзадач при этом координирующем входе.

Будем говорить (ср. [1]), что при выбранных функциях $\tilde{q}(\gamma)$ и $q(\boldsymbol{x}(\gamma), \gamma)$ и виде следующих подзадач A_i $(i = \overline{1, n})$: