

Воропай Алексей Валериевич

**ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА
В НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧАХ
НЕСТАЦИОНАРНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ПЛАСТИН**

Монография

Харьков
2018

Рецензенты:

В. А. Меньшиков, доктор физико-математических наук, с.н.с., зав. каф. теоретической механики, машиноведения и роботомеханических систем Национального аэрокосмического университета "ХАИ" им. Н. Е. Жуковского;
В. П. Ольшанский, доктор физико-математических наук, проф. каф. физики и теоретической механики ХНТУСХ им. П. Василенко;
В. Г. Солодов, доктор технических наук, профессор, зав. каф. теоретической механики и гидравлики ХНАДУ

Публикуется по решению ученого совета
Харьковского национального автомобильно-дорожного университета,
протокол №8/18 от «25» мая 2018

Воропай А. В.

Интегральные уравнения Вольтерра в некорректных задачах нестационарного деформирования пластин / А. В. Воропай. – Харьков: Издательство «Лидер», 2018 – 212 с.

В монографии предложен комплекс методов решения некорректных задач нестационарного нагружения пластинчатых элементов конструкции, которые могут быть сведены к решению одного или системы интегральных уравнений Вольтерра. Описана методика дискретизации систем интегральных уравнений Вольтерра, и затем решения блочных систем линейных алгебраических уравнений с использованием регуляризирующего алгоритма Тихонова и обобщенных алгоритмов Крамера или Гаусса. Сформулированы и решены обратная задача о воздействии на пластину нескольких неизвестных независимых нестационарных нагрузок, действующих одновременно, а также задача о моделировании нестационарных колебаний прямоугольных пластин при наличии сосредоточенных масс, дополнительных сосредоточенных опор и гасителей колебаний. Построено решение некорректной задачи об управлении нестационарными поперечными колебаниями прямоугольной пластины с учетом различных сосредоточенных особенностей. Выполнен учет диссипативных свойства в материале на базе решений теории упругости для деформируемых элементов конструкции с использованием дифференциальных и сглаживающих линейных интегральных операторов для случая внутреннего вязкого трения (модель Кельвина–Фойхта) и внутреннего гистерезисного трения (модель Бока–Шлиппе–Колара).

Для научных сотрудников, преподавателей вузов, аспирантов и студентов, специализирующихся в областях механики деформируемого твердого тела, динамики и прочности машин.

У монографії запропоновано комплекс методів розв'язання некоректних задач нестационарного навантаження пластинчастих елементів конструкції, які можуть бути зведені до вирішення одного або системи інтегральних рівнянь Вольтерра. Описана методика дискретизації систем інтегральних рівнянь Вольтерра, і потім розв'язку блокових систем лінійних алгебраїчних рівнянь з використанням регуляризуючого алгоритму Тихонова та узагальнених алгоритмів Крамера або Гаусса. Сформульовано та вирішено обернену задачу про вплив на пластину декількох невідомих незалежних нестационарних навантажень, що діють одночасно, а також задачі про моделювання нестационарних коливань прямокутних пластин при наявності зосереджених мас, додаткових зосереджених опор і гасителів коливань. Побудовано розв'язок некоректної задачі про управління нестационарними поперечними коливаннями прямокутної пластины з урахуванням різних зосереджених особливостей. Виконано урахування диссипативних властивостей в матеріалі на базі рішень теорії пружності для елементів конструкції, що деформуються, з використанням диференціальних і згладжуючих лінійних інтегральних операторів для випадку внутрішнього в'язкого тертя (модель Кельвіна-Фойхта) і внутрішнього гістерезисного тертя (модель Бока-Шліппе-Колара).

Для наукових співробітників, викладачів вузів, аспірантів і студентів, які спеціалізуються в галузях механіки деформівного твердого тіла, динаміки та міцності машин.

СОДЕРЖАНИЕ

ВСТУПЛЕНИЕ	6
1. КРАТКИЙ ЛИТЕРАТУРНЫЙ ОБЗОР	9
1.1. Выбор теории нестационарного деформирования пластин	9
1.2. Монографии и работы обзорного характера.....	11
1.3. Работы по решению нестационарных задач механики деформируемого твёрдого тела, в которых используются свёрточные интегралы и интегральные уравнения.....	13
1.4. Работы, в которых используются интегральные уравнения Вольтера для определения динамики нагружения	15
1.5. Работы, посвященные идентификации и управлению колебаниями с применением новых технологий.....	20
1.6. Заключение.....	26
2. ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ, ИСПОЛЬЗОВАННЫЕ В РАБОТЕ	28
2.1. Введение	28
2.2. Описание регуляризирующего алгоритма.	29
2.3. Выбор параметра регуляризации	35
2.4. Пример решения обратной некорректной задачи для упругодеформируемой пластины	37
2.5. Решение системы двух интегральных уравнений Вольтерра	46
2.6. Обобщенный алгоритм Крамера (ОАК).....	48
2.7. Обобщенный алгоритм Гаусса (ОАГ)	50
3. НЕСТАЦИОНАРНОЕ НАГРУЖЕНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН.....	53
3.1. Воздействию на прямоугольную пластину системы конечного числа независимых произвольных нагружений.....	53
3.2. Идентификация нескольких импульсных нагрузок, воздействующих на пластину	68

3.3. Пример идентификации нескольких поперечных нагрузок, действующих на пластину	69
3.4. Учет влияния упругого основания при импульсном деформировании прямоугольных пластин	76
4. НЕСТАЦИОНАРНОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ПЛАСТИН ПРИ НАЛИЧИИ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ	84
4.1. Введение.....	84
4.2. Постановка задачи и математическая модель.....	85
4.3. Описание решения задачи в общем виде.....	90
4.4. Нестационарные колебания пластины с присоединенной сосредоточенной массой	91
4.5. Нестационарные колебания прямоугольной пластины, имеющей дополнительную линейно-упругую опору	98
4.6. Моделирование нестационарного деформирования прямоугольной пластины с гасителем колебаний	111
4.7. Нестационарные колебания пластины с дополнительной вязкоупругой опорой.....	120
4.8. Распределение вязкой и упругой составляющих в реакции дополнительной вязкоупругой опоры, контактирующей с пластиной	128
4.9. Заключение	137
5. УПРАВЛЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫМИ КОЛЕБАНИЯМИ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ, СОДЕРЖАЩИХ ПЛАСТИНЫ	138
5.1. Введение.....	138
5.2. Управление нестационарными колебаниями механической системы, состоящей из пластины и сосредоточенной массы	139
5.3. Гашение нестационарных колебаний механической системы, состоящей из пластины и сосредоточенной массы. Пассивная виброзащита	149
5.4. Управление поперечными колебаниями на небольшой области пластины .	156
5.5. Активное гашение нестационарных колебаний прямоугольной пластины..	169

6. УЧЁТ ДИССИПАТИВНЫХ СВОЙСТВ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ	179
6.1. Введение и постановка задачи	179
6.2. Модификации аналитических соотношений для ядер интегралов и частот. Использование дифференциальных операторов	181
6.3. Сглаживающие интегральные операторы	184
6.4. Пример использования разработанной теории для прямоугольной пластины.....	185
6.5. Выводы	190
ЛИТЕРАТУРА	192

ВСТУПЛЕНИЕ

Одними из самых широко распространенных элементов конструкций являются прямоугольные пластины. В технике и строительстве в качестве облицовочных элементов зачастую используются тонкие пластины. Когда от элементов конструкций требуется обладать существенными несущими свойствами, необходимо использовать тонкостенные пластинчатые элементы со сложным профилем или пластины средней толщины (а иногда и толстые плиты). Пластины средней толщины, хотя и проигрывают сложным тонкостенным элементам с точки зрения материалоемкости и веса, во-первых, их использование значительно проще (конструктивно), а во-вторых, эти пластины лучше работают в условиях динамических, а особенно ударных нагрузений.

Иногда для механических систем, включающих в себя элементы конструкции в виде прямоугольных пластин, на которые действуют нестационарные нагрузки, кроме требований прочности вводятся дополнительные ограничения на перемещения некоторых их частей (величины прогибов и т.п.). В таких случаях для опертых по периметру пластин целесообразно использовать дополнительные опоры.

Зачастую конструкторы сталкиваются с проблемой недостаточной информации о действии нагрузок на механические системы. Особенно серьезные проблемы возникают при нестационарном деформировании элементов конструкций. В ряде случаев при анализе напряженно-деформированного состояния ударные и другие подобные нагружения моделируются приблизительно или вообще заменяются коэффициентами запаса, динамичности нагрузки и т.п. И только для особо ответственных элементов или конструкций в целом производится ряд дорогостоящих экспериментальных исследований. Решение обратных задач идентификации неизвестных нестационарных нагружений при обработке экспериментальных данных может существенно снизить стоимость и время исследований, а иногда частично или полностью заменить реальные исследования специальными вычислительными экспериментами.

Так как настоящая монография рассчитана прежде всего на круг читателей, включающий специалистов в области механики деформируемого твёрдого тела, то автор считает возможным опустить во вступлении очевидные фразы о важности, актуальности и практической значимости приведенных в книге материалов.

Вынесем во введение ряд определений, которые встречаются по всей работе.

Наиболее общее определение прямой задачи в механике деформируемого твердого тела – нахождение напряженно-деформированного состояния

элемента конструкции при известном закреплении этого элемента, а также его известном силовом или кинематическом нагружении.

Наиболее общее определение обратной задачи – это при заданном (полностью или частично) напряженно-деформированном состоянии элемента конструкции нахождение системы закрепления этого элемента и/или его силового (кинематического) возмущения.

Класс задач, связанных с определением (идентификацией) системы закрепления (например, посредством нахождения реакций на границе), во многих источниках, например [9], обычно относят к обратным граничным задачам механики деформируемого твёрдого тела.

Однако указанные классификации задач зачастую относятся к статике. В случае исследования динамики (особенно нестационарной), редко ставится задача идентификации граничных условий (которые в принципе могут меняться со временем).

Можно ввести следующие более узкие формулировки:

Прямая задача (динамическая) – определение зависимостей компонент перемещения или деформации во времени элемента конструкции при известной системе возмущающих нагрузок.

Обратная задача (динамическая) – определение закона изменения во времени возмущающей силы или системы сил на элемент конструкции при условии, что изменение перемещения (деформации) во времени в некоторой точке (или нескольких точках) этого элемента известно.

В основном динамические обратные задачи сводятся к интегральным уравнениям Вольтерра или их системам. Решение таких интегральных уравнений зачастую является некорректной задачей математической физики. Заметим, что согласно Адамару корректной или корректно поставленной задачей является такая, у которой выполняются условия:

- решение существует и оно единственно;
- решение устойчиво, то есть малым возмущениям правой части уравнения отвечают малые возмущения (конечные) обратного оператора, а сам обратный оператор определен и является непрерывным на всей области значений (на всем метрическом пространстве).

Некорректной задача является при нарушении хотя бы одного из приведенных условий. В специальной литературе [101, 109, 119], посвященной решению некорректных задач, дополнительно выделяют:

- условно некорректные задачи, корректные по Тихонову (когда при определенных ограничениях и в определённых (гильбертовых) пространствах может быть получено решение поставленной задачи;

- существенно некорректные задачи, когда точного решения может не существовать в принципе, а множество приближенных решений сходится условно и без априорной информации и дополнительных ограничений такие задачи решить невозможно.

Для изучения вопросов классификации, теории решения некорректных задач с выводом теорем и доказательств порекомендуем читателям обратиться к специальной литературе.

Определённое количество работ по решению обратных нестационарных задач механики деформируемого твёрдого тела выполнено учениками д.т.н., проф. Янютин Е. Г. Автор настоящей монографии также принадлежит к этой научной школе.

Под руководством Янютин Евгения Григорьевича в направлении некорректных задач нестационарной механики деформируемого твёрдого тела было защищено 9 кандидатских диссертаций:

– 2002 г. Янчевский И. В. «Некорректные задачи динамики элементов конструкций при импульсных воздействиях»

– 2004 г. Воропай А. В. «Некорректные задачи динамики пластин при импульсных воздействиях»

– 2005 г. Шарапата А. С. «Некорректные задачи нестационарного деформирования пластин и оболочек»

– 2006 г. Поваляев С. И. «Обратные задачи импульсного деформирования стержней, конических и цилиндрических оболочек»

– 2008 г. Богдан Д. И. «Восстановление импульсных нагрузок, воздействующих на упругие пластины и полупространство»

– 2009 г. Гришакин В. Т. «Обратные нестационарные задачи деформирования балок и пластин»

– 2011 г. Гнатенко Г. А. «Обратные нестационарные задачи для деформируемых систем балок и оболочек»

– 2012 г. Воропай Н. И. «Обратные нестационарные задачи упругого деформирования пластинчатых и пространственных элементов конструкций»

– 2017 г. Егоров П. А. «Интегральные уравнения Вольтерра в нестационарных задачах деформирования упругих элементов конструкций»

Работа может представлять интерес для специалистов, работающих в областях механики деформируемого твердого тела, динамики и прочности машин, а также в смежных областях. Монография может быть полезна для студентов старших курсов механико-математических, инженерно-физических, физико-технических факультетов университетов, а также студентов технических специальностей, у которых в процессе обучения используются современные методы математического и функционального анализов, и математической физики.

Автор благодарен рецензентам за труд, выполненный ими при прочтении рукописи монографии, и за полезные замечания.

Искреннюю признательность автор выражает своему научному консультанту д.т.н. проф. Янютину Е. Г., а также д.т.н. проф. Григорьеву А. Л. за ценные замечания, консультации математического характера, а также ряд ценных идей по использованию сглаживающих интегральных операторов.

Отдельную благодарность хотелось бы выразить зав. каф. деталей машин и ТММ ХНАДУ проф. В. А. Перегону и зав. каф. высшей математики НТУ «ХПИ» проф. Геворкяну Ю. Л. за организационную помощь при подготовке рукописи монографии.

1. КРАТКИЙ ЛИТЕРАТУРНЫЙ ОБЗОР

1.1. Выбор теории нестационарного деформирования пластин

Существует несколько классификаций пластин в рамках механики деформируемого твёрдого тела. В учебнике [105] выделяют *жесткие пластины*, *гибкие пластины* небольшого прогиба и *абсолютно гибкие пластины* (мембраны). Решение задач для мембран прочно вошло в классический курс математической физики [1, 110], поэтому не будем здесь останавливаться на вопросах связанных с их поведением.

С. П. Тимошенко в своей широко известной книге, написанной совместно с С. Войновский-Кригером «Пластинки и оболочки» [108] выделяет следующую классификацию по толщинам пластин:

– *тонкие пластинки с малыми прогибами* (классическая теория тонких пластин);

– тонкие пластинки с большими прогибами (нелинейная теория);

– *толстые пластинки* (рассматриваются в рамках трёхмерной теории).

Классическая теория изгибных колебаний тонких изотропных однородных упругих пластин базируется на следующих допущениях:

1) линейные элементы, которые до деформации перпендикулярны к срединной плоскости, остаются прямолинейными и нормальными к искривленной срединной поверхности после деформации;

2) элементы срединной плоскости не подвергаются растяжению, что равносильно сведению задачи о деформации к исследованию деформации срединной поверхности пластины.

Эти допущения были приняты Г. Кирхгоффом в работе «О равновесии и движении упругой пластины» [229], и на их основе он вывел определяющее уравнение для поперечных колебаний пластины:

$$D\nabla^2\nabla^2 w_0(x, y, t) + \rho h \frac{\partial^2 w_0(x, y, t)}{\partial t^2} = q(x, y, t).$$

Это уравнение параболического типа и, как отмечалось впоследствии многими исследователями, имеет ряд недостатков и описывает только медленно протекающие низкочастотные деформационные процессы.

В середине двадцатого века в устоявшиеся классификации были включены так называемые *пластины средней толщины*, уравнения поперечных колебаний которых было существенным уточнением модели Кирхгоффа. Уточнённые уравнения, были получены Я. С. Уфляндом [114] на основе модели балок Тимошенко [107] в 1948 г, а в 1951 г. Миндлин (R.D. Mindlin) [235] получил такие же уравнения, исходя из вариационной формулировки, и доказал единственность их решения.

Применительно к пластинам полагается, что элемент, первоначально прямолинейный и нормальный к срединной плоскости пластины, остается и

после деформации прямолинейным, однако угол его наклона к срединной плоскости пластины может быть отличен от прямого угла (поворачивается):

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) + z \cdot \psi_x(x, y, t);$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) + z \cdot \psi_y(x, y, t);$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t).$$

В этих соотношениях u_0 , v_0 и w_0 – перемещения точек срединной плоскости пластины, а ψ_x и ψ_y – углы поворота нормали к срединной плоскости пластины в плоскостях xOz и yOz , соответственно; $z \in [-h/2; h/2]$, где h – толщина пластины.

Определяющее уравнение является гиперболическим и описывает распространение двух типов деформационных волн.

В монографии [12] рассматриваются тонкие пластинки и оболочки, упругие прогибы которых сравнимы с их толщиной, но малы по сравнению с основными размерами. В ней содержатся теоретические и экспериментальные результаты, полученные автором в период с 1941 по 1955 г. Первая часть книги (главы 1-4) посвящена гибким пластинкам. Рассмотрены задача о больших прогибах прямоугольной и круглой пластинок при поперечной нагрузке, а также вопросы устойчивости и закритической деформации этих пластинок. В последующей монографии [13] этого автора нелинейная теория динамики пластин и оболочек изложена не только для гипотез Кирхгоффа (пластин) и Кирхгоффа-Лява (оболочек), но и модели типа Тимошенко.

В обзоре Э.И. Григолюка и И.Т. Селезова [61] приведено подробное описание неклассической теории пластин и оболочек, в котором в основном рассматриваются уточненные динамические теории, основанные на модели С.П. Тимошенко. Кроме того, в [61] освещены результаты по механике деформируемого твердого тела, полученные в отечественной и зарубежной литературе с восемнадцатого века до середины 1971 г, а также описаны пути для дальнейшего уточнения моделей деформирования пластин.

Впоследствии широкое развитие получили различные варианты уточненных теорий колебаний пластин и оболочек [54, 233], что связано с необходимостью получения более точной математической модели и новой дополнительной информации о НДС конструкционных элементов. Краткий обзор работ этого направления представлен в публикации [233]. В этой же работе получена уточненная теория высокого порядка деформации пластины, которая учитывает поперечную сдвиговую деформацию, поперечную нормальную деформацию и нелинейное распределение в плоскости перемещений по толщине.

Выбор модели уточненной теории высокого порядка зависит от ряда критериев. Например, от относительной толщины пластины h/l (h – толщина пластины, l – характерный размер исследуемого тела); наличия слоёв и соотношения их упругих свойств; видов нагружения (локализация в пространстве и во времени). В работе [248] показана применимость уточненной теории высокого порядка на примере задачи об ударе многослойной пластины шаром. Модель основывается на гипотезах нелинейной зависимости

перемещений от поперечной координаты в каждом слое, причем перемещения u , v имеют кубическую зависимость от поперечной координаты, а прогиб w – квадратичную зависимость; кроме того учитываются поперечные деформации. Аналогичные результаты подробно описываются в монографии [96], где также получены уравнения движения для многослойных пластин и оболочек на основе уточненных теорий первого и высокого порядков.

В общем виде уточнённые уравнения получены как математическая аппроксимация трёхмерной теории упругости, и имеют вид степенных рядов по поперечной координате z :

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) + z \cdot \psi_{x1}(x, y, t) + z^3 \psi_{x3}(x, y, t) + \dots;$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) + z \cdot \psi_{y1}(x, y, t) + z^3 \psi_{y3}(x, y, t) + \dots;$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) + z^2 \cdot \psi_{z2}(x, y, t) + \dots$$

Как правило, для аппроксимации продольных перемещений используются ряды по нечётным степеням, а для прогибов – по чётным, однако при моделировании поперечного обжатия можно встретить слагаемые вида $z \cdot \psi_{z1}(x, y, t)$. В монографии [103] строится уточненная модель теории многослойных пластин, а в [89, 103] – теории оболочек, которые учитывают поперечное обжатие.

Отметим, что уравнения, полученные Я.С. Уфляндом и Р. Д. Миндлином, позволяют учитывать эффекты инерции вращения и сдвига. При исследовании нестационарного деформирования однослойных изотропных пластин хорошо себя зарекомендовала теория на основе гипотез Тимошенко, а уточненные теории более высокого порядка целесообразно применять для неоднородных и многослойных пластин.

1.2. Монографии и работы обзорного характера

Научная школа академика А.П. Филиппова внесла существенный вклад [15] в изучение нестационарных колебаний деформируемых элементов конструкций в виде пластин (и других упруго деформируемых объектов канонических форм). В работах [59, 115, 116, 118] рассмотрены вопросы, связанные с колебаниями деформируемых пластин под действием нагрузок различного характера, в том числе под действием ударных. Приведены аналитические и численные методы их расчета. В публикации [117], кроме развития методов решения динамических задач, представлены результаты экспериментальных исследований деформирования элементов конструкций. Также отметим две монографии, написанные учениками А.П. Филиппова [14, 145].

Укажем, что в работе обзорного характера [64] можно ознакомиться с библиографией многочисленных исследований динамики пластин и оболочек.

Уникальным по своему содержанию является трёхтомный сборник [94], который представляет собой серию обзоров, содержащих библиографию

научных исследований в СССР в промежутке с 20-х по 70-е гг. двадцатого века по актуальным разделам современной механики, включая основную проблематику общей механики, механики жидкости и газа, а также механики деформируемого твердого тела. Особого внимания заслуживает третий том [93], в котором проведен глубокий анализ основных методов и важнейших результатов прошлого столетия по многим направлениям развития линейной теории упругости.

Обобщающие публикации зарубежных ученых и ученых Украины по ряду научных направлений механики, выполненные в последние годы XX века, собраны в шеститомном издании «Успехи механики» [112, 113].

Отметим фундаментальные работы по теории пластин и оболочек ученых Института механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины [65, 99], в которых широко используются интегральные преобразования и теория интегральных уравнений, в том числе и Вольтерра.

В монографии [65] показано, что для некоторых классов изображений по Лапласу, оригиналы которых не удается получить аналитически, их определение можно свести к решению интегральных уравнений Вольтерра. В первую очередь этот прием удобен в случае изображений, имеющих вид дроби

$$x^L(s) = f^L(s)/k^L(s),$$

такой, что оригиналы функций $f^L(s)$ и $k^L(s)$ существуют и могут быть определены в явном виде. Умножая левую и правую части формулы на знаменатель $k^L(s)$ и применяя теорему о свертке оригиналов, получаем интегральное уравнение Вольтерра I рода

$$\int_0^t x(\tau)k(t-\tau)d\tau = f(t),$$

которое потом либо сводится к уравнению Вольтерра II рода, либо решается численно.

При возможности представления изображения в виде

$$x^L(s) = \frac{f^L(s)}{1+k^L(s)},$$

где оригиналы функций $f^L(s)$ и $k^L(s)$ могут быть определены аналитически, непосредственно из этого соотношения можно получить интегральное уравнение Вольтерра II рода

$$x(t) + \int_0^t x(\tau)k(t-\tau)d\tau = f(t).$$

Предложенный прием, в качестве примера, применен при решении внешней задачи нестационарной гидроупругости, когда обращение с помощью теории вычетов очень трудоемко или не возможно.

1.3. Работы по решению нестационарных задач механики деформируемого твёрдого тела, в которых используются свёрточные интегралы и интегральные уравнения

Направление, посвященное обратным задачам в механике деформируемого твердого тела [9, 55, 58, 225, 241, 242], начало активно развиваться с 70-х годов прошлого века, и продолжает развиваться до настоящего времени, хотя первые работы появились ещё в начале двадцатого века. Их интенсивное развитие стало возможным в связи с достижениями в областях математической физики, вычислительной математики и бурным развитием вычислительной техники; приведем некоторые известные монографии [60, 78, 95, 101, 102, 109, 119].

В обратных задачах механики деформируемого твердого тела требуется найти причины и определить факторы, в зависимости от класса обратной задачи, по известным следствиям и некоторой дополнительной информации об объекте исследования. В монографии [9] приведен вариант классификации обратных задач, при котором различают ретроспективные, граничные, коэффициентные и геометрические обратные задачи. Для указанных вариантов обратных задач по некоторой дополнительной экспериментальной информации определяются коэффициенты дифференциальных операторов, начальные и граничные условия, геометрия внутренних дефектов (полостей, трещин).

В работе [10] подробно описаны методы и алгоритмы решения интегральных уравнений, к которым могут сводиться обратные задачи, содержится обзор литературы, а также методы их приближенного решения, например метод регуляризации Тихонова.

Некоторые авторы также выделяют корректные, некорректные и промежуточные задачи [97].

Наиболее широкое практическое применение при решении обратных задач получил метод регуляризации А. Н. Тихонова, который заключается во введении специального сглаживающего функционала [101, 109, 119]. Вопрос выбора параметра регуляризации хорошо изучен в литературе, например, в работе [95] получены условия согласования параметра регуляризации с погрешностью исходных данных, а также необходимые и достаточные условия для сходимости приближенного решения к точному.

Вопросам выбора оптимального параметра регуляризации Тихонова при решении задач идентификации для линейно упругого континуума посвящена работа [238].

В [252] помимо априорного выбора параметра изучаются апостериорные правила выбора параметра регуляризации Тихонова для решения нелинейных неупорядоченных задач. Авторы вводят два апостериорных правила и показывают, что по сравнению с их предыдущими работами оптимальные результаты сходимости порядка были получены при гораздо более слабых предположениях, которые важны в инженерной практике. Численные эксперименты подтверждают некоторые теоретические результаты.

В настоящее время можно встретить множество работ посвященных развитию метода А. Н. Тихонова, например, [218, 230, 234, 249, 250, 258].

Метод последовательного прогнозирования-корректирования параметра регуляризации при решении обратных задач Вольтерра описан в [230], причём в качестве «эталонного» метода автор использует метод А. Н. Тихонова, с которым выполняется сопоставление.

В работе [234] выполняется определение параметра регуляризации для дискретных некорректных задач. Прямое решение дискретных некорректных систем линейных уравнений или решение задач методом наименьших квадратов с данными, зашумлёнными ошибками, в общем случае не дает хороших результатов, поскольку накопленная ошибка «разрушает» вычисленное решение. В этой статье предлагается новая простая методика определения значения параметра регуляризации. Он основан на сравнении вычисленных решений, определяемых регуляризацией Тихонова и усеченной сингулярной декомпозицией. Аналогичные сравнения предлагаются для крупномасштабных проблем. Методика определения параметра регуляризации дает неявную оценку нормы ошибки в исходных данных.

Отметим, что сейчас выделяют целый класс методов регуляризации Арнольди-Тихонова [218, 249, 250, 258].

Одна из основных работ этого направления [218]. В ней излагается о том, что регуляризация Тихонова для крупномасштабных линейных некорректных задач обычно реализуется путем определения частичной bidiagonalization Ланцоша матрицы данной системы уравнений. В этой работе рассматривается возможность вычисления частичного разложения Арнольди данной матрицы. Вычислительные примеры иллюстрируют, что для такого подхода может потребоваться меньшее количество вычислений произведений матриц на векторы и, следовательно, меньше арифметических операций. Более того, предложенный ограниченный по диапазону метод регуляризации Арнольди-Тихонова не требует знания сопряженной матрицы и, следовательно, его удобно использовать для задач, в которых трудно вычислить сопряженные матрицы.

В [249] представлены два новых алгоритма, которые особенно подходят для разреженной реконструкции. Основная идея состоит в итерационном использовании процедуры регуляризации. Матрица регуляризации может обновляться как на каждом шаге, так и после того, как были выполнены некоторые итерации, что привело к двум различным подходам: первый из них основан на идее метода; второй основана на перезапуске алгоритма Арнольди. Приводятся численные примеры, чтобы показать эффективность этих новых методов, и проведены сравнения с некоторыми другими уже существующими алгоритмами.

Автоматическая настройка параметров для методов Арнольди-Тихонова описана в [250]. В рамках итерационных методов регуляризации для крупномасштабных линейных некорректных задач в этой статье вводится новый алгоритм выбора параметра регуляризации при выполнении метода Арнольди-Тихонова. Предполагая, возможность применения принципа невязки,

эта новая стратегия может работать без ограничений на выбор матрицы регуляризации. Предлагаемый метод также используется в качестве процедуры определения уровня шума, когда он завышен. Приводятся численные эксперименты, связанные с дискретизацией интегральных уравнений и восстановлением изображений.

В работе [258] описано два элементарных метода решения задачи наименьших квадратов из линейной дискретной некорректной задачи – это тихоновская регуляризация и усеченное разложение по сингулярным значениям (TSVD). На основе описанных методов предлагается модифицированный метод регуляризации, который применяется к гибриднему методу Арнольди. Для иллюстрации эффективности метода представлены теоретический анализ и численные примеры.

1.4. Работы, в которых используются интегральные уравнения Вольтера для определения динамики нагружения

На рис. 1.1 представлена схема, иллюстрирующая основные возможные варианты использования интегральных уравнений Вольтера в задачах нестационарного деформирования пластинчатых элементов конструкций.

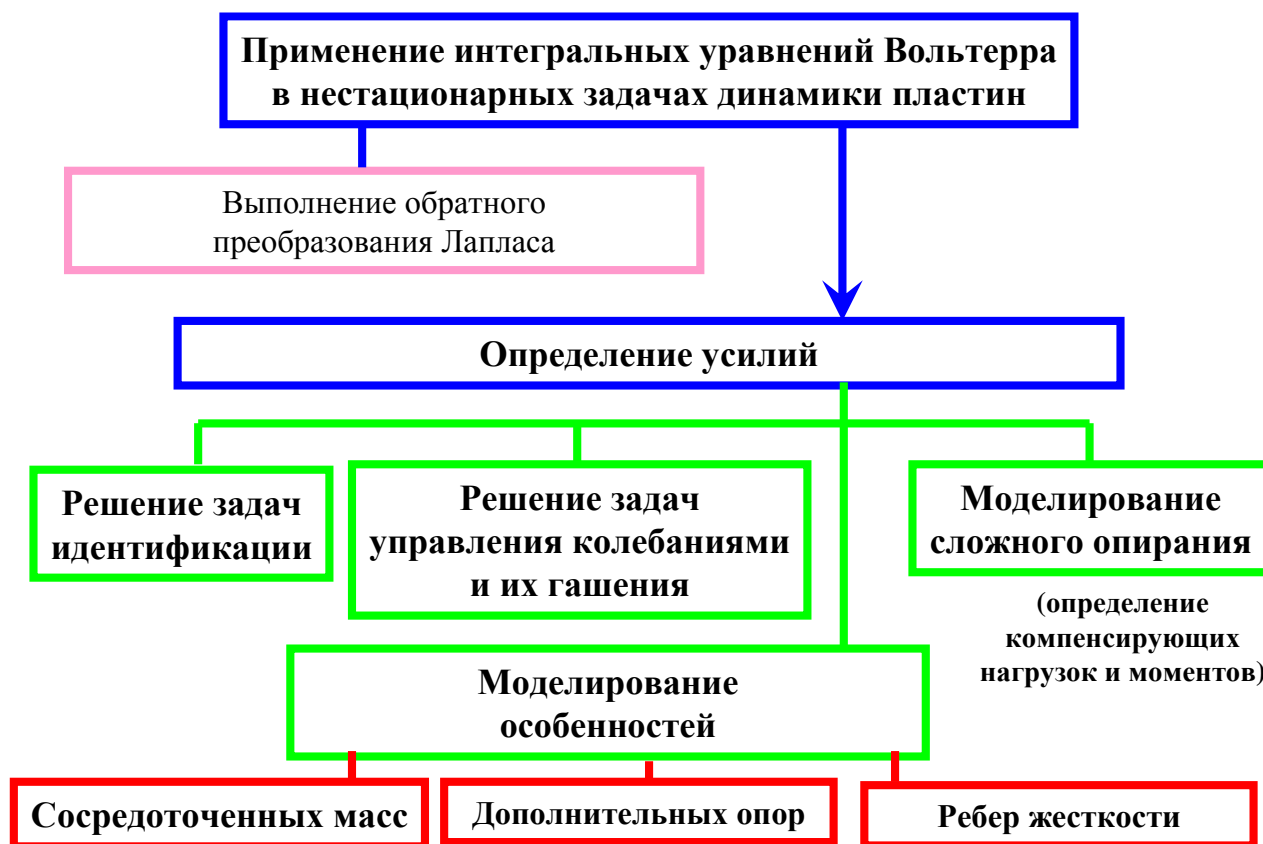


Рис. 1.1. Применение интегральных уравнений Вольтера

В коллективных монографиях [72, 73, 74, 92, 203], написанных под руководством Янютин Е. Г. собран ряд научных результатов затрагиваемого

здесь научного направления. Некоторые результаты впервые опубликованы в этих монографиях, основная часть результатов исследований была опубликована в качестве статей в периодических изданиях, сборниках научных трудов, а также материалах международных конференций и симпозиумов.

В работах [42, 91] рассматриваются нестационарные колебания струн и их систем, вызванные конечным количеством сосредоточенных нагрузок. Нестационарными нагрузками могут моделироваться внешние силы, также реакции, соответствующие влиянию сосредоточенных масс или демпферов. Для системы струн, пересекающих одну общую струну, строится обобщенная схема исследования. Излагается методика построения системы уравнений, состоящей из одномерных волновых уравнений для некоторого произвольного количества струн, которая замыкается дополнительными соотношениями в точках контакта. Полученная система является системой интегральных уравнений Вольтерра, которая после дискретизации сводится к блочной системе линейных уравнений. Блочная система линейных алгебраических уравнений решается с использованием обобщенного алгоритма Крамера и регуляризирующего алгоритма Тихонова. В работе [91] решена обратная задача для системы из трех струн, контактирующих между собой в некоторых точках так, что перемещения в этих точках совпадают. В статье [42] в качестве примера решена задача о нестационарных колебаниях струны с двумя присоединенными демпферами.

В статье [17] описана задача идентификации нестационарной сосредоточенной нагрузки, воздействующей на прямоугольную мембрану, а в [186] исследуется возможность управления нестационарными колебаниями мембраны в некоторой её точке.

В работах [120, 132, 136, 167, 201, 207] приводится решение некорректной динамической задачи для круговой мембраны, представлены прямая и обратная задачи для нестационарно нагруженной круглой мембраны, исследуется идентификация внешней нагрузки, действующей на круговую мембрану.

В [150] рассмотрены колебания прямоугольной мембраны, контактирующей с упругим основанием, при импульсном нагружении.

Работы [132, 152, 153, 154, 167] посвящены нестационарным колебаниям мембран с присоединенной массой и мембран, несущих несколько сосредоточенных масс. Указанные задачи сводятся к системе нескольких интегральных уравнений Вольтерра.

В статьях [137, 160] опубликованы решения задач по определению влияния сосредоточенного нестационарного воздействия на мембрану-полосу и восстановлению во времени функции нагрузки, воздействующей на бесконечную мембрану-полосу.

Публикации [192, 199] посвящены решению нестационарных задач теории упругости (прямых, обратных и управления) для стержневых элементов конструкций постоянного сечения. В работе [125] на базе решения интегральных уравнений Вольтерра исследуется нестационарная задача управления напряженным состоянием стержневого элемента.

В работе [123] исследуются продольные волновые колебания составных стержней при импульсном деформировании. Управление динамическим напряженным состоянием составных стержней описано в [193].

В работах [133, 134, 187, 194, 197] опубликованы исследования по решению прямых и обратных задач для нестационарно нагруженного стержня переменного сечения. Особое внимание уделено вопросам идентификации и управления в задачах импульсного деформирования стержней переменного сечения. Укажем, что рассматривается не произвольный закон изменения площади переменного сечения, а специальный экспоненциальный вид, позволяющий получение решений прямой задачи в аналитической форме.

Исследования прямых и обратных задач для составного стержня переменного сечения описаны также в [195, 198].

Прямые и обратные задачи для упруго деформируемых балок рассмотрены в работах [40, 44, 48, 130, 131, 140, 141, 146, 147, 157, 158, 159, 161, 162, 165, 168, 172, 173, 208].

В публикациях [43, 142, 143] подобные задачи рассматриваются с учетом диссипации или в вязкоупругой постановке.

Отметим, что в статье [37] опубликованы результаты экспериментальных измерений деформаций балок из различных материалов (сталь, орг. стекло ПММА, асфальтобетон) при ударном нагружении. Указанная работа может служить источником исходных данных при решении обратных задач идентификации ударных воздействий на балки из реальных конструкционных материалов.

В [161, 162] с использованием интегральных уравнений Вольтерра исследуются колебания шарнирно опертых балок при неподвижном силовом возмущении.

Решения нестационарных прямых и обратных задач для балок с дополнительным упругим опиранием посвящена статья [131].

Применение интегральных уравнений Вольтерра в задачах нестационарного деформирования систем балок описано в [130, 158, 165], приведены решения обратных нестационарных задач.

Решению обратных задач при воздействии подвижных нагрузок на однопролетные балки посвящены работы [44, 130, 146, 147, 159, 173, 208, 223]. Под обратными задачами в этих работах понимаются задачи, цель которых – идентификация подвижных нагрузок, воздействующих на балки.

В [44, 48, 130, 157, 162, 168, 172] описано решение прямых и обратных задач для двух- и многопролетных балок. Например, в работе [165, 168] приведены примеры для трёх- и четырёхпролетной балки.

Аналогичные задачи были рассмотрены и в вязкоупругой постановке. Так в работах [142, 143, 158] решены задачи идентификации подвижных нагрузок, воздействующих на вязкоупругие балки.

В работах [141, 158] рассматривается механическая система, состоящая из балки и присоединенной к ней сосредоточенной массы, причем влияние массы заменяется неизвестной реакцией между балкой и массой. Для определения неизвестной реакции решается обратная задача, которая сводится к решению

интегрального уравнения (или системы уравнений) Вольтерра. Аналогичный подход использован в [40] для моделирования колебаний масс и дополнительных опор, контактирующих с балками.

В работах [62, 141, 162] на базе решения обратных задач производится идентификация параметров при нестационарных колебаниях механических систем, содержащих элементы в виде балок. Так в [62, 162] описана методика нахождения как точки приложения неизвестной нестационарной сосредоточенной силы, воздействующей на балку, на основе минимизации функционала невязки, так и закона изменения неизвестной нагрузки во времени. Укажем что в [62] задачи идентификации решены в вязкоупругой постановке. В статье [141] рассмотрены задачи по идентификации координаты точки приложения сосредоточенной силы и величины присоединенной сосредоточенной массы для колеблющейся системы «балка-масса».

В статье [140] решается задача идентификации возмущающей нагрузки, воздействующей на составную балку, состоящую из двух частей изготовленных из различных материалов (с разными упругими постоянными). При решении задачи используется метод фиктивных нагрузок и расширенного поля, что приводит к исследованию системы интегральных уравнений Вольтерра I рода.

В работе [44] описано применение интегральных уравнений Вольтерра для определения компенсирующих нагрузок при моделировании нестационарных колебаний консольной балки, которая заменяется шарнирно опертой балкой большей длины с дополнительными (фиктивными) нагрузками.

Решению прямых и обратных задач для тонких пластин в рамках модели Кирхгоффа посвящены исследования [133, 134, 143, 159, 170, 171, 172, 173, 174, 264]. В работах [133, 134, 143, 170, 171, 173, 264] учитывается влияние упругого основания на деформирование прямоугольных пластин, моделирующих дорожные одежды, при действии подвижных нагрузок для учета влияния движущихся транспортных средств.

В работах [172, 174] исследуется нестационарное деформирование тонких пластин круглой формы, решены прямые и обратные задачи.

Отметим, что в [143] описана идентификация подвижных нагрузок, воздействующих на плиты, моделируемые тонкими пластинами в вязкоупругой постановке.

В [41, 130, 144, 256] исследуется нестационарное деформирование пластины-полосы, выполняется идентификация сосредоточенного нестационарного воздействия на бесконечную пластину-полосу.

Исследование динамического деформирования прямоугольной пластины на основе одного волнового уравнения в рамках теории типа Тимошенко описано в [149].

Постановка и решение динамических прямых и обратных задач для прямоугольной пластины с учетом поперечного обжатия представлено в публикациях [148, 163].

Нестационарным колебаниям шарнирно-опертой пластины, подкрепленной линейными ребрами жесткости, посвящены работы [155, 156], приведено решение прямой и обратной задач.

Применение теории интегральных уравнений Вольтерра при решении динамических обратных задач для круглых пластин средней толщины описано в [45, 132, 167, 188, 189].

В работах [132, 167, 202, 209, 211] исследуется нестационарное осесимметричное деформирование пологих сферических оболочек. Деформирование оболочек описано в рамках гипотез типа Тимошенко. Приведено решение прямых и обратных задач при этом используется метод компенсирующих нагрузок для точного выполнения необходимых граничных условий.

Аналогичные исследования освещены для полусферических и подъёмистых сферических оболочек в публикациях [205, 261]. Представлено решение задачи идентификации поверхностной нестационарной нагрузки, которая воздействует осесимметрично на полусферическую оболочку с жестко защемленным краем. Решение обратной задачи производится с использованием неклассической теории оболочек и метода регуляризации А. Н. Тихонова. В качестве исходных данных для идентификации внешнего нагружения использованы данные реальных экспериментальных исследований. Получено удовлетворительное совпадение идентифицированной нагрузки с реальной.

Цикл работ [45, 50, 52, 139, 164, 166, 169, 187, 188, 189, 196, 200, 204, 206, 209, 211] посвящён решению некорректных задач для цилиндрических оболочек.

В [45, 187, 188, 189, 196, 200, 209, 211] исследуются прямые и обратные некорректные задачи импульсного осесимметричного деформирования для цилиндрических оболочек конечной длины.

Например, в [209, 211] представлено решение задачи теории упругости по управлению компонентами обобщенного перемещения в точке вдоль длины цилиндрической оболочки конечной длины при осесимметричном деформировании за счет приложения системы торцевых силовых воздействий, которые определяются из решения интегральных уравнений.

В работах [45, 188, 189,] целью задачи управления нестационарными колебаниями цилиндрической оболочки конечной длины являлось обеспечение выполнения критерия управления (заданного прогиба в некоторой ее точке) путем введения дополнительных нагрузок. Описана методика использования теории некорректных задач математической физики применительно к проблеме идентификации управляющих нагрузок для оболочек.

Отметим работу [164], в которой описан приближенный способ идентификации произвольной осесимметричной нагрузки, воздействующей на цилиндрическую оболочку, причем производится идентификация не только временной, но и пространственной составляющей нагружения.

В работах решены прямые и обратные задачи для импульсного нагружения неосесимметричных цилиндрических оболочек бесконечной длины [50, 52, 139, 166, 169, 204, 206].

В работах [50, 166] исследуются нестационарное осесимметричное деформирование составных цилиндрических оболочек конечной длины. Задачи решаются с использованием методов расширенного поля и фиктивных

нагрузок, в результате задачи сводятся к решению систем интегральных уравнений.

Решение прямой и обратной задачи для шарнирно-опёртой цилиндрической оболочки с концентрическими ребрами жесткости приведено в [69, 70, 129]. Укажем, что хотя авторы и опирались на известное решение прямой задачи, опубликованное в [86], используя современные подходы теории интегральных уравнений и некорректных задач математической физики, они получили новые решения как прямой, так и обратной задачи.

Решение прямых и обратных задач для конических оболочек в работах [138, 187] было выполнено с использованием метода конечных разностей.

Определенные успехи были достигнуты в области решения некорректных нестационарных задач пространственной теории упругости. Так в работах [49, 51] исследуется нестационарное деформирование упругого пространства с цилиндрической полостью, решается задача идентификации кинематического нагружения на поверхности цилиндрической полости упругого пространства.

В работах [151, 168] рассматривается начальный этап деформирования упругого полупространства при кинематическом воздействии, приводится решение обратной задачи.

В рамках решения обратных некорректных задач нестационарной динамики проводились экспериментальные исследования напряженно-деформированного состояния упругих элементов конструкций. Одним из наиболее простых и дешевых, но в то же время достаточно точным методом исследования при деформировании (в том числе и нестационарном) является тензометрический. Более подробно об этом методе и аппаратуре применяемой для измерения деформаций при ударном нагружении можно ознакомиться, например, в [18] или монографии [14]. Работы [37, 71, 77] посвящены экспериментальным исследованиям реальных элементов конструкций при их деформировании с использованием тензометрии на оборудовании, описанном в статье [18].

Цикл работ [39, 53, 133, 134, 143, 159, 170, 171, 173, 183, 210, 264] связан с моделированием дорожных покрытий (жесткого и нежесткого типа) и дорожных конструкций в целом. Получение аналитических решений при моделировании дорожных конструкций дает возможность построения решений обратных задач, что значительно расширяет область исследований и возможные применения получаемых математических моделей.

1.5. Работы, посвященные идентификации и управлению колебаниями с применением новых технологий

В последние годы в институте механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины стали интенсивно развиваться исследования задач при колебаниях электроупругих механических систем, которые можно отнести к обратным и/или некорректным задачам. Укажем некоторые из них [2, 3, 4, 82, 83, 88, 121,

122, 124, 126, 127, 128, 213, 216, 259, 260]. Отметим, что в указанных работах математическая основа решения содержит аналогичные подходы с тематикой настоящей работы (используются теория интегральных уравнений Вольтерра и методы регуляризации при их решении).

В публикации [224] на основе эволюционных (генетических) алгоритмов для решения обратных геометрических и коэффициентных задач теории упругости (по определению размеров, положения и свойств, локализованных и непрерывных однородностей в телах, которые совершают установившиеся или нестационарные колебания) производится идентификация ударной нагрузки, которая действует на композитную панель в пространстве (место удара) и во времени.

В статье [227] рассматривается процедура восстановления импульсной нагрузки, воздействующей на нелинейные системы, которая сводится к решению интегрального уравнения Вольтерра I рода с применением метода регуляризации, разработанного авторами этой работы.

Интересной является публикация [231], где рассматриваются различные аспекты динамической идентификации подвижных нагрузок от транспортных средств,двигающихся по верхней части балки-плиты мостовой конструкции, которая моделируется как ортотропная пластина, а нагрузки от колёс – группой осевых нагрузок. Кроме аналитических исследований, авторами даны рекомендации по выбору количества датчиков и места их установки. Отметим, что к такому же направлению относится более ранняя публикация [265].

Задачи управления можно рассматривать как одно из направлений вибрационной защиты ответственных конструкций (гашение нестационарных колебаний, вызванных ударными и другими кратковременными динамическими нагрузками), а также и оптимального управления колебательными системами. Одним из основных факторов, способствующих развитию задач такого рода, является создание современных компактных и эффективных устройств по управлению колебаниями, а также специальных усовершенствованных материалов (intelligent или smart materials) [111, 251, 254].

Приведем ниже ряд примеров применения новых устройств и материалов для активного управления нестационарными колебаниями.

В статье [220] описано управление колебаниями упругой пластины, возбуждаемой импульсной поперечной силой, воздействующей под углом, с помощью специальных устройств пьезодатчик/пьезопривод (piezosensor/actuator). Пластина оснащена тремя парами пьезоэлектрических накладок, которые используются в качестве датчиков и исполнительных механизмов. Различные законы управления, а также комбинаций датчиков и исполнительных механизмов были сопоставлены для оценки их эффективности.

В работах [215, 243, 257] гашение колебаний пластин осуществляется при помощи присоединения внешнего динамического гасителя.

В работе [257] рассмотрен активный гаситель колебаний для изгибающейся пластинки, который контактирует с ней по границе, однако сама пластина представлена, по сути, в виде колеблющейся массы. В работе [243]

рассматриваются вынужденные колебания тонкой пластины с «дискретным динамическим гасителем» с использованием метода конечных элементов.

В работах описана [79, 80, 81] методика по активному демпфированию вынужденных резонансных изгибных колебаний прямоугольных пластин при действии на них неизвестной механической нагрузки с помощью совместного использования двух типов пьезовключений – сенсоров (пьезодатчиков) и актуаторов (пьезопроводов). По показаниям сенсора (величине заряда или разности потенциалов) восстанавливается амплитуда и фаза внешней нагрузки. После этого к актуатору подводится разность потенциалов, которая рассчитывается по уже известной нагрузке. В качестве примера, в [81] рассмотрена задача об активном демпфировании резонансных колебаний прямоугольной вязкоупругой пластины с шарнирным опиранием ее торцов. Получено простое аналитическое выражение для разности потенциала, которую необходимо подвести к актуатору для компенсации неизвестной механической нагрузки, определяемой по экспериментальному показателю сенсора. Указано на существенное значение диссипативных свойств пассивного материала для устойчивости активного демпфирования резонансных колебаний пластины. В [79, 80] при помощи такого же подхода рассмотрены задачи об активном демпфировании колебаний прямоугольной пластины с жестким защемлением торцов и для случая смешанных граничных условий соответственно.

Возможность контроля вибрации с помощью активного пьезоэлектрического привода с самообучающимся («self-learning controller») контроллером обратной связи для конструкции в виде гибкой пластины представлена в [253].

Несмотря на то, что работа [221] посвящена гашению вибраций цилиндрической оболочки, а не пластины, отметим её, потому что приведенный в ней способ управления можно рассматривать как промежуточный вариант структурного управления. В этой работе гашение осуществляется не специальным устройством или материалом/слоем материала в целом, а специальными полосами, интегрированными в слоистую цилиндрическую оболочку. В работе поднимаются вопросы параметрической оптимизации при изучении влияния геометрических параметров расположения и толщин демпфирующих полос.

Моделирование и контроль вибрации пластины в сочетании с пьезоэлектрическим материалом рассматривается в [232].

Например, работы [226, 228] относятся к управлению колебаниями механических объектов, выполненных из специальных материалов. В работе [226] рассматриваются пластины из функционально градиентных материалов (Functionally Graded Material – FGM), причем в эти пластины интегрированы целые слои, являющиеся пьезодатчиками/пьезопроводами (piezosensor/actuator). В работе [228] описана связанная теория сдвиговой деформации пластины первого порядка (first order shear deformation theory – FSDT) для пьезоэлектрической гибридной прямоугольной пластины, не предполагающая распределения электрического потенциала и температуры по ее толщине. Эта теория оценивается сравнением с трехмерным решением. Обнаружено, что

влияние связанных эффектов является значительным для относительно толстых пьезоэлектрических слоев.

В работе [255] исследуется управление колебаниями пьезоэлектрических консольных композитных пластин, используется модель конечного элемента, основанная на теории деформации сдвига первого порядка (FSDT), разработанная для статической изгибаемой формы и вибрации композитной пластины из стекловолокна / полиэфира, связанной с пьезоэлектрическим приводом и сенсорными пятнами. В модели учитывается масса и жесткость пьезоэлектрика. Простой алгоритм управления скоростью с отрицательной обратной связью для прямых и обратных пьезоэлектрических эффектов, используется для активного управления переходным откликом интегрированной структуры через замкнутый контур управления. В работе представлены численные результаты, которые хорошо согласуются с экспериментами.

Активное гашение колебаний двухслойной прямоугольной пластины (металл-пьезокерамика) при нестационарной электромеханической нагрузке исследовано в статье [213]. Электрический сигнал, подведенный к твердым электродным покрытиям пьезослоя, уменьшает амплитуды механически индуцированных колебаний пластины. Рассматриваются два подхода к определению характера электрического сигнала: первый заключается в минимизации напряженного состояния пластины, а второй подход связан с подавлением вынужденных колебаний при минимизации входной мощности для формирования управляющего воздействия. Для моделирования электромеханических колебаний используются обобщенные гипотезы Кирхгофа. Решение граничной задачи было получено с использованием интегрального преобразования Лапласа во времени и разделения переменных. Чтобы оценить эффективность предложенных в работе подходов, колебания пластин были исследованы, когда пьезослой находился в режиме прямого пьезоэлектрического эффекта. Численные и аналитические результаты были подтверждены сравнением с решениями методом конечных элементов. В работе также описан метод решения задачи восстановления временной зависимости механической нагрузки на основе известных значений разности потенциалов между открытыми пьезослоистыми электродами, возникающими из-за изгибных колебаний биморфной пластины.

В работе [239] авторы предлагают использовать датчики ускорения для идентификации параметров вибронгружений и изготовленные из специальных усовершенствованных материалов консольные пластины, которые моделируют гибкие элементы, присоединённые к космическим аппаратам (солнечные батареи), для активного управления вибрациями и эффективного подавления колебаний. Другим из возможных путей управления колебаниями в таких конструкциях является использование гироскопа и пьезокерамических накладок («PZT patches») [240].

Существуют и другие подходы к управлению колебаниями конструкций в виде пластин и оболочек [217, 219]. Так в работе [217] в задаче пассивной виброзащиты композитных пластин в качестве упругого основания

используются современные усовершенствованные материалы с памятью (shape memory).

В статье [219] исследуется прямоугольная алюминиевая пластина, вибрирующая в воздухе или в контакте с водой. Пластина крепится болтами к стенке прямоугольного контейнера из плексигласа. Некоторые режимы колебаний сначала реализуются для проверки влияния различных уровней воды и компонентов управления на модальные параметры. Затем к модели системы применяется адаптированный алгоритм прямого преобразования с фильтром на основе метода наименьших квадратов, реализующий структурное управление вибрацией в линейном поле с использованием подхода единичного входа / единичного выхода (single-input-single-output – SISO) для первых режимов вибрации пластины при наличии тонального первичного возмущения.

Отметим работу [237], в которой описано параметрическое моделирование и основанная на FPGA (field-programmable gate array – программируемой полевой вентиляционной матрице) система реального времени для активного управления колебаниями пьезоэлектрической слоистой консольной балки при резонансе.

Для снижения вибраций иногда применяют магнитострикционные приводы. В публикации [212] с помощью метода отмены, основанного на использовании интеллектуальных компенсационных приводов, описано снижение вибраций простой структуры, имитирующей несущую пластину заготовки. Предлагаемая стратегия компенсации реализуется при использовании магнитострикционных приводов, действующих вдали от их резонансных частот. В частности, описанная процедура была протестирована на двух испытательных установках, специально предназначенных для применения в станках: они требуют использования одного и трех магнитострикционных приводов для одномерной (1D) и трехмерной (3D) компенсации колебаний. Полученное уменьшение боковых колебаний 1D и 3D пластин в диапазоне частот до 400 Гц оказывается очень удовлетворительным.

Для гашения колебаний при значительном динамическом нагружении можно использовать специальные стяжки, изготовленные из сплавов с памятью формы (shape memory alloys – SMA), например, из NiTi-сплава. Работа [244] посвящена исследованиям сплавов NiTi SMA, которые обладают большим усталостным ресурсом. Исследуется возможность разработки устройств для смягчения ущерба от ураганов. Эти устройства для фиксации в основном используют диссипацию гистерезисной энергии NiTi в результате ее псевдоупругой характеристики. В работе изучаются характеристики затухания и жесткости (предварительно напряженных и ненапряженных) проводов NiTi и влияние этих динамических характеристик на изменение динамического отклика структуры. В проведенном исследовании установлено, что гибридные стяжки (сухожилия) обладают наивысшим эффектом демпфирования и усиления для конструкции. Также делается вывод о том, что, когда амплитуда возбуждения мала, стяжки действуют как устройства жесткости. Как только амплитуда возбуждения достаточно велика, чтобы инициировать индуцированные напряжением фазовые превращения, стяжки действуют как

устройства поглощения энергии. Эти результаты дают очень полезную информацию для разработки более эффективных крепежных устройств, которые могут выдерживать интенсивные динамические нагрузки, например, воздействия ураганов.

Отметим, что активно ведутся научные исследования, посвященные непосредственно исполнительным механизмам (actuators) для активного управления колебаниями и гашения вибраций. В работе [245] исследуются вопросы моделирования, идентификации и оптимизации одного такого устройства с учётами временных задержек.

Разработке нетрадиционного динамического амортизатора вибрации для гашения в линейных конструкциях посвящена работа [222]. В качестве прототипа выбран известный амортизатор так называемого фойхтового типа. Представлен простой подход для определения приближенных аналитических решений и оптимизации разработанного динамического поглотителя вибрации, прикрепленного к управляемой исходной конструкции, подверженной силовому возбуждению.

Оптимальная конструкция нового амортизатора для случайных силовых возмущений исследуется в работе [236]. Для заданных значений демпфирования и массы системы определены оптимальные коэффициенты жесткости и демпфирования поглотителя. Показано, что существует оптимальное соотношение масс, в отличие от классических поглотителей, где производительность возрастает с увеличением массы поглотителя. Оптимальные параметры, связанные с оптимальным отношением масс, вычисляются и суммируются для ряда коэффициентов затухания первичной системы. Эффективность предлагаемого поглотителя обсуждается и сравнивается с эффективностью классического поглотителя.

Одним из важнейших направлений, посвящённых снижению опасных амплитуд колебаний в строительных конструкциях, является проектирование устройств защиты при землетрясениях. Приведем в качестве примера работы [246, 247], в которых описана полуактивная система управления с использованием нечеткой логики для регулируемых демпферов, снижающих сейсмические реакции каркасов зданий во время землетрясений. Представлено численное моделирование реакции каркаса десятиэтажного здания [246].

Активный масляный демпфер (AMD) является одним из наиболее часто используемых активных устройств управления. В [215] описано численное моделирование эффекта сдвига, вызванного землетрясением, 10-этажного здания, которое оснащено активным масляным демпфером. Приведенные результаты показывают, что предложенный в работе метод может быть полезен для уменьшения сейсмических реакций конструкций с меньшими затратами на вычисления и высокой точностью.

К описанию активного подавления вибраций в «интеллектуальных» конструкциях, характеризующихся неопределенностью модели и подвергаемых возмущениям окружающей среды, можно отнести научный материал из работы [214].

1.6. Заключение

Работы [45, 48, 135, 158, 177, 178, 179, 180, 182, 184, 185, 187, 188, 189, 191, 202, 209, 211, 263] относятся к циклу исследований, проведенных в рамках кандидатской диссертации Воропая А. В., в которой решены прямая и обратная задачи для упругой изотропной прямоугольной пластины средней толщины, на которую воздействует одна независимая поперечная нагрузка.

Для пластин средней толщины теории типа С. П. Тимошенко с использованием теории некорректных задач математической физики получены решения обратных задач динамической теории упругости по идентификации нестационарных нагружений, воздействующих на прямоугольные пластины поперечно или касательно к их внешним лицевым поверхностям. Также в аналитическом виде построено решение задачи идентификации при одновременном воздействии на пластины двух независимых поперечной и касательной сил. Показано, что предложенная методика может применяться при проведении экспериментальных исследований элементов конструкций в виде прямоугольных пластин, нагружаемых нестационарно.

На основе полученных решений некорректных обратных задач динамики пластин разработана методика управления нестационарными колебаниями произвольной точки пластины посредством введения дополнительных управляющих нагрузок, реализующих требуемые критерии управления. Предложенная методика позволяет получать зависимости изменения во времени управляющих воздействий для различных вариантов импульсных нагружений.

Упомянутые в настоящем обзоре литературы работы Воропая А. В., опубликованные после защиты кандидатской диссертации (2004 г.), носят обобщающий характер и раскрывают тему его докторской диссертации, а также развивают тематику построения решения некорректных задач механики деформируемого твердого тела.

Из проведенного обзора можно сделать следующие **выводы**.

К настоящему времени исследованы различные формы геометрического распределения нагрузки по поверхности пластины: сосредоточенные, равномерно распределенные по малым и большим областям в виде круга, квадрата, прямоугольника и эллипса, а также неравномерно распределенные нагрузки (распределённые в виде половины эллипсоида вращения). Исследовался учет обжатия пластины. Выполнялась идентификация временной составляющей ударной нагрузки по данным, полученным из экспериментальных исследований. Разработана методика, позволяющая учитывать продольные и поперечные нагружения пластины. Решена задача управлением нестационарными колебаниями в точке пластины.

Укажем, что, несмотря на некоторую завершенность исследований по идентификации нестационарных поперечных нагрузок, воздействующих на прямоугольные пластины средней толщины, имеется ряд вопросов, требующих дополнительного рассмотрения и уточнения:

Представляет интерес создание комплекса методов по идентификации системы нагружений, состоящей из нескольких одновременно приложенных независимых нагрузок, которые могут воздействовать как поперечно к срединной поверхности пластины, так и под наклоном или касательно к ней.

Назрела необходимость построения общей методики, позволяющей учитывать различные особенности типа наличия дополнительной сосредоточенной или распределенной массы, дополнительных опор (упругих, демпфирующих и вязкоупругих).

Целесообразно разработать методы управления не в точке, а на малой по сравнению с размерами пластины площадке, а также создать эффективные методики гашения нестационарных колебаний по всей поверхности пластины.

Существенный интерес представляет создание специализированного подхода, позволяющего на базе имеющихся упругих моделей, получать решения учитывающие диссипацию энергии колебаний.

Укажем, что основное содержание работ [16, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 38, 39, 40, 41, 43, 45, 46, 47, 48, 53, 157, 158, 175, 176, 181, 187, 188, 190, 210, 262] более развернуто представлено в настоящей монографии.

2. ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ, ИСПОЛЬЗОВАННЫЕ В РАБОТЕ

Описан регуляризирующий алгоритм академика А. Н. Тихонова и его применение для решения некорректных задач механики деформируемого твердого тела. Известно что, решения некоторых задач нестационарного деформирования упругих элементов конструкций могут быть сведены к решению интегральных уравнений. А решение интегральных уравнений, особенно Вольтерра первого рода, зачастую является некорректной задачей. В рамках регуляризирующего алгоритма рассмотрена конечномерная аппроксимация некорректной задачи и сглаживающего функционала. Приведен пример решения тестовой некорректной задачи с использованием регуляризирующего алгоритма. Уделено внимание вопросу выбора значений параметра регуляризации.

Рассмотрен комплекс методов для решения систем интегральных уравнений Вольтерра на основе использования регуляризирующего алгоритма А. Н. Тихонова в совокупности с обобщенными алгоритмами Крамера и Гаусса для блочных матриц. Описаны особенности использования обобщенных алгоритмов Крамера и Гаусса, а также для алгоритма Гаусса приведено несколько вариантов его реализации.

2.1. Введение

Как известно, задачи нестационарного деформирования упругих элементов конструкции описываются линейными дифференциальными уравнениями в частных производных или их системами [65, 117]. При их аналитическом решении относительно переменной времени t одним из наиболее эффективных методов является использование операционного исчисления [5, 67, 68, 76, 84, 87, 90]. В случае использования преобразования Лапласа дифференциальным уравнениям в пространстве изображений соответствуют алгебраические уравнения относительно параметра преобразования Лапласа s . Трудность состоит, как правило, только в обратном преобразовании для сложных функций. Использование теоремы о свертке при получении оригиналов функций приводит к тому, что искомое решение представляется в виде *интеграла Дюамеля* (свертки):

$$u(t) = \int_0^t F_1(\tau)F_2(t - \tau)d\tau, \quad (2.1)$$

которое при известных функциях $u(t)$, $F_2(t)$ и неизвестной функцией $F_1(t)$ является *интегральным уравнением Вольтерра I-го рода*.

Такие уравнения встречаются при решении обратных нестационарных задач механики [72, 73, 74, 92, 203], когда зависимость изменения во времени возмущающей силы $z(t)$ неизвестна, а известны ее косвенные проявления. Например, $u(t)$ – это изменения во времени перемещений или деформации в некоторой точке элемента конструкции, вызванные этой силой. Классический вид интегрального уравнения (2.1):

$$\int_0^t K(t-\tau)z(\tau)d\tau = u(t), \quad (2.2)$$

где функцию $K(t-\tau)$ принято называть разностным ядром интегрального уравнения.

Решение интегральных уравнений Вольтерра (2.2) зачастую является некорректной задачей. В работах [10, 60, 95, 101, 102, 109, 119] подробно описаны условия некорректности задач математической физики, а также некоторые методы их решения, например *метод регуляризации Тихонова*.

Отметим, что все математические аспекты (доказательства, возможности применения метода регуляризации, сходимости, устойчивости и т.п.) детально описаны в многочисленных трудах *академика А. Н. Тихонова* и его последователей [60, 101, 109, 119], посвященных современной теории некорректных задач математической физики. Существенное развитие метод регуляризации Тихонова получил в задачах астрофизики [60]. В настоящее время регулярно появляются математические работы, в которых описываются обобщения и модификации метода регуляризации Тихонова [218, 230, 249, 250, 258], а также исследуются вопросы выбора параметра регуляризации [234, 250].

В настоящей работе описываются прикладные аспекты *регуляризирующего алгоритма* А. Н. Тихонова, особенности его использования при решении некорректных нестационарных задач механики, а также вопросы, связанные с выбором параметра регуляризации.

2.2. Описание регуляризирующего алгоритма.

При численном решении некорректных задач необходимо аппроксимировать исходную бесконечномерную задачу конечномерной, для которой разрабатывается алгоритм, реализуемый на ЭВМ. Рассмотрим регуляризирующий алгоритм для решения интегрального уравнения Вольтерра I-го рода.

Запишем уравнение (2.2) в операторной форме:

$$A[z]=u, \quad z \in Z, \quad u \in U, \quad (2.3)$$

где Z и U – гильбертовы пространства; A – интегральный оператор, соответствующий ядру $K(t)$; $z = z(t)$ – искомая функция; $u = u(t)$ – соответствует правой части (2.2).

Конечно-разностная аппроксимация выражения (2.3) строится с использованием квадратурных формул (например, формул *метода прямоугольников, метода трапеций* и т.п.).

Введем следующие обозначения: Δt – шаг во времени, с; T – величина всего промежутка исследования $T = J \cdot \Delta t$, с; J – число шагов по времени.

Наиболее простыми и часто встречаемыми методами дискретизации для функции $K(t)$ являются:

1) Метод левых прямоугольников (см. рис. 2.1)

$$K_i = K[i \cdot \Delta t]. \quad (2.4)$$

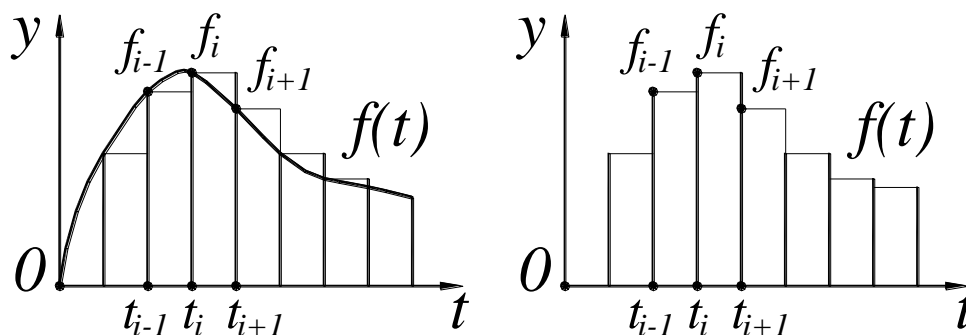


Рис. 2.1. Метод левых прямоугольников

На рис. 2.1 показан варианты графического интегрирования функции $f(t)$ методом левых прямоугольников.

2) Метод правых прямоугольников (см. рис. 2.2)

$$K_i = K[(i + 1) \cdot \Delta t]. \quad (2.5)$$

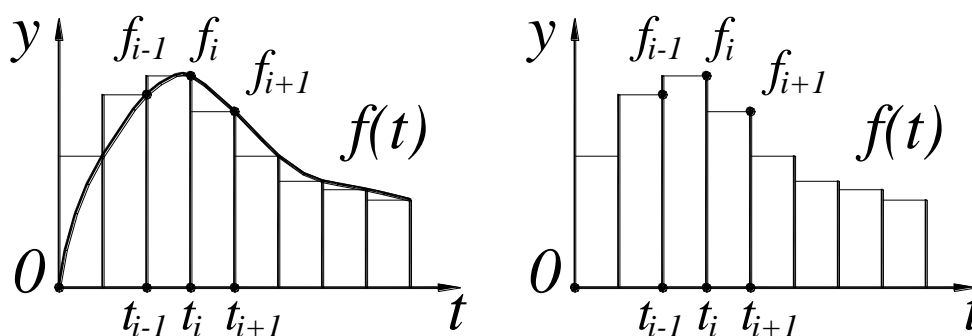


Рис. 2.2. Метод правых прямоугольников

Рис. 2.2 демонстрирует графическое интегрирование функции $f(t)$ методом правых прямоугольников. При сравнении рис. 2.1 и рис. 2.2 видно, что получаются одинаковые результаты, только для метода правых прямоугольников они сдвинутые на Δt вправо, вдоль оси времени.

Эти два метода относятся к методам первого порядка. Следующие методы относят к методам второго порядка, и они обладают более высокой точностью.

3) Метод средних прямоугольников (см. рис. 2.3)

$$K_i = K[(i + 0.5) \cdot \Delta t]. \quad (2.6)$$

Формулу интегрирования на основе метода средних прямоугольников называют квадратурной формулой Маклорена. На рис. 2.3 показано графическое интегрирования произвольной функции $f(t)$.

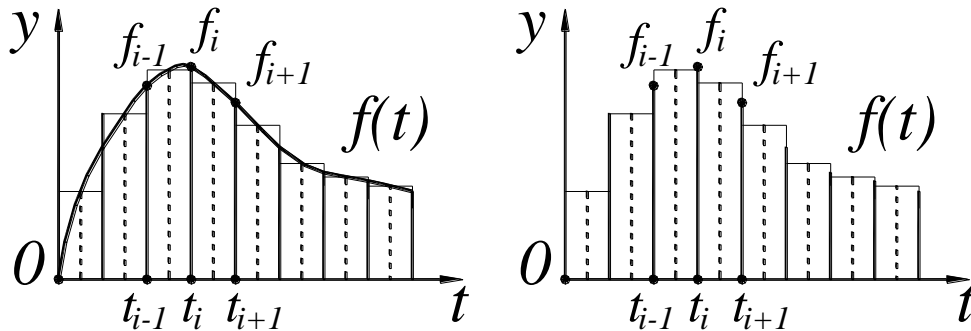


Рис. 2.3. Метод средних прямоугольников (формула Маклорена)

4) Метод трапеций для единичного интервала (подобен методу средних прямоугольников, см. рис. 2.3)

$$K_i = \frac{K[i \cdot \Delta t] + K[(i + 1) \cdot \Delta t]}{2}, \quad (2.7)$$

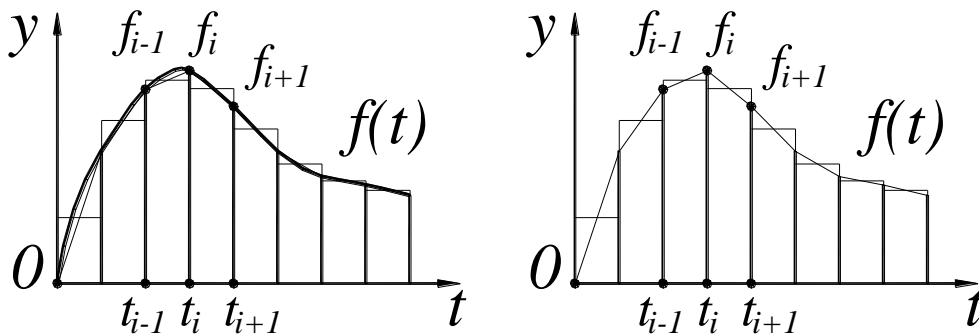


Рис. 2.4. Метод трапеций

5) Метод трапеций для двойного интервала (аналогичен предыдущему)

$$K_i = \frac{K[(i - 1) \cdot \Delta t] + K[(i + 1) \cdot \Delta t]}{2}. \quad (2.8)$$

На рис. 2.5 для удобства сравнения на одном графике приведены одновременно метод средних прямоугольников и трапеций. Видно, что результаты хоть и близки, но не совпадают. Высота эквивалентных прямоугольников берется посередине исследуемого интервала, в отличие от метода трапеций, где берутся средние арифметические значения на интервале. Для некоторых осциллирующих функций этот метод показывает лучшие результаты.

Укажем, что здесь описаны только простейшие квадратурные формулы. Приближенное вычисление определенных интегралов к настоящему моменту

хорошо изучено и описано во множестве учебников по математике, например [57], там же приведена оценка погрешности этих и других методов для семейства квадратурных формул Ньютона – Котеса и Грегори. Известно, что значительно отличается точность методов первого и второго порядка.

Отдельно выделяют метод парабол (формула Симпсона), который имеет более высокую точность и относится к методам четвертого порядка. Однако формула Симпсона эффективна для монотонных функций, а ядра интегральных уравнений, как правило, относятся к осциллирующим. Поэтому использовать формулу Симпсона с крупным шагом нельзя, а с мелким не целесообразно.

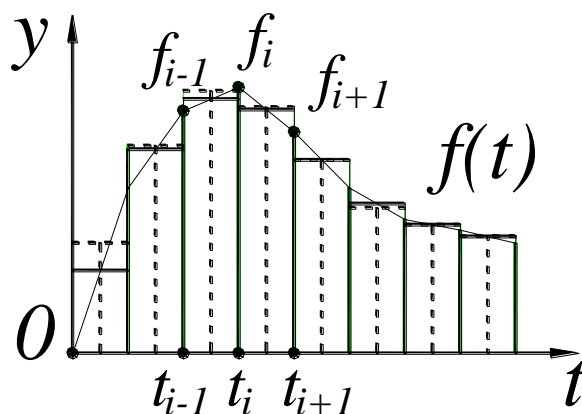


Рис. 2.5. Сравнение метода средних прямоугольников и трапеций

В случае дискретизации выражения (2.2) методом левых прямоугольников с равномерной сеткой ($\Delta t = \Delta \tau$) можно записать:

$$u_j = u(j \cdot \Delta t) = \Delta t \sum_{i=1}^j K[(j-i) \cdot \Delta t] z(i \cdot \Delta t). \quad (2.9)$$

Однако в случае вырожденных ядер $K(0) = 0$, главная диагональ соответствующей матрицы будет содержать элементы равные нулю, и целесообразнее применять метод правых прямоугольников

$$u_j = u(j \cdot \Delta t) = \Delta t \sum_{i=1}^j K[(j-i+1) \cdot \Delta t] z(i \cdot \Delta t); \quad (2.10)$$

причем требуемая точность дискретизации достигается с помощью уменьшения шага.

В случае дискретизации выражения (2.2) методом средних прямоугольников с равномерной сеткой можно записать:

$$u_j = u(j \cdot \Delta t) = \Delta t \sum_{i=1}^j K[(j-i+0.5) \cdot \Delta t] z(i \cdot \Delta t). \quad (2.11)$$

Отметим, что формула (2.11) имеет более высокую точность и не имеет искусственной сдвигки получаемой кривой на $0.5 \cdot \Delta t$.

Отдельно выделим, что если функции входящие в ядро не сильно сложные и могут быть аналитически проинтегрированы, то наилучшим образом применять дискретизацию с частичным интегрированием ядра вида:

$$u_j = u(j \cdot \Delta t) = \sum_{i=1}^j z(i \cdot \Delta t) \int_{(i-1)\Delta t}^{i\Delta t} K(j \cdot \Delta t - \tau) d\tau \quad (2.12)$$

Например, для функции вида $K(t) = \Omega \cdot \sin(\omega \cdot t)$ на основе (2.9) можно записать:

$$u_j = \Delta t \cdot \Omega \cdot \sum_{i=1}^j z(i \cdot \Delta t) \sin(\omega(j-i) \cdot \Delta t); \quad (2.13)$$

а на основе (2.12):

$$u_j = 2 \cdot \frac{\Omega}{\omega} \cdot \sum_{i=1}^j z(i \cdot \Delta t) \sin(\omega(j-i) \cdot \Delta t) \sin\left(\frac{\omega \cdot \Delta t}{2}\right). \quad (2.14)$$

Дискретным аналогом для операторного уравнения (2.3) является система линейных алгебраических уравнений, записанная в матричном виде:

$$\mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{u}. \quad (2.15)$$

где \mathbf{A} – матрица, соответствующая интегральному оператору A , элементы которой могут быть найдены согласно зависимости $a_{i,j} = K[(i-j)\Delta t]$; Δt – шаг дискретизации по времени; \mathbf{z} – вектор, соответствующий неизвестной функции $z(t)$; \mathbf{u} – вектор, соответствующий правой части $u(t)$, элементы которого определяются как $u_i = u(i \cdot \Delta t)$.

Отметим, что в случае дискретизации интегрального оператора A , соответствующего ядру $K(t, \tau)$, на самом деле возникнет уже новый оператор A_h , соответствующий $K_h(t, \tau)$, такой что, согласно А. Н. Тихонову, $\|A - A_h\|_{W_2^1 \rightarrow L_2} \leq h_\delta$, где h_δ – так называемая погрешность дискретизации. Так как $h_\delta \rightarrow 0$, для простоты в матричном соотношении (2.15) и везде в дальнейшем индекс h будет опускаться.

В случае невырожденного ядра и хорошо обусловленной матрицы \mathbf{A} , возможности вычисления обратной матрицы $\mathbf{A}^{-1} \subset \emptyset$, можно получить следующее выражение для искомого вектора:

$$\mathbf{z} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}. \quad (2.16)$$

Если вместо точного значения $\bar{u} = A \cdot \bar{z}$, нам известно приближенное значение u_δ , такое что $\|u_\delta - \bar{u}\| \leq \delta$, где $\delta > 0$ – погрешность задания правой части уравнения (исходных данных), то $U = L_2[0, T] \rightarrow U = L_2[0, T]$. Из физических соображений можно считать, что точное решение \bar{z} , соответствующее \bar{u} , есть непрерывная функция и имеет почти всюду производную, интегрируемую на $[0, T]$ с квадратом. Поэтому естественно положить $Z = W_2^1[0, T]$. В описанной постановке для безразмерного уравнения (2.3) сглаживающий функционал А. Н. Тихонова имеет вид:

$$M^\alpha[z] = \|Az - u\|_{L_2}^2 + \alpha \|z\|_{W_2^1}^2. \quad (2.17)$$

где $\alpha > 0$ – параметр регуляризации.

В развернутом виде (2.17) можно записать так:

$$M^\alpha[z] = \int_0^T \left[\int_0^t K(t-\tau)z(\tau) d\tau - u(t) \right]^2 dt + \alpha \int_0^T \left\{ z^2(t) + [z'(t)]^2 \right\} dt. \quad (2.18)$$

Решение некорректной задачи сводится к отысканию минимума сглаживающего функционала $\inf_{z \in Z} M^\alpha[z]$ или его дискретного аналога

$\inf_{z \in Z} \hat{M}^\alpha[z]$. Дискретизацию проще всего осуществлять на основе конечно-разностной аппроксимации с равномерным и одинаковым шагом сеток $\Delta t = \Delta \tau = T/J$ на отрезке $[0, T]$. При реализации вычислений на ЭВМ исследования показали, что удовлетворительные результаты получаются уже при $J \geq 100$. Увеличение количества шагов во времени влечет за собой уменьшение Δt , что уже несет некоторое регуляризирующее действие, как показано, например, в [10]. Значительное повышение количества шагов вызывает большие затраты машинного времени. При проведении вычислительных экспериментов, было установлено, что при решении тестовых задач хорошие устойчивые результаты были достигнуты при $J = 500$.

Таким образом, согласно регуляризирующему алгоритму Тихонова решение интегрального уравнения Вольтерра (2.2) эквивалентно решению регуляризированной системы линейных уравнений:

$$(\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \alpha \mathbf{C}) \mathbf{z} = \mathbf{A}^T \mathbf{u}. \quad (2.19)$$

где \mathbf{A}^T – транспонированная к \mathbf{A} матрица, \mathbf{C} – симметричная трехдиагональная $(J \times J)$ матрица, имеющая вид

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1+1/\Delta t^2 & -1/\Delta t^2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1/\Delta t^2 & 1+2/\Delta t^2 & -1/\Delta t^2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1/\Delta t^2 & 1+2/\Delta t^2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1+2/\Delta t^2 & -1/\Delta t^2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1/\Delta t^2 & 1+1/\Delta t^2 \end{bmatrix}. \quad (2.20)$$

Решение системы (2.19) можно записать в явном виде:

$$\mathbf{z} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \alpha \mathbf{C})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{u}. \quad (2.21)$$

В трудах академика А. Н. Тихонова и его последователей показано, что в сглаживающем функционале (2.17), в зависимости от априорной информации и требований к гладкости функции $z(t)$, могут использоваться различные функциональные гильбертовы пространства. Например, если вместо пространства Соболева W_2^1 для $z(t)$ ввести L_2 , то вид выражений (2.19), (2.21) не изменится, а поменяется только вид матрицы: \mathbf{C} – она станет единичной.

2.3. Выбор параметра регуляризации

Определенной сложностью для ряда исследований является оптимальный выбор параметра регуляризации. Рассмотрим вопрос выбора параметра регуляризации α при решении уравнений Вольтерра I-го рода с использованием регуляризирующего алгоритма Тихонова, реализуемого на ЭВМ.

Классическими и наиболее удобными методами выбора параметра регуляризации α для большинства обратных задач являются методы минимизации по α функционалов *невязки* типа:

$$\|z^\alpha - \bar{z}\|_C. \quad (2.22)$$

$$\|A_z z^\alpha - u\|_{L_2}^2. \quad (2.23)$$

где \bar{z} – точное решение, z^α – приближенное, полученное с использованием регуляризирующего алгоритма Тихонова при различных α .

Укажем, что введение и минимизация функционала (2.22) возможна только в некоторых случаях, например, в тестовых задачах, при тарировке и др., когда известно точное решение или его оценки. Соответственно в большинстве случаев необходимо использовать функционал вида (2.23). Причем в зависимости от конкретных задач, иногда приходится искать глобальные экстремумы, иногда локальные – тогда удобно для более удачного выбора параметра регуляризации вводить дополнительные функционалы, используя различную априорную информацию об искомой функции (ограничение величины и т. п.).

Отдельно рассмотрим влияние параметра регуляризации при решении некорректных задач механики, сводящихся к интегральным уравнениям Вольтерра.

При $\alpha = 0$ из зависимости (2.21) можно получить следующее соотношение:

$$(\mathbf{A}^T \mathbf{A})\mathbf{z} = \mathbf{A}^T \mathbf{u}, \quad (2.24)$$

которое при сокращении справа и слева на \mathbf{A}^T совпадает с соотношением (2.3); однако соотношение (2.24) также имеет место, поскольку иногда невозможно найти \mathbf{A}^{-1} , но удастся приблизительно вычислить $(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1}$.

Из соотношения (2.21) видно, что чем меньше значение параметра регуляризации α , тем меньшая неточность вносится в исходное уравнение (2.2), то есть при равных значениях функционалов желательно брать по возможности меньшие значения параметра регуляризации. Однако при очень малых значениях α сглаживающий функционал Тихонова будет иметь очень слабый стабилизирующий эффект и при незначительных возмущениях правой части интегрального уравнения решение будет неустойчивым.

Так же отметим, что в (2.19) параметр регуляризации умножается на матрицу \mathbf{C} , элементы которой пропорциональны $1/\Delta t^2$, т.е. матрица \mathbf{C} может

состоять из достаточно больших чисел (в рассмотренном ниже примере это величины порядка $10^9 \div 10^{10}$), так как при исследовании переходных процессов, к которым относится нестационарное (высокоскоростное) деформирование упругих элементов конструкции, анализируются очень короткие промежутки времени с достаточно большим числом шагов дискретизации. В связи с этим для ненормированных матриц $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ и \mathbf{C} , приходится использовать достаточно малые величины параметра регуляризации ($\alpha < 10^{-20}$).

Так как сглаживающий функционал Тихонова справедливо вводить только для безразмерных операторных уравнений вида (2.3), рассмотрим варианты перехода к безразмерной задаче:

1) В исходных уравнениях пространственные координаты относятся к длине или ширине пластины, а время делится на этот же параметр и умножается на характерную скорость (волн сдвига или изгиба), то есть переменная времени относится ко времени пробега волны вдоль пластины. Например:

$$t_l = l / \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}}, \quad (2.25)$$

2) Перед дискретизацией время берется не в секундах, а в долях наибольшего периода по первой гармонике. Также в сглаживающем функционале слагаемое при искомой функции (нагрузке) делится на квадрат статической жесткости механической системы в исследуемой точке пластины. Для описанного ниже примера в случае использования указанного варианта обезразмеривания $\alpha_{opt} = 10^{-2}$.

3) Все размерные величины делятся на единичные размерные коэффициенты. С точки зрения минимизации вычислений – это самый быстрый и простой метод, но он приводит к очень маленьким величинам параметра регуляризации $\alpha < 10^{-20}$. Укажем, что приведенные далее расчеты были выполнены согласно этому варианту перехода к безразмерной задаче. Для этого случая возможна дополнительная нормировка матриц с целью приведения их элементов к величинам порядка $1 \div 10$, в таком случае $\alpha \in [0.001; 10]$.

Отметим, что в случае размерного операторного уравнения в обратных нестационарных задачах механики деформируемого твердого тела можно использовать модифицированный сглаживающий функционал вида:

$$\widehat{M}^\alpha [z] = \|Az - u\|_{L_2}^2 + (\alpha^*)^2 \cdot c_{st}^2 \left[\omega_{\min}^2 \cdot \|z\|_{L_2}^2 + \|z'\|_{L_2}^2 \right], \quad (2.26)$$

где α^* – безразмерный параметр регуляризации в размерной задаче; c_{st} – статическая жесткость системы в исследуемой точке; ω_{\min} – минимальная собственная частота колебаний пластины. Для описанного здесь примера $\alpha_{opt}^* = 10^{-5}$.

2.4. Пример решения обратной некорректной задачи для упругодеформируемой пластины

Рассмотрим детально численное решение обратной некорректной задачи для прямоугольной шарнирно опертой пластины средней толщины, аналогичной изложенной в [178]. Поскольку здесь будет описан вычислительный эксперимент по решению обратной задачи, то, в отличие от реальных экспериментальных исследований, точная зависимость возмущающей силы будет известна. Соответственно для такой тестовой задачи имеется дополнительная возможность оценки точности идентификации внешней нагрузки при разных значениях параметра регуляризации.

При идентификации неизвестной нестационарной нагрузки $P(t)$, воздействующей на пластину, по известным изменениям прогиба $w(t)$ в некоторой точке пластины, вызванным этой силой, необходимо решать интегральное уравнение Вольтера I-го рода

$$\int_0^t K(t-\tau)P(\tau)d\tau = w(t), \quad (2.27)$$

где $K(t)$ – его ядро, которое определяется на основании аналитического или численно-аналитического решения прямой задачи (то есть системы дифференциальных уравнений в частных производных). Как показано в [72, 74, 178] ядро $K(t)$ для прямоугольных пластин имеет следующий вид:

$$K(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^2 \Omega_{jkn} \cdot \sin \omega_{jkn}(t). \quad (2.28)$$

Порядок проведения вычислительного эксперимента при решении обратной некорректной задачи был принят следующим:

- Предварительно задавалась возмущающая нагрузка $\bar{P}(t)$ (полуволна синусоиды определенной амплитуды).

- Из соотношения (2.27) определялись значения прогиба $\bar{w}(t)$ при действии заданной нагрузки.

- Вместо точных значений $w(t)$ в качестве исходных данных для обратной задачи задавались приближенные значения $w_{\delta}(t)$. Возмущение с уровнем зашумленности $\delta = 10\%$ осуществлялось по зависимости:

$$w_{\delta}(t) = \bar{w}(t) + w_{\max} \cdot \delta \cdot Rnd(t), \quad (2.29)$$

где w_{\max} – максимальное значение прогиба пластины при действии нагрузки $\bar{P}(t)$, $Rnd(t)$ – случайные числа в диапазоне $[-1;1]$.

- Уравнение (2.27) решалось при точно заданной функции $\bar{w}(t)$ и возмущенной $w_{\delta}(t)$ правой части.

- Производился выбор оптимального параметра регуляризации.

• Осуществлялась оценка точности идентификации по заданной возмущающей нагрузке $\bar{P}(t)$.

При расчетах срединная плоскость пластины совпадала с плоскостью xOy декартовой системы координат. Расчеты производились при следующих значениях: $\rho=7890$ кг/м³; $\nu=0.3$; $E=2.07 \cdot 10^{11}$ Па; $h=0.04$ м; $l=0.6$ м, $m=0.4$ м. Число членов в соответствующих двойных рядах Фурье 50×50 .

Координаты точки приложения возмущающей нагрузки: $x_0=0.4$ м, $y_0=0.3$ м; координаты точки, значения прогиба в которой использовались при решении обратной задачи: $x_s=0.25$ м, $y_s=0.1$ м.

На рис. 2.6 показаны изменения во времени прогиба $w_s(t) = \bar{w}(t)$, найденного в результате решения прямой задачи – точные значения правой части уравнения (жирная кривая) и $w_\delta(t)$ – неточно заданные значения правой части, используемые в качестве исходных данных для решения обратной задачи (тонкая кривая).

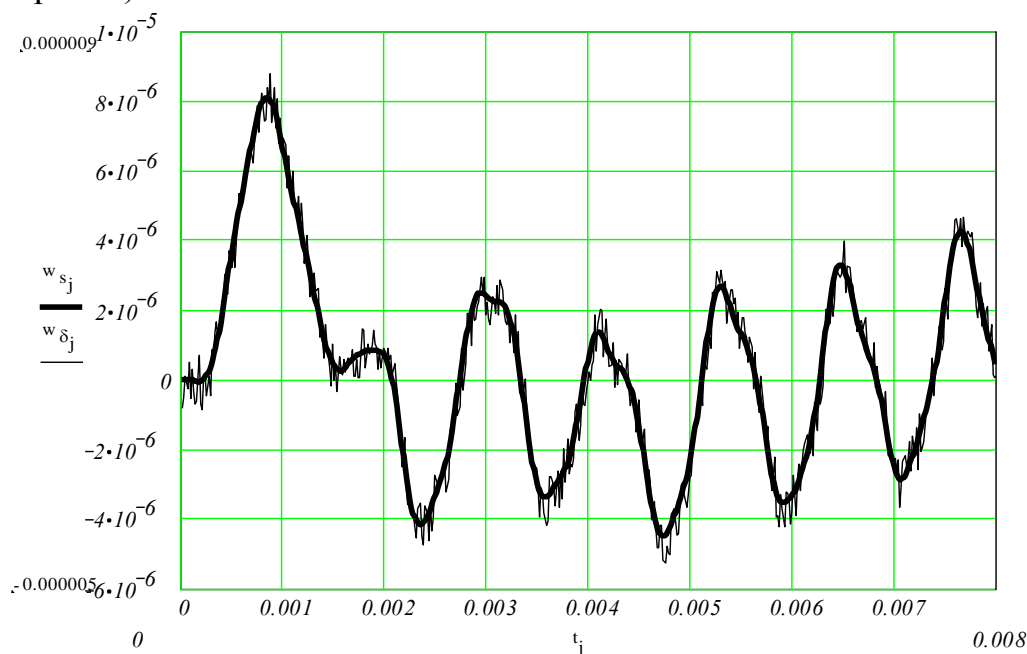


Рис. 2.6. Исходные данные для обратной задачи

Неизвестная возмущающая нагрузка $P(t)$ определялась из выражения вида (2.21). Если выписать матрицу, которая умножается на вектор, соответствующий искомой нагрузке, в регуляризированной системе линейных уравнений, то видно, что она имеет два слагаемых $(\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \alpha \cdot \mathbf{C})$. Очевидно, что элементы матрицы $\alpha \cdot \mathbf{C}$, содержащие параметр регуляризации не должны превышать или быть значительно меньше элементов матрицы $(\mathbf{A}^T \mathbf{A})$. Для данного расчетного случая максимальные значения элементов матрицы $(\mathbf{A}^T \mathbf{A})$ были порядка $2 \cdot 10^{-18}$, минимальные значение для взятых по модулю элементов этой матрицы $(\mathbf{A}^T \mathbf{A})$ были порядка $5 \cdot 10^{-28}$. Максимальное значение элементов матрицы \mathbf{C} для исследуемого промежутка времени было равно

$\max(\mathbf{C}) = 7.813 \cdot 10^9$ или порядка 10^{10} . Следовательно, для описанного случая параметр регуляризации α должен находиться примерно в диапазоне от $10^{-18} \cdot 10^{-9} = 10^{-27}$ до $10^{-28} \cdot 10^{-9} = 10^{-37}$, расширенном на 10^{+2} . Таким образом в настоящей работе величина параметра регуляризации исследовалась в диапазоне $\alpha \in [10^{-35}; 10^{-25}]$. Укажем, что на некоторых из последующих рисунков для удобства анализа показан не весь диапазон, а только его часть.

Причем, при решении тестовой задачи хорошо видно, что при значениях $\alpha = 10^{-25}$ приближенное решение получалось недостаточно точным, а максимальная амплитуда получалась сильно заниженной, см. рис. 2.7, где жирной кривой соответствует точная сила $\bar{P}(t)$, а тонкой – идентифицированная. Это обусловлено тем, что слагаемое $\alpha \cdot \mathbf{C}$ превышает матрицу $(\mathbf{A}^T \mathbf{A})$, содержащую ядра интегрального уравнения. При всех $\alpha > 10^{-25}$ ситуация усугубляется и найденное приближенное решение теряет смысл.

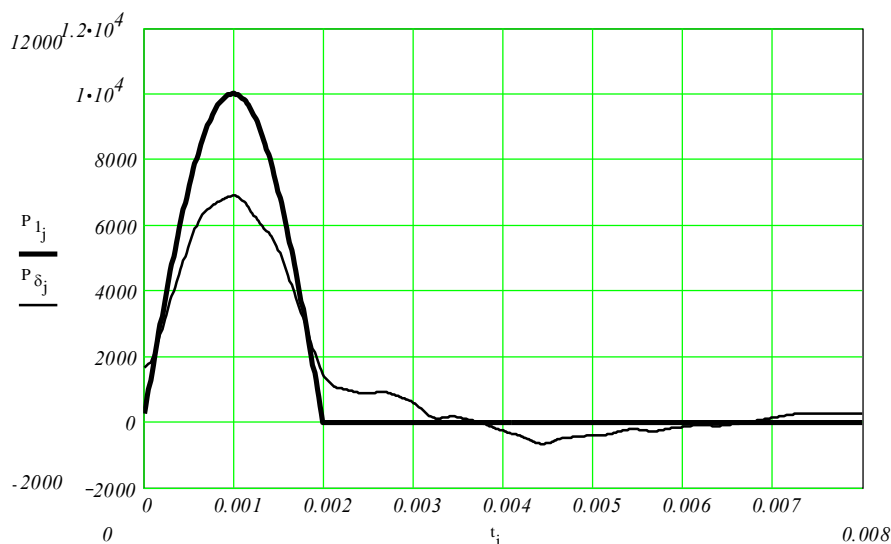
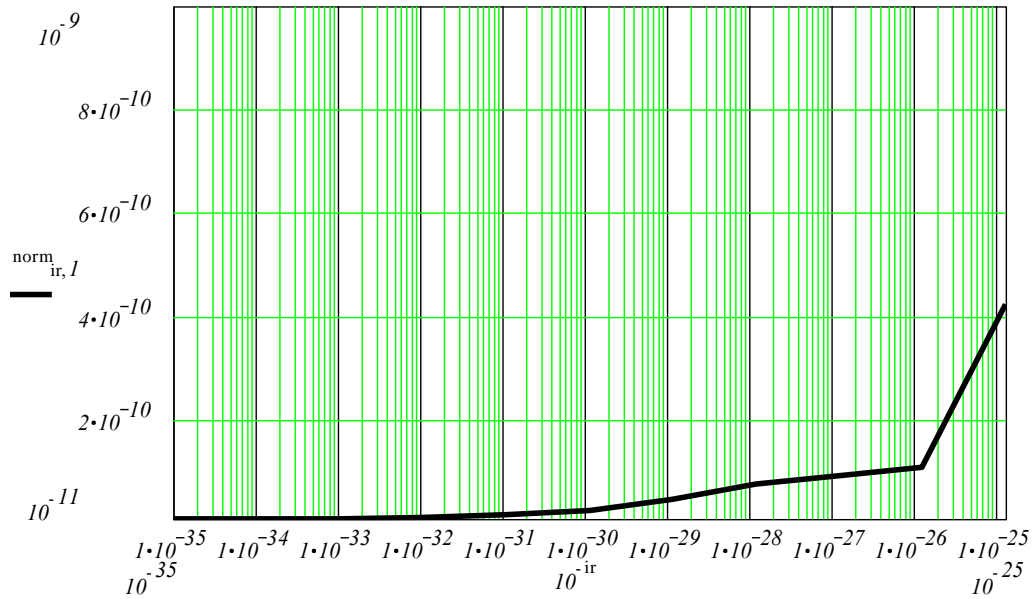


Рис. 2.7. Возмущающая и определенная приближенно нагрузки

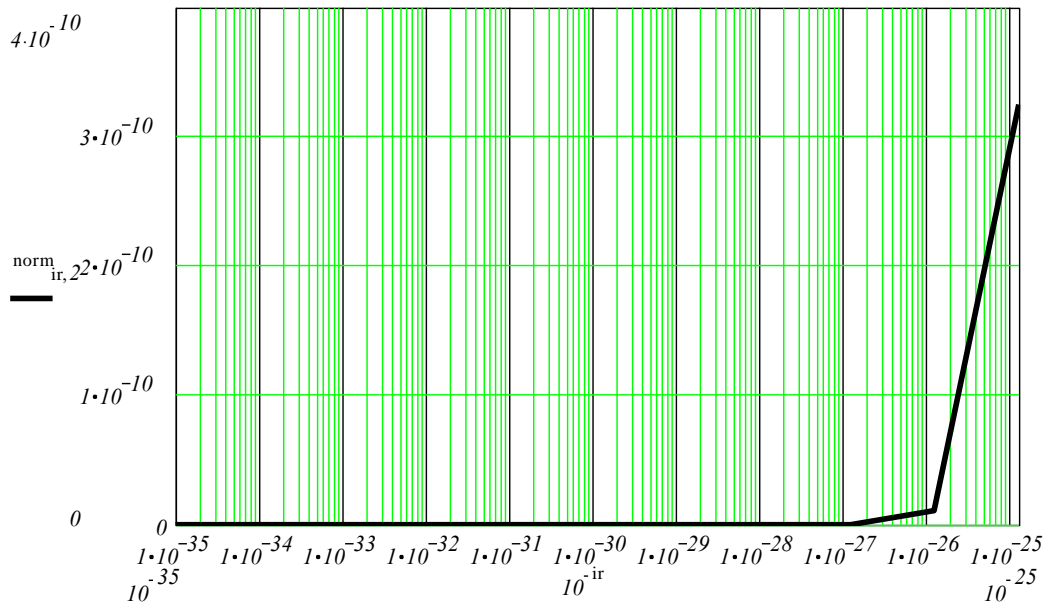
Для выбора оптимальных значений параметра регуляризации α при решении регуляризированной системы линейных уравнений (2.21) исследовались несколько функционалов, графические зависимости которых приведены ниже. Укажем, что на всех этих графиках значения параметра регуляризации для наглядности отложены вдоль оси абсцисс в логарифмической шкале.

На рис. 2.8 показаны функционалы типа невязки, на основе которых зачастую выбирается параметр регуляризации:

В случае неточно заданной правой части интегрального уравнения $w_\delta(t)$ функционал невязки можно записать в виде: $\|\mathbf{A} \cdot \mathbf{P}^\alpha - \mathbf{w}_\delta\|_{l_2}^2$ (рис. 2.8 а); в тестовой задаче мы можем увидеть вид этого функционала для невозмущенной правой части $\bar{w}(t) - \|\mathbf{A} \cdot \mathbf{P}^\alpha - \mathbf{w}\|_{l_2}^2$ (рис. 2.8 б).



а)



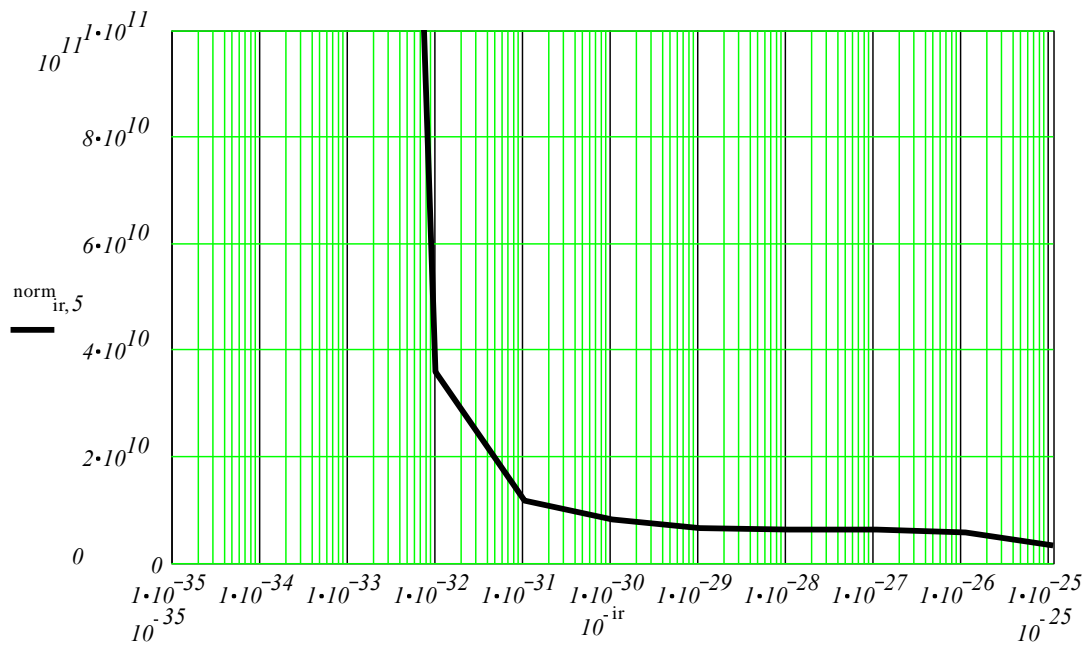
б)

Рис. 2.8. Вид функционалов типа невязки:

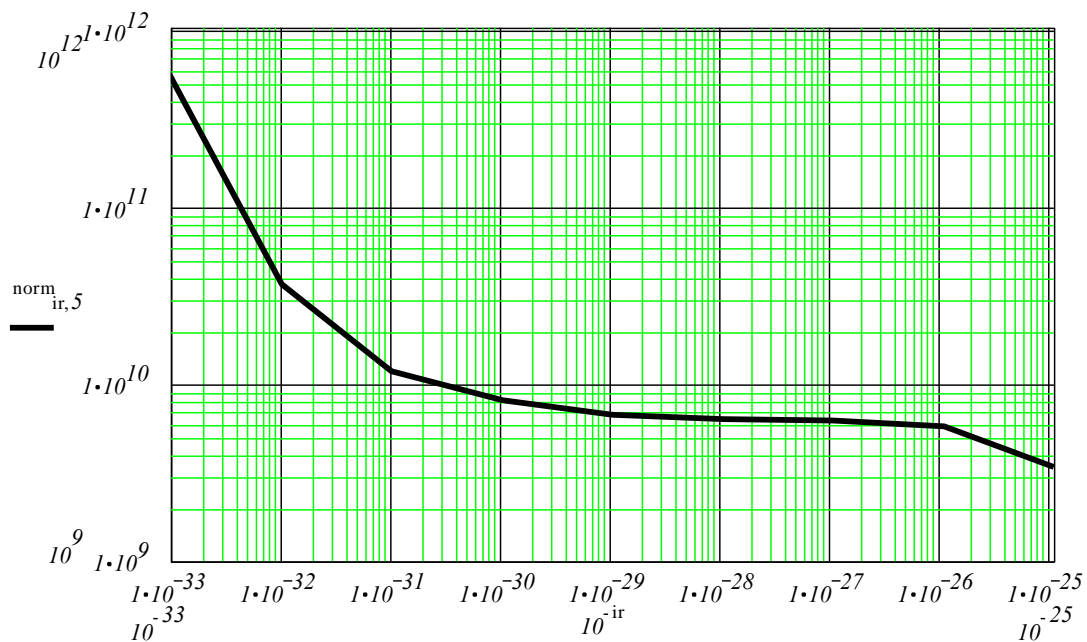
а) для возмущенной правой части; б) для точно заданной правой части

Укажем, что значение функционала невязки для точно заданной правой части должно стремиться к нулю и на рис. 2.8 б видно, что при $\alpha < 10^{-27}$ значения функционала практически приближаются к нулю. Однако, в случае неточно заданной (возмущенной) правой части значения функционала должны стремиться не к нулю, а к некоторой малой константе, пропорциональной уровню шума δ . Как правило, во всех реальных задачах присутствуют погрешности измерения, усиления, преобразования и т.п., в этом случае необходимо искать не глобальный, а локальный экстремум функционала. На рис. 2.8 а можно выделить диапазон выбора параметра регуляризации $\alpha \in [10^{-31}; 10^{-26}]$.

Для уменьшения этого диапазона необходимо рассматривать дополнительные функционалы, используя различную априорную информацию. Например, функционал «суммарной нагрузки», который можно трактовать как представление минимума энергии (минимума работы возмущающей нагрузки) – $\|\mathbf{p}^\alpha\|_{l_2}^2$ (рис. 2.9 а). На рис. 2.9 б показан этот же функционал, только для удобства анализа значения вдоль ось ординат также отложены в логарифмической шкале.



а)



б)

Рис. 2.9. Вид функционала «суммарной нагрузки»:

- а) значения вдоль оси ординат отложены в обычной шкале;
- б) значения вдоль оси ординат отложены в логарифмической шкале

Отметим, что требуемые перемещения пластины будут вызваны минимальной, но не нулевой силой, а следовательно, в исследуемом для параметра регуляризации диапазоне $\alpha \in [10^{-28}; 10^{-26}]$.

Интересное уточнение можно получить, введя ограничение на отклонение вычисленного по идентифицированной силе прогиба от исходного: $\|A \cdot P^\alpha - w_\delta\|_C$ (рис. 2.10). Рассматривая этот функционал в совокупности с предыдущими (рис. 2.8 – рис. 2.9), можно предположить, что $\alpha_{opt} = 10^{-27}$.

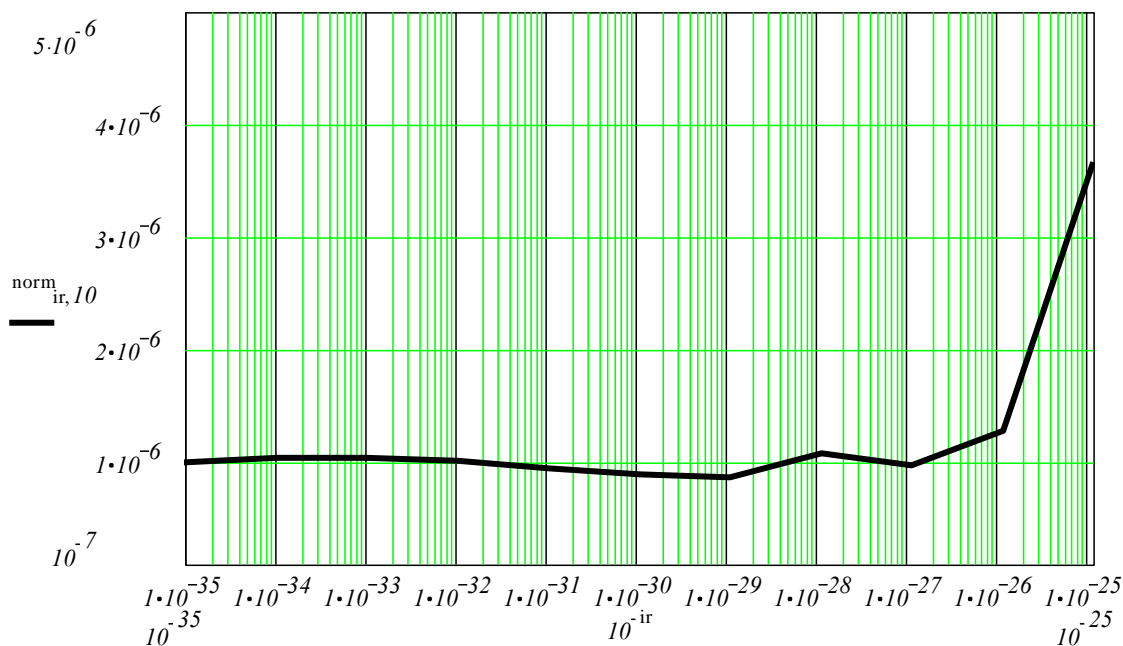


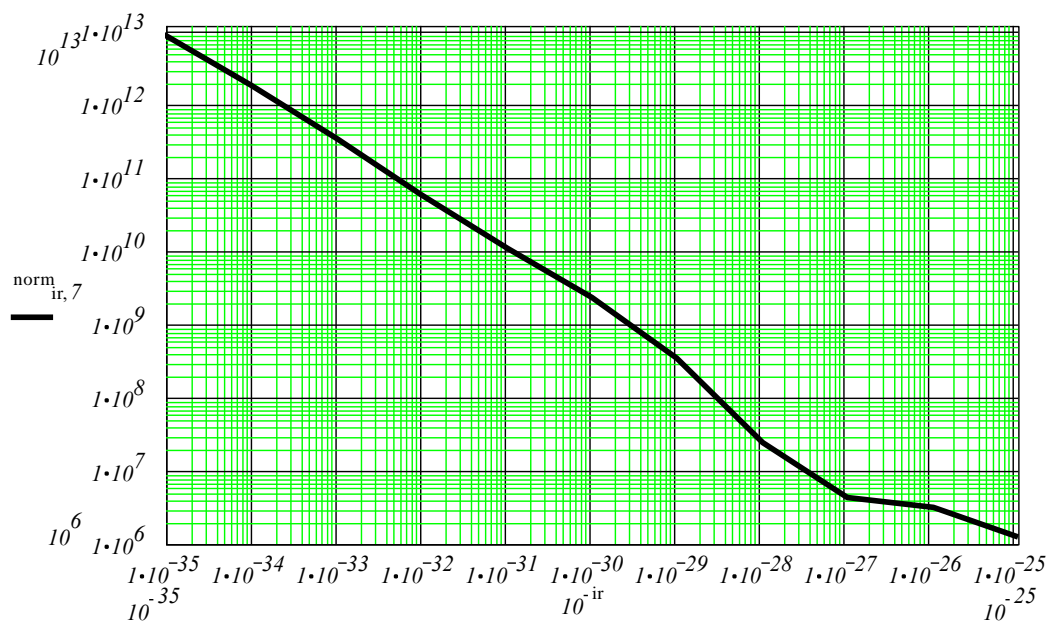
Рис. 2.10. К выбору параметра регуляризации

Также, когда имеется возможность использовать дополнительную априорную информацию о «гладкости» идентифицируемой нагрузки можно исследовать дополнительные функционалы «гладкости»: $\|(P^\alpha)'\|_{L_2}^2$ – рис. 2.11 а и $\|(P^\alpha)'\|_C$ – (рис. 2.11 б). Изучая функционалы на (рис. 2.11), можно также выделить $\alpha \in [10^{-28}; 10^{-26}]$ и особенно $\alpha = 10^{-27}$.

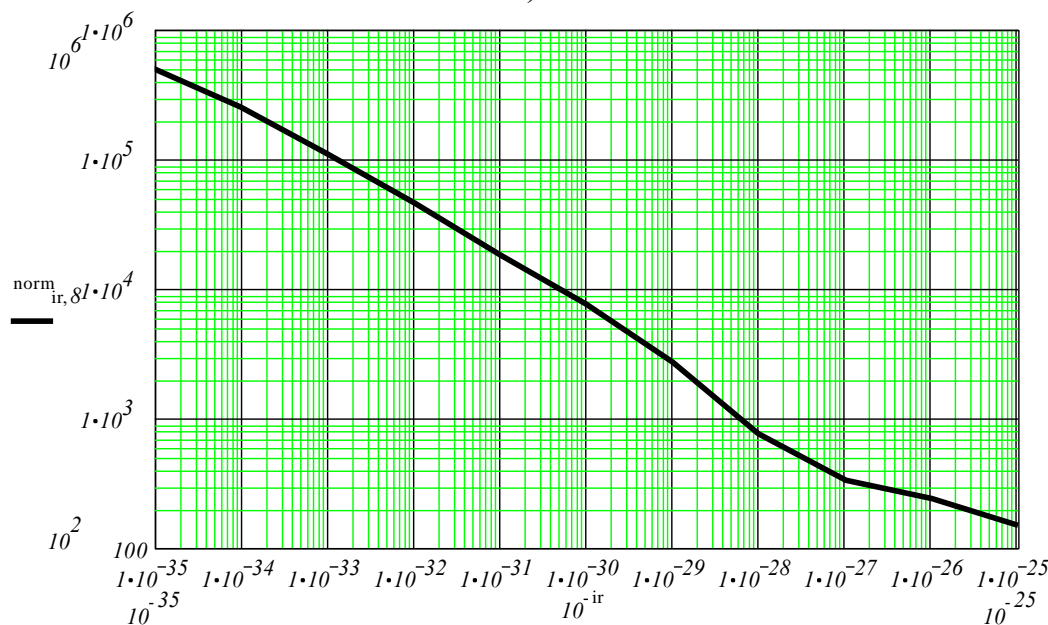
В тестовых задачах, а также при проведении экспериментальных исследованиях с точно известными тарировочными нагрузками появляется возможность оценить точность решения обратной задачи (относительную погрешность идентификации нагрузки) по следующей зависимости:

$$\delta_{id} = \frac{\int_0^t [P^\alpha(t) - \bar{P}(t)] dt}{\int_0^t \bar{P}(t) dt} \approx \frac{\|P^\alpha - \bar{P}\|_{L_1}}{\|\bar{P}\|_{L_1}}. \quad (2.30)$$

График «относительной погрешности идентификации нагрузки» показан на рис. 2.12.



а)



б)

Рис. 2.11. Влияние параметра регуляризации на гладкость идентифицируемой нагрузки:

- а – функционал «гладкости» в метрике l_2 ;
- б – функционал «гладкости» в метрике C .

На рис. 2.12 явно видно, что для рассмотренного примера расчета самые лучшие результаты решения обратной некорректной задачи получены при значениях параметра регуляризации $\alpha_{opt} = 10^{-27}$ (как и предполагалось ранее, из анализа функционалов представленных на рис. 2.8 – рис. 2.11).

Функционал вида $\frac{\|\mathbf{P}^\alpha - \bar{\mathbf{P}}\|_{l_2}^2}{\|\bar{\mathbf{P}}\|_{l_2}^2}$ на рис. 2.13 имеет еще более ярко выраженный экстремум при $\alpha_{opt} = 10^{-27}$.

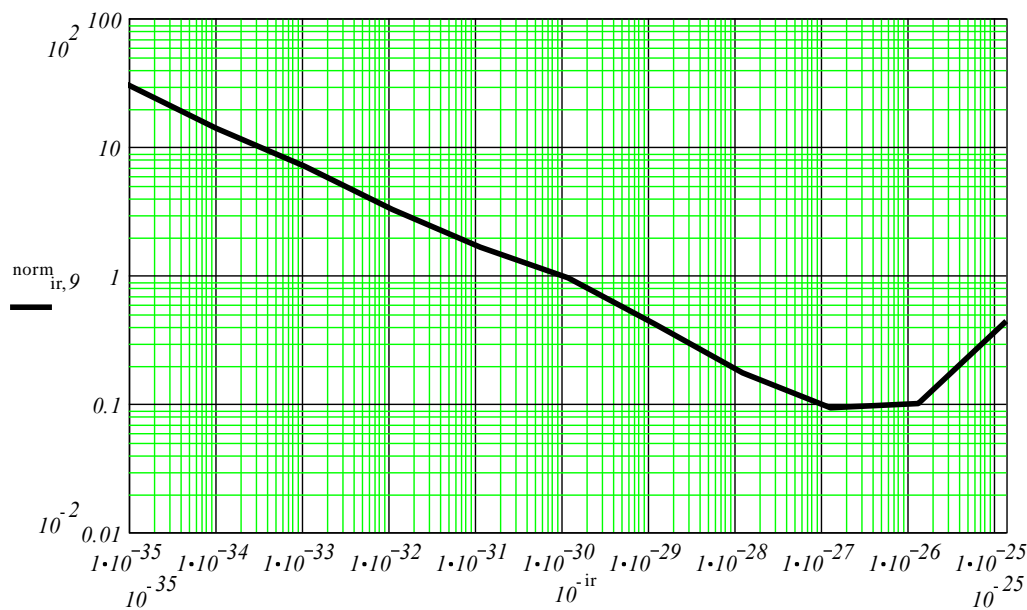


Рис. 2.12. Оценка «точности» идентификации

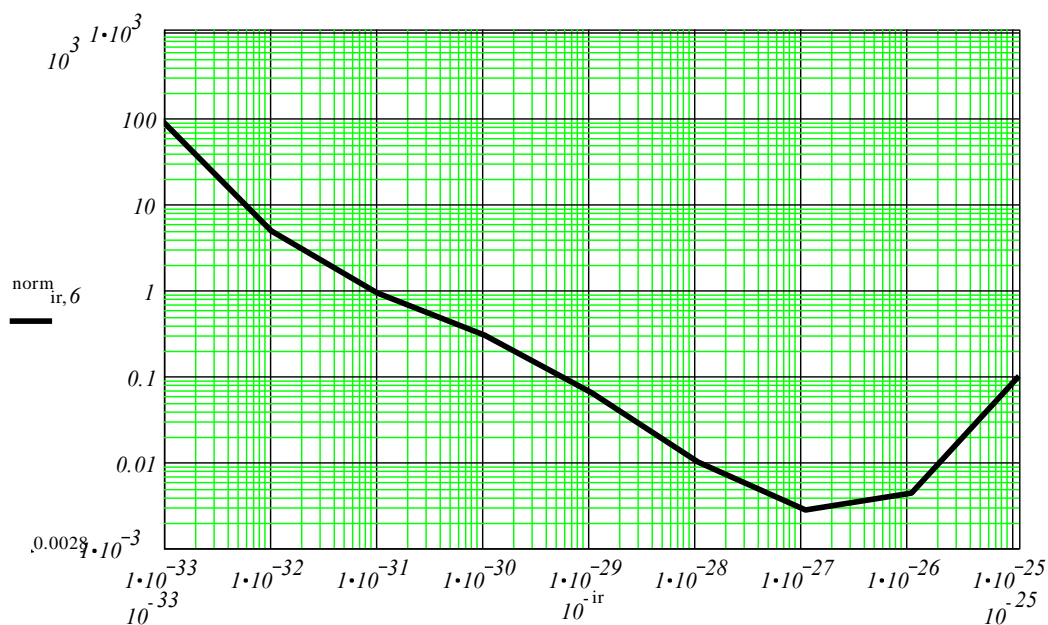


Рис. 2.13. Выбор оптимального параметра регуляризации

На рис. 2.14 – рис. 2.17 показаны графики идентифицированной внешней нагрузки при различных значениях параметра регуляризации – тонкая кривая и тестовая нагрузка – полуволна синусоиды (толстая кривая).

На рис. 2.14 параметр регуляризации $\alpha = 10^{-26}$ – показаны в целом неплохие результаты, однако из-за «большой» величины α частично «занижены» максимальные значения. На рис. 2.15 $\alpha = \alpha_{opt} = 10^{-27}$ – видно хорошее совпадение тестовой и идентифицированной нагрузки. На рис. 2.16 $\alpha = 10^{-28}$ – начинают сильно проявляться эффекты, вызванные «зашумлением» исходных данных. Рис. 2.17 соответствует значению параметра регуляризации $\alpha = 10^{-29}$, этот рисунок демонстрирует, что при $\alpha \leq 10^{-29}$ – влияние сглаживающего функционала А. Н. Тихонова недостаточно (результаты становятся неудовлетворительными).

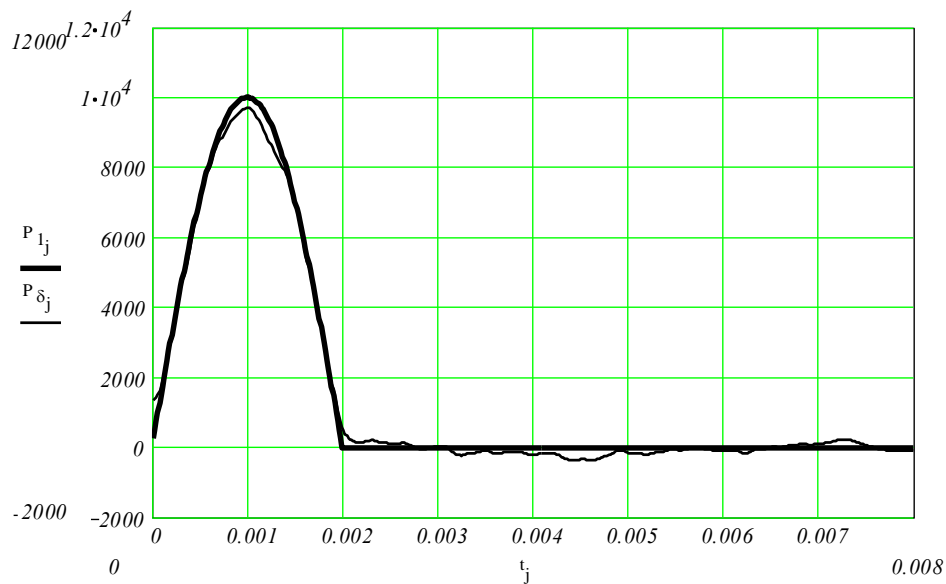


Рис. 2.14. Изменение идентифицированной нагрузки во времени при $\alpha = 10^{-26}$

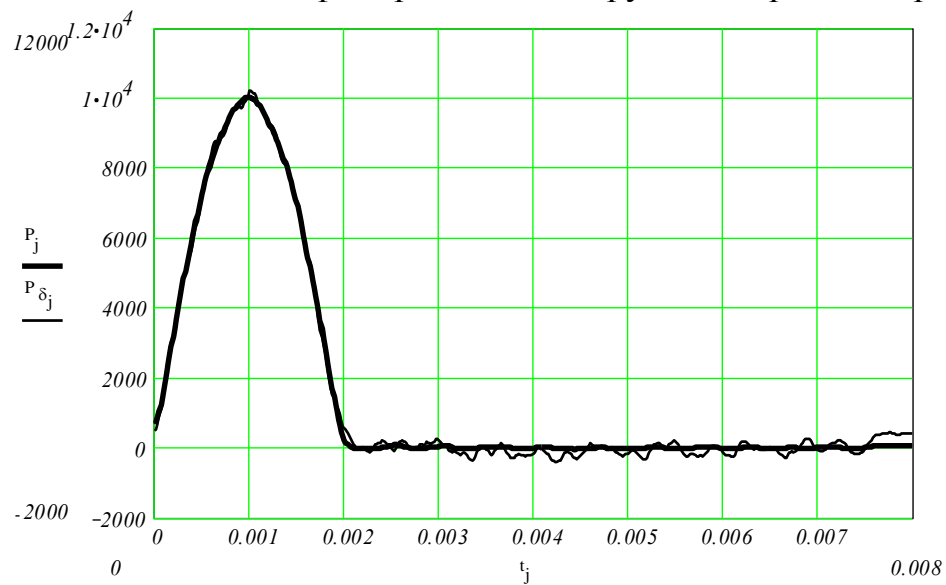


Рис. 2.15. Изменение идентифицированной нагрузки во времени при $\alpha = 10^{-27}$

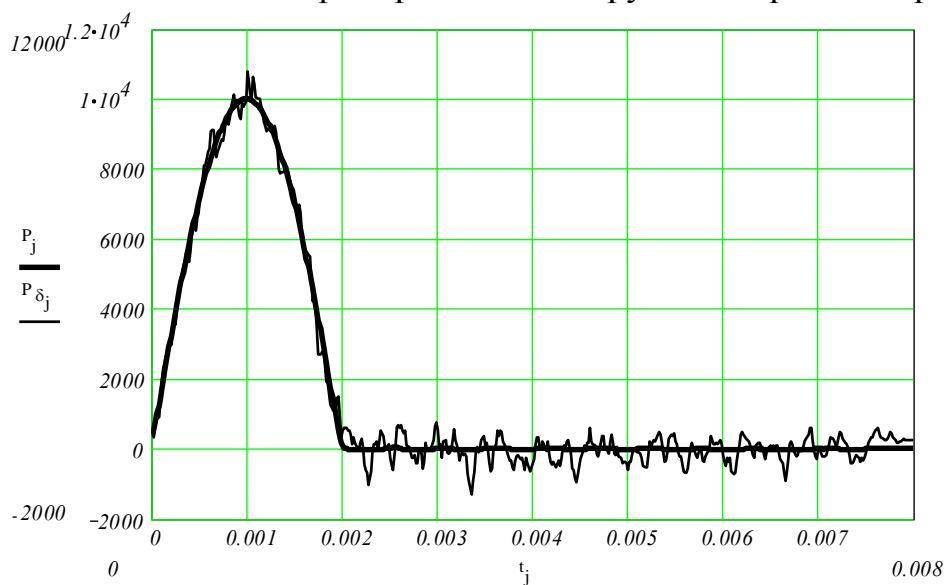


Рис. 2.16. Изменение идентифицированной нагрузки во времени при $\alpha = 10^{-28}$

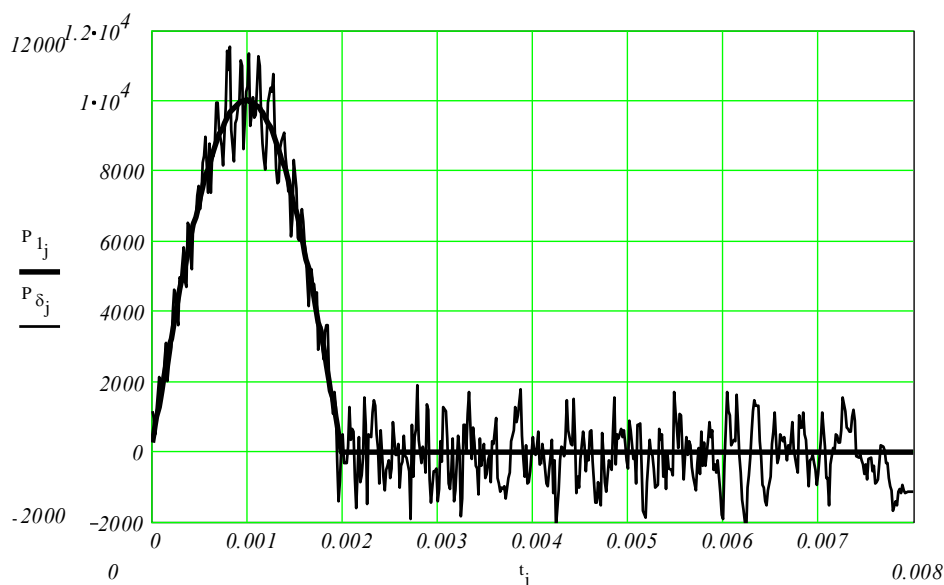


Рис. 2.17. Изменение идентифицированной нагрузки во времени при $\alpha = 10^{-29}$

Описано применение регуляризирующего алгоритма А. Н. Тихонова для решения некорректных задач механики деформируемого твердого тела, возникающих при исследовании интегральных уравнений, на примере решения обратной некорректной задачи идентификации неизвестной возмущающей нагрузки, вызывающей нестационарное деформирования элемента конструкции в виде пластины. Применение РА Тихонова позволяет получать достаточно устойчивое решение и дает хорошие результаты при «зашумленных» исходных данных. Однако серьезное внимание необходимо уделять выбору параметра регуляризации, желательно выбирать его на основе анализа нескольких функционалов, базирующихся на использовании априорной информации по определяемой функции. Существенное влияние на величину параметра регуляризации оказывают процедуры перехода к безразмерным операторным уравнениям перед введением сглаживающего функционала или нормирования матриц.

2.5. Решение системы двух интегральных уравнений Вольтерра

Выше подробно описано решение некорректной задачи, в которой исследовалось одно интегральное уравнение, описана методика выбора параметра регуляризации, а также приведен численный расчет для тестовой задачи.

Рассмотрим алгоритм решения системы двух интегральных уравнений Вольтерра.

К такой системе может быть сведена задача, об одновременном воздействии на пластину двух нестационарных независимых поперечных сил, приложенных в двух разных точках пластины. Для прогибов в двух произвольных точка пластины можно записать следующие соотношения:

$$\begin{cases} w_1(t) = w(x_1, y_1, t) = \int_0^t P_1(\tau) K_{P_1}^{W_1}(t - \tau) d\tau + \int_0^t P_2(\tau) K_{P_2}^{W_1}(t - \tau) d\tau; \\ w_2(t) = w(x_2, y_2, t) = \int_0^t P_1(\tau) K_{P_1}^{W_2}(t - \tau) d\tau + \int_0^t P_2(\tau) K_{P_2}^{W_2}(t - \tau) d\tau, \end{cases} \quad (2.31)$$

которые в случае, когда силы $P_1(t)$ и $P_2(t)$ неизвестны, являются системой интегральных уравнений (СИУ) Вольтерра I рода. Описание входящих в (2.31) элементов аналогично описанию выражения (2.27).

Запишем дискретный аналог СИУ (2.31) в матричном виде:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1 \\ \mathbf{w}_2 \end{bmatrix}, \quad (2.32)$$

где \mathbf{A} – блочная матрица [56], составленная из матричных элементов $\mathbf{A}_{i,j}$, соответствующих ядрам интегралов $K_{i,j}(t)$, входящих в (2.31).

Укажем, что каждая матрица $\mathbf{A}_{k,n}$ имеет специальный вид:

$$\mathbf{A}_{k,n} = \begin{bmatrix} K_{k,n}[\Delta t] & 0 & 0 & \dots \\ K_{k,n}[2 \cdot \Delta t] & K_{k,n}[\Delta t] & 0 & \dots \\ K_{k,n}[3 \cdot \Delta t] & K_{k,n}[2 \cdot \Delta t] & K_{k,n}[\Delta t] & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}, \quad (2.33)$$

где k – номер строки блока (матрицы) в блочной матрице; n – номер столбца.

То есть матрица (2.33) является квадратной нижней треугольной, а её элементы на главной диагонали и на всех поддиагоналях совпадают между собой. Таким образом, все матрицы $\mathbf{A}_{k,n}$ являются перестановочными между собой, например, $\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{21} = \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{12}$.

Заметим, что термин поддиагональ взят из [56], где вводятся понятия p -я поддиагональ (наддиагональ), которые соответствуют элементам матриц $a_{i,j}$, у которых разность индексов равна константе:

$$i - j = p \quad (j - i = p), \quad (2.34)$$

где i – номер строки элемента матрицы; j – номер столбца; p – номер наддиагонали (поддиагонали).

Если ввести матрицу \mathbf{M} , такую что:

$$\mathbf{M} = \mathbf{A}_{11}\mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{21}, \quad (2.35)$$

тогда система двух матричных уравнений (2.32) будет эквивалентна следующим двум независимым уравнениям:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \cdot \mathbf{P}_1 &= \mathbf{A}_{22}\mathbf{w}_1 - \mathbf{A}_{21}\mathbf{w}_2; \\ \mathbf{M} \cdot \mathbf{P}_2 &= \mathbf{A}_{11}\mathbf{w}_2 - \mathbf{A}_{21}\mathbf{w}_1, \end{aligned} \quad (2.36)$$

для каждого из которых можно использовать вышеизложенную теорию решения некорректных задач. Согласно РА Тихонова, по аналогии с (2.21), можно записать итоговые соотношения для решения (2.36):

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_1 &= (\mathbf{M}^T \mathbf{M} + \alpha_1 \mathbf{C})^{-1} \mathbf{M}^T (\mathbf{A}_{22} \mathbf{w}_1 - \mathbf{A}_{21} \mathbf{w}_2); \\ \mathbf{P}_2 &= (\mathbf{M}^T \mathbf{M} + \alpha_2 \mathbf{C})^{-1} \mathbf{M}^T (\mathbf{A}_{11} \mathbf{w}_2 - \mathbf{A}_{21} \mathbf{w}_1), \end{aligned} \quad (2.37)$$

где α_1, α_2 – два независимых параметра регуляризации (которые могут совпадать).

2.6. Обобщенный алгоритм Крамера (ОАК)

В ряде случаев, решаемая задача сводится к системе из N интегральных уравнений (например, при действии на пластину N неизвестных независимых силовых воздействий). В таком случае система N ИУ после дискретизации может быть представлена в виде следующей блочной СЛАУ:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \cdots & \mathbf{A}_{1j} & \cdots & \mathbf{A}_{1N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{A}_{i1} & \cdots & \mathbf{A}_{ij} & \cdots & \mathbf{A}_{iN} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{A}_{N1} & \cdots & \mathbf{A}_{Nj} & \cdots & \mathbf{A}_{NN} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{p}_i \\ \vdots \\ \mathbf{p}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_j \\ \vdots \\ \mathbf{u}_N \end{bmatrix}, \quad (2.38)$$

где \mathbf{u} – блочный вектор соответствует правым частям системы ИУ, а искомым является блочный вектор \mathbf{p} (система возмущающих сил).

Если посмотреть на матрицу \mathbf{M} в выражении (2.35), то она в точности совпадает с выражением для определителя блочной матрицы \mathbf{A} с размером 2×2 . Тогда по аналогии с методом Крамера для решения СЛАУ можно составить алгоритм для решения блочных СЛАУ. Операции будут производиться не с числами, а с блоками чисел – матрицами. Такой подход будет являться обобщением метода Крамера, и его можно называть обобщенный алгоритм Крамера (по аналогии с термином обобщенный алгоритм Гаусса). Следовательно, предыдущий пункт можно рассматривать как пример решения блочной СЛАУ 2×2 при помощи ОАК.

Согласно методу Крамера решение СЛАУ $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{y}$ имеет следующий вид:

$$x_i = \frac{\det \mathbf{A}_i}{\det \mathbf{A}}, \quad (2.39)$$

где $\det \mathbf{A}$ – определитель матрицы \mathbf{A} , $\det \mathbf{A}_i$ – определитель матрицы, в которой i -ый столбец матрицы системы заменяется столбцом правых частей.

Аналогично для блочной СЛАУ (2.38) можно записать следующие выражения для определителей:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \mathbf{A}_{11} & \cdots & \mathbf{A}_{1j} & \cdots & \mathbf{A}_{1N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{A}_{i1} & \cdots & \mathbf{A}_{ij} & \cdots & \mathbf{A}_{iN} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{A}_{N1} & \cdots & \mathbf{A}_{Nj} & \cdots & \mathbf{A}_{NN} \end{vmatrix}, \quad (2.40)$$

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} \mathbf{A}_{11} & \cdots & \mathbf{A}_{1,i-1} & \mathbf{u}_1 & \mathbf{A}_{1,i+1} & \cdots & \mathbf{A}_{1N} \\ \mathbf{A}_{21} & \cdots & \mathbf{A}_{2,i-1} & \mathbf{u}_2 & \mathbf{A}_{2,i+1} & \cdots & \mathbf{A}_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{A}_{N-1,1} & \cdots & \mathbf{A}_{N-1,i-1} & \mathbf{u}_{N-1} & \mathbf{A}_{N-1,i+1} & \cdots & \mathbf{A}_{N-1,N} \\ \mathbf{A}_{N1} & \cdots & \mathbf{A}_{N,i-1} & \mathbf{u}_N & \mathbf{A}_{N,i+1} & \cdots & \mathbf{A}_{NN} \end{vmatrix}. \quad (2.41)$$

Определитель матрицы – это число, а определитель блочной матрицы – матрица размерами составляющего блока. Используя определители (2.40), (2.41) система N уравнений можно заменить на N независимых уравнений вида:

$$\Delta \cdot \mathbf{p}_i = \Delta_i, \quad (2.42)$$

где индекс i меняется от 1 до N .

Выражение аналогичное (2.39) корректно записать в виде

$$\mathbf{p}_i = \Delta^{-1} \cdot \Delta_i, \quad (2.43)$$

однако при решении некорректных задач не всегда удастся получить обратную матрицу для Δ , тогда согласно РА Тихонова можно записать эквивалентную (2.42) регуляризованную СЛАУ:

$$(\Delta^T \Delta + \alpha_i \mathbf{C}) \cdot \mathbf{p}_i = \Delta^T \Delta_i, \quad (2.44)$$

решение которой будет:

$$\mathbf{p}_i = (\Delta^T \Delta + \alpha_i \mathbf{C})^{-1} \Delta^T \Delta_i. \quad (2.45)$$

Заметим, что для вычисления матричных определителей (2.40), (2.41) нельзя использовать более быстрые (приближенные) численные методы, так как алгебраические операции производятся не с числами, а с матрицами. Определители можно получать только на базе точных формул (для определителей 2 и 3-го порядка), через перестановки и при помощи блочных миноров. Известно, что в определитель входит $N!$ слагаемых, и символьное (алгебраическое) вычисление блочного определителя 5×5 является достаточно трудоемкой операцией и с нелинейным ростом времени расчётов (пропорционально факториальной зависимости), следовательно для решения систем ИУ с числом уравнений более 5 целесообразно использовать другие методы.

В то же время для решения систем, состоящих из 2 -4 уравнений, это один из лучших и достаточно эффективных методов.

2.7. Обобщенный алгоритм Гаусса (ОАГ)

Последовательность операций при решении СЛАУ методом Гаусса хорошо известна и описана во множестве источников, поэтому она не будет здесь детально описываться. Остановимся только на особенностях работы с блочными СЛАУ и матрицами, а также опишем и проанализируем с позиций решения некорректных задач некоторые вариации метода и обобщенного алгоритма Гаусса [56].

Для решения блочной СЛАУ (2.38) удобно составить на базе квадратной блочной матрицы \mathbf{A} прямоугольную размерности $N \times N + 1$:

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \cdots & \mathbf{A}_{1,i} & \cdots & \mathbf{A}_{1,N-1} & \mathbf{A}_{1N} & \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{A}_{2,1} & \mathbf{A}_{22} & \cdots & \mathbf{A}_{2,i} & \cdots & \mathbf{A}_{2,N-1} & \mathbf{A}_{2N} & \mathbf{u}_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{A}_{N-1,1} & \mathbf{A}_{N-1,2} & \cdots & \mathbf{A}_{N-1,i} & \cdots & \mathbf{A}_{N-1,N-1} & \mathbf{A}_{N-1,N} & \mathbf{u}_{N-1} \\ \mathbf{A}_{N1} & \mathbf{A}_{N,2} & \cdots & \mathbf{A}_{N,i} & \cdots & \mathbf{A}_{N,N-1} & \mathbf{A}_{NN} & \mathbf{u}_N \end{array} \right), \quad (2.46)$$

которая при помощи известных манипуляций приводится к некоторому специальному (Гауссовому) виду. Например, все числа в первой строке делятся на первое число a_{11} , а во второй строке на первый элемент второй строки a_{21} , а затем из первой строки вычитается вторая и тогда в результирующем выражении первый элемент будет тождественно равен нулю. При работе с блочными матрицами операции производятся не над числами, а над блоками (матрицами), поэтому порядок действий аналогичный, только вместо деления на a_{11} нужно умножить на обратную матрицу $(\mathbf{A}_{11})^{-1}$ и т.д.

Опишем несколько видов к которым можно привести матрицу (2.46).

1) Вид диагональной матрицы \mathbf{A} с единичной диагональю:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \mathbf{u}_1^{*1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \mathbf{u}_2^{*1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \mathbf{u}_{N-1}^{*1} \\ 0 & 0 & \cdots & & 1 & \mathbf{u}_N^{*1} \end{array} \right), \quad (2.47)$$

в этом случае изменённый последний столбец \mathbf{u}^{*1} и будет являться решением задачи, однако к такому виду привести матрицу (2.46) при решении некорректных задач, используя тождественные преобразования, практически не возможно.

В ряде источников при решении блочных СЛАУ, используя ОАГ, рекомендуют выполнять только прямой ход и приводить матрицу (2.46) к верхнему треугольному виду. Можно выделить несколько видов верхних треугольных матриц.

2) Вид верхней треугольной матрицы с единичной диагональю:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & \mathbf{A}_{1,2}^* & \cdots & \mathbf{A}_{1,N-1}^* & \mathbf{A}_{1,N}^* & \mathbf{u}_1^{*2} \\ 0 & 1 & \cdots & \mathbf{A}_{2,N-1}^* & \mathbf{A}_{2,N}^* & \mathbf{u}_2^{*2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \mathbf{A}_{N-1,N}^* & \mathbf{u}_{N-1}^{*2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \mathbf{u}_N^{*2} \end{array} \right). \quad (2.48)$$

Вид (2.48) это промежуточный этап при получении вида (2.47), в котором $\mathbf{u}_N^{*2} = \mathbf{p}_N$. При решении некорректных задач зачастую не получается найти устойчивое решение даже $\mathbf{u}_N^{*2} \approx \mathbf{p}_N$, про остальные $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{N-1}$ можно даже не упоминать.

3) Вид верхней треугольной матрицы с единичной диагональю, кроме последнего блочного элемента:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & \mathbf{A}_{1,2}^* & \cdots & \mathbf{A}_{1,N-1}^* & \mathbf{A}_{1,N}^* & \mathbf{u}_1^{*3} \\ 0 & 1 & \cdots & \mathbf{A}_{2,N-1}^* & \mathbf{A}_{2,N}^* & \mathbf{u}_2^{*3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \mathbf{A}_{N-1,N}^* & \mathbf{u}_{N-1}^{*3} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \mathbf{A}_{N,N}^* & \mathbf{u}_N^{*3} \end{array} \right). \quad (2.49)$$

В этом случае для $\mathbf{A}_{N,N}^* \cdot \mathbf{p}_N = \mathbf{u}_N^{*3}$ (последней строки) один раз выполняется процедура регуляризации по Тихонову, далее выполняется обратный ход. Вид (2.49) имеет преимущества в том, что параметр регуляризации α нужно выбирать 1 раз и не сложно выбрать его оптимальное значение α_{opt} . Однако, так как процедура регуляризации выполняется однократно при решении некорректных задач к этому виду можно приводить блочные СЛАУ с небольшим N (для систем из 4 и 5 ИУ были получены устойчивые результаты).

4) Вид верхней треугольной матрицы с не единичной диагональю:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \mathbf{A}_{1,1}^* & \mathbf{A}_{1,2}^* & \cdots & \mathbf{A}_{1,N-1}^* & \mathbf{A}_{1,N}^* & \mathbf{u}_1^{*4} \\ 0 & \mathbf{A}_{2,2}^* & \cdots & \mathbf{A}_{2,N-1}^* & \mathbf{A}_{2,N}^* & \mathbf{u}_2^{*4} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{A}_{N-1,N}^* & \mathbf{A}_{N-1,N}^* & \mathbf{u}_{N-1}^{*4} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \mathbf{A}_{N,N}^* & \mathbf{u}_N^{*4} \end{array} \right). \quad (2.50)$$

Этот вид можно порекомендовать как один из наиболее устойчивых и относительно простых. Для последней строки можно выполнять регуляризацию с оптимальным значением параметра регуляризации α_{Nopt} , а остальные параметры регуляризации $\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}$ просто принимать из рационального диапазона, то есть на обратном ходу не решать задачи оптимизации для каждой строки при получении удовлетворительных (устойчивых) результатов (При решении системы из 10 ИУ этот метод позволял получать устойчивые приближенные решения).

5) Вид верхней треугольной матрицы с не единичной диагональю, подобный (2.50), но полученный без применения операций обращения матриц $\mathbf{A}_{i,j}^{-1}$, то есть, когда используются только операции умножения матриц и сложения/вычитания. Например, если все матрицы в первой строке умножить на первую матрицу во второй строке справа $\mathbf{A}_{1,j} \cdot \mathbf{A}_{2,1}$, а все матрицы во второй строке умножить на первую матрицу первой строки слева $\mathbf{A}_{1,1} \cdot \mathbf{A}_{2,j}$, а затем вычесть полученные выражения, тогда первый элемент в результирующем выражении также будет тождественно равен нулю ($\mathbf{A}_{1,1} \cdot \mathbf{A}_{2,1} - \mathbf{A}_{1,1} \cdot \mathbf{A}_{2,1} \equiv 0$).

При приведении к виду (2.50) без применения операций обращения может наблюдаться неограниченный рост или уменьшение матриц $\mathbf{A}_{i,j}$, и необходима постоянная нормировка строк на каждом этапе прямого хода, поэтому в следующем выражении для каждого блока введен дополнительных верхний индекс $\mathbf{A}_{i,j}^{*n}$:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \mathbf{A}_{1,1}^{*n} & \mathbf{A}_{1,2}^{*n} & \cdots & \mathbf{A}_{1,N-1}^{*n} & \mathbf{A}_{1,N}^{*n} & \mathbf{u}_1^{*5} \\ 0 & \mathbf{A}_{2,2}^{*n} & \cdots & \mathbf{A}_{2,N-1}^{*n} & \mathbf{A}_{2,N}^{*n} & \mathbf{u}_2^{*5} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{A}_{N-1,N}^{*n} & \mathbf{A}_{N-1,N}^{*n} & \mathbf{u}_{N-1}^{*5} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \mathbf{A}_{N,N}^{*n} & \mathbf{u}_N^{*5} \end{array} \right). \quad (2.51)$$

Укажем, что если реализовать алгоритм автоматической нормировки, можно получить такую систему вида (2.51), в которой на обратном ходе можно будет использовать для всех строк одинаковый параметр регуляризации α .

В заключении укажем, что в случае решения блочных СЛАУ с использованием ОАК число простейших операций при вычислениях пропорционально $N!$, а при использовании ОАГ – пропорционально N^3 и при решении систем ИУ более 5 ему, вероятно, нет альтернативы.

Отдельно подчеркнём, что ОАГ можно применять для блочных матриц, в которых блоки (составляющие подматрицы $\mathbf{A}_{i,j}$) могут быть не перестановочные между собой, они должны быть только одинаковой размерности.

3. НЕСТАЦИОНАРНОЕ НАГРУЖЕНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН

В данной главе рассматриваются импульсные воздействия системы произвольных сложных нагрузок (имеющих не только поперечную, а и продольную составляющую) на прямоугольные упругие изотропные пластины средней толщины в рамках уточненной теории С. П. Тимошенко. Представлена теория решения прямых и обратных задачи теории упругости для нестационарных нагружений пластины. Приводится несколько примеров вычислений по идентификации системы нескольких внешних независимых нагрузок.

3.1. Воздействия на прямоугольную пластину системы конечного числа независимых произвольных нагружений

Расположим пластину в декартовых координатах так, что ее срединная плоскость будет находиться в плоскости xOy , ограничена прямыми $x=0$, $x=l$, $y=0$, $y=m$, а направление оси Oz будет совпадать с нормалью к плоскости xOy .

Укажем, что l и m – размеры пластины в плане. Координаты точки приложения j -й сосредоточенной силы или центра малой области равномерно распределенной нагрузки – x_{0j}, y_{0j} . Конечное число воздействующих нагрузок равняется N .

Для решения данной задачи воспользуемся моделью пластин теории С. П. Тимошенко, которая учитывает эффекты инерции вращения нормального элемента и поперечного сдвига.

Составляющие перемещения элемента пластины обозначим u , v и w . Далее сделаем следующие допущения: будем полагать, что компоненты перемещения u и v – линейно зависимы от z , а w от z не зависит [61, 114, 235]. Тогда, исходя из вышеуказанного, можно записать

$$\begin{aligned}u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) + z \cdot \psi_x(x, y, t); \\v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) + z \cdot \psi_y(x, y, t); \\w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t).\end{aligned}\tag{3.1}$$

В этих соотношениях x , y , z – декартовы координаты, u_0 , v_0 и w_0 – перемещения точек срединной плоскости пластины, а ψ_x и ψ_y – углы поворота нормали к срединной плоскости пластины в плоскостях xOz и yOz , соответственно; $z \in [-h/2; h/2]$, где h – толщина пластины (рис. 3.1).

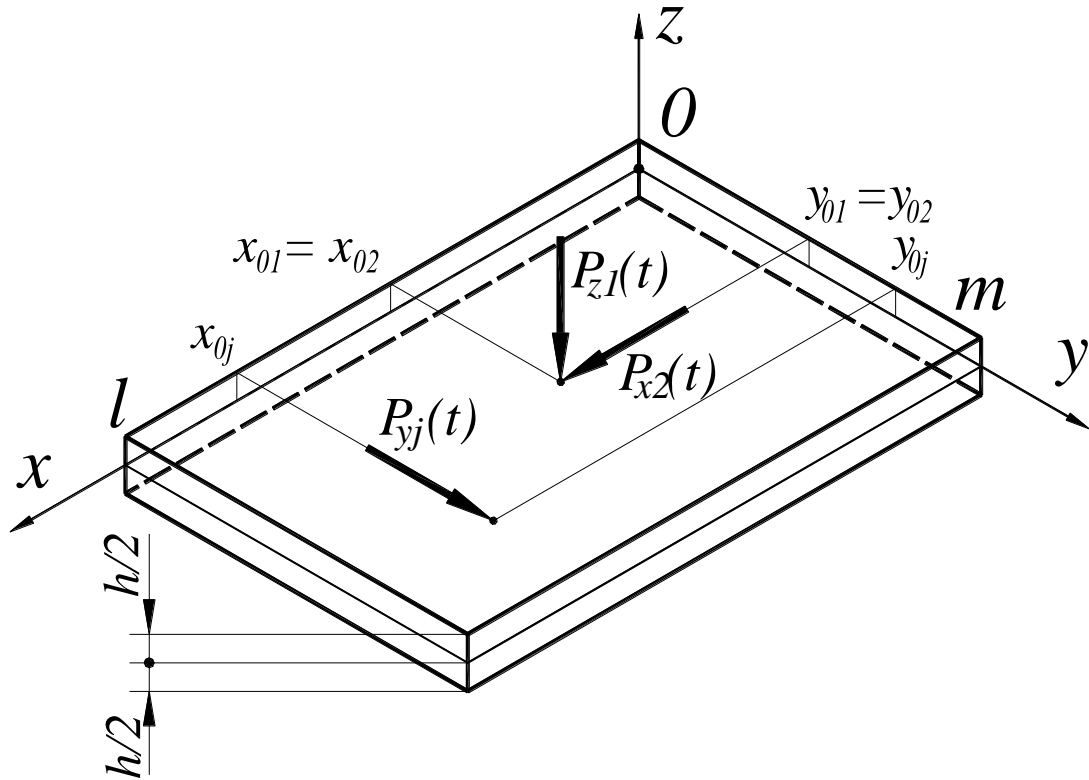


Рис. 3.1. Пластина, нагруженная системой продольных и поперечных сил

Задача о нестационарном деформировании упругой изотропной пластины с учетом соответствующих начальных и граничных условий, а также нагружения системой из N сил и моментов сводится к решению следующей системы пяти дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка:

$$\left\{ \begin{array}{l} E_p h \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + Gh \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + h(E_p \nu + G) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \cdot \partial y} = \rho h \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - \sum_{j=1}^N P_{xj}(x, y, t); \\ Gh \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + E_p h \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + h(E_p \nu + G) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \cdot \partial y} = \rho h \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} - \sum_{j=1}^N P_{yj}(x, y, t); \\ G' h (\nabla^2 w_0 + \psi_{xy}) = \rho h \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} - \sum_{j=1}^N P_{zj}(x, y, t); \\ \frac{D}{2} \left[(1-\nu) \nabla^2 \psi_x + (1+\nu) \frac{\partial \psi_{xy}}{\partial x} \right] - G' h \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + \psi_x \right) = \rho \cdot I \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} - \sum_{j=1}^N M_{xj}(x, y, t); \\ \frac{D}{2} \left[(1-\nu) \nabla^2 \psi_y + (1+\nu) \frac{\partial \psi_{xy}}{\partial y} \right] - G' h \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} + \psi_y \right) = \rho \cdot I \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2} - \sum_{j=1}^N M_{yj}(x, y, t), \end{array} \right. \quad (3.2)$$

где E – модуль упругости; ν – коэффициент Пуассона; ρ – плотность материала

пластины; $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ – модуль сдвига; $I = h^3/12$; $E_p = \frac{E}{(1-\nu^2)}$;

$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$; $\psi_{xy} = \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y}$; $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} = E_p \cdot I$ – цилиндрическая

жесткость пластины; G' – приведенный модуль сдвига $G'=k'G$. Отметим, что k' – коэффициент сдвига, подробные сведения о котором приведены в [61].

Полную систему уравнений (3.2), описывающую деформирование пластин в рамках гипотез Тимошенко можно разделить на две независимых подсистемы. Первая подсистема, состоящая из первых двух дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, относительно неизвестных $u_0(x, y, t)$ и $v_0(x, y, t)$ соответствует продольным нагрузениям, а вторая подсистема, состоящая из трёх дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, относительно функций прогибов $w_0(x, y, t)$ и углов поворота нормали $\psi_x(x, y, t)$ и $\psi_y(x, y, t)$ – поперечным нагрузениям.

Приведенная система уравнений взята из монографии [72] с учетом введенных здесь воздействующих нагрузок: нормальных $\sum_{j=1}^N P_{zj}(x, y, t)$, касательных

$$\sum_{j=1}^N P_{xj}(x, y, t), \sum_{j=1}^N P_{yj}(x, y, t) \text{ и моментных } \sum_{j=1}^N M_{xj}(x, y, t), \sum_{j=1}^N M_{yj}(x, y, t).$$

На рис. 3.1 моментные нагрузки, входящие в два последних уравнения (3.2), не показаны из-за соображений упрощения визуального восприятия.

При решении задачи примем нулевые начальные условия, а именно:

$$u_0(x, y, 0) = v_0(x, y, 0) = w_0(x, y, 0) = \psi_x(x, y, 0) = \psi_y(x, y, 0) = 0;$$

$$\frac{\partial u_0(x, y, 0)}{\partial t} = \frac{\partial v_0(x, y, 0)}{\partial t} = \frac{\partial w_0(x, y, 0)}{\partial t} = \frac{\partial \psi_x(x, y, 0)}{\partial t} = \frac{\partial \psi_y(x, y, 0)}{\partial t} = 0; \quad (3.3)$$

Для шарнирно-опертой пластины, чтобы удовлетворить необходимым граничным условиям [65]:

вдоль краев $y=0$ и $y=m$:

$$w_0 = 0; \quad \psi_x = 0; \quad M_y = 0; \quad S_{xy} = 0; \quad v_0 = 0, \quad (3.4)$$

вдоль краев $x=0$ и $x=l$:

$$w_0 = 0; \quad M_x = 0; \quad \psi_y = 0; \quad u_0 = 0; \quad S_{xy} = 0, \quad (3.5)$$

запишем искомые функции (3.1) в виде разложений в следующие двойные ряды Фурье:

$$u_0(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{kn}(t) \cdot \sin \frac{k\pi \cdot x}{l} \cdot \cos \frac{n\pi \cdot y}{m}; \quad (3.6)$$

$$v_0(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} v_{kn}(t) \cdot \cos \frac{k\pi \cdot x}{l} \cdot \sin \frac{n\pi \cdot y}{m}; \quad (3.7)$$

$$w_0(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{kn}(t) \cdot \sin \frac{k\pi \cdot x}{l} \cdot \sin \frac{n\pi \cdot y}{m}; \quad (3.8)$$

$$\psi_x(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{Xkn}(t) \cdot \cos \frac{k\pi \cdot x}{l} \cdot \sin \frac{n\pi \cdot y}{m}; \quad (3.9)$$

$$\psi_y(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{Ykn}(t) \cdot \sin \frac{k\pi \cdot x}{l} \cdot \cos \frac{n\pi \cdot y}{m}. \quad (3.10)$$

Для свободно-опертой пластины (другой вариант закрепления) граничные условия будут иметь вид [65]:

вдоль краев $y=0$ и $y=m$:

$$w_0 = 0; \quad M_y = 0; \quad N_y = 0; \quad u_0 = 0, \quad (3.11)$$

вдоль краев $x=0$ и $x=l$:

$$w_0 = 0; \quad M_x = 0; \quad N_x = 0; \quad v_0 = 0. \quad (3.12)$$

В этом случае разложения искомым функций (3.1) можно записать в виде следующих двойных рядов Фурье по тригонометрическим функциям для $u_0(x, y, t)$ и $v_0(x, y, t)$ вместо (3.6) и (3.7):

$$u_0(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{kn}(t) \cdot \cos \frac{k\pi \cdot x}{l} \cdot \sin \frac{n\pi \cdot y}{m}; \quad (3.13)$$

$$v_0(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} v_{kn}(t) \cdot \sin \frac{k\pi \cdot x}{l} \cdot \cos \frac{n\pi \cdot y}{m}; \quad (3.14)$$

для $w_0(x, y, t)$, $\psi_x(x, y, t)$, $\psi_y(x, y, t)$ разложения будут в точности совпадать с выражениями (3.8)-(3.10), поэтому для прямоугольных пластин, на которые воздействуют только поперечные нагрузки не выделяю отдельно граничные условия в виде свободного опирания, а рассматривают в основном шарнирное опирание. Свободное опирание как отдельный вид граничных условий вводят для только пластин, у которых есть касательные составляющие нагрузок, а в основном их применяют для панелей или оболочек.

Подставив разложения (3.6)-(3.10) в систему дифференциальных уравнений в частных производных (3.2) и воспользовавшись свойством ортогональности тригонометрических функций, приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений по переменной t . Система дифференциальных уравнений решается следующим образом: при нулевых начальных условиях выполняется прямое интегральное преобразование Лапласа [5, 67, 68, 76, 84, 87, 90]; в пространстве изображений на основе решения системы алгебраических уравнений находятся искомые коэффициенты разложения $w_{kn}^L(s)$, $u_{kn}^L(s)$, $v_{kn}^L(s)$, $\psi_{xkn}^L(s)$, $\psi_{ykn}^L(s)$; производится обратное преобразование Лапласа. В результате получаем:

$$u_{knj}(t) = \frac{C_{knj}^{Px}}{\Delta_{kn}^*} \int_0^t \sum_{i=4}^5 \Omega_{ikn}^U \sin \omega_{ikn}(t-\tau) P_{xj}(\tau) d\tau +$$

$$+ (c_p^2 v + c^2) \frac{C_{knj}^{Pyj} \cdot \lambda_k^* \cdot \mu_n^*}{\Delta_{kn}^*} \int_0^t \left(\frac{\sin \omega_{4kn}(t-\tau)}{\omega_{4kn}} - \frac{\sin \omega_{5kn}(t-\tau)}{\omega_{5kn}} \right) P_{yj}(\tau) d\tau; \quad (3.15)$$

$$v_{knj}(t) = \frac{C_{knj}^{Py}}{\Delta_{kn}^*} \int_0^t \sum_{i=4}^5 \Omega_{ikn}^V \sin \omega_{ikn}(t-\tau) P_{yj}(\tau) d\tau +$$

$$+ (c_p^2 v + c^2) \frac{C_{knj}^{Pxj} \cdot \lambda_k^* \cdot \mu_n^*}{\Delta_{kn}^*} \int_0^t \left(\frac{\sin \omega_{4kn}(t-\tau)}{\omega_{4kn}} - \frac{\sin \omega_{5kn}(t-\tau)}{\omega_{5kn}} \right) P_{xj}(\tau) d\tau; \quad (3.16)$$

$$w_{knj}(t) = \frac{C_{knj}^{Pzj}}{\Delta_{kn}} \int_0^t \sum_{i=1}^2 \Omega_{ikn}^W \sin \omega_{ikn}(t-\tau) P_{zj}(\tau) d\tau +$$

$$+ c_T^2 \frac{C_{knj}^{Mx}}{\Delta_{kn}^*} \int_0^t \left(\frac{\sin \omega_{1kn}(t-\tau)}{\omega_{1kn}} - \frac{\sin \omega_{2kn}(t-\tau)}{\omega_{2kn}} \right) M_{xj}(\tau) d\tau + \quad (3.17)$$

$$+ c_T^2 \frac{C_{knj}^{My}}{\Delta_{kn}^*} \int_0^t \left(\frac{\sin \omega_{1kn}(t-\tau)}{\omega_{1kn}} - \frac{\sin \omega_{2kn}(t-\tau)}{\omega_{2kn}} \right) M_{yj}(\tau) d\tau;$$

$$\Psi_{Xknj}(t) = c_T^2 \frac{12}{h^2} \frac{C_{knj}^{Pz} \lambda_k^*}{\Delta_{kn}} \int_0^t \left(\frac{\sin \omega_{1kn}(t-\tau)}{\omega_{1kn}} - \frac{\sin \omega_{2kn}(t-\tau)}{\omega_{2kn}} \right) P_{zj}(\tau) d\tau +$$

$$+ \frac{C_{knj}^{Mx}}{2\Delta_{kn} \lambda_k^*} \int_0^t \sum_{i=1}^3 \left(\Omega_{ikn}^\Psi + \Omega_{ikn}^{\phi X} \right) \sin \omega_{ikn}(t-\tau) M_{xj}(\tau) d\tau + \quad (3.18)$$

$$+ \frac{C_{knj}^{My}}{2\Delta_{kn} \lambda_k^*} \int_0^t \sum_{i=1}^3 \left(\Omega_{ikn}^\Psi + \Omega_{ikn}^{\phi Y} \right) \sin \omega_{ikn}(t-\tau) M_{yj}(\tau) d\tau;$$

$$\Psi_{Yknj}(t) = c_T^2 \frac{12}{h^2} \frac{C_{knj}^{Pz} \mu_n^*}{\Delta_{kn}} \int_0^t \left(\frac{\sin \omega_{1kn}(t-\tau)}{\omega_{1kn}} - \frac{\sin \omega_{2kn}(t-\tau)}{\omega_{2kn}} \right) P_{zj}(\tau) d\tau +$$

$$+ \frac{C_{knj}^{Mx}}{2\Delta_{kn} \mu_n^*} \int_0^t \sum_{i=1}^3 \left(\Omega_{ikn}^\Psi - \Omega_{ikn}^{\phi X} \right) \sin \omega_{ikn}(t-\tau) M_{xj}(\tau) d\tau + \quad (3.19)$$

$$+ \frac{C_{knj}^{My}}{2\Delta_{kn} \mu_n^*} \int_0^t \sum_{i=1}^3 \left(\Omega_{ikn}^\Psi - \Omega_{ikn}^{\phi Y} \right) \sin \omega_{ikn}(t-\tau) M_{yj}(\tau) d\tau;$$

где $c_G^2 = \frac{G}{\rho}$; $c_T^2 = \frac{G'}{\rho}$; $c_p^2 = \frac{E_p}{\rho}$; $\lambda_k^* = \pi \frac{k}{l}$; $\mu_n^* = \pi \frac{n}{m}$; $\lambda_{kn}^2 = \pi^2 \left(\frac{k^2}{l^2} + \frac{n^2}{m^2} \right)$,

$$\mu_{kn}^2 = \pi^2 \left(\frac{k^2}{l^2} - \frac{n^2}{m^2} \right); \quad \Delta_{kn} = \sqrt{\left(\lambda_{kn}^2 (c_T^2 + c_p^2) + c_T^2 \cdot 12/h^2 \right)^2 - 4 \cdot c_T^2 \cdot c_p^2 \cdot \lambda_{kn}^4};$$

$$\Delta_{kn}^* = \sqrt{\left(c_p^2 + c_G^2 \right)^2 \lambda_{kn}^4 - 4c_G^2 c_p^2 (\lambda_k^{*4} + \mu_n^{*4}) - 4\lambda_k^{*2} \mu_n^{*2} (c_p^4 (1-v^2) - 2v c_G^2 c_p^2)};$$

$$\Omega_{4kn}^U = \omega_{4kn} - \frac{c_G^2 \lambda_k^{*2} + c_p^2 \mu_n^{*2}}{\omega_{4kn}}; \quad \Omega_{5kn}^U = -\omega_{5kn} + \frac{c_G^2 \lambda_k^{*2} + c_p^2 \mu_n^{*2}}{\omega_{5kn}};$$

$$\Omega_{4kn}^V = \omega_{4kn} - \frac{c_p^2 \lambda_k^{*2} + c_G^2 \mu_n^{*2}}{\omega_{4kn}}; \quad \Omega_{5kn}^V = -\omega_{5kn} + \frac{c_p^2 \lambda_k^{*2} + c_G^2 \mu_n^{*2}}{\omega_{5kn}};$$

$$\Omega_{1kn}^W = \omega_{1kn} - \frac{c_p^2 \lambda_{kn}^2 + c_T^2 \cdot 12/h^2}{\omega_{1kn}}; \quad \Omega_{2kn}^W = -\omega_{2kn} + \frac{c_p^2 \lambda_{kn}^2 + c_T^2 \cdot 12/h^2}{\omega_{2kn}};$$

$$\Omega_{1kn}^\Psi = \omega_{1kn} - \frac{c_T^2 \lambda_{kn}^2}{\omega_{1kn}}; \quad \Omega_{2kn}^\Psi = -\omega_{2kn} + \frac{c_T^2 \lambda_{kn}^2}{\omega_{2kn}}; \quad \Omega_{3kn}^\Psi = 0;$$

$$\Omega_{1kn}^{\varphi X} = -\frac{\left(\omega_{1kn}^2 - c_T^2 \lambda_{kn}^2\right) \left(\omega_{1kn}^2 - c_p^2 \left(\lambda_{kn}^2 + \frac{1+\nu}{2} \mu_{kn}^2\right) - c_T^2 \cdot \frac{12}{h^2}\right) - 2c_T^4 \mu_n^{*2} \frac{12}{h^2}}{\omega_{1kn} (\omega_{3kn}^2 - \omega_{1kn}^2)};$$

$$\Omega_{2kn}^{\varphi X} = \frac{\left(\omega_{2kn}^2 - c_T^2 \lambda_{kn}^2\right) \left(\omega_{2kn}^2 - c_p^2 \left(\lambda_{kn}^2 + \frac{1+\nu}{2} \mu_{kn}^2\right) - c_T^2 \frac{12}{h^2}\right) - 2c_T^4 \mu_n^{*2} \frac{12}{h^2}}{\omega_{2kn} (\omega_{3kn}^2 - \omega_{2kn}^2)};$$

$$\Omega_{3kn}^{\varphi X} = \Delta_{kn} \frac{\left(\omega_{3kn}^2 - c_T^2 \lambda_{kn}^2\right) \left(\omega_{3kn}^2 - c_p^2 \left(\lambda_{kn}^2 + \frac{1+\nu}{2} \mu_{kn}^2\right) - c_T^2 \frac{12}{h^2}\right) - 2c_T^4 \mu_n^{*2} \frac{12}{h^2}}{\omega_{3kn} (\omega_{1kn}^2 - \omega_{3kn}^2) (\omega_{2kn}^2 - \omega_{3kn}^2)};$$

$$\Omega_{1kn}^{\varphi Y} = \frac{\left(\omega_{1kn}^2 - c_T^2 \lambda_{kn}^2\right) \left(\omega_{1kn}^2 - c_p^2 \left(\lambda_{kn}^2 - \frac{1+\nu}{2} \mu_{kn}^2\right) - c_T^2 \frac{12}{h^2}\right) + 2c_T^4 \lambda_k^{*2} \frac{12}{h^2}}{\omega_{1kn} (\omega_{3kn}^2 - \omega_{1kn}^2)};$$

$$\Omega_{2kn}^{\varphi Y} = -\frac{\left(\omega_{2kn}^2 - c_T^2 \lambda_{kn}^2\right) \left(\omega_{2kn}^2 - c_p^2 \left(\lambda_{kn}^2 - \frac{1+\nu}{2} \mu_{kn}^2\right) - c_T^2 \frac{12}{h^2}\right) + 2c_T^4 \lambda_k^{*2} \frac{12}{h^2}}{\omega_{2kn} (\omega_{3kn}^2 - \omega_{2kn}^2)};$$

$$\Omega_{3kn}^{\varphi Y} = -\Delta_{kn} \frac{\left(\omega_{3kn}^2 - c_T^2 \lambda_{kn}^2\right) \left(\omega_{3kn}^2 - c_p^2 \left(\lambda_{kn}^2 - \frac{1+\nu}{2} \mu_{kn}^2\right) - c_T^2 \frac{12}{h^2}\right) + 2c_T^4 \lambda_k^{*2} \frac{12}{h^2}}{\omega_{3kn} (\omega_{1kn}^2 - \omega_{3kn}^2) (\omega_{2kn}^2 - \omega_{3kn}^2)};$$

причем ω_{ikn} – собственные частоты колебаний пластины:

$$\omega_{1kn} = \sqrt{0.5(\lambda_{kn}^2 (c_T^2 + c_p^2) + c_T^2 \frac{12}{h^2} + \Delta_{kn})};$$

$$\omega_{2kn} = \sqrt{0.5(\lambda_{kn}^2 (c_T^2 + c_p^2) + c_T^2 \frac{12}{h^2} - \Delta_{kn})}; \quad \omega_{3kn} = \sqrt{c_p^2 \frac{1-\nu}{2} \lambda_{kn}^2 + c_T^2 \frac{12}{h^2}};$$

$$\omega_{4kn} = \sqrt{\frac{\lambda_{kn}^2 (c_p^2 + c_G^2) + \Delta_{kn}^*}{2}}; \quad \omega_{5kn} = \sqrt{\frac{\lambda_{kn}^2 (c_p^2 + c_G^2) - \Delta_{kn}^*}{2}}.$$

В результате решения соответствующих вековых уравнений, полученных на основе (3.2), можно записать следующие зависимости для собственных частот колебаний пластины средней толщины:

$$\omega_1(\lambda) = \sqrt{0.5 \left(\lambda^2 (c_T^2 + c_p^2) + c_T^2 \frac{12}{h^2} + \sqrt{\left(\lambda^2 (c_T^2 + c_p^2) + c_T^2 \frac{12}{h^2} \right)^2 - 4 \cdot c_T^2 c_p^2 \lambda^4} \right)};$$

$$\omega_2(\lambda) = \sqrt{0.5 \left(\lambda^2 (c_T^2 + c_p^2) + c_T^2 \frac{12}{h^2} - \sqrt{\left(\lambda^2 (c_T^2 + c_p^2) + c_T^2 \frac{12}{h^2} \right)^2 - 4 \cdot c_T^2 c_p^2 \lambda^4} \right)};$$

$$\omega_3(\lambda) = \sqrt{c_p^2 \frac{1-\nu}{2} \lambda^2 + c_T^2 \frac{12}{h^2}};$$

$$\omega_4(\lambda) = \sqrt{\lambda^2 c_p^2}; \quad \omega_5(\lambda) = \sqrt{\lambda^2 c_G^2}.$$

На рис. 3.2 показаны графики зависимости квадрата собственных частот от квадрата волновых чисел для поперечных и продольных колебаний пластинчатых элементов конструкции согласно гипотезам типа Тимошенко (3.1) для системы уравнений (3.2). На этом рисунке кривая 1 соответствует функции $\omega_1(\lambda)$, кривая 2 – $\omega_2(\lambda)$, кривая 3 – $\omega_3(\lambda)$, кривая 4 – $\omega_4(\lambda)$, кривая 5 – $\omega_5(\lambda)$,

На рис. 3.3 показаны отдельно зависимости частоты собственных колебаний $\omega_1(\lambda)$, $\omega_2(\lambda)$, $\omega_3(\lambda)$ для поперечных сдвиговых и изгибных волн, причём на указанных графиках для примера показаны точки (черные кружочки), соответствующие дискретным собственным частотам $\omega_{1,7,9}(\lambda_{7,9})$, $\omega_{2,7,9}(\lambda_{7,9})$, $\omega_{3,7,9}(\lambda_{7,9})$.

На рис. 3.4 показаны такие же зависимости для продольных волн $\omega_4(\lambda)$, $\omega_5(\lambda)$ и дискретные собственные частоты $\omega_{4,7,9}(\lambda_{7,9})$, $\omega_{5,7,9}(\lambda_{7,9})$.

Показывать дискретные собственные частоты, используемые в решении системы уравнений (3.2) не имеет смысла, так как даже, если учитывать по 50 членов ряда Фурье в каждом направлении – получается 2500 частот, и эти дискретные точки сливаются и повторяют линии на рис. 3.2.

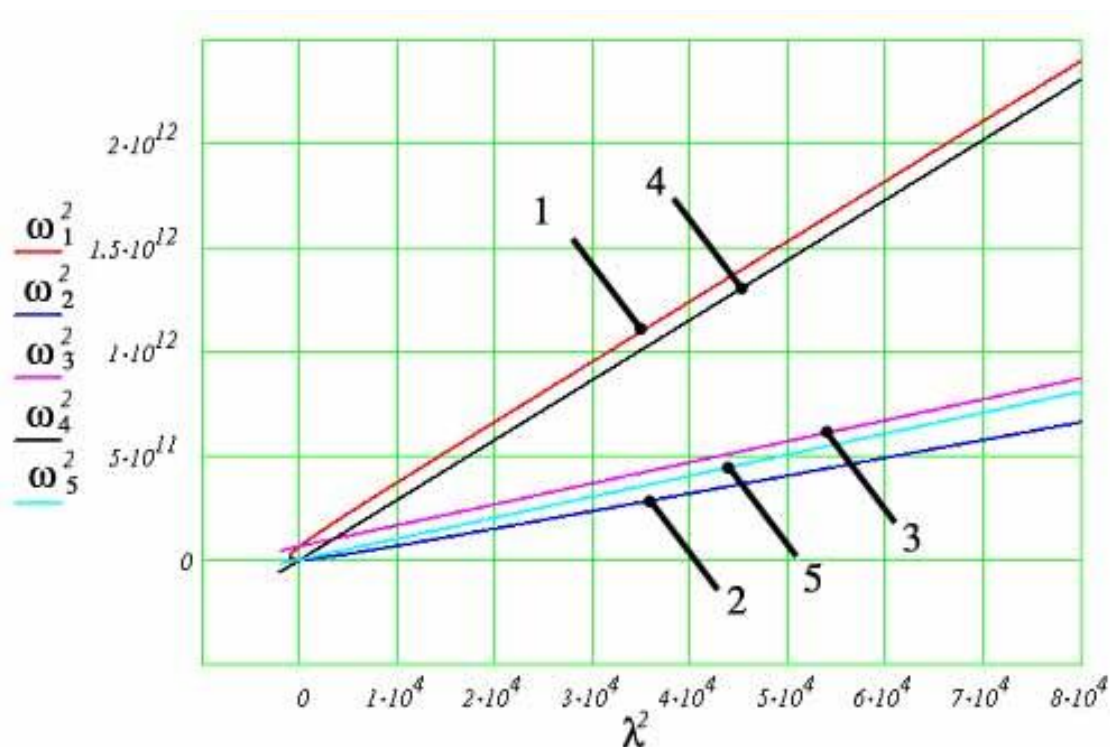


Рис. 3.2. Решение векового уравнения для продольных и поперечных колебаний

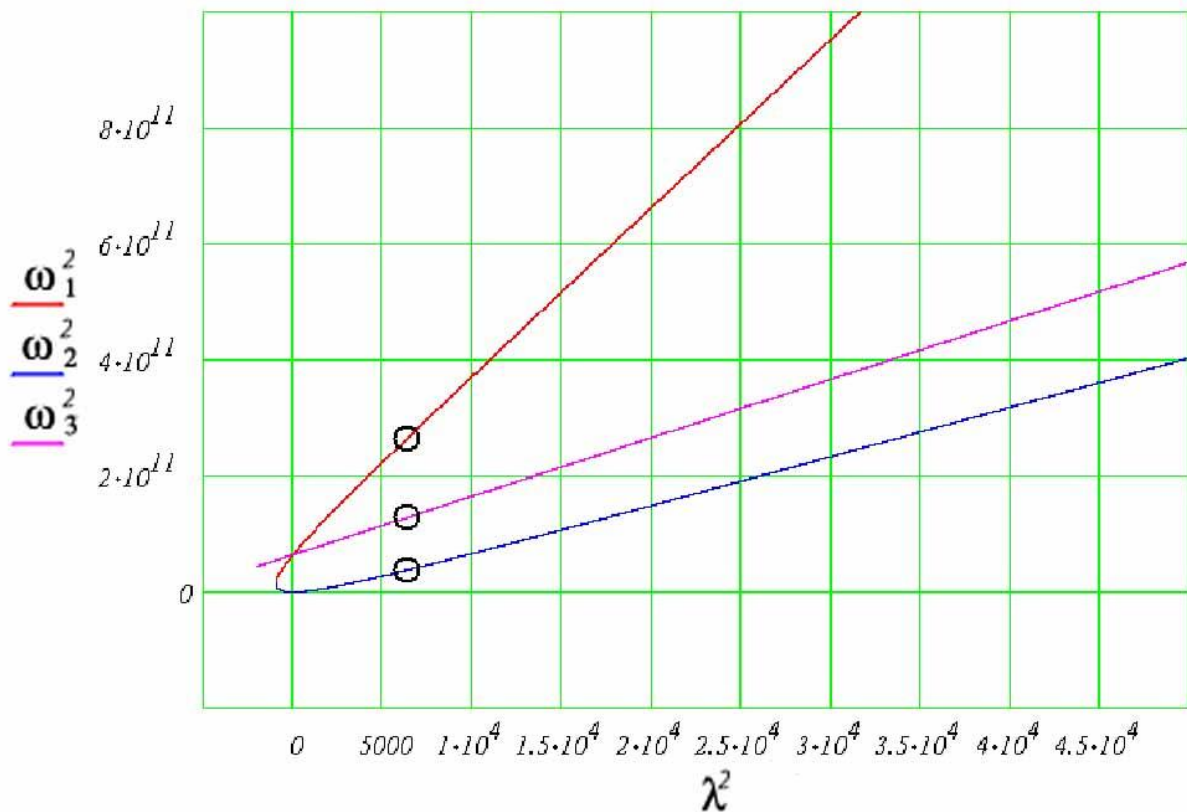


Рис. 3.3. Решение векового уравнения для поперечных колебаний (изгибных и сдвиговых)

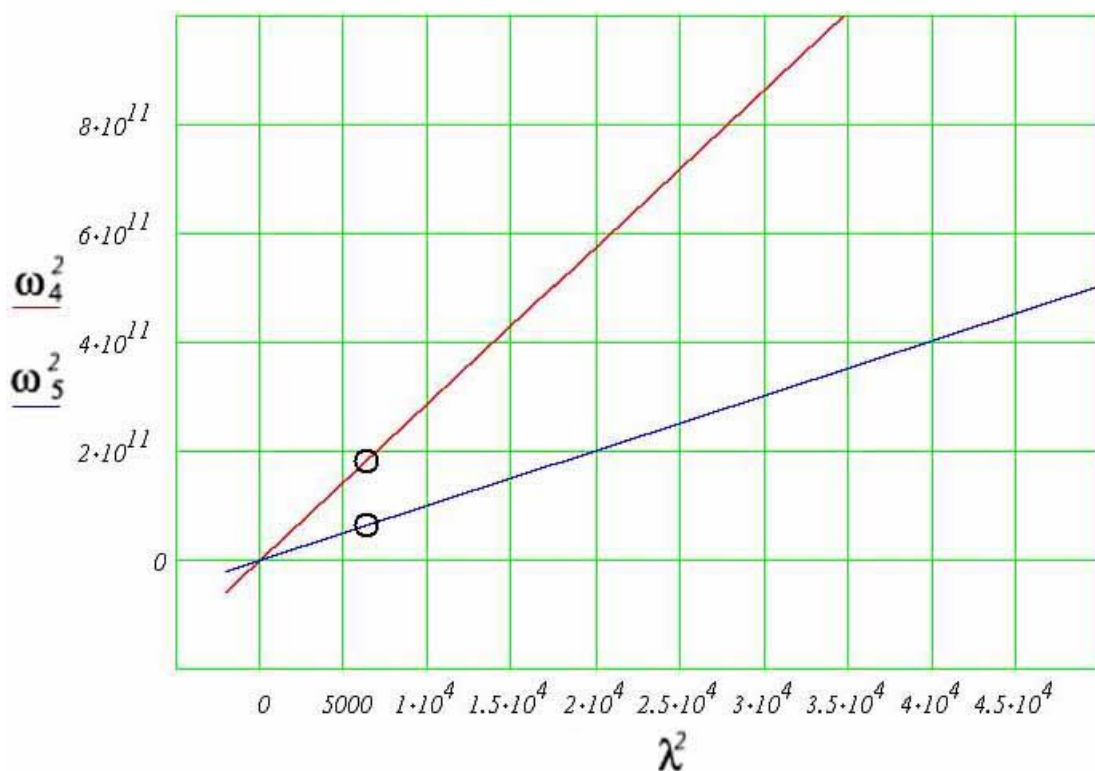


Рис. 3.4. Решение векового уравнения для продольных колебаний

Следует отметить, что в выражениях (3.17)-(3.35) коэффициенты C_{knj}^{Px} , C_{knj}^{Py} , C_{knj}^{Pz} , C_{knj}^{Mx} , C_{knj}^{My} – являются коэффициентами разложения функций внешних нагрузок в ряды Фурье.

В случае сосредоточенного нагружения пластины в точке с координатами (x_{0j}, y_{0j}) эти коэффициенты будут иметь вид:

$$C_{knj}^{Px} = \frac{4}{l \cdot m} \cdot \frac{1}{\rho h} \cdot \cos\left(\frac{k\pi \cdot x_{0j}}{l}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi \cdot y_{0j}}{m}\right); \quad (3.20)$$

$$C_{knj}^{Py} = \frac{4}{l \cdot m} \cdot \frac{1}{\rho h} \cdot \sin\left(\frac{k\pi \cdot x_{0j}}{l}\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi \cdot y_{0j}}{m}\right); \quad (3.21)$$

$$C_{knj}^{Pz} = \frac{4}{l \cdot m} \cdot \frac{1}{\rho h} \cdot \sin\left(\frac{k\pi \cdot x_{0j}}{l}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi \cdot y_{0j}}{m}\right); \quad (3.22)$$

$$C_{knj}^{Mx} = \frac{4}{l \cdot m} \cdot \frac{1}{\rho \cdot I} \cdot \cos\left(\frac{k\pi \cdot x_{0j}}{l}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi \cdot y_{0j}}{m}\right); \quad (3.23)$$

$$C_{knj}^{My} = \frac{4}{l \cdot m} \cdot \frac{1}{\rho \cdot I} \cdot \sin\left(\frac{k\pi \cdot x_{0j}}{l}\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi \cdot y_{0j}}{m}\right). \quad (3.24)$$

Последующие выражения для коэффициентов разложения функций внешних нагрузок в ряды Фурье приведены только для поперечной составляющей нагрузки $P_z(x, y, t)$, как наиболее часто встречающейся в реальных задачах. Выражения для других составляющих несложно получить по аналогии с выражениями (3.20)-(3.24).

Случай, когда нагрузка равномерно распределена по малой прямоугольной области, представлен на рис. 3.5. Здесь $\Delta x, \Delta y$ – размеры области приложения вдоль осей Ox и Oy , соответственно, а точка (x_{0j}, y_{0j}) – центр прямоугольника. Выражение для такой нагрузки будет иметь вид:

$$P_z(x, y, t) = P(t) \left[H(x - (x_{0j} - \Delta x/2)) - H(x - (x_{0j} + \Delta x/2)) \right] \times \\ \times \left[H(y - (y_{0j} - \Delta y/2)) - H(y - (y_{0j} + \Delta y/2)) \right]. \quad (3.25)$$

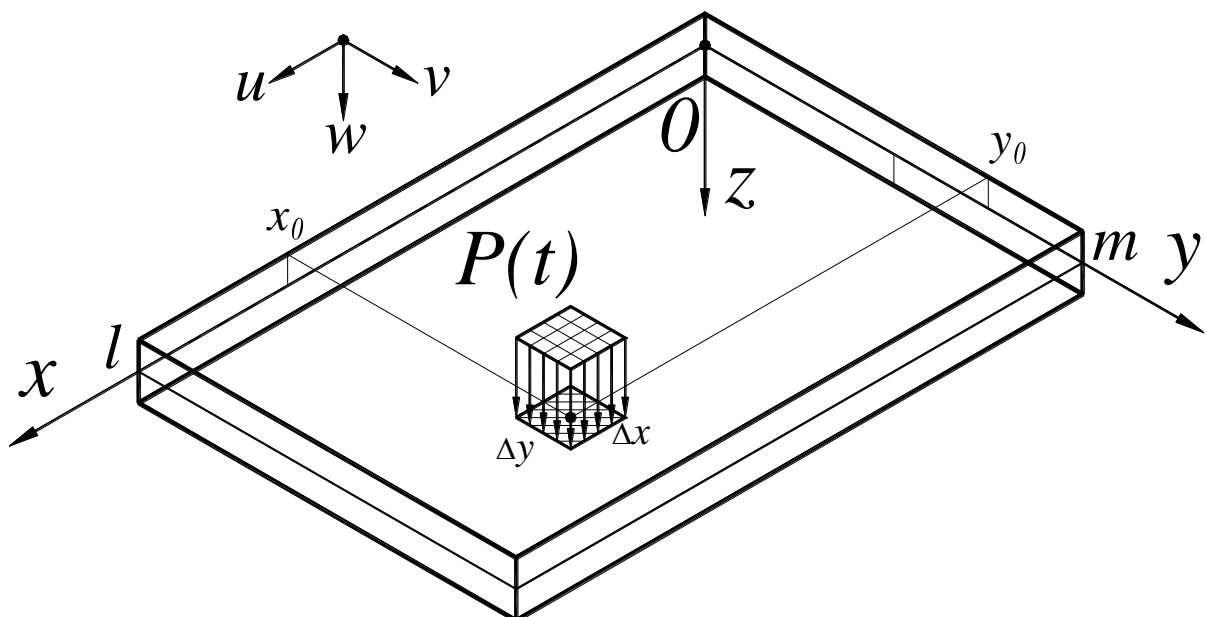


Рис. 3.5. Поперечная нагрузка распределена по малой прямоугольной области

Коэффициенты разложения будут иметь вид:

$$C_{jkn} = \frac{4}{lm} \frac{1}{\rho h} \frac{4}{\lambda_k^* \mu_n^*} \sin \frac{k\pi x_{0j}}{l} \sin \frac{k\pi \Delta x}{2l} \sin \frac{n\pi y_{0j}}{m} \sin \frac{n\pi \Delta y}{2m}. \quad (3.26)$$

Если нагрузка равномерно распределена по кругу (рис. 3.6) радиусом r :

$$P_{zj}(x, y, t) = \begin{cases} P_j(t), & (x - x_{0j})^2 + (y - y_{0j})^2 \leq r^2; \\ 0, & (x - x_{0j})^2 + (y - y_{0j})^2 > r^2, \end{cases} \quad (3.27)$$

где $P_j(t)$ – неизвестная функция изменения во времени j -й нагрузки $P_{zj}(x, y, t)$.

Тогда:

$$C_{jkn} = \frac{4}{l \cdot m} \cdot \frac{1}{\rho h} \cdot \frac{2\pi \cdot r}{\lambda_{kn}} \cdot J_1(\lambda_{kn} r) \sin\left(\frac{k\pi \cdot x_{0j}}{l}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi \cdot y_{0j}}{m}\right), \quad (3.28)$$

причем $J_1(\lambda_{kn} r)$ – функция Бесселя первого рода [8]. Отметим, что способ получения выражений для приведенного коэффициента описан в работе [117].

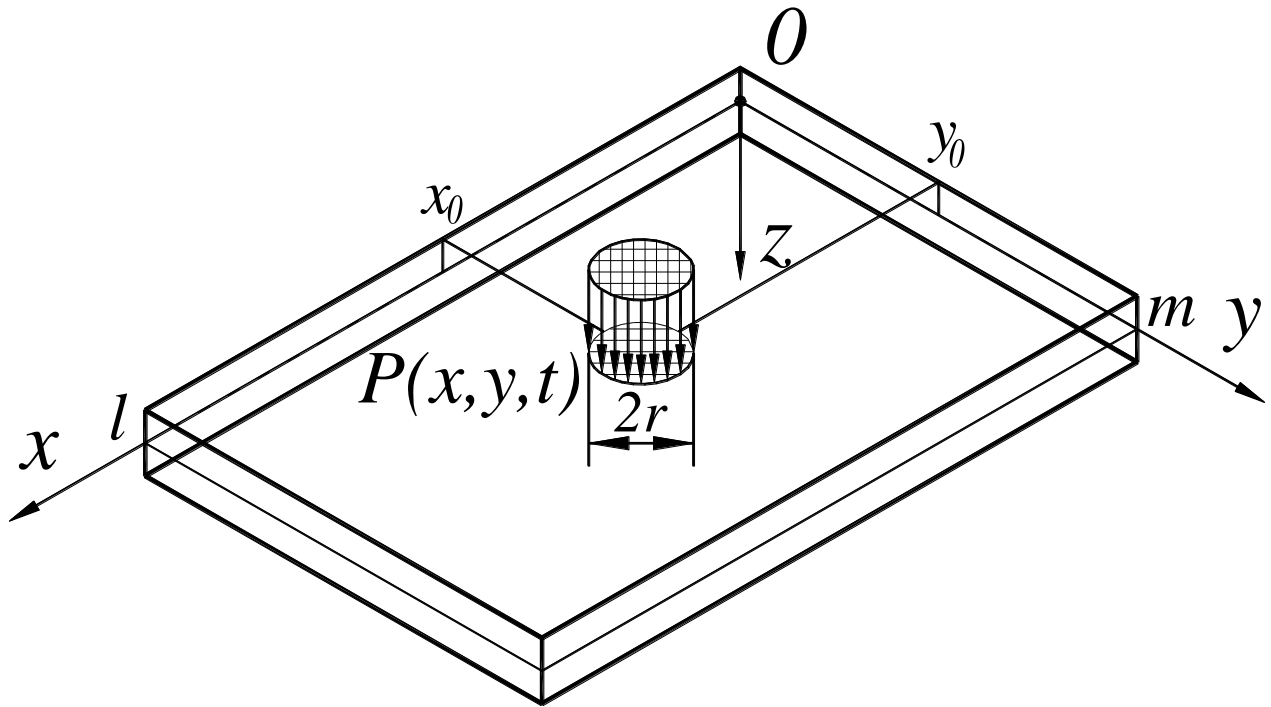


Рис. 3.6. Поперечная равномерно распределенная по малому кругу нагрузка

Если предположить, что в зоне контакта нагрузка распределена не равномерно, а в виде половины эллипсоида вращения, что в некоторых случаях более точно отражает физические аспекты процесса деформирования, то

$$P_{zj}(x, y, t) = \begin{cases} P(t) \sqrt{1 - \frac{(x-x_{0j})^2}{r^2} - \frac{(y-y_{0j})^2}{r^2}}, & (x-x_{0j})^2 + (y-y_{0j})^2 \leq r^2; \\ 0, & (x-x_{0j})^2 + (y-y_{0j})^2 > r^2. \end{cases} \quad (3.29)$$

В этом случае коэффициенты разложения нагрузки в двойные ряды Фурье примут следующий вид:

$$C_{jkn} = \frac{4}{lm} \frac{1}{\rho h} \frac{2\pi}{(\lambda_{kn})^2} \left(\frac{\sin(\lambda_{kn}r)}{\lambda_{kn}r} - \cos(\lambda_{kn}r) \right) \sin\left(\frac{k\pi x_{0j}}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi y_{0j}}{m}\right). \quad (3.30)$$

При воздействии на пластину подвижных нагрузок, движущихся с постоянной скоростью, необходимо в соответствующих формулах для коэффициентов разложения вместо аргументов, связанных с неподвижной точкой (x_{0j}, y_{0j}) , записать новые аргументы вида $(V_{xj} \cdot t, V_{yj} \cdot t)$, где V_{xj}, V_{yj} – составляющие скорости подвижной нагрузки вдоль осей Ox и Oy , соответственно. Например, если точка приложения сосредоточенной поперечной нагрузки движется вдоль оси Ox с постоянной скоростью V_0 (см. рис. 3.7), то коэффициент этой нагрузки, аналогичный (3.22), будет иметь вид:

$$C_{kn}^{Pz} = \frac{4}{l \cdot m} \cdot \frac{1}{\rho h} \cdot \sin\left(\frac{k\pi \cdot V_0 \cdot t}{l}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi \cdot y_0}{m}\right). \quad (3.31)$$

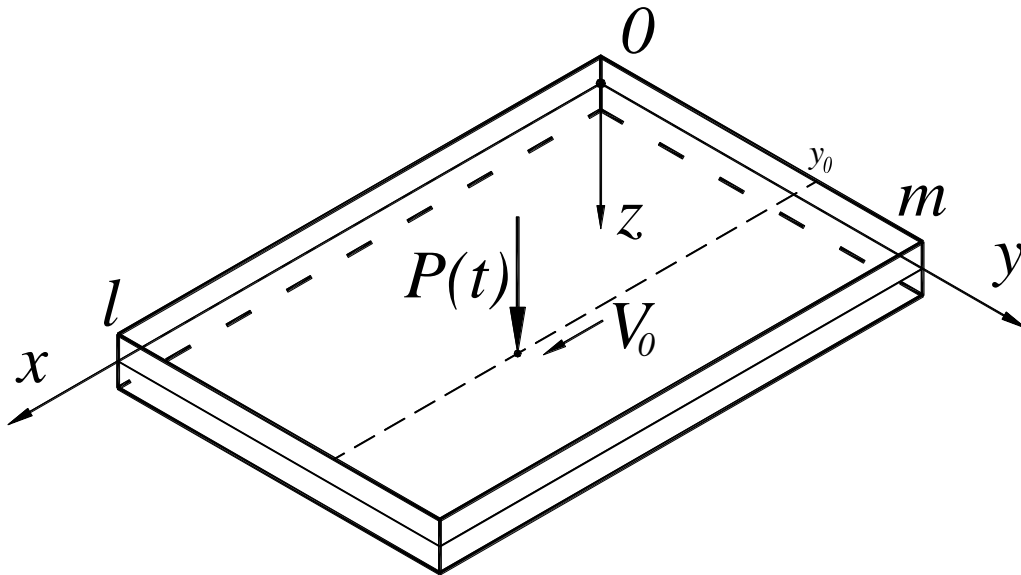


Рис. 3.7. Поперечная подвижная нагрузка

Перемещение произвольной точки пластины с координатами x_s, y_s при произвольном нагружении можно найти из следующих соотношений

$$u_{0S}(t) = u_0(x_s, y_s, t) = \sum_{j=1}^N \left(\int_0^t K_{Pxj}^U(t-\tau) P_{xj}(\tau) d\tau + \int_0^t K_{Pyj}^U(t-\tau) P_{yj}(\tau) d\tau \right); \quad (3.32)$$

$$v_{0S}(t) = v_0(x_s, y_s, t) = \sum_{j=1}^N \left(\int_0^t K_{Pxj}^V(t-\tau) P_{xj}(\tau) d\tau + \int_0^t K_{Pyj}^V(t-\tau) P_{yj}(\tau) d\tau \right); \quad (3.33)$$

$$w_S(t) = w(x_s, y_s, t) = \sum_{j=1}^N \left(\int_0^t K_{Pzj}^W(t-\tau) P_{zj}(\tau) d\tau \right) + \sum_{j=1}^N \left(\int_0^t K_{Mxj}^W(t-\tau) M_{xj}(\tau) d\tau + \int_0^t K_{Myj}^W(t-\tau) M_{yj}(\tau) d\tau \right); \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{xS}(t) = \Psi_x(x_s, y_s, t) = & \sum_{j=1}^N \left(\int_0^t K_{Pzj}^{\Psi X}(t-\tau) P_{zj}(\tau) d\tau \right) + \\ & + \sum_{j=1}^N \left(\int_0^t K_{Mxj}^{\Psi X}(t-\tau) M_{xj}(\tau) d\tau + \int_0^t K_{Myj}^{\Psi X}(t-\tau) M_{yj}(\tau) d\tau \right); \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{yS}(t) = \Psi_y(x_s, y_s, t) = & \sum_{j=1}^N \left(\int_0^t K_{Pzj}^{\Psi Y}(t-\tau) P_{zj}(\tau) d\tau \right) + \\ & + \sum_{j=1}^N \left(\int_0^t K_{Mxj}^{\Psi Y}(t-\tau) M_{xj}(\tau) d\tau + \int_0^t K_{Myj}^{\Psi Y}(t-\tau) M_{yj}(\tau) d\tau \right), \end{aligned} \quad (3.36)$$

где

$$\begin{aligned} K_{Pzj}^U(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{knj}^{Px}}{\Delta_{kn}^*} \cos \frac{k\pi x_s}{l} \sin \frac{n\pi y_s}{m} \sum_{i=4}^5 \Omega_{ikn}^U \sin \omega_{ikn} t, \\ K_{Pyj}^U(t) &= (c_p^2 v + c^2) \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{knj}^{Py} \lambda_k^* \mu_n^*}{\Delta_{kn}^*} \cos \frac{k\pi x_s}{l} \sin \frac{n\pi y_s}{m} \left(\frac{\sin \omega_{4kn} t}{\omega_{4kn}} - \frac{\sin \omega_{5kn} t}{\omega_{5kn}} \right), \\ K_{Pxj}^V(t) &= (c_p^2 v + c^2) \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{knj}^{Px} \lambda_k^* \mu_n^*}{\Delta_{kn}^*} \sin \frac{k\pi x_s}{l} \cos \frac{n\pi y_s}{m} \left(\frac{\sin \omega_{4kn} t}{\omega_{4kn}} - \frac{\sin \omega_{5kn} t}{\omega_{5kn}} \right), \\ K_{Pyj}^V(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{knj}^{Py}}{\Delta_{kn}^*} \sin \frac{k\pi x_s}{l} \cos \frac{n\pi y_s}{m} \sum_{i=4}^5 \Omega_{ikn}^V \sin \omega_{ikn} t, \\ K_{Pzj}^W(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{knj}^{Pz}}{\Delta_{kn}^*} \sin \frac{k\pi x_s}{l} \sin \frac{n\pi y_s}{m} \sum_{i=1}^2 \Omega_{ikn}^W \sin \omega_{ikn} t, \\ K_{Mxj}^W(t) &= -c_T^2 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{knj}^{Mx}}{\Delta_{kn}^*} \sin \frac{k\pi \cdot x_s}{l} \sin \frac{n\pi \cdot y_s}{m} \left(\frac{\sin \omega_{1kn} t}{\omega_{1kn}} - \frac{\sin \omega_{2kn} t}{\omega_{2kn}} \right), \\ K_{Myj}^W(t) &= -c_T^2 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{knj}^{My}}{\Delta_{kn}^*} \sin \frac{k\pi \cdot x_s}{l} \sin \frac{n\pi \cdot y_s}{m} \left(\frac{\sin \omega_{1kn} t}{\omega_{1kn}} - \frac{\sin \omega_{2kn} t}{\omega_{2kn}} \right), \\ K_{Pzj}^{\Psi X}(t) &= c_T^2 \frac{12}{h^2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{knj}^{Pz} \lambda_k^*}{\Delta_{kn}^*} \cos \frac{k\pi \cdot x_s}{l} \sin \frac{n\pi \cdot y_s}{m} \left(\frac{\sin \omega_{1kn} t}{\omega_{1kn}} - \frac{\sin \omega_{2kn} t}{\omega_{2kn}} \right), \\ K_{Mxj}^{\Psi X}(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{knj}^{Mx}}{2\Delta_{kn} \lambda_k^*} \cos \frac{k\pi \cdot x_s}{l} \sin \frac{n\pi \cdot y_s}{m} \sum_{i=1}^3 (\Omega_{ikn}^{\Psi} + \Omega_{ikn}^{\Phi X}) \sin \omega_{ikn} t, \\ K_{Myj}^{\Psi X}(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{knj}^{My}}{2\Delta_{kn} \lambda_k^*} \cos \frac{k\pi \cdot x_s}{l} \sin \frac{n\pi \cdot y_s}{m} \sum_{i=1}^3 (\Omega_{ikn}^{\Psi} + \Omega_{ikn}^{\Phi Y}) \sin \omega_{ikn} t, \\ K_{Pzj}^{\Psi Y}(t) &= c_T^2 \frac{12}{h^2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{knj}^{Pz} \mu_n^*}{\Delta_{kn}^*} \sin \frac{k\pi \cdot x_s}{l} \cos \frac{n\pi \cdot y_s}{m} \left(\frac{\sin \omega_{1kn} t}{\omega_{1kn}} - \frac{\sin \omega_{2kn} t}{\omega_{2kn}} \right), \end{aligned}$$

$$K_{Mxj}^{\Psi Y}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{knj}^{Mx}}{2\Delta_{kn}\mu_n^*} \sin \frac{k\pi \cdot x_s}{l} \cos \frac{n\pi \cdot y_s}{m} \sum_{i=1}^3 (\Omega_{ikn}^{\Psi} - \Omega_{ikn}^{\Phi X}) \sin \omega_{ikn} t,$$

$$K_{Myj}^{\Psi Y}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{knj}^{My}}{2\Delta_{kn}\mu_n^*} \sin \frac{k\pi \cdot x_s}{l} \cos \frac{n\pi \cdot y_s}{m} \sum_{i=1}^3 (\Omega_{ikn}^{\Psi} - \Omega_{ikn}^{\Phi Y}) \sin \omega_{ikn} t.$$

Отметим, что при решении реальных задач, в которых необходимо исследовать перемещения в нескольких точках при воздействии сложной системы внешних нагрузок, выражения (3.32)-(3.36) в компактной форме могут быть записаны в виде:

$$u_i^v(t) = \sum_{j=1}^N \int_0^t K_{ij}^v(t-\tau) P_j(\tau) d\tau, \quad (3.37)$$

где индекс j соответствует номеру внешней нестационарной (сосредоточенной или распределенной по малой области) нагрузки с координатами (x_{0j}, y_{0j}) , причем в случае сложного нагружения – компоненты этого нагружения удобнее считать и обозначать как независимые нагрузки; индекс i отвечает точке, в которой исследуются компоненты перемещения (u, v, w) , а индекс $v = I, II, III$ – непосредственно самому компоненту перемещения, т.е.:

$$\begin{aligned} u_i^I(t) &= u_0(x_i, y_i, t) + z_i \cdot \Psi_x(x_i, y_i, t); \\ u_i^{II}(t) &= v_0(x_i, y_i, t) + z_i \cdot \Psi_y(x_i, y_i, t); \\ u_i^{III}(t) &= w_0(x_i, y_i, t). \end{aligned} \quad (3.38)$$

Укажем, что на основе зависимостей (3.32) - (3.36) несложно получить выражения для напряжений и деформаций в произвольной точке пластины, например, выражения для деформаций будут иметь вид аналогичный (3.37) и отличаться от предыдущих выражений значениями ядра:

$$\varepsilon_{v_i}(t) = \sum_{j=1}^N \int_0^t K_{ij}^v(t-\tau) P_j(\tau) d\tau, \quad (3.39)$$

Здесь обозначения аналогичны описанным ранее в (3.37), за исключением индексов $v = x, y$ – которые удобнее обозначить в виде букв, совпадающих с направлениями осей, вдоль которых определяется деформация ($\varepsilon_x(t)$ и $\varepsilon_y(t)$; напомним, что согласно принятым гипотезам $\varepsilon_z(t) = 0$).

Для получения «деформационных» ядер необходимо ядра для определения функций компонент перемещения $u_0(x_i, y_i, t)$, $v_0(x_i, y_i, t)$ и углов поворота $\Psi_x(x_i, y_i, t)$, $\Psi_y(x_i, y_i, t)$ рассмотреть не как функцию переменной t в точке (x_i, y_i, t) , а как функцию нескольких переменных (x, y, t) и взять частную производную по соответствующей пространственной координате (x или y) [106]:

$$\varepsilon_x(x, y, t) = \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial x}; \quad \varepsilon_y(x, y, t) = \frac{\partial v(x, y, t)}{\partial y}. \quad (3.40)$$

Следовательно для деформационных ядер можно записать:

$$K_j^{\varepsilon x}(x, y, t) = \frac{\partial K_j^U(x, y, t)}{\partial x} + z \frac{\partial K_j^{\psi X}(x, y, t)}{\partial x} = K_j^{dU}(x, y, t) + z \cdot K_j^{d\psi X}(x, y, t);$$

$$K_j^{\varepsilon y}(x, y, t) = \frac{\partial K_j^V(x, y, t)}{\partial y} + z \frac{\partial K_j^{\psi Y}(x, y, t)}{\partial y} = K_j^{dV}(x, y, t) + z \cdot K_j^{d\psi Y}(x, y, t),$$

где

$$K_{P_{xj}}^{dU}(t) = - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{knj}^{Px} \lambda_k^*}{\Delta_{kn}^*} \sin \frac{k\pi x_s}{l} \sin \frac{n\pi y_s}{m} \sum_{i=4}^5 \Omega_{ikn}^U \sin \omega_{ikn} t,$$

$$K_{P_{yj}}^{dU}(t) = - (c_p^2 \nu + c^2) \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{knj}^{Py} \lambda_k^* \mu_n^*}{\Delta_{kn}^*} \sin \frac{k\pi x_s}{l} \sin \frac{n\pi y_s}{m} \left(\frac{\sin \omega_{4kn} t}{\omega_{4kn}} - \frac{\sin \omega_{5kn} t}{\omega_{5kn}} \right),$$

$$K_{P_{zj}}^{d\psi X}(t) = -c_T^2 \frac{12}{h^2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{knj}^{Pz} \lambda_k^* \mu_n^*}{\Delta_{kn}^*} \sin \frac{k\pi \cdot x_s}{l} \sin \frac{n\pi \cdot y_s}{m} \left(\frac{\sin \omega_{1kn} t}{\omega_{1kn}} - \frac{\sin \omega_{2kn} t}{\omega_{2kn}} \right),$$

$$K_{M_{xj}}^{d\psi X}(t) = - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{knj}^{Mx}}{2\Delta_{kn}^*} \sin \frac{k\pi \cdot x_s}{l} \sin \frac{n\pi \cdot y_s}{m} \sum_{i=1}^3 (\Omega_{ikn}^{\psi} + \Omega_{ikn}^{\phi X}) \sin \omega_{ikn} t,$$

$$K_{M_{yj}}^{d\psi X}(t) = - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{knj}^{My}}{2\Delta_{kn}^*} \sin \frac{k\pi \cdot x_s}{l} \sin \frac{n\pi \cdot y_s}{m} \sum_{i=1}^3 (\Omega_{ikn}^{\psi} + \Omega_{ikn}^{\phi Y}) \sin \omega_{ikn} t,$$

$$K_{P_x}^{dV}(t) = - (c_p^2 \nu + c^2) \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{kn}^{Px} \lambda_k^* \mu_n^*}{\Delta_{kn}^*} \sin \frac{k\pi x_s}{l} \sin \frac{n\pi y_s}{m} \left(\frac{\sin \omega_{4kn} t}{\omega_{4kn}} - \frac{\sin \omega_{5kn} t}{\omega_{5kn}} \right),$$

$$K_{P_{yj}}^{dV}(t) = - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{knj}^{Py} \lambda_k^*}{\Delta_{kn}^*} \sin \frac{k\pi x_s}{l} \sin \frac{n\pi y_s}{m} \sum_{i=4}^5 \Omega_{ikn}^V \sin \omega_{ikn} t,$$

$$K_{P_{zj}}^{d\psi Y}(t) = -c_T^2 \frac{12}{h^2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{knj}^{Pz} \mu_n^*}{\Delta_{kn}^*} \sin \frac{k\pi \cdot x_s}{l} \sin \frac{n\pi \cdot y_s}{m} \left(\frac{\sin \omega_{1kn} t}{\omega_{1kn}} - \frac{\sin \omega_{2kn} t}{\omega_{2kn}} \right),$$

$$K_{M_{xj}}^{d\psi Y}(t) = - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{knj}^{Mx}}{2\Delta_{kn}^*} \sin \frac{k\pi \cdot x_s}{l} \sin \frac{n\pi \cdot y_s}{m} \sum_{i=1}^3 (\Omega_{ikn}^{\psi} - \Omega_{ikn}^{\phi X}) \sin \omega_{ikn} t,$$

$$K_{M_{yj}}^{d\psi Y}(t) = - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{knj}^{My}}{2\Delta_{kn}^*} \sin \frac{k\pi \cdot x_s}{l} \sin \frac{n\pi \cdot y_s}{m} \sum_{i=1}^3 (\Omega_{ikn}^{\psi} - \Omega_{ikn}^{\phi Y}) \sin \omega_{ikn} t.$$

В выражениях (3.39) ядра для определения, например, деформации в точке $(x_1, y_1) - \varepsilon_{x_1}(t)$ при воздействии только поперечной нагрузки $P_{z1}(t)$ и момента $M_{x2}(t)$ будут иметь следующий вид:

$$K_{11}^x(t) = K_{P_{zj}}^{d\psi X}(t);$$

$$K_{12}^x(t) = K_{M_{xj}}^{d\psi X}(t),$$

а сама деформация $\varepsilon_{x_1}(t)$ описывается формулой:

$$\varepsilon_{x_1}(t) = \int_0^t K_{11}^x(t-\tau)P_{z1}(\tau)d\tau + \int_0^t K_{12}^x(t-\tau)M_{x2}(\tau)d\tau, \quad (3.41)$$

Таким образом, получение зависимостей вида (3.37), (3.39), по сути, завершает построение решения прямой задачи о сложном нестационарном деформировании прямоугольной пластины.

В операторной форме выражения (3.37), (3.39) можно записать в виде:

$$u_i = \sum_{j=1}^N A_{ij}[p_j], \quad (3.42)$$

где u_i – соответствует искомой функции компоненты перемещения или деформации от времени; A_{ij} – интегральный оператор Дюамеля для соответствующих конечно-разностных ядер Коши $K_{ij}(t)$ или оператор свёртки; p_j соответствует изменению во времени j -й силы $P_j(t)$.

Однако при практических исследованиях нестационарного деформирования пластинчатых элементов конструкции требуются конкретные числовые значения, а не формулы, и удобнее вместо выражений вида (3.42) записывать их дискретные аналоги:

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{A}_{ij}\mathbf{P}_j, \quad (3.43)$$

где вектор \mathbf{u}_i соответствует функции u_i ; матрица \mathbf{A}_{ij} – интегральному оператору свёртки A_{ij} , элементы которой a_{ij} соответствуют разностным ядрам $K(t_i - t_j)$; а вектор \mathbf{P}_j – функциям нагрузки $P_j(t)$.

В ряде случаев возникает следующая обратная задача: напряженно-деформированное состояние (НДС) объекта частично известно (известно только в некоторых точках), а необходимо найти внешнее нестационарное нагружение, воздействующее на данный объект. В монографии [72] были изложены методики идентификации "простых" нагружений прямоугольной пластины, когда для идентификации внешней нагрузки достаточно было знать изменение во времени в одной из точек какого-либо параметра НДС. Более сложная проблема возникает при идентификации произвольных сложных нагрузок. Например, когда в определенной точке на пластину воздействует произвольная сосредоточенная нагрузка, содержащая все компоненты нагружения (три силовые и две моментные), тогда необходимо знать изменение во времени пяти параметров НДС (не обязательно в одной точке). В этом случае следует при решении идентификационной задачи анализировать систему из пяти интегральных уравнений Вольтерра I рода, содержащих пять неизвестных функций времени и отражающих зависимости для пяти параметров НДС с известными функциями времени, которые принимаются в качестве исходных данных.

3.2. Идентификация нескольких импульсных нагрузок, воздействующих на пластину

Особый интерес представляют исследования в области обратных некорректных задач по идентификации одновременно действующих нескольких независимых произвольных (продольных и поперечных) нагрузок.

Рассматривается импульсное воздействие на упругую изотропную пластину средней толщины системы нескольких нагрузок. Под импульсным воздействием понимается нестационарное нагружение пластины на протяжении времени соизмеримого с периодом низших собственных частот ее колебаний. Поведение пластины изучается на конечном интервале времени. Пусть законы изменения во времени этих нагрузок неизвестны, однако при этом предполагается, что геометрические области нагружений и их координаты заданы. Также предполагается, что заданные плоские области приложения нагрузок являются односвязными (в общем случае), а в пределах области нагружения нагрузки, воздействующие на пластину, не зависят от пространственных координат.

Комбинация соотношений типа (3.37), (3.39) при заданных функциях в правой части и искомым функциях $P_j(t)$ является системой из N линейных интегральных уравнений Вольтерра I рода, решение которой является целью в задаче идентификации.

В операторной форме система интегральных уравнений вида (3.42) будет иметь следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^N A_{i1}[p_i] = u_1; \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^N A_{ij}[p_i] = u_j; \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^N A_{iN}[p_i] = u_N. \end{array} \right. \quad (3.44)$$

Укажем, что описание системы (3.44) аналогично приведенному выше для операторного выражения (3.42).

Система интегральных уравнений решается при помощи специально разработанного комплекса методов, который базируется на использовании обобщённых алгоритмов для решения блочных матричных уравнений [56] и РА Тихонова.

Последовательность решения, согласно описанному комплексу методов, следующая: для системы интегральных уравнений выполняется дискретизация по времени, в результате чего, указанная система интегральных уравнений вида (3.44) сводится к блочной СЛАУ вида:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \cdots & \mathbf{A}_{1j} & \cdots & \mathbf{A}_{1N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{A}_{i1} & \cdots & \mathbf{A}_{ij} & \cdots & \mathbf{A}_{iN} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{A}_{N1} & \cdots & \mathbf{A}_{Nj} & \cdots & \mathbf{A}_{NN} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{p}_i \\ \vdots \\ \mathbf{p}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_j \\ \vdots \\ \mathbf{u}_N \end{bmatrix}. \quad (3.45)$$

Здесь \mathbf{A}_{ij} – матрица, соответствующая интегральному оператору $A_{ij}[\cdot]$, вектор \mathbf{p}_i соответствует функции p_i , а $\mathbf{u}_j - u_j$.

Блочная СЛАУ типа (3.45) решается с использованием обобщенного алгоритма (Гаусса – ОАГ или Крамера – ОАК), в результате можно получить N уравнений, зависящих только от одной i -ой нагрузки:

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{p}_i = \mathbf{M}_i. \quad (3.46)$$

где \mathbf{M} и \mathbf{M}_i – матрицы, определенные с применением ОАК.

Для каждого уравнения вида (3.46) выполняется процедура регуляризации по А. Н. Тихонову, в результате которой мы приходим к регуляризированной СЛАУ вида:

$$(\mathbf{M}^T \mathbf{M} + \alpha_i \mathbf{C}) \cdot \mathbf{p}_i = \mathbf{M}^T \mathbf{M}_i. \quad (3.47)$$

где $\alpha_i > 0$ – параметр регуляризации, \mathbf{C} – симметричная трехдиагональная матрица, форма которой приведена ранее.

Параметр регуляризации α_i , который входит в (3.47), вычисляется на основе минимизации по α_i , соответствующего каждому \mathbf{p}_i функционала вида:

$$\|\mathbf{M} \cdot \mathbf{p}_i(\alpha_i) - \mathbf{M}_i\|^2. \quad (3.48)$$

3.3. Пример идентификации нескольких поперечных нагрузок, воздействующих на пластину

Предположим, что число воздействующих на пластину независимых нестационарных поперечных нагрузок равно N (для упрощения изображения на рис. 3.8 показано воздействие системы из двух независимых поперечных нагрузок).

Причем считается, что точки приложения этих нагрузок известны, а неизвестны лишь законы изменения этих нагрузок во времени $P_j(t)$. Укажем, что имеются методы для определения не только временной, но и пространственных составляющих внешней нагрузки $P_j(x, y, t)$. Эти методы можно условно разделить на две группы.

К первой группе относятся экспериментальные методы [63, 180, 185], основанные на использовании избыточной измеряемой информации и очень требовательны к точности. Для определения координат точки приложения j -й

сосредоточенной нагрузки на исследуемой пластине необходимо разместить три дополнительных датчика, регистрирующих приход деформационных волн, порожденных нестационарными нагрузками $P_{zj}(x, y, t)$.

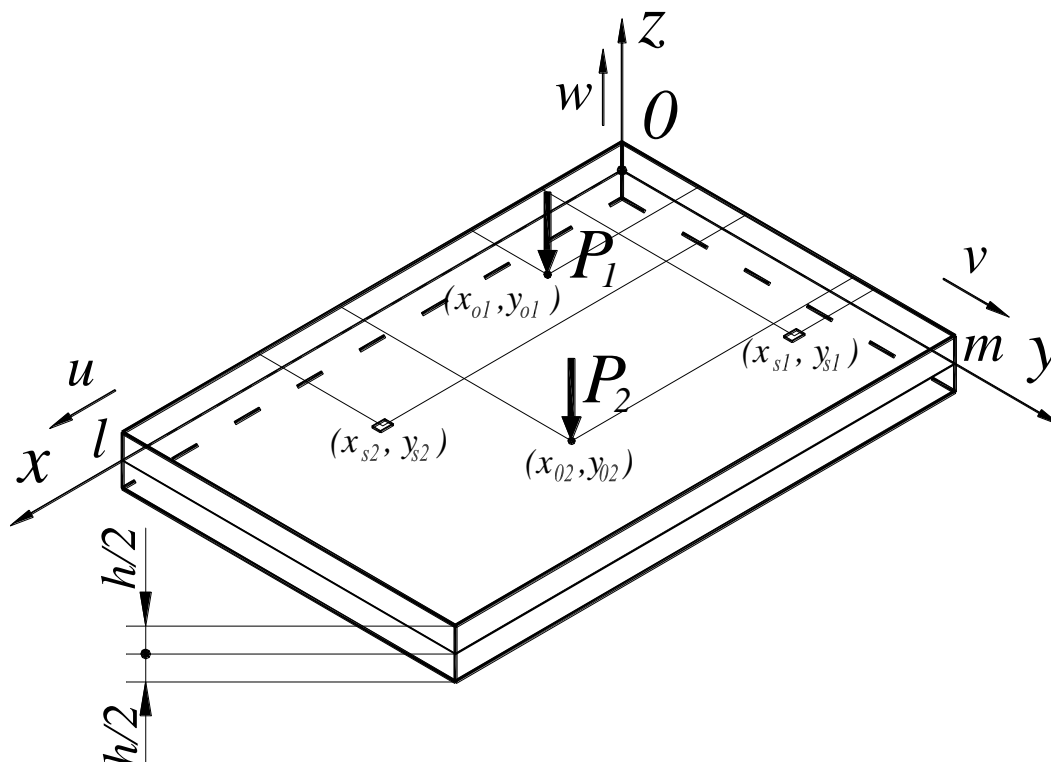


Рис. 3.8. Схема нагружения пластины

Следовательно, для идентификации N нагрузок желательно иметь систему $3 \cdot N$ таких датчиков, которые относительно равномерно должны быть распределены по поверхности пластины. Исходя из геометрической картины распространения деформационных волн в пластине, для каждой j -й нагрузки можно составить систему из 3-х алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} c_p t_{0-1} = \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2}; \\ c_p t_{0-2} = \sqrt{(x_0 - x_2)^2 + (y_0 - y_2)^2}; \\ c_p t_{0-3} = \sqrt{(x_0 - x_3)^2 + (y_0 - y_3)^2}, \end{cases} \quad (3.49)$$

где t_{0-1} – промежуток времени между моментом приложения нагрузки и ее регистрацией первым (ближайшим) датчиком; t_{0-2} , t_{0-3} – промежутки времени ее регистрации вторым и третьим датчиком соответственно; (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) – координаты датчиков, зарегистрировавших возмущение, первым, вторым и третьим соответственно; (x_0, y_0) – координаты источника возмущения; $c_p = \sqrt{\frac{E}{\rho \cdot (1 - \nu^2)}}$ – наибольшая по величине скорость

деформационной волны в пластине. Легко показать, что система уравнений (3.54) эквивалентна следующей

$$\begin{cases} c_p t_2 = \sqrt{(x_0 - x_2)^2 + (y_0 - y_2)^2} - \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2}; \\ c_p t_3 = \sqrt{(x_0 - x_3)^2 + (y_0 - y_3)^2} - \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2}, \end{cases} \quad (3.50)$$

причем $t_{0-2} = t_{0-1} + t_2$, $t_{0-3} = t_{0-1} + t_3$, где t_2 , t_3 – время между регистрацией сигнала первым и вторым датчиком, первым и третьим датчиком соответственно.

Приведенная система (3.50) нелинейная, к тому же для системы из N нагрузок необходимо решить N таких систем. Хотя, поставленная задача и не проста – она может быть решена численными методами, алгоритмы которых реализуемы на ЭВМ, однако более сложная задача будет состоять в том, чтобы достаточно точно измерить набор времен t_{j2} , t_{j3} для всех N нагрузок.

Ко второй группе относятся вычислительные методы, основанные на минимизации соответствующих функционалов невязки $\left\| \mathbf{A}_{ij} \cdot \mathbf{P}_j^{\alpha_j} - \mathbf{w}_{\delta j} \right\|_{l_2}^2$ не только по параметру регуляризации α_j , но и по параметрам, зависящим от координат (x_{0j}, y_{0j}) , которые входят в C_{knj} . Укажем, что такая задача решается исключительно численно и приближенно. Также отметим, что даже для определения точки приложения одной нагрузки время вычислений значительно больше (больше чем в 10 раз), чем просто для идентификации её временной зависимости.

Укажем, что первый способ применим для небольшого числа независимых нагрузок, его также можно использовать в качестве первоначального приближения. Дальнейшее уточнение координат необходимо выполнять на основе минимизации соответствующих невязок.

В заключении скажем, что за исключением некоторых специфических задач, связанных с идентификацией внешних нагружений в реальном времени, идентификация координат (x_{0j}, y_{0j}) точек приложения нагрузок не требуется, так как места нагружений как правило видны визуально и могут быть достаточно точно измерены непосредственно на исследуемом объекте.

В реальных задачах зачастую встречаются поперечные нагрузки (см. рис. 3.8), и система (3.2) может быть переписана в более известном упрощенном виде, состоящем из трех дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка:

$$\left\{ \begin{aligned} G'h(\nabla^2 w_0 + \psi_{xy}) &= \rho h \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} - \sum_{j=1}^N P_{zj}(x, y, t); \\ D\nabla^2 \psi_{xy} - G'h(\psi_{xy} + \nabla^2 w_0) &= \rho \cdot I \frac{\partial^2 \psi_{xy}}{\partial t^2}; \\ \frac{D}{2} [(1-\nu)\nabla^2 \varphi_{xy} + (1+\nu)\nabla_1^2 \psi_{xy}] - G'h(\varphi_{xy} + \nabla_1^2 w_0) &= \rho I \frac{\partial^2 \varphi_{xy}}{\partial t^2}, \end{aligned} \right. \quad (3.51)$$

Укажем, что функции $P_j(x, y, t)$, входящие в правую часть первого уравнения, соответствуют j -й возмущающей нагрузке, каждая из которых имеет различные координаты области ее приложения и законы изменения интенсивности нагрузок во времени $P_j(t)$.

Систему уравнений (3.51) при некоторых ограничениях в ряде монографий, например [118], сводят к одному дифференциальному уравнению четвертого порядка относительно прогиба. Однако, при решении задач идентификации реальных нагрузок в качестве исходных данных чаще всего используются деформации, для аналитического определения которых необходимы зависимости углов поворота нормали ψ_x и ψ_y , поэтому здесь приведена развернутая система из трёх уравнений.

Будем предполагать, что условия закрепления пластины соответствуют шарнирному опиранию ее торцов.

При вычислениях в соответствующих двойных рядах удерживалось конечное число первых членов, причем необходимое их число устанавливалось на основании исследования практической сходимости рядов.

Для идентификации системы из N нагрузок, то есть нахождения функций $P_j(t)$, необходимо задать изменение во времени каких-либо параметров напряженно-деформированного состояния (НДС) пластины в N различных ее точках. Пусть точки с координатами (x_{Si}, y_{Si}) – места установки датчиков, регистрирующих изменение деформационных параметров пластины (перемещения или деформации).

Предположим, что датчик фиксирует изменения прогиба $w_i^*(t)$ в точке с координатами (x_{Si}, y_{Si}) как функцию времени, тогда для этой точки можно записать следующее выражение

$$\sum_{j=1}^N \int_0^t P_j(\tau) K_j^W(x_{Si}, y_{Si}, t - \tau) d\tau = w_i^*(t). \quad (3.52)$$

Если датчик, регистрирует, например, изменения деформации $\varepsilon_{xi}^*(t)$ в точке с координатами (x_{Si}, y_{Si}) на верхней лицевой поверхности пластины, тогда выражение аналогичное (3.52) будет иметь такой вид:

$$\sum_{j=1}^N \int_0^t P_j(\tau) K_{ij}^{\varepsilon x}(t - \tau) d\tau = \varepsilon_{xi}^*(t), \quad (3.53)$$

где
$$K_{ij}^{\varepsilon x}(t) = \frac{h}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{jkn} b(\lambda_k^*)^2}{\Delta_{kn}} \sin \frac{k\pi x_{Si}}{l} \sin \frac{n\pi y_{Si}}{m} \sum_{p=1}^2 \frac{\sin \omega_{pkn} t}{\omega_{pkn}}.$$

Укажем, что в представленных выражениях (3.52)-(3.53) вид ядра зависит от возмущающей j -й нагрузки и прогибов или деформаций в i -й точке, параметры напряженно-деформированного состояния, которой определяются. В дальнейшем ядра вида $K_j^{\varepsilon x}(t)$ или $K_j^W(t)$ будем обозначать – $K_{ij}(t)$.

Например, в случае нагружения пластины системой из 2-х нестационарных поперечных нагрузок и регистрации в двух ее точках деформаций $\varepsilon_{xi}^*(t)$, можно записать следующую блочную СЛАУ:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix}. \quad (3.54)$$

В результате ее решения по описанной ранее методике можно получить явные выражения (в матричной форме) для искоемых нагрузок:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_1 &= (\mathbf{M}^T \mathbf{M} + \alpha_1 \mathbf{C})^{-1} \mathbf{M}^T (\mathbf{A}_{22} \varepsilon_1 - \mathbf{A}_{21} \varepsilon_2); \\ \mathbf{P}_2 &= (\mathbf{M}^T \mathbf{M} + \alpha_2 \mathbf{C})^{-1} \mathbf{M}^T (\mathbf{A}_{11} \varepsilon_2 - \mathbf{A}_{21} \varepsilon_1), \end{aligned} \quad (3.55)$$

где $\mathbf{M} = \mathbf{A}_{11} \mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21} \mathbf{A}_{12}$.

При проведении расчетов на величины деформаций $\overline{\varepsilon_{xj}(t)}$, которые являются результатами решения прямой задачи при заданных законах изменения во времени внешних нагрузок $P_i(t)$, накладывался “шум” в соответствии с формулой:

$$\varepsilon_{xj}^*(t) = \overline{\varepsilon_{xj}(t)} + \varepsilon_{\max} \cdot \delta \cdot Rnd(t), \quad (3.56)$$

где δ – относительная погрешность; ε_{\max} – максимальная деформация пластины в рассматриваемой точке, $Rnd(t)$ – случайные числа в интервале $[-1;1]$. Укажем, что процедура “зашумления” моделирует погрешности, возникающие при реальных измерениях параметров НДС элементов конструкций (например, тензометрическим методом).

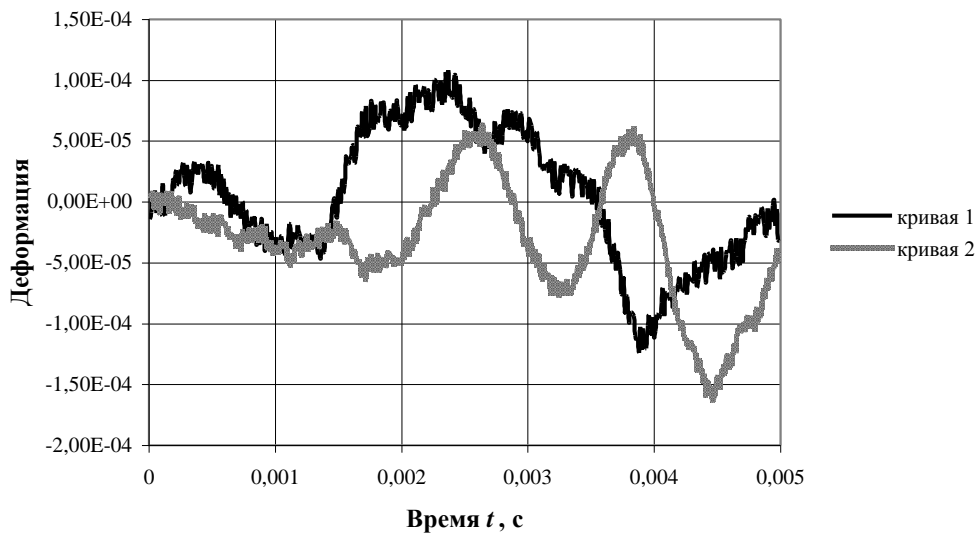
При вычислениях, приведенных на рис. 3.9, были приняты следующие значения параметров: $\rho=7890$ кг/м³; $E=2.07 \cdot 10^{11}$ Па; $\nu=0.3$; $k'=0.85$; $h=0.04$ м; $l=0.6$ м, $m=0.4$ м, $r_1=r_2=r=0.005$ м; $\max P_1(t) = 10^9$ Па, $\max P_2(t) = 8 \cdot 10^8$ Па, $\delta = 0.15$. Координаты точек центров приложения поперечных нагрузок $x_{01} = 0.4$ м, $y_{01} = 0.3$ м; $x_{02} = 0.2$ м, $y_{02} = 0.2$ м. Координаты точек деформации $\varepsilon_x(t)$ в которых считались известными при решении задачи идентификации, (места установки датчиков) $x_{s1} = 0.3$ м, $y_{s1} = 0.1$ м; $x_{s2} = 0.1$ м, $y_{s2} = 0.5$ м.

На рис. 3.9 а показаны изменения во времени функций $\varepsilon_{x1}^*(t)$ и $\varepsilon_{x2}^*(t)$, используемые в качестве исходных данных при решении обратной задачи, кривые 1 и 2 соответственно.

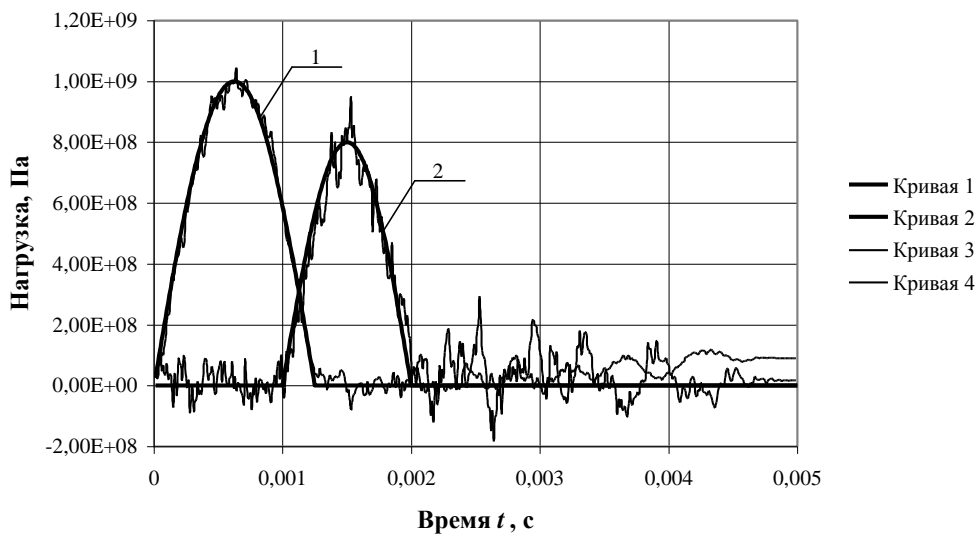
На рис. 3.9 б приведены кривые, изображающие изменение во времени функций $P_1(t)$ и $P_2(t)$, причем кривые 1 и 2 (толстые линии) соответствуют заданным изменениям нагрузок, принятым при решении соответствующей прямой задачи, а кривые 3 и 4 (тонкие линии) – идентифицированным значениям нагрузок, при “зашумлении” исходных данных с уровнем $\delta = 0.15$.

На рис. 3.9 в представлена графическая иллюстрация результатов минимизации соответствующих функционалов при определении параметров

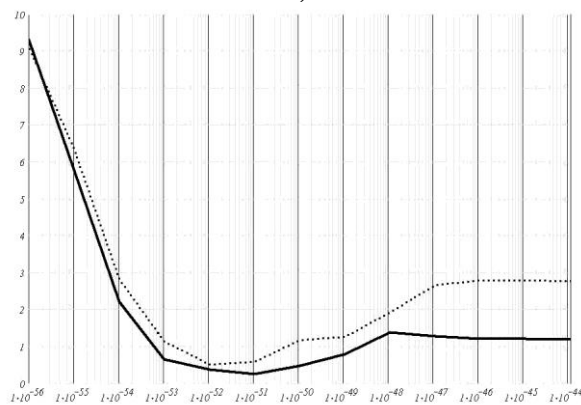
регуляризации α_1 (сплошная кривая) и α_2 (точки). Из представленных результатов видно, что наиболее рациональные значения при решении данной задачи таковы: $\alpha_1 = 10^{-51}$, $\alpha_2 = 10^{-52}$.



а)



б)

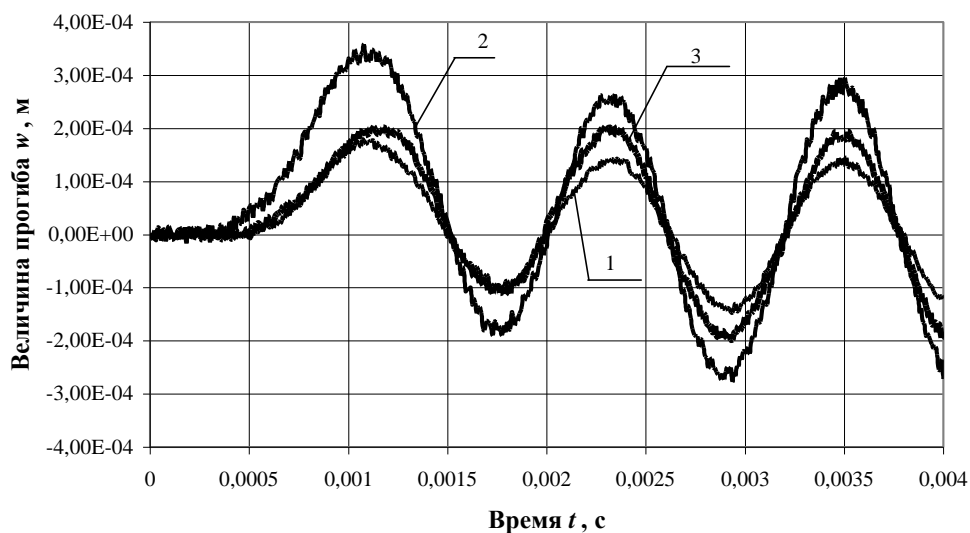


в)

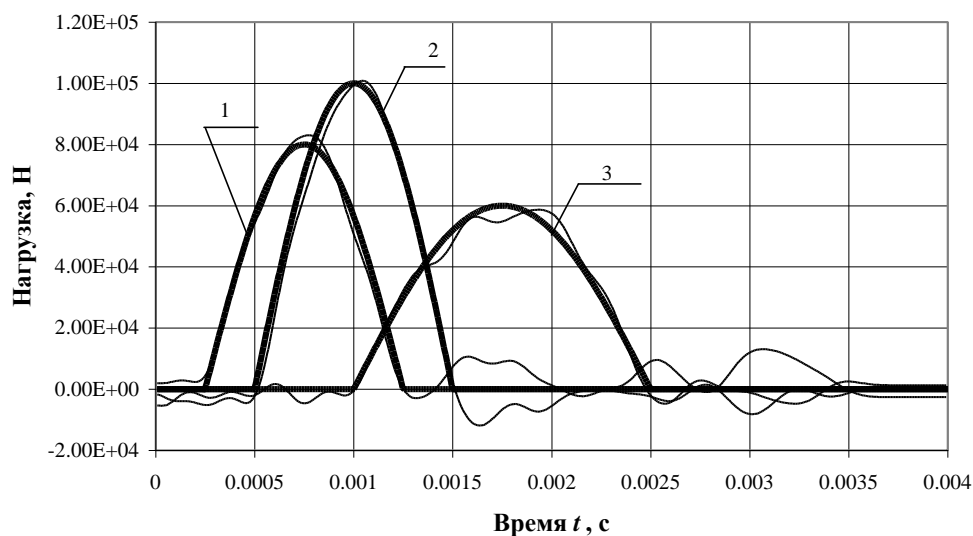
Рис. 3.9. Идентификация системы сил по известным деформациям

Рассматривался также случай нагружения пластины системой из 3-х нестационарных поперечных сосредоточенных нагрузок. В качестве исходных данных для задачи идентификации использовались изменения прогибов $w_j(t)$ в трех ее точках. В данном случае для идентификации системы из трёх независимых нестационарных нагрузок решалась система трёх интегральных уравнений Вольтерра I рода.

При вычислениях, приведенных на рис. 3.10, были приняты следующие значения параметров: $P_1(t) = 8 \cdot 10^4$ Н, $P_2(t) = 10^5$ Н, $P_3(t) = 6 \cdot 10^4$ Н, $\delta = 0.05$. Координаты точек приложения поперечных сил: $x_{01} = 0.3$ м, $y_{01} = 0.25$ м; $x_{02} = 0.25$ м, $y_{02} = 0.2$ м; $x_{03} = 0.35$ м, $y_{03} = 0.15$ м. Координаты точек прогиба $w(t)$ в которых считались известными при решении обратной задачи (места установки датчиков): $x_{s1} = 0.1$ м; $y_{s1} = 0.1$ м; $x_{s2} = 0.3$ м; $y_{s2} = 0.3$ м; $x_{s3} = 0.5$ м; $y_{s3} = 0.2$ м.



а)



б)

Рис. 3.10. Идентификация системы сил по известным прогибам

На рис. 3.10 *а* показаны изменения во времени функций $w_1(t)$, $w_2(t)$ и $w_3(t)$, кривые 1, 2 и 3 соответственно – исходные данные для идентификации.

На рис. 3.10 *б* приведены кривые, изображающие изменение во времени сил $P_1(t)$, $P_2(t)$ и $P_3(t)$, причем кривые 1, 2 и 3 (толстые линии) соответствуют заданным изменениям сил, используемым при решении соответствующей прямой задачи, а тонкие кривые отвечают идентифицированным значениям сил при "зашумлении" исходных данных с уровнем $\delta = 0.05$.

Из приведенных результатов видно, что предложенная методика, позволяет получать достаточно устойчивые решения для систем интегральных уравнений, к которым сводится решение задачи идентификации законов изменения во времени нескольких независимых возмущающих нагрузок, действующих одновременно на прямоугольные пластины средней толщины.

3.4. Учет влияния упругого основания при импульсном деформировании прямоугольных пластин

Рассмотрим деформирование пластинчатых элементов конструкций, лежащих на упругом основании. Известно, что упругое основание практически не препятствует смещению пластины в продольном направлении при нагружении наклонными или касательными к лицевым поверхностям силами. Однако при таком смещении под действием продольных сил естественно будет возникать трение, следовательно, при решении подобных задач нужно учитывать диссипацию энергии. В случае, когда необходимо детально исследовать механику такого деформирования необходимо использовать более сложные многослойные модели, в которых имеется возможность учитывать требуемые условия контакта между слоями. Таким образом, основное влияние упруго основания проявляется при поперечном нагружении пластинчатых элементов конструкций [66]. Здесь используется одна из наиболее полных моделей основания – двустороннее упругое инерционное основание «Власова-Леонтьева», взятая из монографии [11].

Рассмотрим нагружение пластины на упругом основании силами, нормальными к ее срединной плоскости (рис. 3.11) и приложенными в точках (x_{0j}, y_{0j}) .

Для определения компонент перемещения пластины в рамках уточненной теории С. П. Тимошенко представим следующую систему дифференциальных уравнений аналогичную (3.51), которая с учетом соответствующих начальных и граничных условий, а также условий взаимодействия пластины с основанием определяет решение, описывающее нестационарные деформационные процессы в рассматриваемой механической системе:

$$\left\{ \begin{array}{l} G'h(\nabla^2 w_0 + \psi_{xy}) = \rho h \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} - \sum_{j=1}^N P_{zj}(x, y, t) + R(x, y, t); \\ D\nabla^2 \psi_{xy} - G'h(\psi_{xy} + \nabla^2 w_0) = \rho \cdot I \frac{\partial^2 \psi_{xy}}{\partial t^2}; \\ \frac{D}{2} [(1-\nu)\nabla^2 \varphi_{xy} + (1+\nu)\nabla_1^2 \psi_{xy}] - G'h(\varphi_{xy} + \nabla_1^2 w_0) = \rho \cdot I \frac{\partial^2 \varphi_{xy}}{\partial t^2}, \end{array} \right. \quad (3.57)$$

где $P_{zj}(x, y, t)$ – j -е нестационарное воздействие; $R(x, y, t)$ – реакция упругого основания [11].

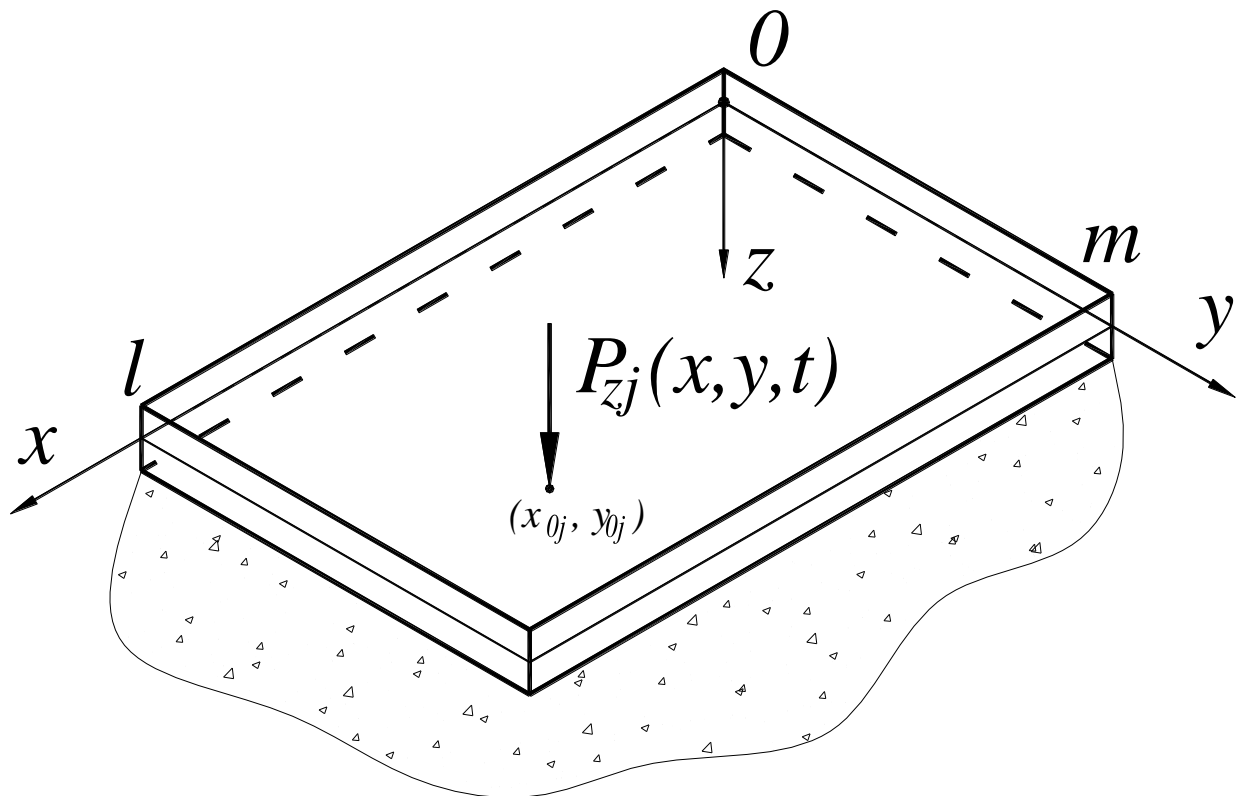


Рис. 3.11. Схема пластины на упругом основании

В предположении, что основание является упругим однослойным двухсторонним инерционным, согласно работе [11] можно записать следующее выражение для функции реакции основания:

$$R(x, y, t) = -2t_f \cdot \nabla^2 w_0(x, y, t) + k_f \cdot w_0(x, y, t) + m_f \frac{\partial^2 w_0(x, y, t)}{\partial t^2}, \quad (3.58)$$

где k_f , t_f , m_f – постоянные упругого основания:

k_f – коэффициент прямой пропорциональности (коэффициент постели), который определяет работу упругого основания на сжатие (осадку);

t_f – коэффициент, позволяющий учитывать касательные напряжения, возникающие в упругом основании;

m_f – удельная масса упругого основания, для учета эффекта инерции.

Эти параметры могут быть найдены, например, из следующих соотношений:

$$\begin{aligned} k_f &= \frac{E_0}{1-\nu_0} \int_0^H \psi'^2(z) dz, \\ t_f &= \frac{E_0}{4(1+\nu_0)} \int_0^H \psi^2(z) dz, \\ m_f &= \rho_0 \int_0^H \psi^2(z) dz, \end{aligned} \quad (3.59)$$

где E_0 – модуль упругости упруго основания, ν_0 – коэффициент Пуассона упругого основания, ρ_0 – плотность материала основания, $\psi(z)$ – функция поперечного распределения перемещений в основании.

В результате учёта касательных напряжений описываемая модель способна «распределять нагрузку» [11], а благодаря инерционной составляющей применима в задачах динамического нагружения.

Решение системы дифференциальных уравнений (3.57) в предположении нулевых начальных условий для шарнирно-опертой пластины на упругом основании имеет вид будет иметь вид аналогичный (3.37) и отличаться от предыдущих выражений ядрами:

$$\begin{aligned} w_0(x, y, t) &= \sum_{j=1}^N \int_0^t K_j^{fW}(x, y, t-\tau) P_j(\tau) d\tau; \\ \psi_x(x, y, t) &= \sum_{j=1}^N \int_0^t K_j^{f\psi_x}(x, y, t-\tau) P_j(\tau) d\tau; \\ \psi_y(x, y, t) &= \sum_{j=1}^N \int_0^t K_j^{f\psi_y}(x, y, t-\tau) P_j(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (3.60)$$

где $K_j^{fW}(x, y, t)$, $K_j^{f\psi_x}(x, y, t)$, $K_j^{f\psi_y}(x, y, t)$ – ядра соответствующих интегралов Дюамеля (сверток) вида:

$$\begin{aligned} K_j^{fW}(x, y, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{jkn}^f}{\Delta_{kn}^f} \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{n\pi y}{m} \left[\Omega_{1kn}^f \omega_{1kn}^f \sin \omega_{1kn}^f t - \Omega_{2kn}^f \omega_{2kn}^f \sin \omega_{2kn}^f t \right]; \\ K_j^{f\psi_x}(x, y, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{jkn}^f b \lambda_k^*}{\Delta_{kn}^f} \cos \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{n\pi y}{m} \left[\frac{\sin \omega_{1kn}^f t}{\omega_{1kn}^f} - \frac{\sin \omega_{2kn}^f t}{\omega_{2kn}^f} \right]; \\ K_j^{f\psi_y}(x, y, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{jkn}^f b \mu_n^*}{\Delta_{kn}^f} \sin \frac{k\pi x}{l} \cos \frac{n\pi y}{m} \left[\frac{\sin \omega_{1kn}^f t}{\omega_{1kn}^f} - \frac{\sin \omega_{2kn}^f t}{\omega_{2kn}^f} \right]. \end{aligned}$$

В представленных соотношениях: вместо скорости сдвиговых волн в рамках теории типа Тимошенко $c_T^2 = \frac{G'}{\rho}$ появляется скорость $c_f = \frac{G'h}{\rho h + m_f}$,

учитывающая влияние основания на скорость таких волн (замедление, зависящее от удельной массы основания); $a_2 = \frac{2t_f}{\rho h + m_f}$; $a_3 = \frac{k_f}{\rho h + m_f}$;

$$\Omega_{1kn}^f = \omega_{1kn}^f - \frac{d \cdot \lambda_{kn}^2 + b}{\omega_{1kn}^f}; \quad \Omega_{2kn}^f = \omega_{2kn}^f - \frac{d \cdot \lambda_{kn}^2 + b}{\omega_{2kn}^f};$$

$$\Delta_{kn}^f = \sqrt{(\lambda_{kn}^2(c_f + a_2 + d) + a_3 + b)^2 - 4[\lambda_{kn}^2(\lambda_{kn}^2 d(c_f + a_2) + a_3 d + a_2 b) + a_3 b]};$$

$$\omega_{1kn}^f = \sqrt{0.5[(\lambda_{kn}^2(c_f + a_2 + d) + a_3 + b) + \Delta_{kn}^f]};$$

$$\omega_{2kn}^f = \sqrt{0.5[(\lambda_{kn}^2(c_f + a_2 + d) + a_3 + b) - \Delta_{kn}^f]};$$

Причем ω_{1kn}^f , ω_{2kn}^f – собственные частоты колебаний, учитывающие влияние упругого основания.

Следует отметить, что в ядрах выражений (3.60) коэффициенты C_{jkn}^f – являются коэффициентами разложения внешней нагрузки в ряды Фурье, аналогичны коэффициентам (3.20)-(3.24), только с учётом параметров основания.

В случае сосредоточенного нагружения пластины (рис. 3.11) в точке с координатами (x_{0j}, y_{0j}) :

$$P_{zj}(x, y, t) = \delta(x - x_{0j})\delta(y - y_{0j})P_j(t),$$

где $P_j(t)$ – функция изменения интенсивности j -й силы во времени.

Эти коэффициенты будут иметь вид:

$$C_{jkn}^f = \frac{4}{l \cdot m} \cdot \frac{1}{\rho \cdot h + m_0} \cdot \sin\left(\frac{k\pi \cdot x_{0j}}{l}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi \cdot y_{0j}}{m}\right). \quad (3.61)$$

В случае нагружения пластины «подвижными» силами (рис. 3.12) в коэффициентах C_{kn}^f можно заменить соответствующую переменную по координате (x или y) на $V \cdot t$, где V – скорость движения нагрузки (постоянная).

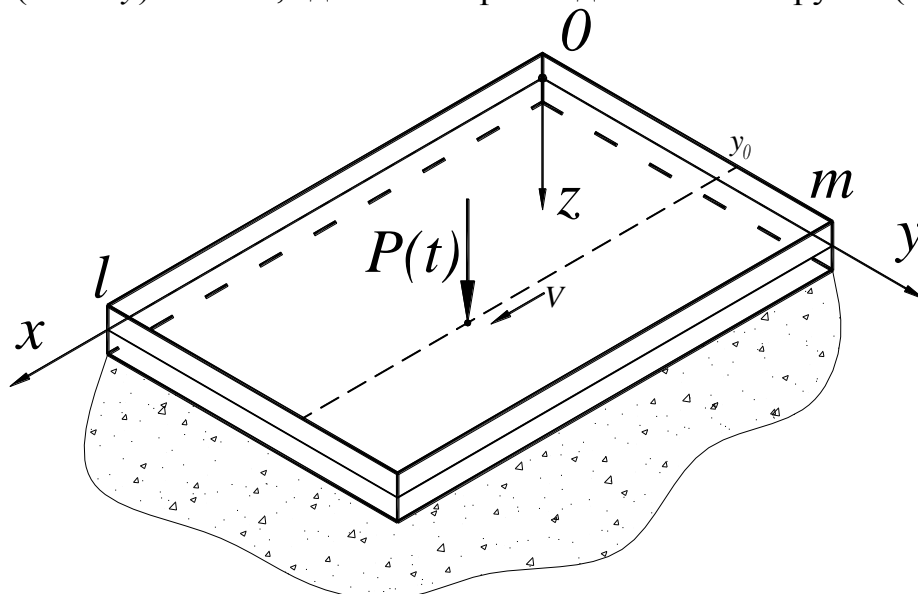


Рис. 3.12. Подвижное сосредоточенное нагружение пластины на основании

В случае нагружения пластины на основании при исследованиях прямоугольным штампом (рис. 3.13), рассмотрим воздействие распределенной по прямоугольнику нагрузки ($\Delta x_j, \Delta y_j$ – размеры области приложения вдоль осей Ox и Oy соответственно, а точка (x_{0j}, y_{0j}) – центр прямоугольника) коэффициенты будут иметь вид аналогичный (3.26):

$$C_{jkn}^f = \frac{4}{lm} \frac{1}{\rho h + m_0} \frac{4}{\lambda_k^* \mu_n^*} \sin \frac{k\pi x_{0j}}{l} \sin \frac{k\pi \Delta x_j}{2l} \sin \frac{n\pi y_{0j}}{m} \sin \frac{n\pi \Delta y_j}{2m}. \quad (3.62)$$

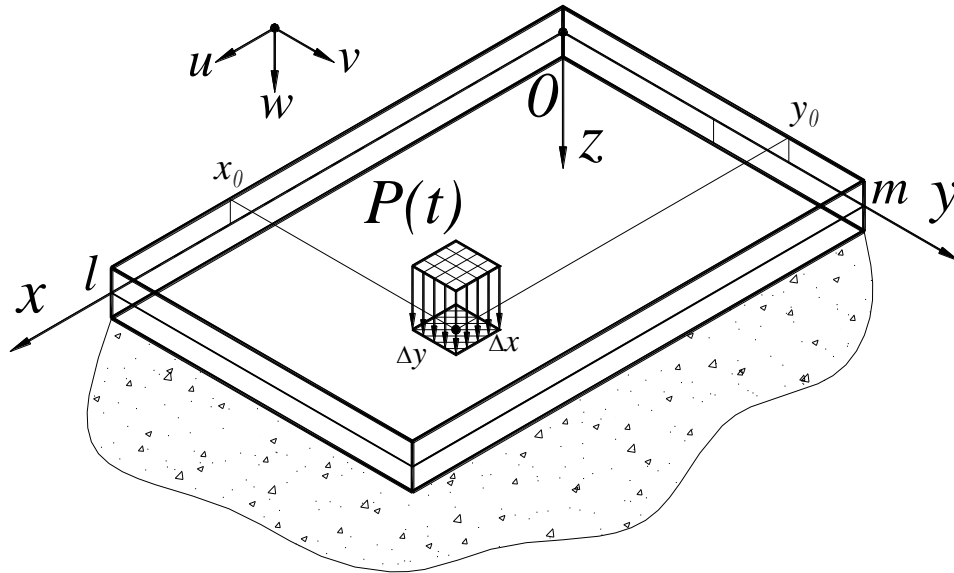


Рис. 3.13. Схема пластины на упругом основании с распределенной нагрузкой

В случае, когда нагрузка, приложенная к пластине на основании, равномерно распределена по кругу радиуса r (круглый штамп или испытания автомобильным колесом) коэффициенты будут иметь подобный (3.28) вид:

$$C_{jkn}^f = \frac{4}{lm} \frac{1}{\rho h + m_0} \frac{2\pi r}{\lambda_{kn}} J_1(\lambda_{kn} r) \sin \left(\frac{k\pi \cdot x_{0j}}{l} \right) \sin \left(\frac{n\pi \cdot y_{0j}}{m} \right). \quad (3.63)$$

Если нагрузка в зоне контакта распределена не равномерно, а в виде половины эллипсоида вращения, коэффициенты разложения нагрузки в двойные ряды Фурье примут по аналогии с (3.30) вид:

$$C_{kn}^f = \frac{4}{lm} \frac{1}{\rho h + m_0} \frac{2\pi}{(\lambda_{kn})^2} \left(\frac{\sin(\lambda_{kn} r)}{\lambda_{kn} r} - \cos(\lambda_{kn} r) \right) \sin \left(\frac{k\pi x_0}{l} \right) \sin \left(\frac{n\pi y_0}{m} \right). \quad (3.64)$$

При моделировании различных контактных нагружений пластины (например, нагружение дорожной конструкции колесом автомобильной шины) может быть учтено, что пятно контакта имеет круглую или эллиптическую форму, а распределение давления может быть равномерным или в виде половины эллипсоида (рис. 3.14).

Например, при нагружении дорожной конструкции подвижным колесом выражение для коэффициента C_{kn}^f (3.63) можно записать в виде:

$$C_{kn}^f = \frac{4}{lm} \frac{1}{\rho h + m_0} \frac{2\pi r}{\lambda_{kn}} J_1(\lambda_{kn} r) \sin\left(\frac{k\pi V_0 t}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi y_0}{m}\right). \quad (3.65)$$

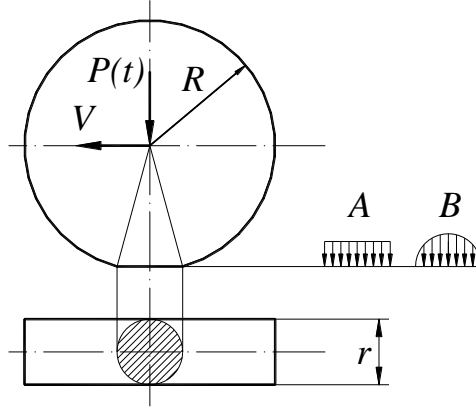


Рис. 3.14. Моделирование контактных нагружений

Соотношения (3.60) определяют решение прямой задачи импульсного деформирования прямоугольной пластины на упругом основании.

Укажем, что на основе зависимостей (3.60) несложно получить выражения для деформаций в произвольной точке пластины на основании.

Для деформаций аналитические выражения будут иметь вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_x(x, y, t) &= \sum_{j=1}^N \int_0^t K_j^{f\varepsilon_x}(x, y, t - \tau) P_{zj}(\tau) d\tau; \\ \varepsilon_y(x, y, t) &= \sum_{j=1}^N \int_0^t K_j^{f\varepsilon_y}(x, y, t - \tau) P_z(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (3.66)$$

где $K_j^{f\varepsilon_x}(x, y, t) = -z \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{jkn}^f b \lambda_k^{*2}}{\Delta_{kn}^f} \sin \frac{k\pi x_j}{l} \sin \frac{n\pi y_j}{m} \left[\frac{\sin \omega_{1kn}^f t}{\omega_{1kn}^f} - \frac{\sin \omega_{2kn}^f t}{\omega_{2kn}^f} \right];$

$$K_j^{f\varepsilon_y}(x, y, t) = -z \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{jkn}^f b \mu_n^{*2}}{\Delta_{kn}^f} \sin \frac{k\pi x_j}{l} \sin \frac{n\pi y_j}{m} \left[\frac{\sin \omega_{1kn}^f t}{\omega_{1kn}^f} - \frac{\sin \omega_{2kn}^f t}{\omega_{2kn}^f} \right],$$

z – поперечная координата точки в которой определяется деформация (по высоте).

Предложенная модель пластины на основании позволяет моделировать, например, нестационарные нагружения дорожных конструкций разного типа. Приведем один пример: дорожное покрытие моделируется как изотропная пластина средней толщины типа Тимошенко; дорожное основание – как упругое однослойное инерционное основание типа Власова-Леонтьева. Предполагается, что контакт между основанием и дорожной одеждой является двусторонним.

На рис. 3.15 показаны схема конструкции дорожной одежды [75] (левый рисунок) и схема ее упрощенной модели (правый рисунок), принятая при расчетах.

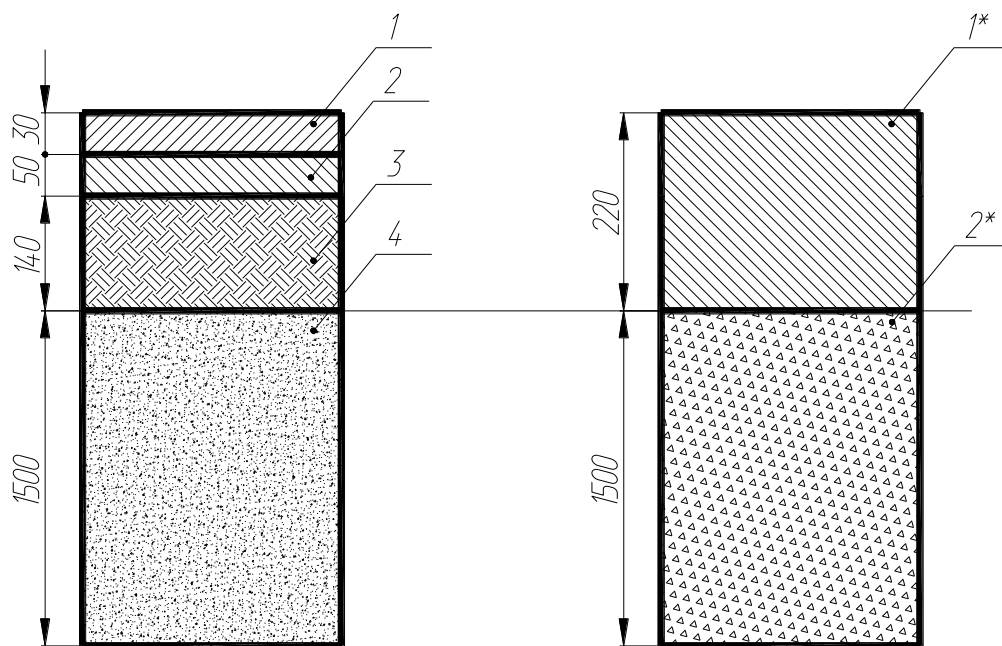


Рис. 3.15. Схема замены дорожной конструкции пластиной на упругом основании

На рис. 3.15 приняты следующие обозначения:

1. среднезернистый асфальтобетон;
2. покрытие из очесов с добавкой цемента;
3. минеральный бетон;
4. основной грунт;
- 1*. пластина средней толщины;
- 2*. упругое инерционное основание типа Власова-Леонтьева.

На рис. 3.16 показаны изменения прогиба элементов дорожного покрытия при действии подвижной нагрузки. Расчет производился для предложенной модели – пластина средней толщины типа Тимошенко, лежащая на упругом инерционном основании типа Власова-Леонтьева. Для сопоставления результатов расчетов с результатами других авторов экспериментальные данные взяты из работы [100] (Малеванский В. В. , Радовский Б. С. и др. Испытание дорожных одежд на стенде Госдорнии с. 53-58) – черная кривая, кривые 1-4 – пример расчета прогибов при различных параметрах дорожной конструкции.

Из графика видно, что расчётные кривые, хотя и близки, но не совпадают. Следует отметить, что экспериментальная кривая не симметрична относительно экстремума, что обусловлено, по-видимому, вязкоупругим характером деформирования, а расчётные кривые симметричны, так как получены для (более простой) упругой модели.

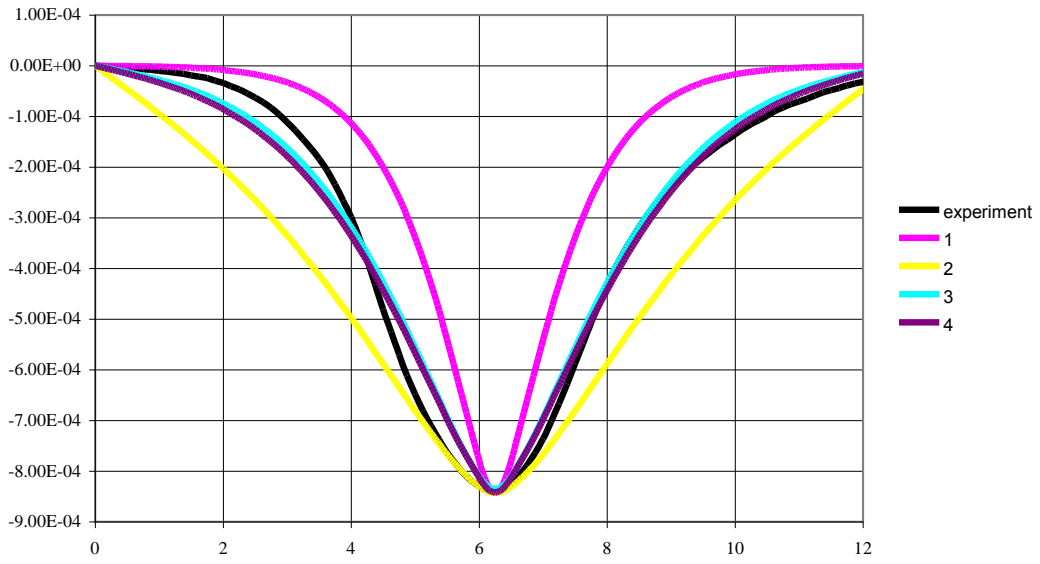


Рис. 3.16. Сопоставление с экспериментом

4. НЕСТАЦИОНАРНОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ПЛАСТИН ПРИ НАЛИЧИИ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ

4.1. Введение

Реальные механические объекты являются, как правило, достаточно сложными. При построении математической модели рассматривают основной механический объект (балка, пластина или оболочка), а остальными, зачастую, пренебрегают. В некоторых случаях их нестационарное деформирование может быть исследовано на основе известных моделей балок или пластин с учётом влияния различных особенностей, а именно: дополнительных опор (упругих или вязкоупругих); рёбер жесткости; малых тел (имеющими некоторую массу при малых геометрических размерах). Следует отметить, что при нестационарных колебаниях в динамических системах значительное влияние могут оказывать жесткости и демпфирующие свойства дополнительных опор и рёбер, а также силы инерции, вызванные малыми телами, у которых могут быть значительные ускорения (особенно при нестационарных колебаниях). Силы инерции можно учитывать с помощью присоединенных масс (сосредоточенных или распределенных).

В области прямых задач имеются научные работы, исследования в которых относятся к такому подходу. Например, в монографии [86] рассматривается воздействие подвижной массы на балки и тонкую прямоугольную пластину, лежащую на упругом основании. Обратные задачи такого направления мало изучены.

Отметим, что к настоящему времени хорошо исследованы колебания многопролетных балок с одной или несколькими дополнительными упругими опорами. Упомянем некоторые работы такого типа, связанные с дополнительными упругими опорами (дополнительными сосредоточенными жесткостями) для упруго деформируемых элементов конструкций в виде балок. Например, в работе [85] рассмотрены многопролетные балки на упругих опорах при подвижной нагрузке, задачи решаются с использованием метода Ньютона и итерационных схем для определения прогиба балки с учетом жесткости дополнительных опор.

В работе [131] представлены решения прямой и обратной задачи для балок с дополнительными опорами, причем влияние опор моделируется при помощи неизвестных сосредоточенных сил.

Работ, рассматривающих элементы конструкций, контактирующие с гасителями колебаний, в рамках механики твердого деформируемого тела сравнительно мало. Упомянем некоторые работы, связанные с пластинчатыми элементами конструкций. В работе [257] рассмотрен активный гаситель колебаний для изгибающейся пластинки, который контактирует с ней по границе, однако сама пластина представлена, по сути, в виде колеблющейся

массы. В работе [243] рассматриваются вынужденные колебания тонкой пластины с «дискретным динамическим гасителем» с использованием метода конечных элементов.

В настоящей работе излагается подход, позволяющий учитывать влияние рёбер и точечных особенностей на нестационарное деформирование элементов конструкции путем введения в исходные модели деформирования балок (пластин) дополнительных нестационарных сил (реакций). Эти неизвестные нестационарные нагрузки могут быть определены из соответствующих интегральных соотношений, путем сведения их к линейным интегральным уравнениям Вольтерра или их системам, что позволяет получать аналитико-численные решения без использования итерационных схем.

При таком подходе в ряде случаев подкрепляющее ребро жесткости на пластине можно рассматривать как присоединённый объект в виде балки и исследовать связанные колебания системы балка-пластина. Дальнейший анализ нестационарного деформирования механической системы балка-пластина может быть произведен с допущением, о том, что балка с пластиной контактируют не по всей поверхности, а в некоторых конкретных точках, то есть, по сути, влияние ребра жесткости заменяется системой из нескольких дополнительных нагрузок. Естественно, что при выполнении конкретных расчетов необходимо искать компромисс между количеством неизвестных сил (точностью модели) и временем, затрачиваемым на расчёты, а также возможностями используемых компьютеров и специального программного обеспечения .

4.2. Постановка задачи и математическая модель

Нестационарное деформирование балок или пластин описывается системами дифференциальных уравнений в частных производных. Опыт показывает, что для указанных объектов хорошие результаты дают модели на базе гипотез С. П. Тимошенко, учитывающие инерцию вращения и сдвиг. Такие системы уравнений могут быть решены при помощи разложения искомых функций (перемещений и углов поворота) в соответствующие ряды (Фурье, Бесселя и т.п.). Тогда для коэффициентов разложения, как функций времени, можно записать систему обыкновенных дифференциальных уравнений, которые могут быть решены с использованием, например, интегрального преобразования Лапласа. В этом случае, при выполнении обратных преобразований, решения могут быть представлены в виде интегралов типа свёртки, что позволяет выделить аналитические выражения для ядер интегральных уравнений.

Таким образом, для искомых функций перемещений и углов поворота нормали, а также деформаций могут быть получены выражения вида:

$$w_j(t) = \sum_{i=1}^N \int_0^t K_{ij}(t - \tau) \cdot P_i(\tau) d\tau; \quad (4.1)$$

где $w_j(t)$ – изменение во времени компоненты перемещения некоторой точки (например, прогиба пластины), $P_i(t)$ – i -я нагрузка ($P_{0i}(t)$ – внешняя сила или $R_i(t)$ реакция на моделируемую особенность, например дополнительную опору), $K_{ij}(t)$ – ядро соответствующего свёрточного интеграла для i -ой нагрузки в j -й точке.

При нестационарном деформировании балок или пластин с особенностями для каждой моделируемой особенности – объекта, контактирующего с балкой или пластиной можно записать выражение вида (4.1). То есть для N -объектов можно записать систему из N интегральных уравнений, которая будет иметь $2 \cdot N$ неизвестных (неизвестны как функции перемещения $w_j(t)$ так и $R_i(t)$ – реакции). Для решения такой системы интегральных уравнений необходимо записать дополнительные (замыкающие) соотношения для каждой из точек, в которой имеется особенность.

Рассмотрим возможные случаи:

а) сосредоточенная в некоторой точке пластины дополнительная сосредоточенная (локализованная) масса (рис. 4.1)

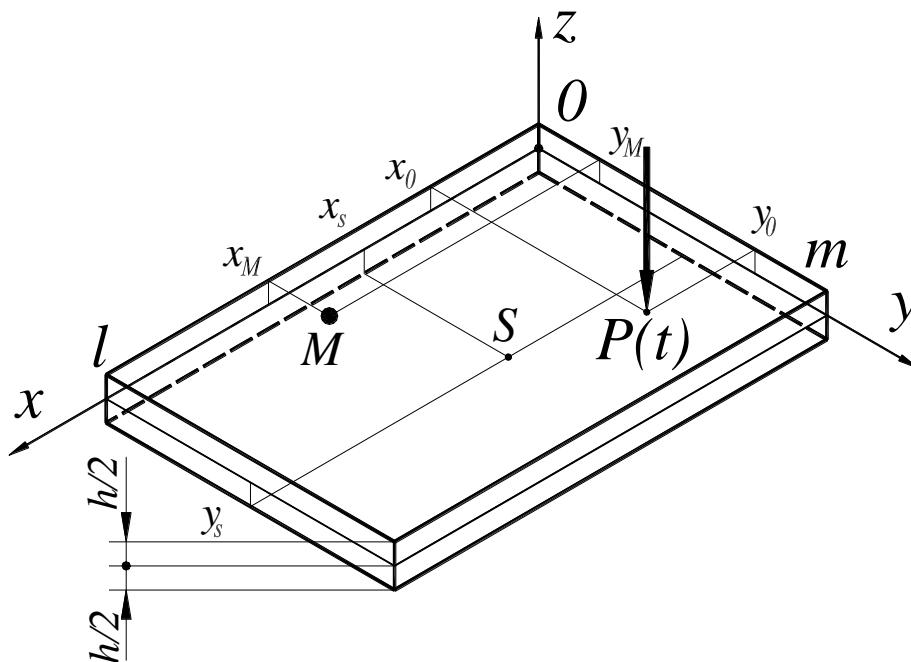


Рис. 4.1. Сосредоточенная (локализованная) масса
Для учета сосредоточенной массы ее реакция будет иметь вид

$$R_i(t) = m_i \frac{d^2 w_i(t)}{dt^2}, \quad (4.2)$$

где m_i – сосредоточенная масса в i -й точке.

Выражение для прогиба в точке приложения этой силы можно записать в форме

$$w_i(t) = \frac{1}{m_i} \int_0^t R_i(\tau)(t - \tau)d\tau; \quad (4.3)$$

б) Присоединённая в некоторой точке пластины дополнительная линейно упругая опора (рис. 4.2)

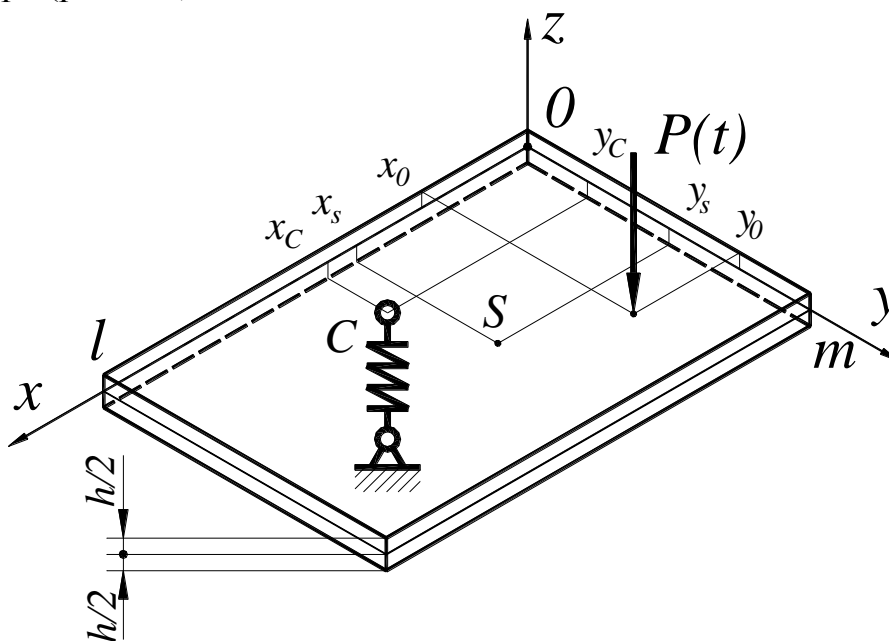


Рис. 4.2. Дополнительная линейно упругая опора

Для учета дополнительной упругой опоры ее реакция будет иметь вид

$$R_i(t) = c_i w_i(t), \quad (4.4)$$

где c_i – коэффициент жёсткости дополнительной опоры в i -й точке;

тогда выражение для прогиба в точке приложения этой реакции можно записать как

$$w_i(t) = \frac{1}{c_i} R_i(t), \quad (4.5)$$

в) Присоединённый в некоторой точке пластины гаситель колебаний (демпфер, амортизатор) (рис. 4.3)

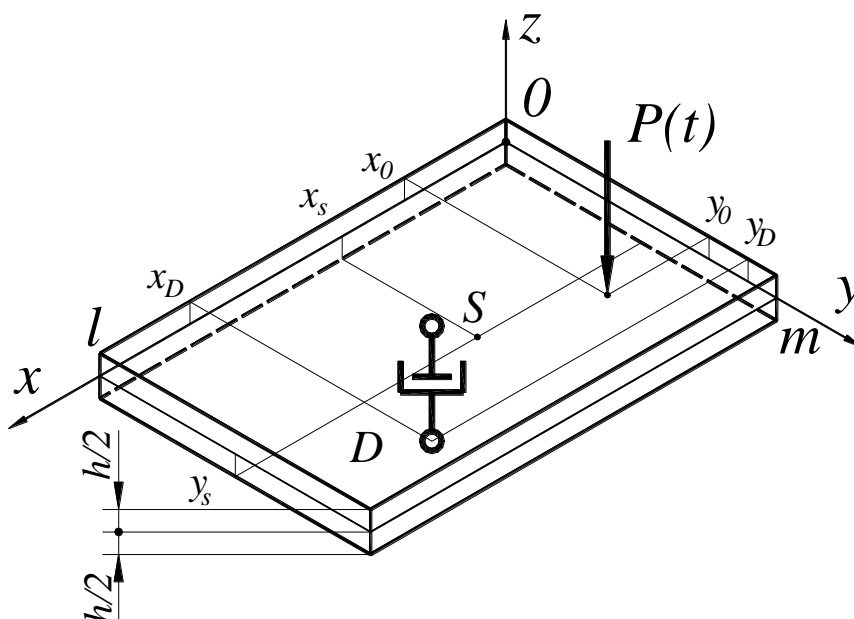


Рис. 4.3. Дополнительная демпфирующая опора (амортизатор)

Для учета влияния дополнительной демпфирующей опоры ее реакция будет иметь вид

$$R_i(t) = \kappa_i \frac{dw_i(t)}{dt}, \quad (4.6)$$

где κ_i – коэффициент демпфирования в i -й точке;

тогда выражение для прогиба в точке присоединения амортизатора

$$w_i(t) = \frac{1}{\kappa_i} \int_0^t R_i(\tau) d\tau, \quad (4.7)$$

г) Большинство реальных опор на самом деле вязкоупругие, т.е. обладают как вязкими, так и упругими характеристиками (рис. 4.4)

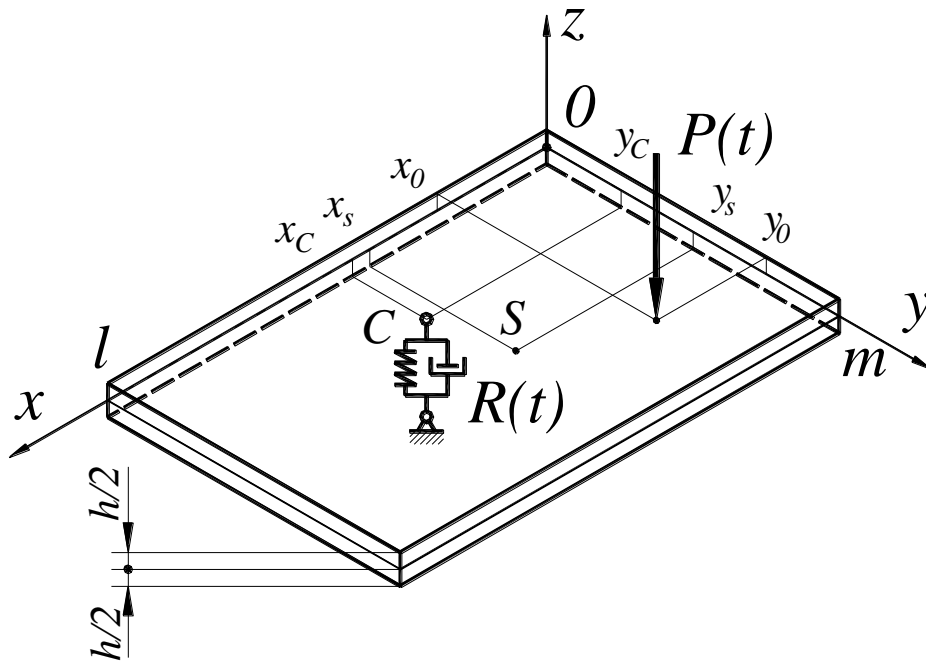


Рис. 4.4. Дополнительная вязкоупругая опора

Для учета реакция между пластиной и дополнительной вязкоупругой опорой корректнее использовать выражения вида

$$R_i(t) = c_i w_i(t) + \kappa_i \frac{dw_i(t)}{dt}, \quad (4.8)$$

тогда выражение для прогиба в точке приложения реакции на вязкоупругую опору можно записать как

$$w_i(t) = \int_0^t K_{ei}(t - \tau) R(\tau) d\tau, \quad (4.9)$$

где $K_{ei}(t) = \frac{1}{\kappa_i} \cdot e^{-c_i/\kappa_i \cdot t}$ – конечно-разностное ядро Коши, учитывающее вязкие и упругие характеристики дополнительной опоры в i -й точке.

д) Также в самом общем случае можно представить моделируемый объект в виде комбинации наличия влияния массы, жесткости и демпфирования (рис. 4.5).

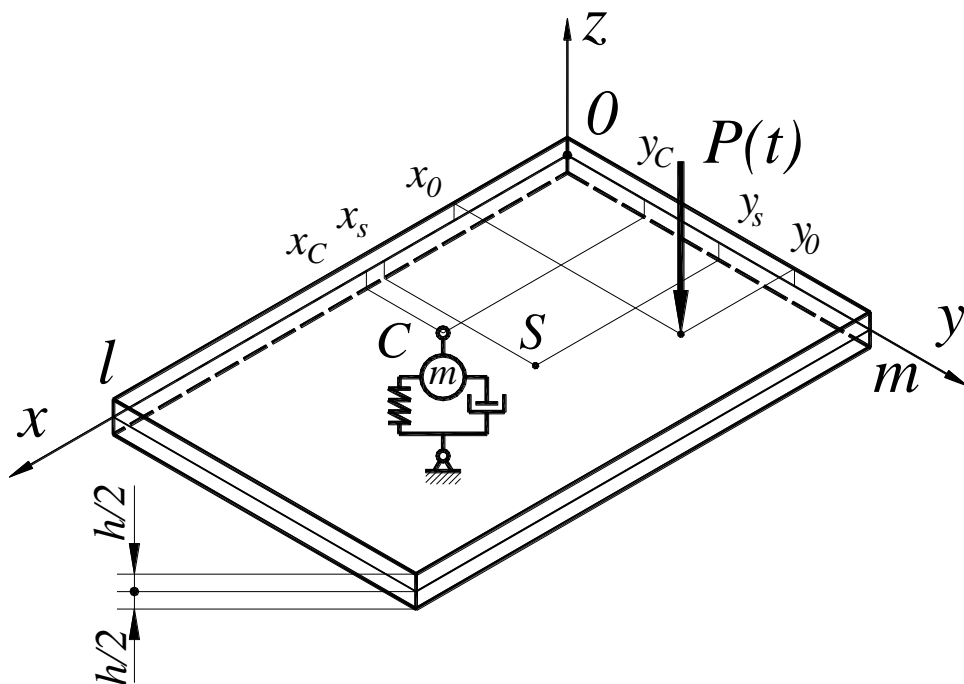


Рис. 4.5. Дополнительная вязкоупругая опора, с учетом ее массово-инерционных характеристик

Выражение для учета реакции между пластиной и дополнительной вязкоупругой опорой с учетом инерционных эффектов:

$$R_i(t) = m_i \frac{d^2 w_i(t)}{dt^2} + \kappa_i \frac{dw_i(t)}{dt} + c_i w_i(t). \quad (4.10)$$

Приведём для рассматриваемого случая (как наиболее общего) подробную методику получения выражения для функции прогибов в соответствующей точке.

Выполним для выражения (4.10) интегральное преобразование Лапласа, при нулевых начальных условиях получим формулу:

$$R_i(s) = m_i \cdot s^2 \cdot w_i(s) + \kappa_i \cdot s \cdot w_i(s) + c_i \cdot w_i(s). \quad (4.11)$$

Из (4.11) получим выражение для изображения прогиба:

$$w_i(s) = \frac{R_i(s)}{m_i \cdot s^2 + \kappa_i \cdot s + c_i}. \quad (4.12)$$

После выполнения обратного преобразования Лапласа с использованием теоремы о свёртке получим следующее выражение для прогиба в точке приложения реакции на вязкоупругую опору с учетом её массы:

$$w_i(t) = \int_0^t K_{fi}(t - \tau) R(\tau) d\tau, \quad (4.13)$$

где $K_{fi}(t) = \frac{1}{\omega_{CDi}} \cdot e^{-\frac{\kappa_i}{2 \cdot m_i} \cdot t} \cdot \sin(\omega_{CDi} \cdot t)$ – конечно-разностное ядро интеграла

типа свёртки, учитывающее вязкие и упругие характеристики дополнительной

опоры в i -й точке, а $\omega_{CD_i} = \sqrt{c_i/m_i - 0.25 \cdot \kappa_i^2/m_i^2}$ – собственная частота, соответствующая i -й дополнительной вязкоупругой опоре с учетом её массы.

е) для учета влияния ребра жесткости в N точках согласно условиям совместности перемещений необходимо записать систему из N интегральных уравнений вида (1), вытекающую из соответствующих выражений для N точек балки и N точек пластины.

4.3. Описание решения задачи в общем виде

Система интегральных соотношений вида (4.1), дополненная выражениями вида (4.2)-(4.10) и (4.13), решается согласно следующему алгоритму:

1) Выражения (4.2), (4.4), (4.6), (4.8) и (4.10) преобразуются к виду

$$w_i(t) = f[R_i(t)], \quad (4.14)$$

(преобразованные выражения обозначены (4.3), (3.20), (4.7), (4.9) и (4.13) соответственно).

2) Выполняется исключение неизвестных функций перемещений $w_i(t)$, путем приравнивания соответствующих выражений вида (4.1) и (4.14), например, для одной вязкоупругой опоры (4.1) и (4.9), а именно:

$$\int_0^t K_P^W(t-\tau)P_0(\tau)d\tau - \int_0^t K_R^W(t-\tau)R(\tau)d\tau = \int_0^t K_e(t-\tau)R(\tau)d\tau. \quad (4.15)$$

Выражение (4.15) после переноса известных слагаемых в правую часть уравнения, а неизвестных в левую примет вид

$$\int_0^t [K_R^W(t-\tau) + K_e(t-\tau)]R(\tau)d\tau = \int_0^t K_P^W(t-\tau)P_0(\tau)d\tau. \quad (4.16)$$

В итоге исходная система, состоящая из $2 \cdot N$ интегро-дифференциальных соотношений, сводится к системе N интегральных уравнений Вольтерра относительно неизвестных реакций $R_i(t)$.

3) Выполняется дискретизация системы интегральных уравнений (СИУ). После дискретизации каждое интегральное уравнение заменяется системой линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). В результате чего, например, для трёх неизвестных реакций приходим к блочной СЛАУ вида:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{13} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{23} \\ \mathbf{A}_{31} & \mathbf{A}_{32} & \mathbf{A}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{r}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_{P1} \\ \mathbf{w}_{P2} \\ \mathbf{w}_{P3} \end{bmatrix}, \quad (4.17)$$

где матрицы \mathbf{A}_{ij} соответствуют дискретизированным ядрам интегральных уравнений $K_{ij}(t)$ в i -й точке для j -й нагрузки, векторы \mathbf{r}_j – изменению функции j -й нагрузки во времени $R_j(t)$, \mathbf{w}_{Pi} – функции изменения перемещения во

времени в i -й точке, вызванные только внешней силой $P_0(t)$, определяемые как $w_{Pi} = \int_0^t K_{Pi}(t-\tau)P_0(\tau)d\tau$. Укажем, что в интегральных уравнениях присутствуют только конечно-разностные ядра Коши, поэтому все матрицы A_{ij} будут являться перестановочными и квазидиагональными.

4) Блочная СЛАУ вида (4.17) решается при помощи обобщенного алгоритма Крамера или Гаусса с использованием регуляризирующего алгоритма А. Н. Тихонова.

В результате решения блочной СЛАУ определяются неизвестные зависимости во времени реакций $R_j(t)$, каждая из которых описывает влияние присоединённого в соответствующей точке объекта на нестационарные колебания (деформирование) основного рассматриваемого объекта (балки или пластины). Зная внешнее нагружение и зависимости $R_j(t)$, можно определить все компоненты перемещения в любой требуемой точке исследуемого объекта на базе зависимостей вида (4.1).

4.4. Нестационарные колебания пластины с присоединенной сосредоточенной массой

Постановка задачи: механическая система состоит из прямоугольной упругой изотропной пластины средней толщины, шарнирно опертой по ее периметру, и сосредоточенной массы M , лежащей на ее верхней лицевой поверхности (рис. 4.6). На пластину воздействует поперечная сосредоточенная импульсная нагрузка, вызывающая нестационарные колебания пластины и массы.

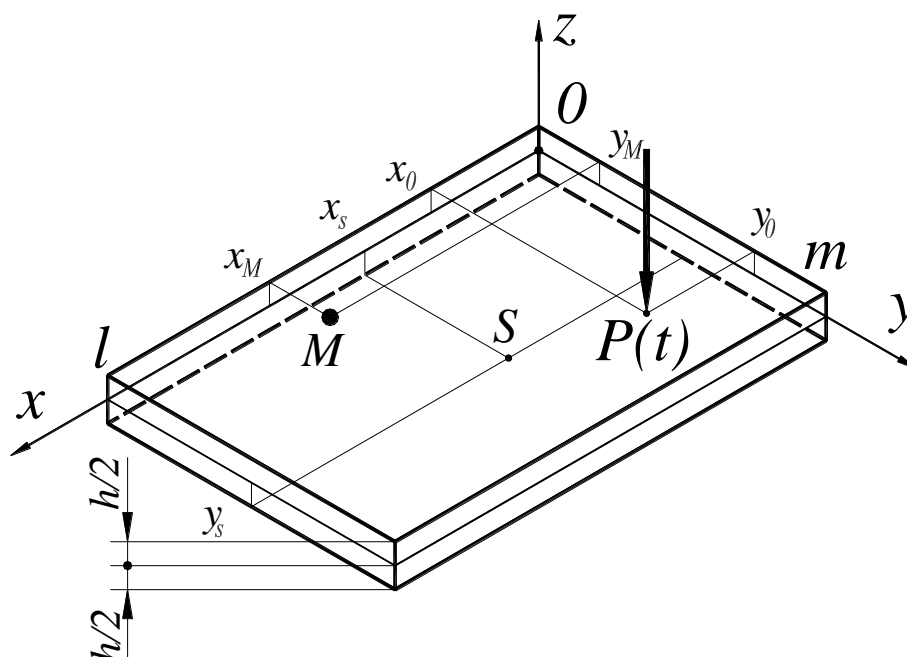


Рис. 4.6. Схема нагружения пластины с сосредоточенной массой

Под прямой задачей понимается определение зависимости компонент перемещения во времени при известной возмущающей нагрузке и сосредоточенной массе.

Под обратной задачей – идентификация неизвестного закона изменения во времени нестационарной нагрузки по изменениям прогиба пластины в некоторой ее точке.

Для точки (x_M, y_M) , в которой локализована дополнительная масса M , можно записать следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} w(x_M, y_M, t) = \int_0^t R(\tau) \frac{t-\tau}{M} d\tau, \\ w(x_M, y_M, t) = \int_0^t P(\tau) K_P(t-\tau) d\tau - \int_0^t R(\tau) K_R(t-\tau) d\tau, \end{cases} \quad (4.18)$$

которая может быть преобразована к следующему интегральному уравнению типа Вольтерра 1 рода при известной правой части:

$$\int_0^t R(\tau) \left[K_R(t-\tau) + \frac{t-\tau}{M} \right] d\tau = \int_0^t P(\tau) K_P(t-\tau) d\tau. \quad (4.19)$$

В матричном виде уравнение (4.19) можно записать:

$$\mathbf{A}_R \mathbf{R} = \mathbf{A}_P \mathbf{P}, \quad (4.20)$$

где \mathbf{R} – неизвестный вектор, соответствующий функции $R(t)$, вектор \mathbf{P} – функции $P(t)$, матрицы \mathbf{A}_R и \mathbf{A}_P отвечают соответствующим ядрам интегрального уравнения (4.19).

Так как рассматриваемая задача является некорректной, решение интегрального уравнения осуществляется с использованием РА Тихонова.

При расчетах срединная плоскость пластины была связана с плоскостью xOy декартовой системы координат. Принимались следующие параметры:

– для материала пластины: $E=2.07 \cdot 10^{11}$ Па; $\nu=0.3$; $\rho=7890$ кг/м³;

– для геометрии пластины: $h=0.04$ м; $l=0.6$ м; $m=0.4$ м;

– для координат (см. рис. 4.7):

$x_0=0.4$ м, $y_0=0.3$ м – точка нагружения;

$x_M=0.2$ м, $y_M=0.2$ м – координаты сосредоточенной массы;

$x_S=0.3$ м, $y_S=0.1$ м – координаты датчика

(решение справедливо для любых точек принадлежащих пластине, но не лежащих на её границе);

– величина сосредоточенной массы $M=5$ кг;

– число членов в соответствующих двойных рядах Фурье 50×50 .

При определении неизвестного вектора \mathbf{R} , согласно РА Тихонова параметр регуляризации α определялся на основе минимизации по α двух функционалов, графики которых приведены на рис. 4.8.

Отметим, что кривой 1 на рис. 4.8 соответствовал функционал невязки $M1^\alpha[R] = \|A_R R(\alpha) - A_P P\|$, который естественно вытекает из (4.20), а кривой 2 на рис. 4.8 – функционал $M2^\alpha[R] = \|R(\alpha)\|$ – ограничение искомой функции $R(t)$. Из рис. 4.8 видно, что параметр регуляризации следует брать в диапазоне $\alpha = 10^{-31} \div 10^{-30}$.

На рис. 4.9 показано известное изменение сосредоточенной нагрузки $P(t)$ – кривая 1 и определенные при различных значениях параметра регуляризации α зависимости $R(t)$ – кривые 2.

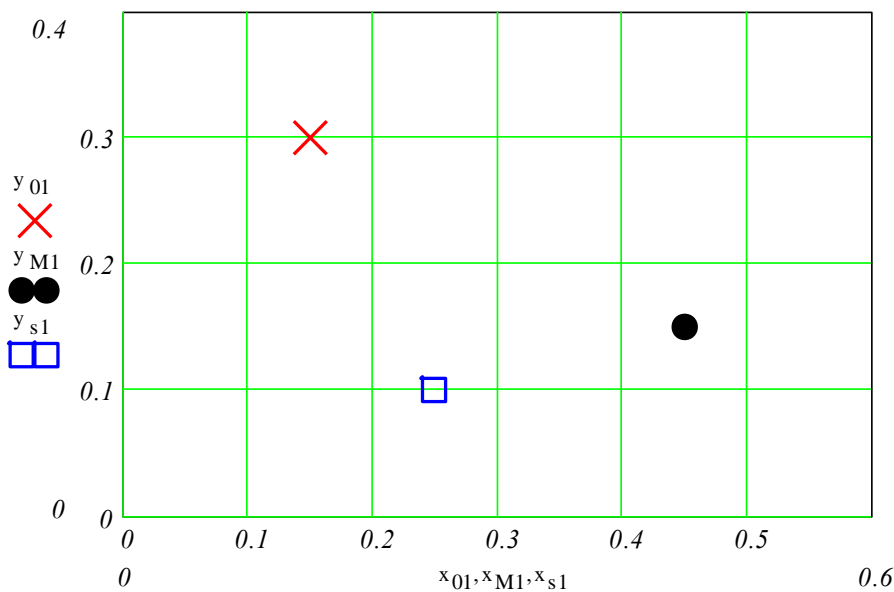


Рис. 4.7 Схема нагружения пластины в плане:

× – внешняя сила; • – точка присоединения сосредоточенной массы

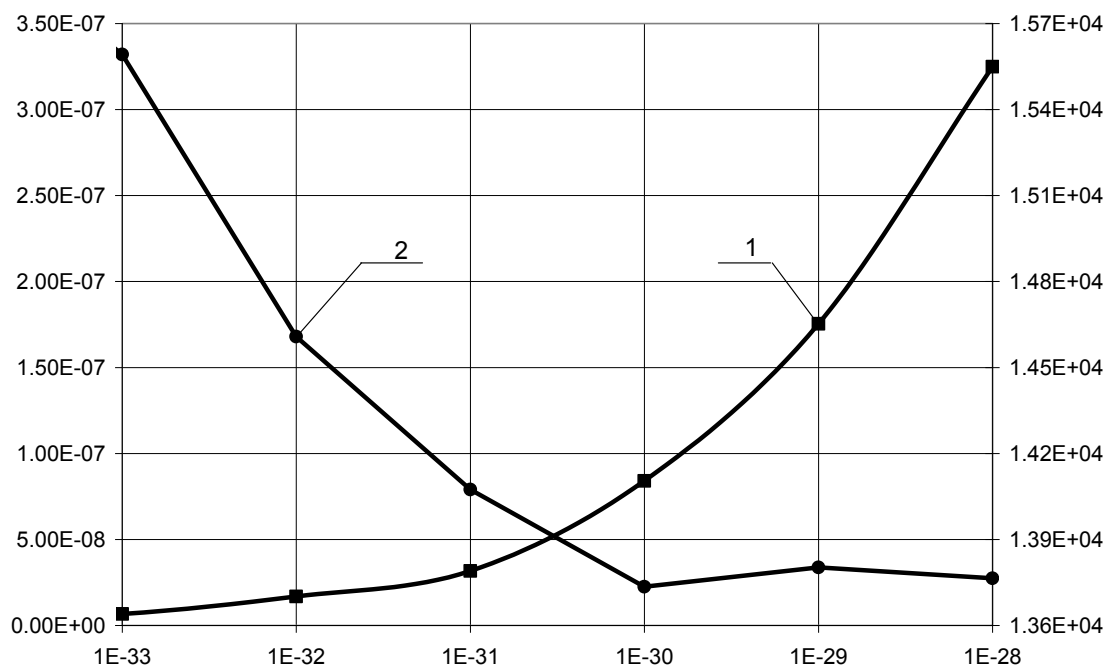


Рис. 4.8. Определение параметра регуляризации

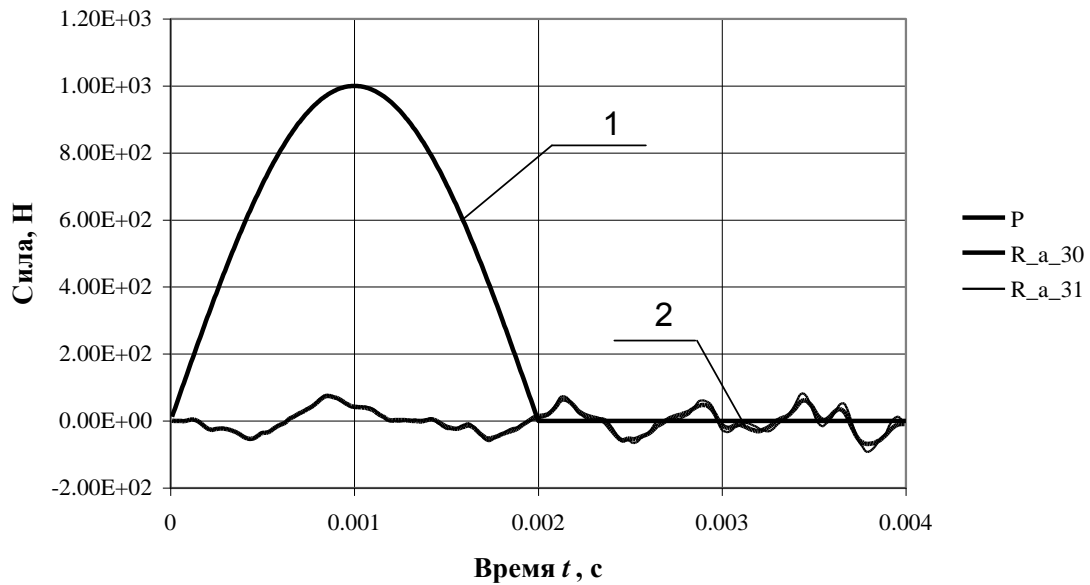


Рис. 4.9. Определение реакции сосредоточенной массы

На следующих графиках (рис. 4.11, рис. 4.12) при расчетах принимались такие же параметры, за исключением координат точки нагружения, сосредоточенной массы и координаты точки, в которой производился расчет. Все точки совпадают и соответствуют центру пластины – см. рис. 4.10.

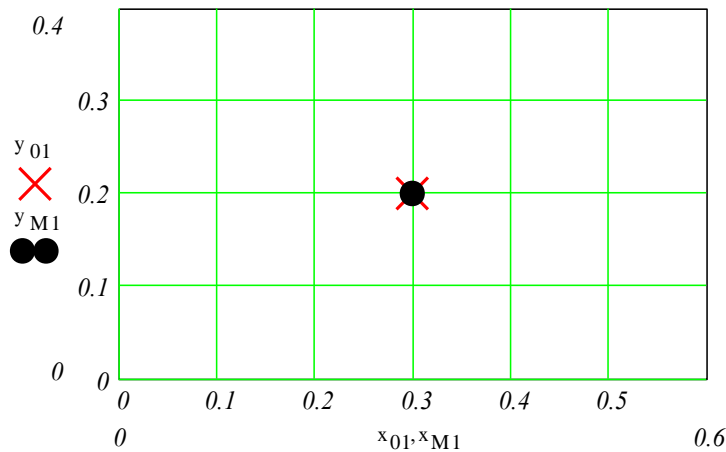


Рис. 4.10. Схема нагружения пластины в плане:

× – внешняя сила; • – точка присоединения сосредоточенной массы

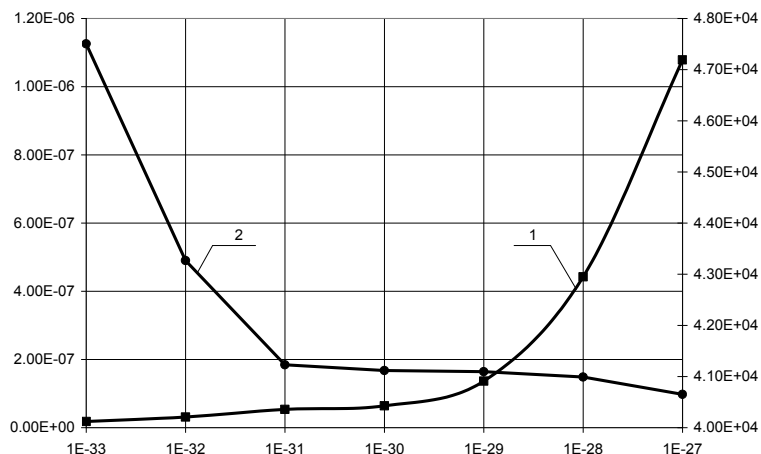


Рис. 4.11. Определение параметра регуляризации

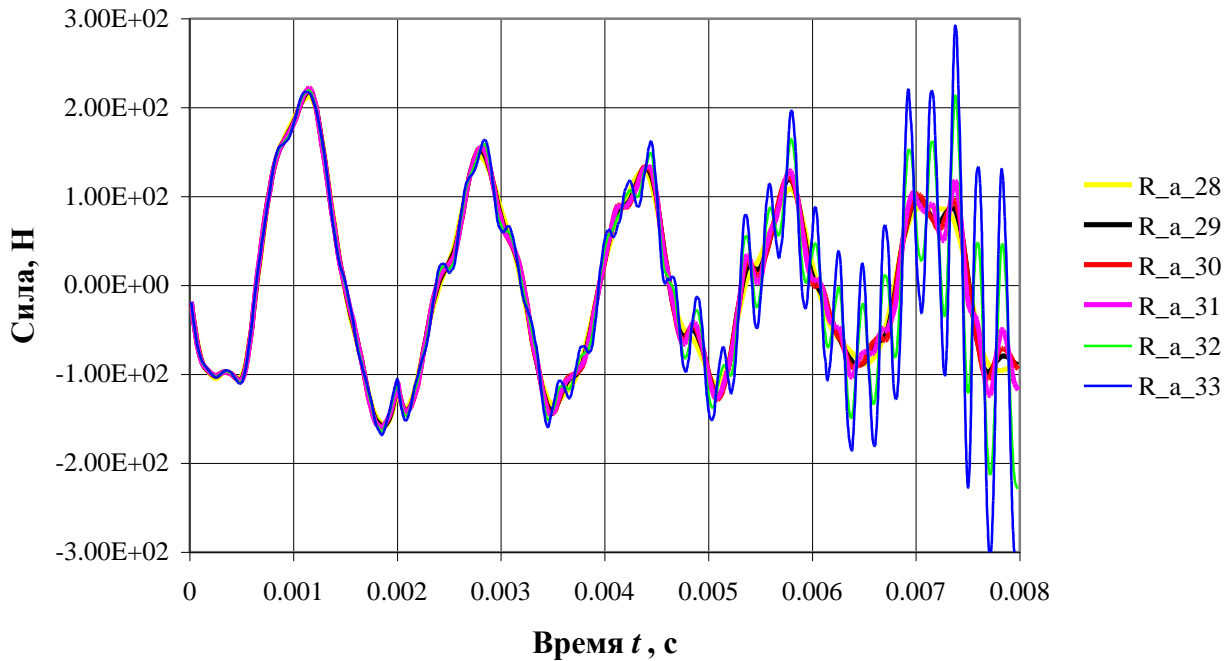


Рис. 4.12. Определение реакции сосредоточенной массы

Описание рис. 4.11 аналогично описанию рис. 4.8.

На рис. 4.12 показаны кривые соответствующие $R(t)$, определенным при различных значениях параметра регуляризации α ($\alpha_1 = 10^{-28}$, $\alpha_2 = 10^{-29}$, $\alpha_3 = 10^{-30}$, $\alpha_4 = 10^{-31}$, $\alpha_5 = 10^{-32}$, $\alpha_6 = 10^{-33}$).

Из рис. 4.12 видно, что кривые, рассчитанные при $\alpha_3 = 10^{-30}$ и $\alpha_4 = 10^{-31}$ близки, а при дальнейшем уменьшении α появляются осцилляции ($\alpha_5 = 10^{-32}$, $\alpha_6 = 10^{-33}$).

После определения функции $R(t)$ на основе соотношений вида (4.1) можно определить прогибы, а также любые другие параметры напряженно-деформированного состояния в любой точке пластины.

Исследовалось также влияние величины сосредоточенной массы на нестационарные колебания. Сосредоточенные массы брались равными $M=1$ кг, 10 кг и 20 кг. При исследовании все координаты (массы, силы и точки исследования) приняты по центру пластины. На представленных графиках (рис. 4.14) кривой 2 соответствовала сосредоточенная масса $M=1$ кг; кривой 3 – масса $M=10$ кг; кривой 4 – масса $M=20$ кг.

На рис. 4.13 показано изменение прогиба в центре пластины, кривая 1 на этом графике соответствует случаю, когда сосредоточенная масса отсутствует. На рис. 4.14 изображено изменение реакции взаимодействия между массой и пластиной $R(t)$ (кривые 2-4), причем кривой 1 соответствует изменение возмущающей нагрузки $P(t)$.

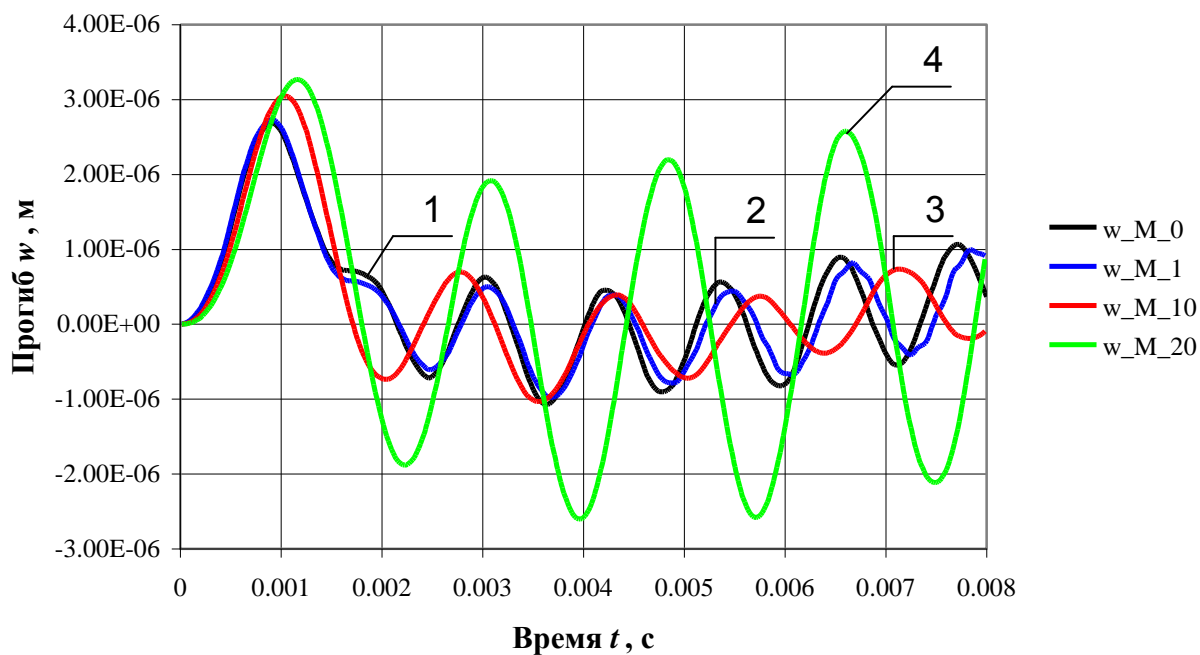


Рис. 4.13. Влияние величины сосредоточенной массы на прогиб пластины

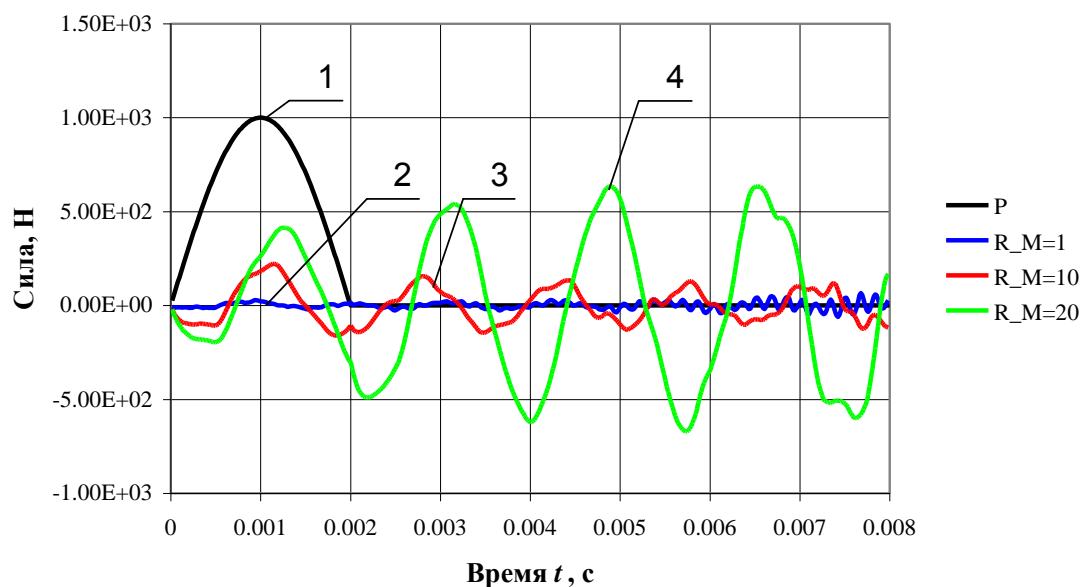


Рис. 4.14. Влияние величины сосредоточенной массы на реакцию $R(t)$

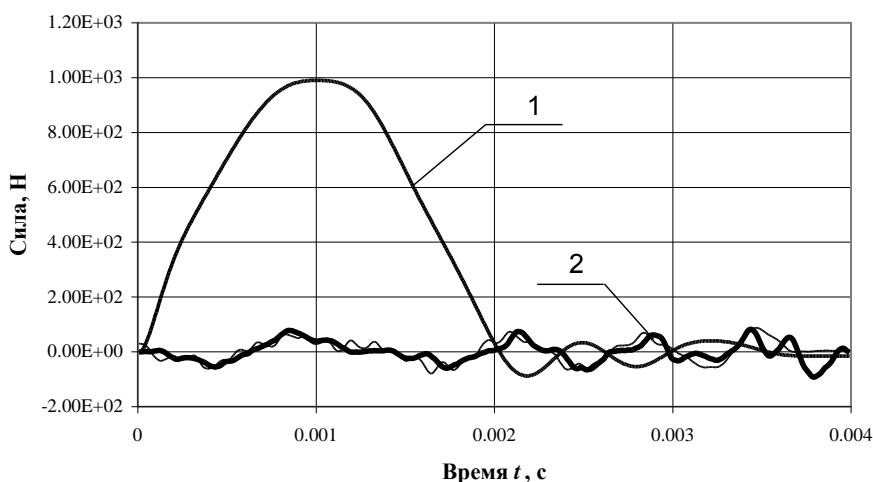
Из приведенных графиков (рис. 4.13, рис. 4.14) видно, что небольшие массы незначительно влияют на величины прогибов, а силы взаимодействия $R(t)$ — малы; влияние массы на процесс колебаний растет с величиной массы. Отметим, что при сильном увеличении массы (когда она становится сопоставима с массой пластины) наблюдается значительное усиление влияния массы, а далее колебания механической системы, состоящей из пластины и присоединенной к ней сосредоточенной массы, «вырождаются» в колебания механической системы подобные колебаниям системы с одной степенью свободы.

Обратная задача. В случае если известно изменение прогиба в некоторой точке S пластины $w(x_S, y_S, t)$, координаты x_S, y_S и величина сосредоточенной массы M , а требуется определить неизвестный закон изменения во времени возмущающей нагрузки $P(t)$ – задача сводится к решению системы двух интегральных уравнений Вольтерра первого рода. В матричном виде эту систему можно записать так:

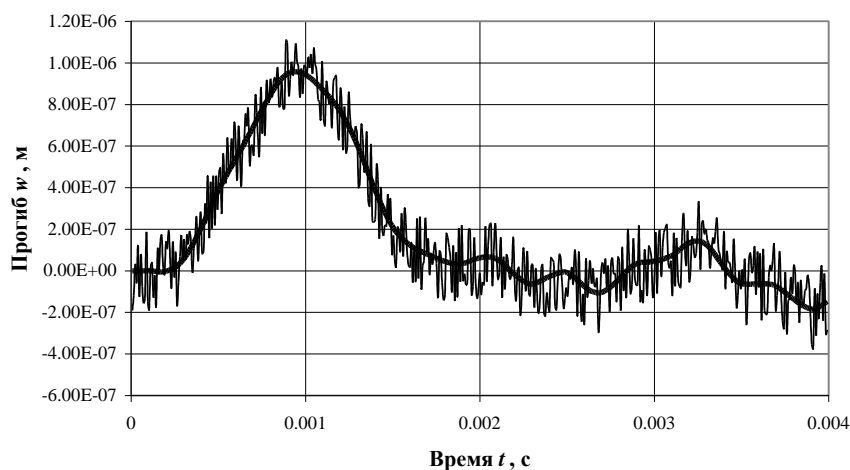
$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{w}_S \end{bmatrix}. \quad (4.21)$$

Блочная СЛАУ (4.21) решается с использованием ОАК для блочных матриц, а также РА Тихонова. Решение таких СЛАУ описано ранее.

Вычислительные эксперименты по идентификации неизвестной возмущающей нагрузки (сосредоточенной силы) и силы взаимодействия между массой и пластиной приведены на рис. 4.15 а. Кривая 1 на рис. 4.15 а соответствует определенной при решении (4.21) функции $P(t)$; кривые 2 – изменение $R(t)$ (жирная кривая – решение прямой задачи, тонкая – идентифицированная функция).



а)



б)

Рис. 4.15. Идентификация неизвестной нагрузки

В качестве исходных данных для идентификации использовалось вышеописанное решение прямой задачи – изменение прогиба пластины (жирная кривая на рис. 4.15 б). Для моделирования погрешностей, возникающих при проведении реальных экспериментов, на исходные данные был наложен «шум» с уровнем до 20% (тонкая кривая на рис. 4.15 б).

На основе представленных результатов (рис. 4.15 а) можно сделать вывод о том, что описанное решение задачи идентификации, на основе возмущенных данных для пластин с сосредоточенными массами является эффективным и устойчивым к погрешностям. Возможность учета сосредоточенных масс является важным результатом, улучшающим соответствие модели реальным механическим системам.

4.5. Нестационарные колебания прямоугольной пластины, имеющей дополнительную линейно-упругую опору

Механическая система состоит из прямоугольной упругой изотропной пластины средней толщины, которая шарнирно-оперта вдоль своего периметра и дополнительной сосредоточенной линейно-упругой опоры, контактирующей с пластиной в некоторой точке (рис. 4.18). На пластину воздействует нестационарное нагружение, вызывающее колебания. Расчеты сводятся к анализу интегральных уравнений Вольтерра I рода, которые решаются численно с использованием метода регуляризации А. Н. Тихонова.

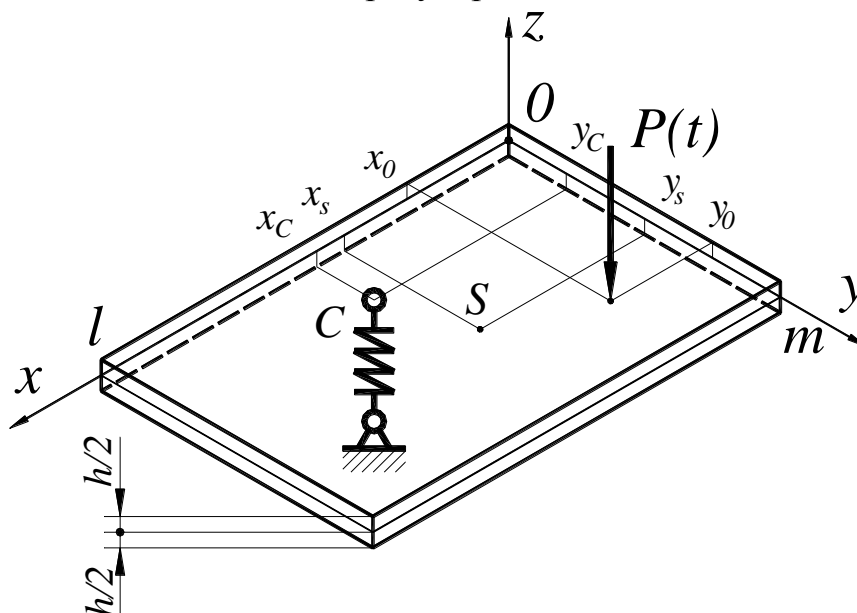


Рис. 4.16. Схема нагружения пластины с дополнительной упругой опорой

Проблема заключается в идентификации закона изменения во времени неизвестной реакции $R(t)$, для определения которой выражение (4.14) для точки крепления дополнительной упругой опоры к пластине (x_c, y_c) может

быть сведено к интегральному уравнению Вольтерра II рода относительно неизвестной $R(t)$:

$$c \int_0^t P(\tau) K_P(t - \tau) d\tau = c \int_0^t R(\tau) K_R(t - \tau) d\tau + R(t). \quad (4.22)$$

В матричном виде уравнение (4.22) можно записать:

$$\mathbf{A}_R^* \mathbf{R} + \mathbf{R} = \mathbf{A}_P^* \mathbf{P}, \quad (4.23)$$

где \mathbf{R} – неизвестный вектор, соответствующий функции $R(t)$, вектор \mathbf{P} – функции $P(t)$, матрицы $\mathbf{A}_P^* = c \cdot \mathbf{A}_P$, $\mathbf{A}_R^* = c \cdot \mathbf{A}_R$, а матрицы \mathbf{A}_R и \mathbf{A}_P отвечают соответствующим ядрам интегрального уравнения (4.22).

Так как уравнение (4.22) является интегральным уравнением Вольтерра II рода относительно $R(t)$, то решение его дискретного аналога (4.23) может осуществляться без использования метода регуляризации А. Н. Тихонова или при значении параметра регуляризации $\alpha = 0$.

В результате решения (4.23) находится сила взаимодействия между дополнительной опорой и пластиной $R(t)$, что позволяет определять компоненты перемещения во времени во всех точках пластины.

При расчетах срединная плоскость пластины была связана с плоскостью xOy декартовой системы координат. Численные расчеты производились при следующих значениях: $\rho=7890 \text{ кг/м}^3$; $\nu=0.3$; $E=2.07 \cdot 10^{11} \text{ Па}$; $h=0.04 \text{ м}$; $l=0.6 \text{ м}$, $m=0.4 \text{ м}$. Координаты точки приложения возмущающей нагрузки: $x_0=0.3 \text{ м}$, $y_0=0.2 \text{ м}$. Координаты точки крепления дополнительной линейно-упругой опоры к пластине: $x_c=0.3 \text{ м}$, $y_c=0.2 \text{ м}$. (Для наглядности рассмотрен случай, когда нестационарная сила воздействует в центре пластины, а дополнительная линейно-упругая опора установлена в том же месте под пластиной – см. рис. 4.17).

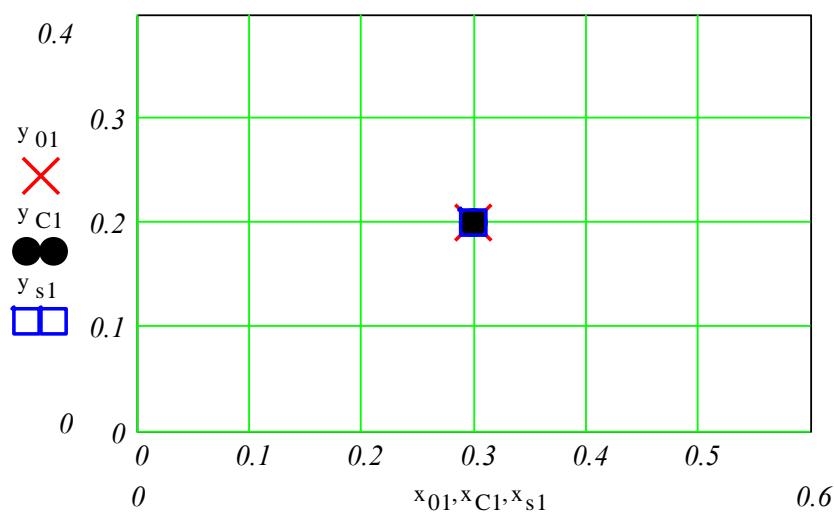


Рис. 4.17. Схема нагружения пластины в плане:
 \times – внешняя сила; \bullet – точка крепления опоры

На рис. 4.18 показано изменение во времени возмущающей нагрузки $P(t)$ (полуволна синусоиды) и определенная в результате решения интегрального уравнения (4.23) реакция между пластиной и дополнительной опорой $R(t)$ при жесткости дополнительной линейно-упругой опоры равной $c = 10^9$ Н/м.

На рис. 4.19 приведены кривые изменения прогиба в центре пластины: кривая 1 – прогиб без дополнительной упругой опоры; кривая 2 демонстрирует прогиб при действии только реакции $R(t)$; кривая 3 – суммарная кривая, описывающая прогиб пластины с дополнительной упругой опорой (см. рис. 4.18) при нагружении возмущающей нагрузкой.

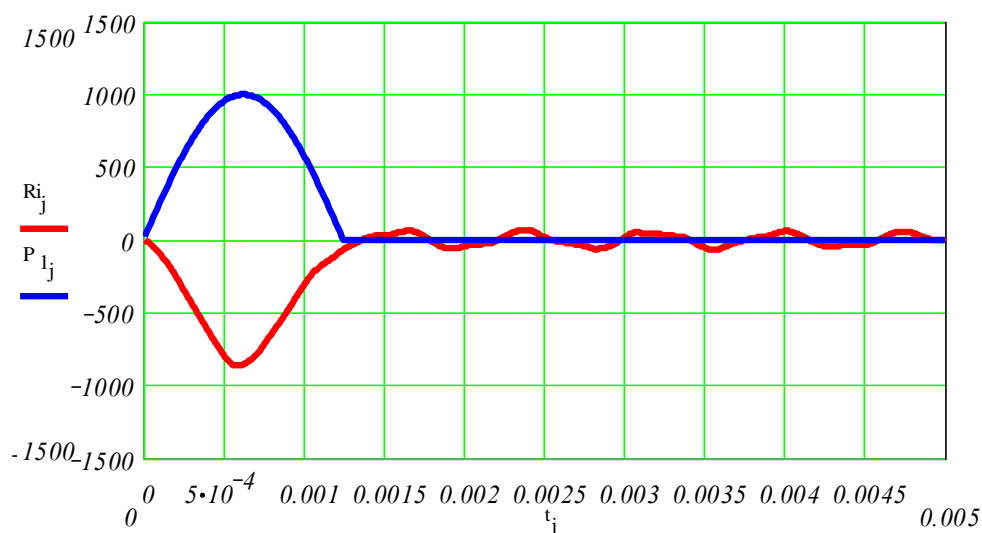


Рис. 4.18. Возмущающая нагрузка и реакция дополнительной упругой опоры

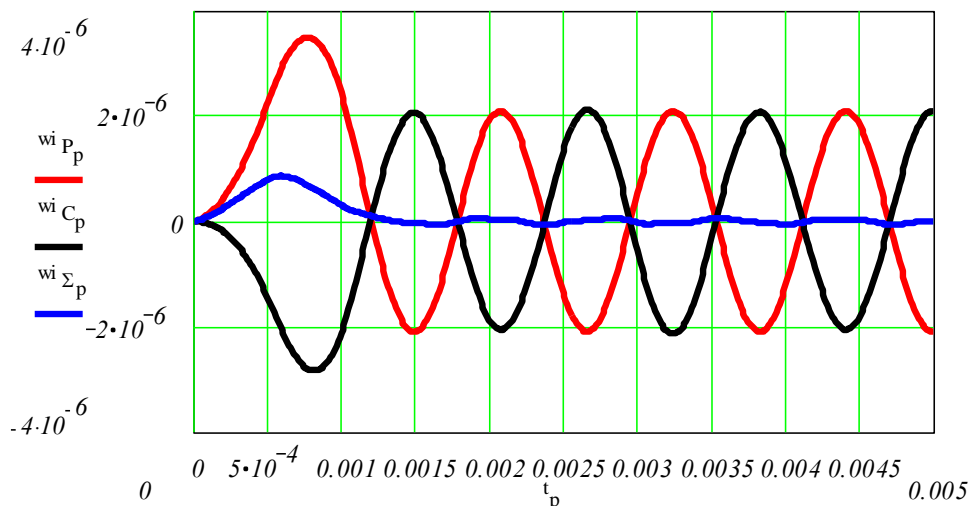
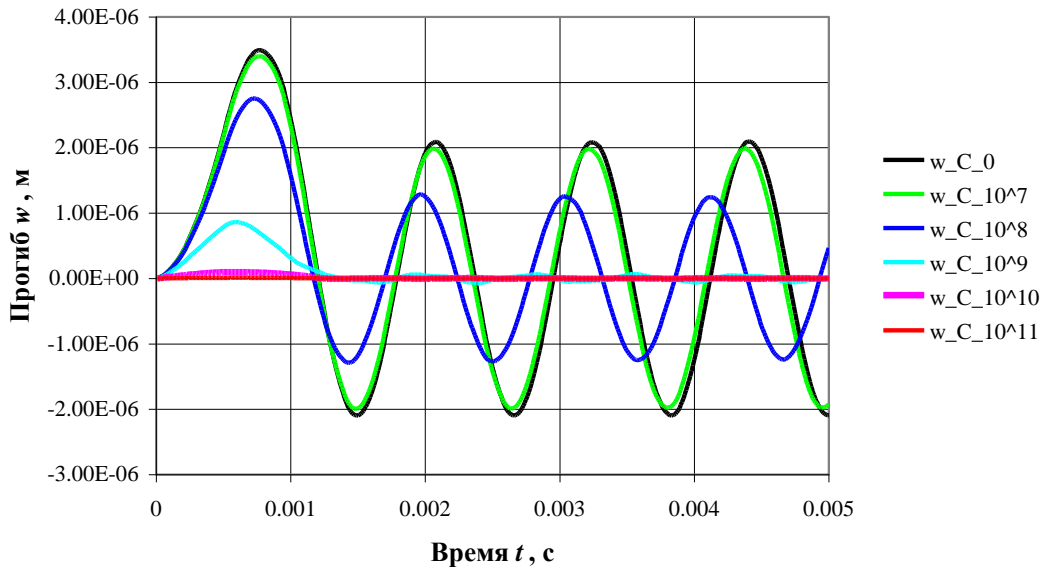
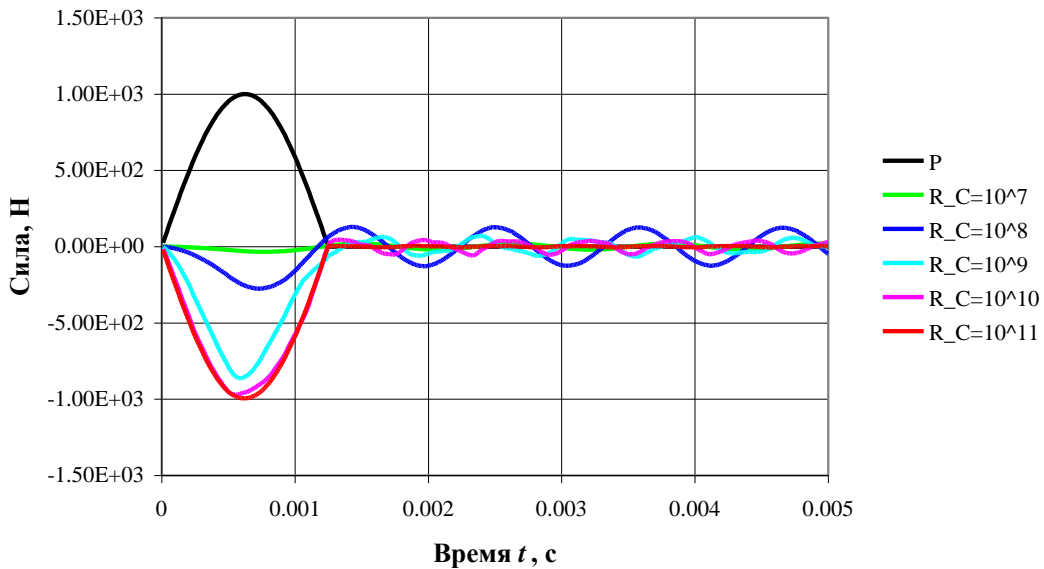


Рис. 4.19. Влияние реакции дополнительной опоры на прогиб пластины

На рис. 4.20 а показано влияние жесткости дополнительной упругой опоры на прогиб пластины в точке нагружения, а на рис. 4.20 б показано изменение возмущающей нагрузки $P(t)$ – кривая 1 и реакции $R(t)$ между пластиной и пружиной при различных значениях коэффициента жесткости пружины c – кривые 2-6.



а)



б)

Рис. 4.20. Влияние жесткости дополнительной упругой опоры

Кривая 1 на рис. 4.20 а показывает изменение прогиба без дополнительной упругой опоры (или при $c = 0$); при значении коэффициента жесткости $c < 10^7$ Н/м прогибы практически не отличаются, при $c = 10^7$ Н/м (кривая 2) видно незначительное снижение амплитуды прогиба и его отставание по фазе; при $c = 10^8$ Н/м (кривая 3) наблюдается заметное снижение амплитуды прогиба (около 20 %) и запаздывание; при $c = 10^9$ Н/м (кривая 4) наблюдается значительное влияние дополнительной опоры на колебания пластины, (графики, приведенные на рис. 4.18 и рис. 4.19 получены для значения коэффициента жесткости $c = 10^9$). При дальнейшем повышении жесткости дополнительной опоры $c = 10^{10}$ Н/м (кривая 5) существенно

снижается изгиб пластины (так как жёсткость дополнительной опоры становится выше жёсткости самой пластины), а уже при жесткости $c = 10^{11}$ Н/м (кривая б) суммарный прогиб пластины становится ниже на несколько порядков (дополнительная опора становится «слишком» жесткой, а значения прогибов почти нулевые). В этом случае ($c \geq 10^{11}$ Н/м) реакция дополнительной опоры практически равна возмущающей нагрузке (кривая б на рис. 4.20, б).

Укажем, что представленные численные значения справедливы только для рассмотренного случая. В каждом конкретном случае они будут зависеть от геометрических и механических параметров системы, однако характер влияния коэффициента жесткости дополнительной упругой опоры во всех случаях будет аналогичен описанному.

Описание следующих рис. 4.21, рис. 4.22 и рис. 4.23 аналогично ранее приведенным рис. 4.17, рис. 4.18 и рис. 4.19 соответственно; отличаются только координаты точки приложения возмущающей нагрузки: $x_0=0.2$ м, $y_0=0.2$ м и координаты точки присоединения дополнительной линейно-упругой опоры к пластине: $x_C=0.4$ м, $y_C=0.2$ м. На рис. 4.23 а, б, в приведены кривые изменения прогиба в точках (x_0, y_0) , центре пластины и (x_C, y_C) соответственно.

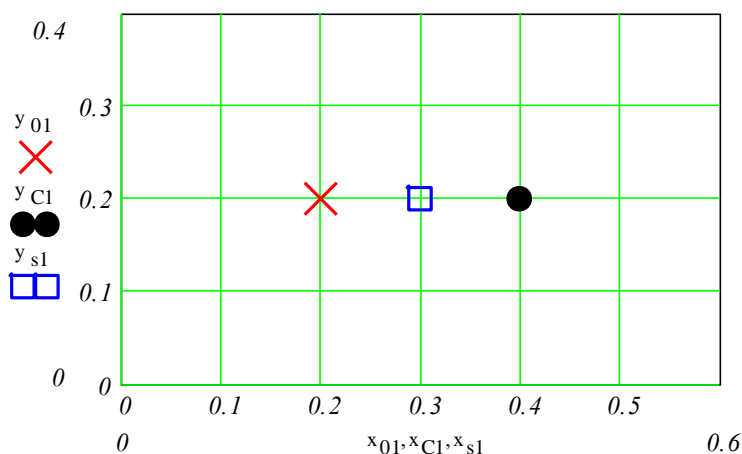


Рис. 4.21. Схема нагружения пластины в плане

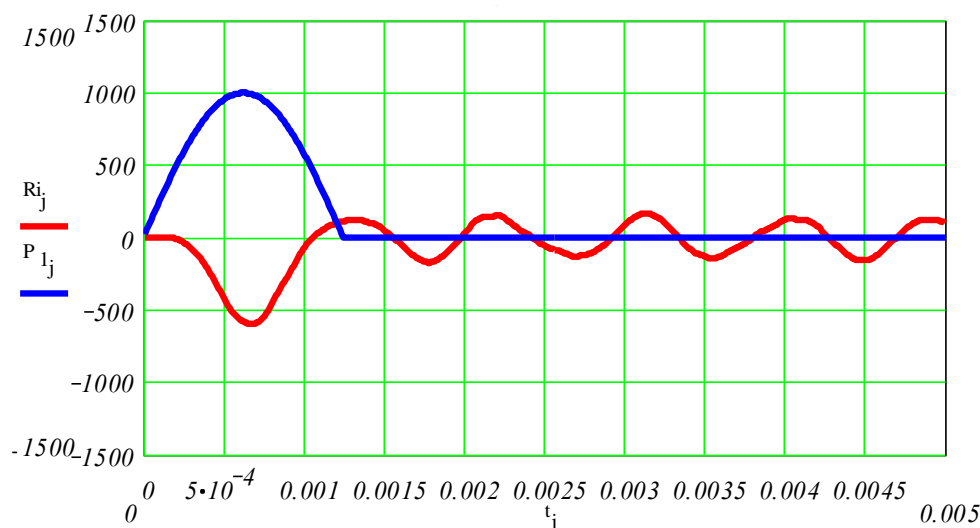
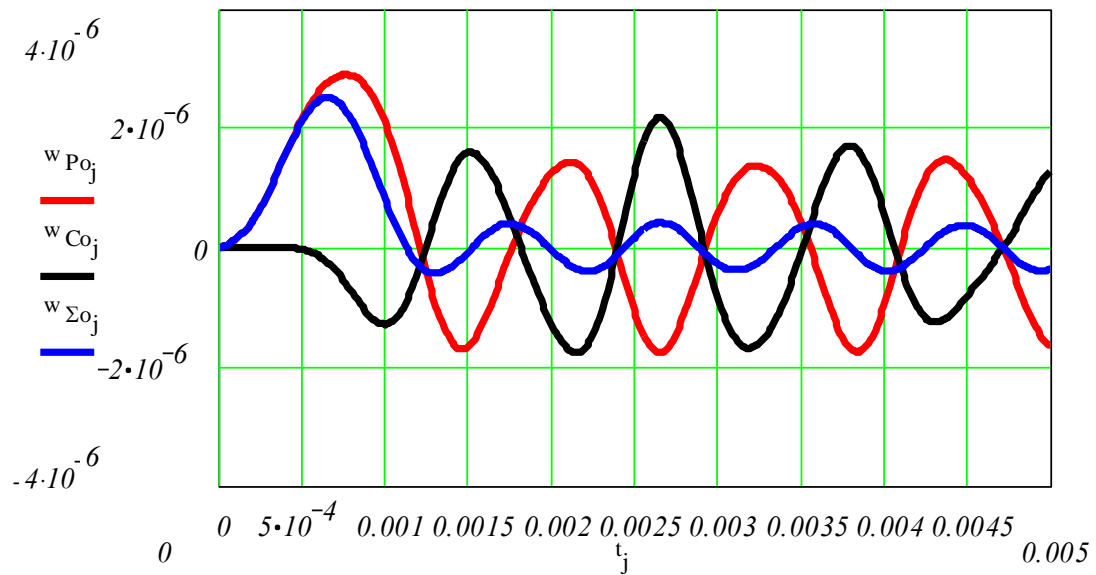
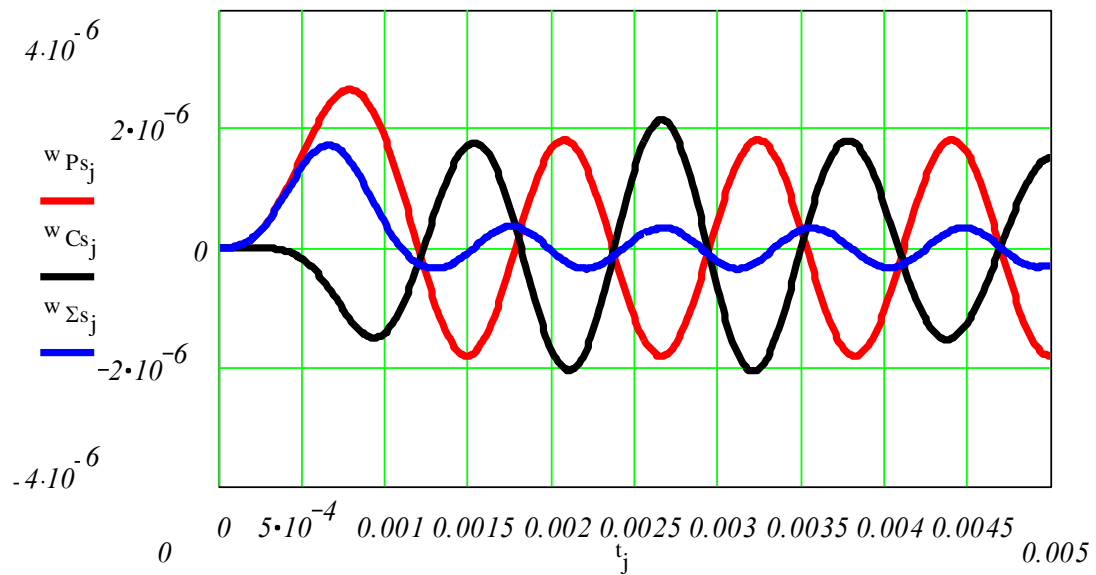


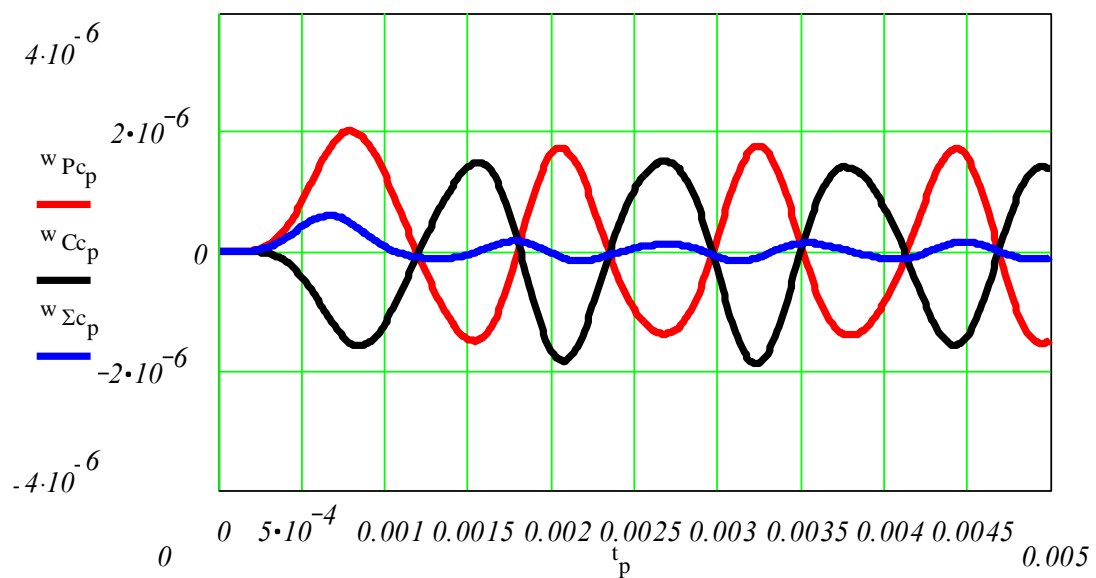
Рис. 4.22. Возмущающая нагрузка и реакция дополнительной упругой опоры



a)



б)



в)

Рис. 4.23. Влияние реакции дополнительной упругой опоры на прогиб

Обратная нестационарная задача может иметь несколько постановок. Укажем две наиболее естественные:

1) идентификация закона изменения во времени возмущающей нагрузки при известных жесткости дополнительной опоры и временной зависимости прогиба или деформации в некоторой точке пластины.

2) идентификация жесткости дополнительной линейно-упругой опоры при известных временной зависимости прогиба или деформации в некоторой точке пластины и законе изменения во времени возмущающей нагрузки (подобная постановка – подбор жесткости, в соответствии с требуемыми значениями нестационарного прогиба или деформации)

В каждом из указанных случаев задача сводится к решению системы интегральных уравнений Вольтерра. Только в первом случае нужно идентифицировать неизвестную функцию во времени $P(t)$, а во втором случае – константу c (задача более простая) при условии, что все координаты (и другие параметры) известны.

Рассмотрим подробно первый случай (более сложный). Воздействие дополнительной опоры на пластину моделируется в виде неизвестной нестационарной силы: таким образом, поставленная задача аналогична задаче идентификации двух независимых нестационарных нагрузок, действующих на пластину в разных точках. Как показано в главе 3, для идентификации двух нагрузок необходимо знать изменение во времени перемещения или деформации в двух любых точках пластины. Однако в данном случае величина реакции $R(t)$ зависит от прогиба пластины и для определения двух независимых функций $P(t)$ и $R(t)$ нам достаточно знать изменение во времени прогиба или деформации только в одной точке, которую обозначим (x_S, y_S) .

Для точек (x_S, y_S) и (x_C, y_C) с учетом выражений (4.1) и (4.4) можно записать следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} w(x_S, y_S, t) = \int_0^t P(\tau) K_{SP}(t - \tau) d\tau - \int_0^t R(\tau) K_{SR}(t - \tau) d\tau; \\ w(x_C, y_C, t) = \int_0^t P(\tau) K_{CP}(t - \tau) d\tau - \int_0^t R(\tau) K_{CR}(t - \tau) d\tau; \\ w(x_C, y_C, t) = \frac{R(t)}{c}. \end{cases} \quad (4.24)$$

Система (4.24) может быть преобразована к системе двух интегральных уравнений Вольтерра относительно функций $P(t)$ и $R(t)$, причем первое уравнение будет интегральным уравнение Вольтерра II рода, а второе – I рода. Интегральное уравнение Вольтерра II рода может быть легко преобразовано к уравнению I рода путём внесения функции $R(t)$ под интеграл.

$$\begin{cases} c \int_0^t P(\tau) K_{CP}(t-\tau) d\tau - c \int_0^t R(\tau) [K_{CR}(t-\tau)] d\tau - R(t) = 0, \\ \int_0^t P(\tau) K_{SP}(t-\tau) d\tau - \int_0^t R(\tau) K_{SR}(t-\tau) d\tau = w(x_S, y_S, t). \end{cases}, \quad (4.25)$$

Система интегральных уравнений (4.25) решается с использованием РА Тихонова, согласно которому, при решении некорректных задач выполняется конечномерная аппроксимация интегральных уравнений.

После преобразования и дискретизации решение системы интегральных уравнений Вольтерра (4.25) эквивалентно решению следующей блочной системы линейных алгебраических уравнений (БЛАУ):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P} \\ -\mathbf{R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{w}_s \end{bmatrix}, \quad (4.26)$$

где матрицы \mathbf{A}_{ij} отвечают соответствующим дискретизированным ядрам интегральных уравнений, векторы \mathbf{P} и \mathbf{R} соответствуют неизвестным функциям $P(t)$ и $R(t)$, а \mathbf{w}_s – известной функции изменения прогиба пластины $w(x_S, y_S, t)$.

Описание решения БЛАУ аналогичных (4.26) приведено ранее.

Численные расчеты по обратной задаче производились при следующих значениях: $\rho=7890 \text{ кг/м}^3$; $\nu=0.3$; $E=2.07 \cdot 10^{11} \text{ Па}$; $h=0.04 \text{ м}$; $l=0.6 \text{ м}$, $m=0.4 \text{ м}$. Координаты точки приложения возмущающей нагрузки: $x_0=0.15 \text{ м}$, $y_0=0.3 \text{ м}$. Координаты точки крепления дополнительной линейно-упругой опоры к пластине: $x_c=0.45 \text{ м}$, $y_c=0.15 \text{ м}$. Координаты точки, в которой предполагалось известным изменение прогиба во времени: $x_s=0.25 \text{ м}$, $y_s=0.1 \text{ м}$. Величина коэффициента жесткости дополнительной опоры $c=10^9 \text{ Н/м}$. Число членов в соответствующих двойных рядах Фурье 50×50 .

При проведении тестовых расчетов на величины прогибов $\overline{w}_s(t)$, которые являются результатами решения прямой задачи при заданном законе изменения во времени внешней нагрузки $P(t)$, налагался случайный “шум” согласно закону нормального распределения выбросов («Гауссов шум»). «Гауссов шум» рассчитывался в приложении MathCAD с использованием встроенной функции для нормального распределения *norm* в соответствии с формулой:

$$\overline{w}_s(t) = \overline{w}_s(t) + \text{norm}(t, 0, \delta \cdot w_{\max}). \quad (4.27)$$

То есть к значениям исходной функции $\overline{w}_s(t)$ добавлялись случайные величины с дисперсией $\sigma = \delta \cdot w_{\max}$, где δ – относительная погрешность; w_{\max} – величина максимального прогиба пластины в рассматриваемой точке. Укажем, что процедура “зашумления” хорошо моделирует случайные погрешности, возникающие при реальных измерениях параметров НДС элементов конструкций, и позволят проверить вычислительный алгоритм на устойчивость.

На рис. 4.24 показана схема нагружения пластины при идентификации неизвестных сил $P(t)$ и $R(t)$.

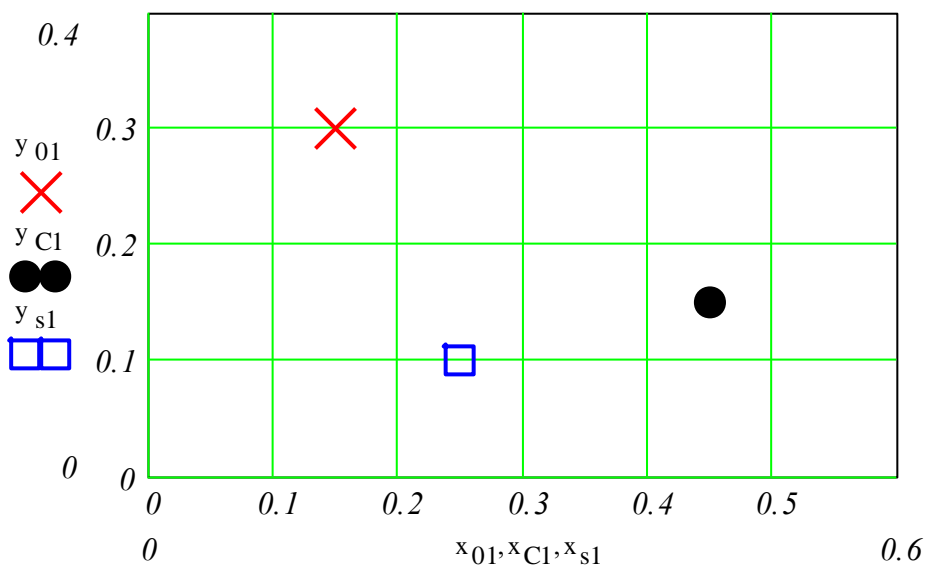


Рис. 4.24. Схема нагружения пластины в плане:

- × – точка нагружения внешней силой;
- – точка присоединения дополнительной упругой опоры;
- (квадратиком) показана точка установки датчика прогиба

На рис. 4.25 показаны исходные данные для решения обратной задачи: w_δ – тонкая кривая, соответствующая зашумлённым (измеренным) значениям прогиба пластины в точке (x_s, y_s) с уровнем «шума» $\delta=10\%$ и здесь же приведена $\overline{w_{\Sigma s}}$ – толстая кривая, соответствующая точным значениям прогиба пластины $\overline{w_s(t)}$. Рис. 4.21

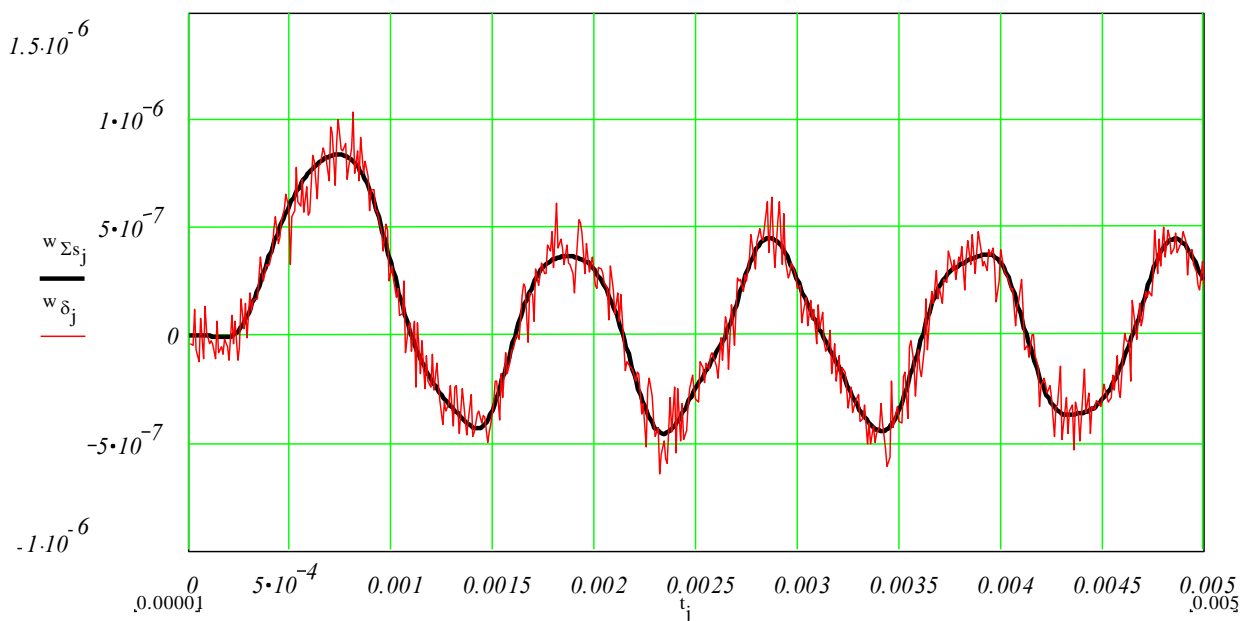


Рис. 4.25. Исходные данные идентификации

На рис. 4.26 показаны результаты решения обратной задачи: идентифицированные значения возмущающей силы $P(t)$ и реакции упругой опоры $R(t)$, которые были найдены при решении БСЛАУ (4.26). На этом же рисунке для удобства оценки идентификации показано изменение возмущающей нагрузки $P(t)$ (полуволна синусоиды) и определенная в результате решения прямой задачи реакция дополнительной линейно-упругой опоры $R(t)$. Как видно из рис. 4.26 идентифицированные кривые хорошо соответствуют точным значениям, несмотря на зашумление.

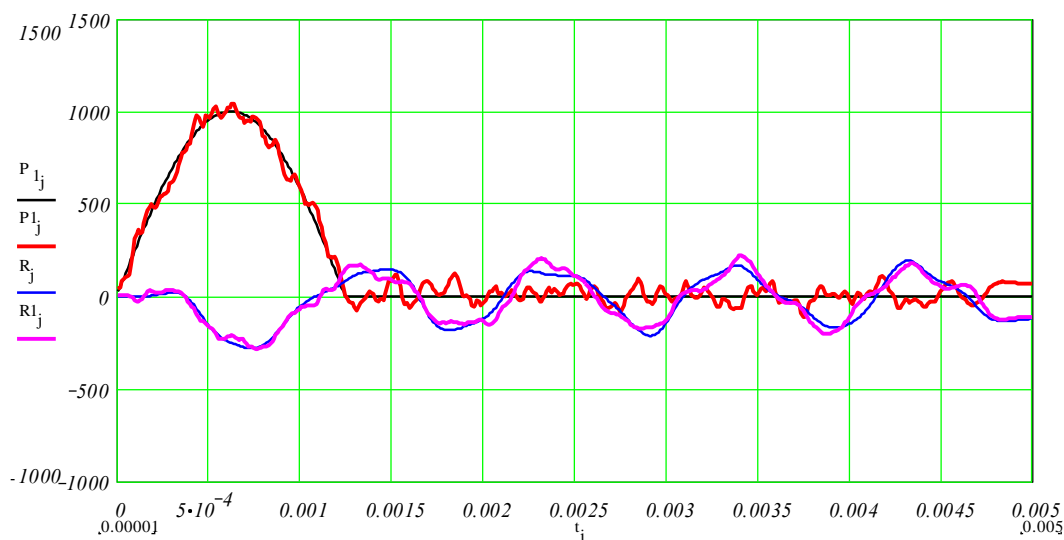


Рис. 4.26. Результаты идентификации неизвестных нагрузок

Существенное влияние на устойчивость численного решения БСЛАУ (4.26), особенно при “зашумленной” правой части, оказывают параметры регуляризации α_i , используемые в РА Тихонова. Эти параметры целесообразно выбирать независимо для каждой из идентифицируемых функций, (хотя они могут и совпадать – это зависит от соответствующих ядер интегральных уравнений).

Параметры регуляризации определяются на основе минимизации по α_i соответствующих функционалов невязки и (или) других дополнительно введенных функционалов.

В данном случае для каждой идентифицируемой силы ($P(t)$ и $R(t)$) исследовались два функционала вида:

$$M1^\alpha[P] = \frac{\|B \cdot P(\alpha) - B_P\|_{l_2}}{\|B_P\|_{l_2}}, \quad (4.28)$$

$$M2^\alpha[P] = \|P(\alpha)\|; \quad (4.29)$$

$$M1^\alpha[R] = \frac{\|B \cdot R(\alpha) - B_R\|_{l_2}}{\|B_R\|_{l_2}}, \quad (4.30)$$

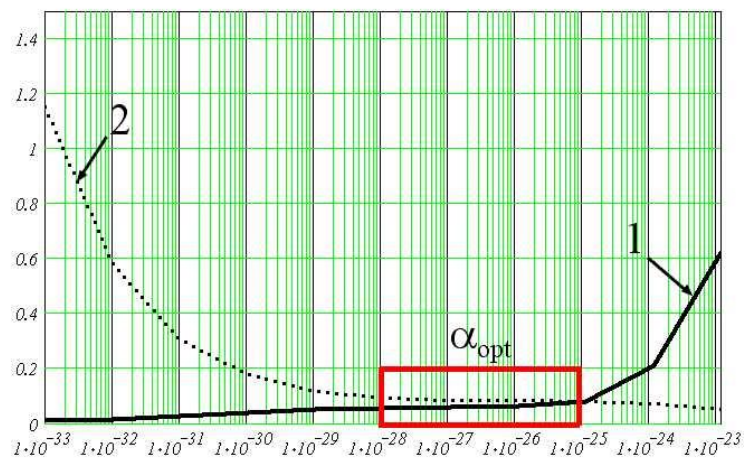
$$M2^\alpha[R] = \|R(\alpha)\|, \quad (4.31)$$

где B – интегральный оператор, дискретный аналог которого для БСЛАУ (4.26) будет иметь вид $\mathbf{B} = \mathbf{A}_{11}\mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{21}$, $P(\alpha)$ и $R(\alpha)$ – найденные при различных значениях параметра регуляризации α_i силы $P(t)$ и $R(t)$, дискретные аналоги для B_P и B_R будут $\mathbf{B}_P = -\mathbf{A}_{21} \cdot \mathbf{w}_S$ и $\mathbf{B}_R = \mathbf{A}_{11}\mathbf{w}_S$ соответственно.

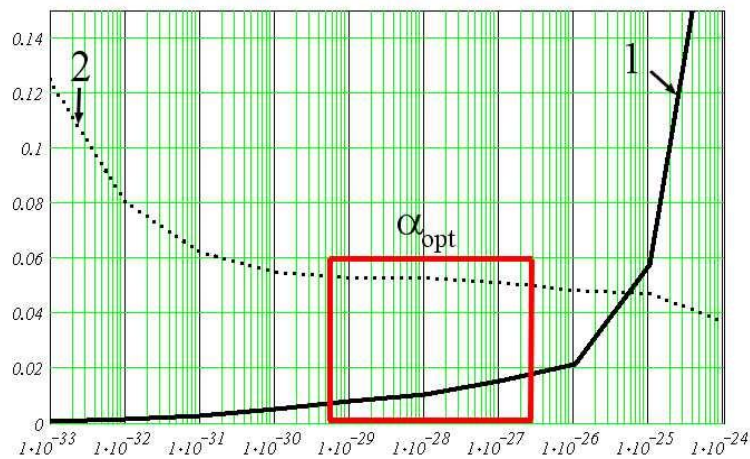
Функционалы вида (4.28), (4.30) – это функционалы «относительной невязки», которые при решении системы интегральных уравнений в случае незашумлённой правой части должны стремиться к нулю, а при возмущении исходных данных стремится к какой-то малой величине. По сути, эти функционалы иллюстрируют «точность» идентификации.

Функционалы вида (4.29), (4.31) – это функционалы «суммарной идентифицированной нагрузки», которые в некотором рациональном диапазоне должны принимать по возможности минимальные значения (согласно принципу минимума энергии).

Следующие рис. 4.27 а и рис. 4.27 б показывают пары функционалов (4.28), (4.29) и (4.30), (4.31) для выбора параметров регуляризации α_P и α_R , причем значения функционалов отложены вдоль оси ординат, а сам параметр α отложен вдоль оси абсцисс в логарифмической шкале.



а)



б)

Рис. 4.27. Выбор значений параметра регуляризации α_P и α_R

Из рис. 4.27 а и рис. 4.27 б видно, что в исследуемом диапазоне при уменьшении значений параметра регуляризации α_i невязка уменьшается, однако растет «суммарная нагрузка», то есть требования противоречивы, и следовательно, значение параметра регуляризации должно быть компромиссным.

Согласно рис. 4.27 а величину параметра регуляризации α_P следует выбирать в диапазоне $10^{-26} \leq \alpha_P \leq 10^{-28}$, а для α_R , согласно рис. 4.27 б параметра регуляризации $10^{-27} \leq \alpha_R \leq 10^{-29}$. Укажем, что для приведенного численного расчета на рис. 4.26 при «зашумлении» $\delta = 0.1$ параметры регуляризации были приняты равными $\alpha_P = \alpha_R = 10^{-28}$.

В случае решения задач оптимизации при противоречивых критериях удобно использовать подход, изложенный в монографии [104], и построить компромиссную кривую. Для построения компромиссных кривых один из противоречивых критериев строят вдоль оси ординат, а другой вдоль оси абсцисс, а значения оптимизируемых параметров соответствуют точкам на графике. Суть подхода сводится к тому, что в компромиссной области выделяется несколько точек, каждая из которых относится к набору оптимизируемых параметров, а далее осуществляется выбор конкретной или конкретных точек на основе экспертного анализа. На рис. 4.28 показаны компромиссные кривые для α_P и α_R , здесь критерий соответствующий минимуму относительной невязки отложен вдоль вертикальной оси, а критерий минимальной «суммарной нагрузки» вдоль горизонтали.

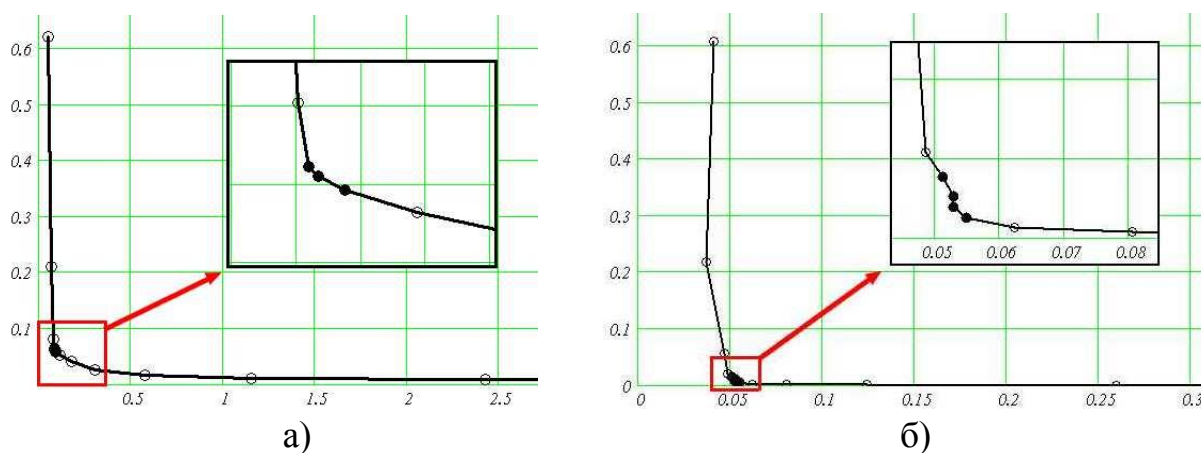


Рис. 4.28. Компромиссные кривые для α_P и α_R

На Рис. оптимальные точки выделены черными кружками. Согласно рис. 4.28 а выделено 3 точки – оптимальные значения параметра регуляризации α_P $\alpha_P = 10^{-26}$, $\alpha_P = 10^{-27}$, $\alpha_P = 10^{-28}$ (в том же диапазоне, что выбран ранее), а для параметра регуляризации α_R , согласно рис. 4.28 б добавилась 4-я точка $\alpha_R = 10^{-30}$.

Так как решалась тестовая, а не реальная задача, и известны точные значения сил $P(t)$ и $R(t)$, то можно оценить «точность» идентификации в

зависимости от параметра регуляризации. На рис. 4.29 показаны функционалы $M_P^\alpha[P] = \|P(\alpha) - \bar{P}\|$ – кривая 1 и $M_R^\alpha[R] = \|R(\alpha) - \bar{R}\|$ – кривая 2, где \bar{P} и \bar{R} – точные значения искоемых функций, взятые из прямой задачи.

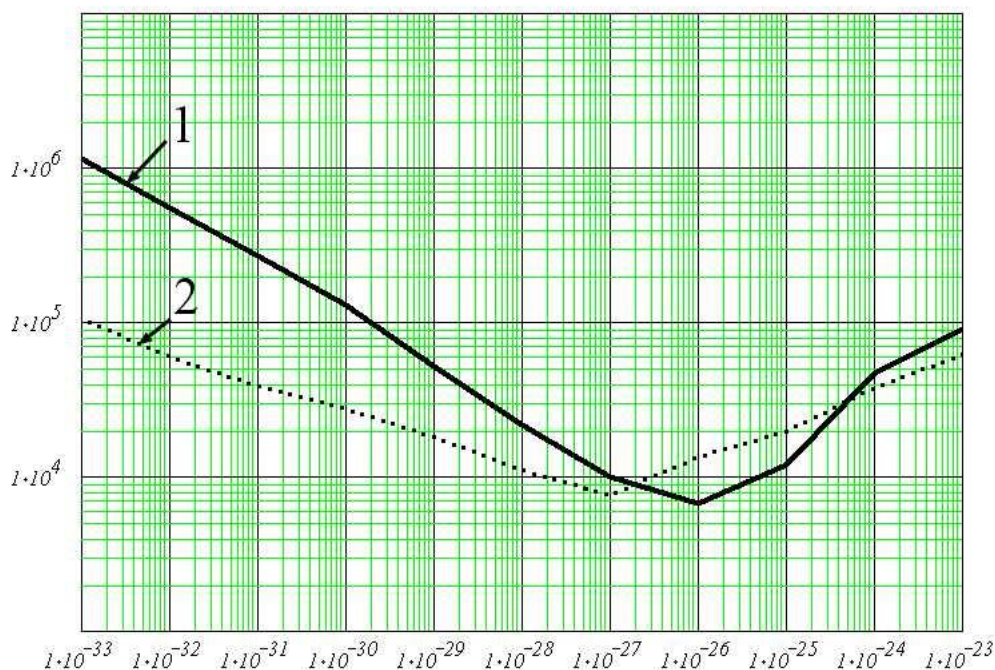


Рис. 4.29. Выбор значений параметра регуляризации α_P и α_R

Из графиков на рис. 4.29 видно, что лучшие результаты идентификации получены при значениях $\alpha_P = 10^{-26}$ и $\alpha_R = 10^{-27}$, которые попадают в найденные ранее оптимальные диапазоны.

Описан новый подход, при котором воздействие дополнительной опоры на пластину моделируется в виде неизвестной нестационарной силы, определяемой из решения интегрального уравнения Вольтерра. На основе предложенного подхода при моделировании нестационарного деформирования пластинчатых элементов конструкций с дополнительными упругими опорами имеется возможность получать устойчивые аналитико-численные решения задач механики деформируемого твердого тела без использования итерационных схем. Возможность идентификации реакции между пластиной и дополнительной опорой позволяет облегчить выбор её жесткости для «смягчения» импульсных и ударных нагрузок в конкретных механических системах. Решена обратная нестационарная задача механики твердого деформируемого тела. Благодаря использованию РА Тихонова получено устойчивое численно-аналитическое решение системы интегральных уравнений Вольтерра. Показана возможность идентификации неизвестной возмущающей нагрузки по «зашумленным» исходным данным, что обуславливает применимость описанной методики при экспериментальных исследованиях для реальных результатов измерений.

4.6. Моделирование нестационарного деформирования прямоугольной пластины с гасителем колебаний

Гашение колебаний (особенно нестационарных) является важным направлением задач виброзащиты элементов конструкций. Актуальность указанных задач в настоящее время несомненна. При необходимости гашения колебаний уже созданных элементов конструкций используют различные управляемые и неуправляемые устройства – гасители колебаний (vibration absorbers). Наиболее известными и распространенными устройствами являются амортизаторы, которые широко распространены во всех отраслях машиностроения, в частности, в автомобилестроении. Как правило, моделирование наличия гасителей осуществляется на базе систем с конечным числом степеней свободы (зачастую одномассовых). При таком подходе элементы конструкций рассматриваются как недеформируемые тела.

Исследуется нестационарное деформирование прямоугольной пластины средней толщины с установленным на ней гасителем колебаний. Предполагается, что возмущающая сила действует поперечно, а влияние гасителя учитывается в виде неизвестной сосредоточенной нагрузки (рис. 4.33).

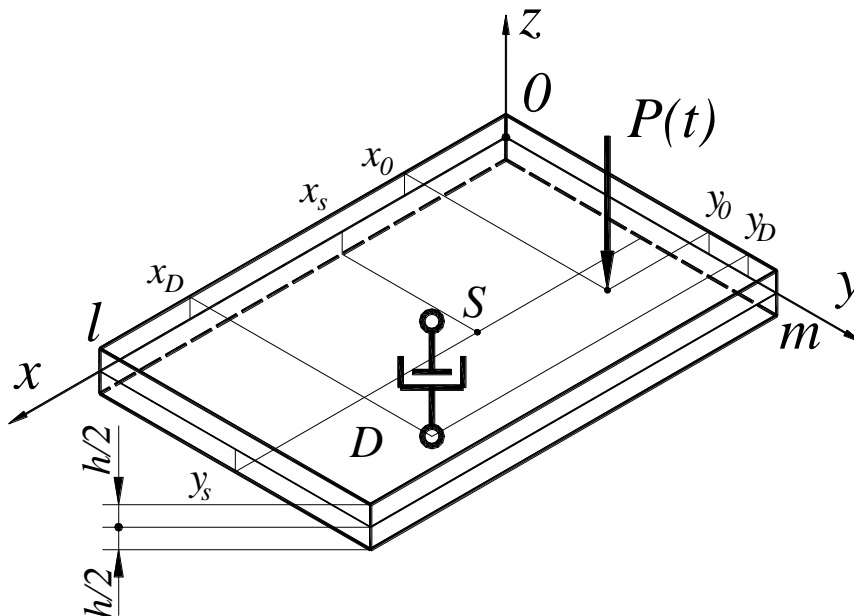


Рис. 4.30. Дополнительная демпфирующая опора (амортизатор)

Прямая задача может быть сведена к интегральному уравнению Вольтерра I рода, решение которого осуществляется с использованием РА Тихонова, так как задача является некорректной:

$$\int_0^t R(\tau) \left[K_R(t - \tau) + \frac{1}{\kappa} \right] d\tau = \int_0^t P(\tau) K_P(t - \tau) d\tau. \quad (4.32)$$

В результате решения находится сила взаимодействия между гасителем и пластиной $R(t)$, что позволяет определять компоненты перемещения во времени во всех точках пластины.

Решение обратной задачи. В случае когда требуется определить неизвестный закон изменения во времени возмущающей нагрузки $P(t)$ необходимо знать изменение прогиба хотя бы в одной точке пластины. Пусть в некоторой точке S пластины $w(x_S, y_S, t)$ известно изменение прогиба во времени (например, экспериментальные данные) – задача сводится к решению системы двух интегральных уравнений Вольтерра I рода (так как неизвестных сил в этом случае будет уже две – это $P(t)$ и $R(t)$ – также неизвестная реакция между гасителем и пластиной):

$$\begin{cases} \int_0^t P(\tau) K_{DP}(t-\tau) d\tau - \int_0^t R(\tau) \left[K_{DR}(t-\tau) + \frac{1}{\kappa} \right] d\tau = 0, \\ \int_0^t P(\tau) K_{SP}(t-\tau) d\tau - \int_0^t R(\tau) K_{SR}(t-\tau) d\tau = w(x_S, y_S, t). \end{cases} \quad (4.33)$$

Согласно РА Тихонова производится конечномерная аппроксимация системы интегральных уравнений (СИУ). После дискретизации в матричном виде система (4.33) будет иметь вид аналогичный (4.21), отличаться будут только матрицы \mathbf{A}_{ij} , так как изменились соответствующие ядра в СИУ.

Далее представлены результаты вычислений. Численные расчеты производились при следующих значениях: $\rho=7890 \text{ кг/м}^3$; $\nu=0.3$; $E=2.07 \cdot 10^{11} \text{ Па}$; $h=0.04 \text{ м}$; $l=0.6 \text{ м}$, $m=0.4 \text{ м}$.

Координаты точки приложения возмущающей силы: $x_0=0.3 \text{ м}$, $y_0=0.2 \text{ м}$.

Координаты установленного на пластине гасителя: $x_D=0.3 \text{ м}$, $y_D=0.2 \text{ м}$.

Первым рассмотрен случай, как и для дополнительной линейно-упругой опоры, когда нестационарная сила действует в центре пластины и гаситель установлен в том же месте под пластиной – см. рис. 4.31.

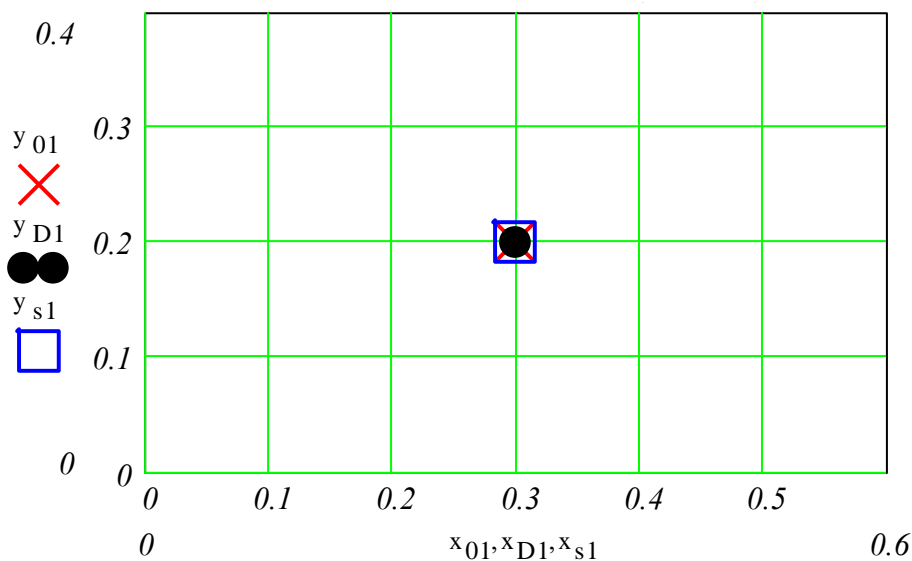


Рис. 4.31. Схема нагружения пластины в плане:

- × – точка нагружения внешней силой;
- – точка присоединения гасителя.

На рис. 4.32 показаны изменения во времени реакции между пластиной и установленным на ней гасителем колебаний при трёх различных значениях параметра регуляризации:

$\alpha_R = 10^{-24}$ – относительно «большое» значение параметра регуляризации (очень приближенное решение, не совсем физичное – в начальный момент времени реакция должна быть равна нулю).

$\alpha_R = 10^{-31}$ – значение параметра регуляризации из оптимального диапазона (как будет показано далее на рис. 4.33).

$\alpha_R = 10^{-36}$ – слишком «малое» значение параметра регуляризации (недостаточно регуляризованное решения – видны осцилляции идентифицируемой реакции, т.е. теряется устойчивость решения).

Параметр регуляризации α_R целесообразно выбирать на основе минимизации ранее описанных функционалов невязки (показан линией с круглыми точками) и «суммарной реакции» (линия с квадратными точками) вид которых приведен на рис. 4.33. Из рисунка видно, что область оптимальных значений параметра регуляризации лежит в диапазоне $10^{-34} \leq \alpha_R \leq 10^{-31}$, когда невязка мала, а «суммарная реакция» еще не начала сильно расти (то есть до начала осцилляций при идентификации реакции $R(t)$).

На рис. 4.34 приведены кривые изменения прогиба в центре пластины без гасителя – кривая 1 ($w_P(t)$); прогиб, вызванный реакцией между пластиной и гасителем – кривая 2 ($w_D(t)$); и кривая суммарного прогиба, вызванного действием внешней силы $P(t)$ и реакции $R(t)$ – кривая 3 ($w_\Sigma(t)$).

Кривые 2 и 3 на рис. 4.34 получены при значении коэффициента демпфирования $\kappa = 10^5$ кг/с и параметра регуляризации $\alpha_R = 10^{-31}$.

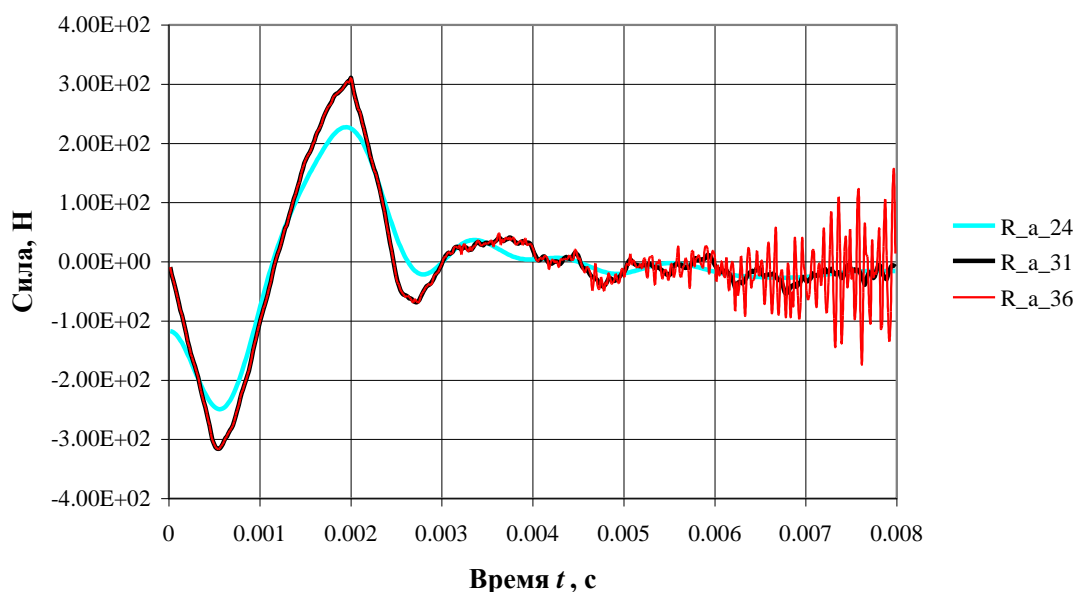


Рис. 4.32. Реакции гасителя при различных значениях параметра регуляризации

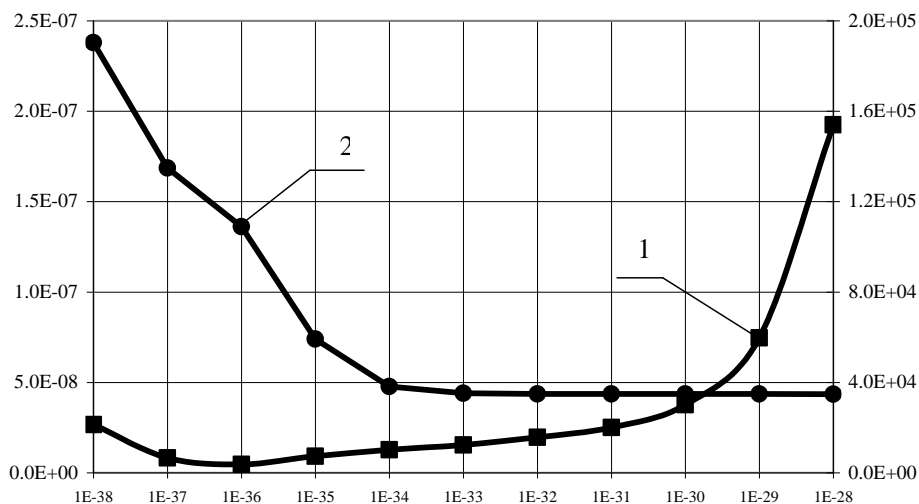


Рис. 4.33. К выбору значений параметров регуляризации α_R

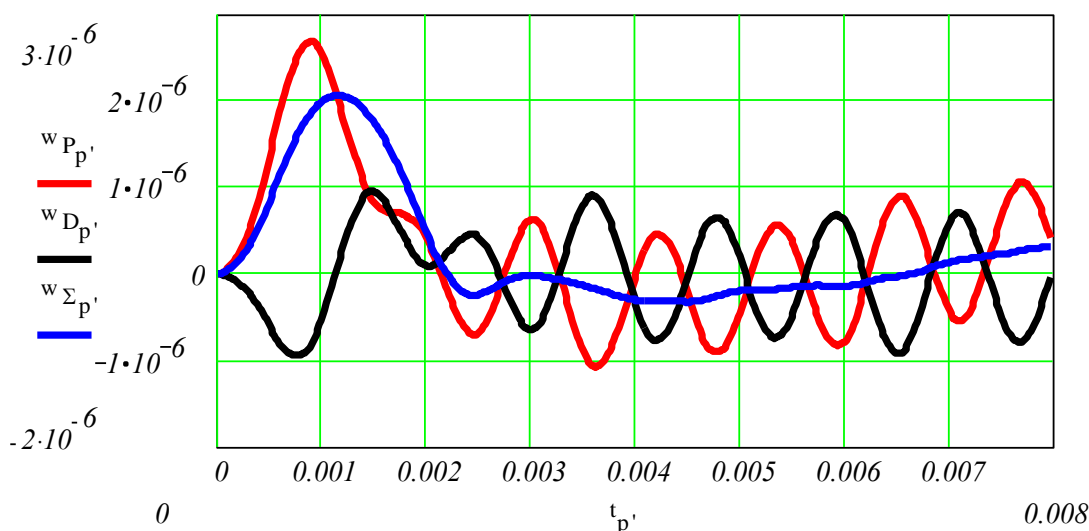


Рис. 4.34. Изменение прогиба центра пластины

На рис. 4.35 и рис. 4.36 показано влияние коэффициента демпфирования на суммарный прогиб пластины и величину реакции между пластиной и гасителем колебаний.

Укажем, что для приведенного примера численного расчета при коэффициентах демпфирования $\kappa < 10^4$ кг/с величина реакции гасителя мала (изменения прогиба пластины практически полностью совпадают с прогибом без гасителя) и влиянием амортизатора можно пренебречь. При увеличении коэффициента демпфирования $\kappa > 10^6$, так как гаситель установлен в месте под нагрузкой, он поглощает практически всю нагрузку, а сама пластина практически не деформируется. Описанные результаты позволяют судить о достоверности полученного решения, так как выполняются два предельных случая – сверхмалого и очень большого демпфирования (по аналогии с выполнением предельных переходов для аналитического решения).

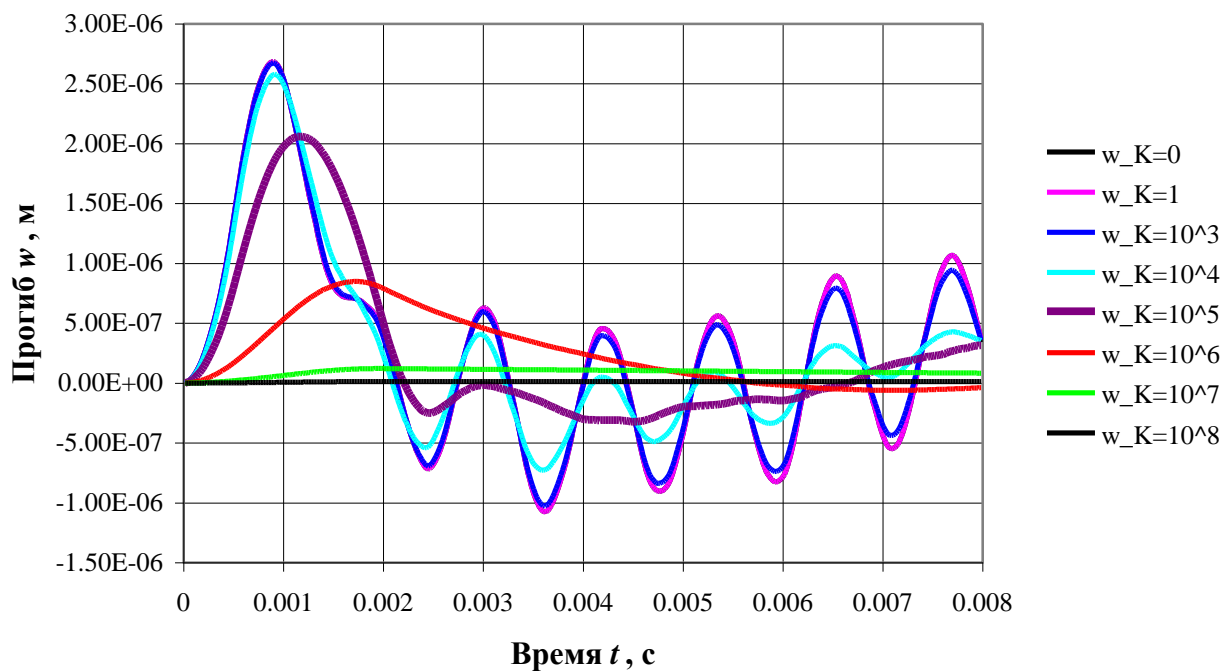


Рис. 4.35. Изменение прогиба центра пластины

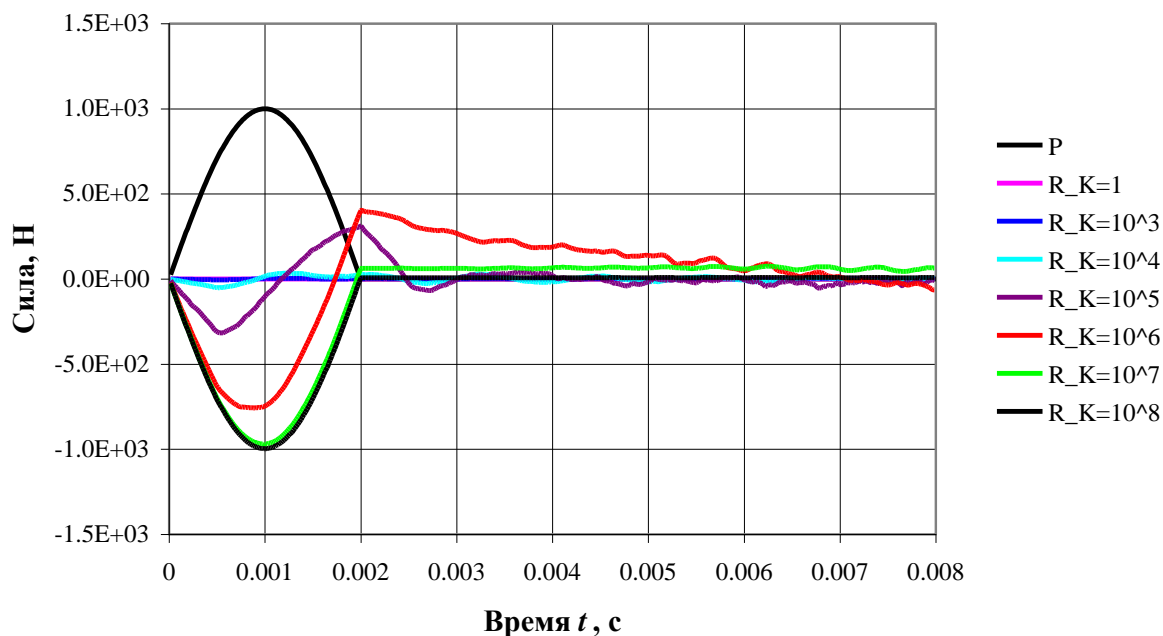


Рис. 4.36. Изменение возмущающей силы и реакции гасителя

При вычислениях, связанных с прямой задачей, рассматривались и другие варианты нагружения. На рис. 4.37, рис. 4.38 и рис. 4.39 приведен расчет с такими же исходными данными, как и в предыдущем случае, за исключением координат точек. Координаты точки приложения возмущающей нагрузки: $x_0=0.2$ м, $y_0=0.2$ м. Координаты установленного на пластине гасителя: $x_D=0.4$ м, $y_D=0.2$ м.

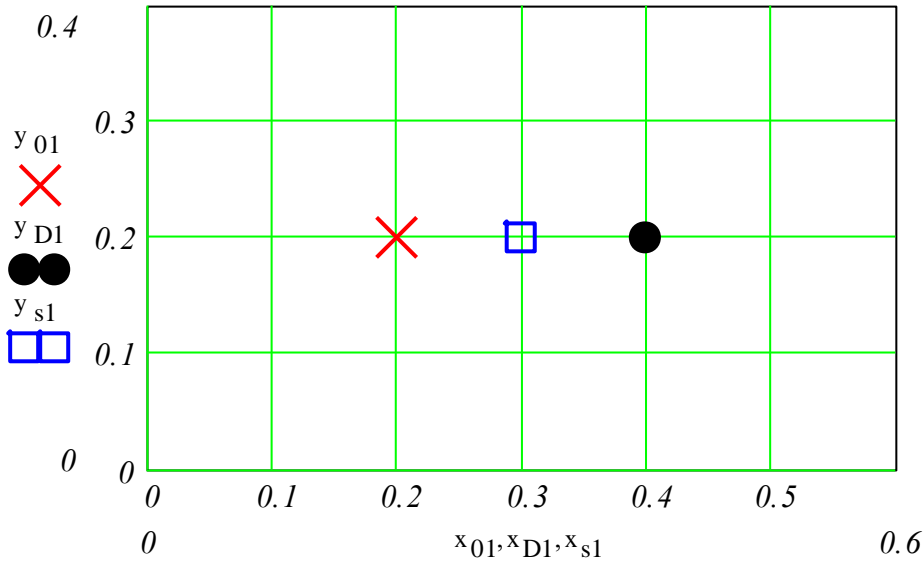


Рис. 4.37. Схема нагружения пластины в плане:
 × – точка нагружения внешней силой;
 • – точка присоединения гасителя.

На рис. 4.38 приведены кривые изменения прогиба в центре пластины без гасителя – кривая 1 и при разных коэффициентах демпфирования амортизатора (кривая 2 – $\kappa = 10^4$ кг/с; кривая 3 – $\kappa = 10^5$ кг/с; кривая 4 – $\kappa = 10^6$ кг/с; кривая 5 – $\kappa = 10^7$ кг/с).

На рис. 4.39 показаны изменения во времени внешней возмущающей силы – кривая 1, а также и реакции между пластиной и установленным на ней гасителем колебаний (кривые 2-5 соответственно).

Укажем, что при вычислениях графиков, приведенных на рис. 4.38 и рис. 4.39 параметр регуляризации принимался $\alpha_R = 10^{-31}$.

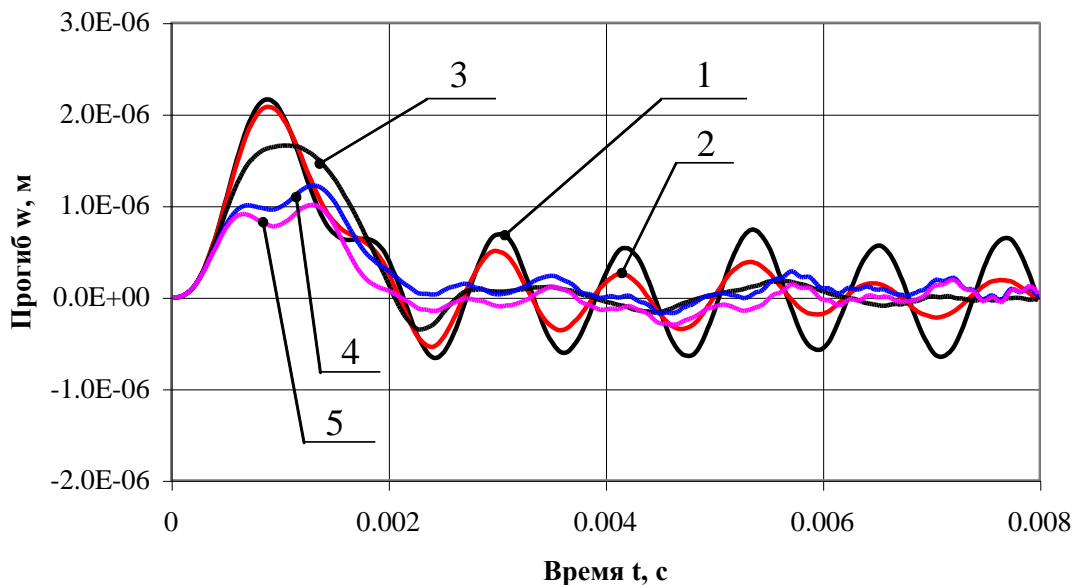


Рис. 4.38. Изменение прогиба центра пластины

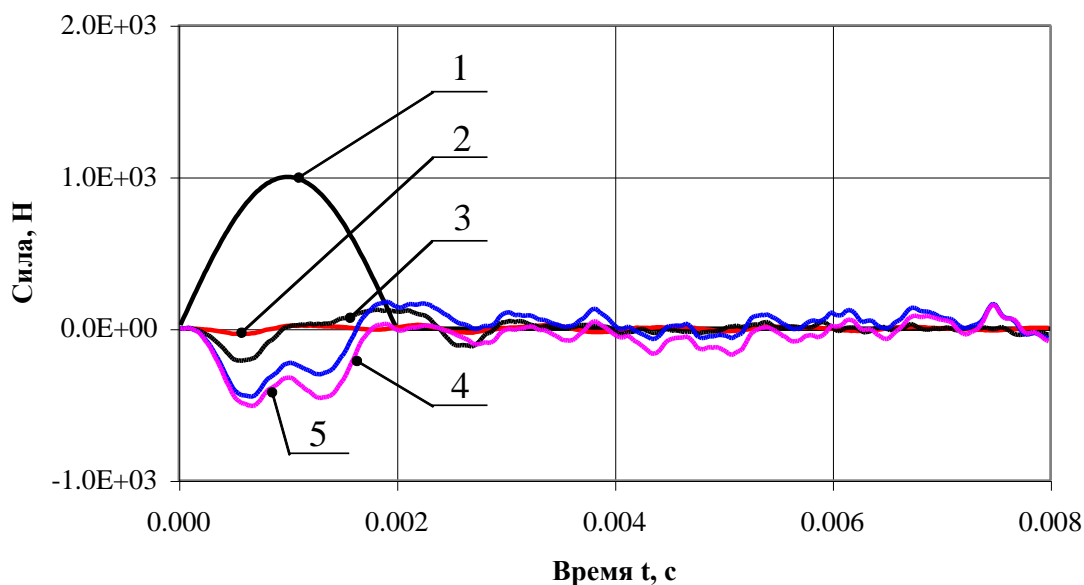


Рис. 4.39. Изменение возмущающей силы и реакции гасителя

На основе предложенного подхода при моделировании нестационарного деформирования прямоугольной пластины, с установленным на ней гасителем колебаний, имеется возможность получать устойчивые аналитико-численные решения задач механики твердого деформируемого тела.

При вычислениях, которые соответствовали обратной задаче, использовались исходные данные такие же, как в предыдущих расчетах, за исключением координат:

$x_0=0.15$ м, $y_0=0.3$ м – координаты точки нагружения;

$x_D=0.45$ м, $y_D=0.15$ м – координаты места установки амортизатора;

$x_S=0.25$ м, $y_S=0.1$ м – координаты датчика прогиба пластины;

коэффициент демпфирования амортизатора $\kappa = 10^5$ Н/(м/с).

При проведении расчетов на величины прогибов $w_s(t)$, которые являются результатами решения прямой задачи при заданном законе изменения во времени внешней нагрузки $P(t)$, налагался “Гауссов шум”, механизм наложения которого описывался ранее, см. формулу (4.27). Укажем, что для приведенного численного расчета относительная погрешность “зашумления” принималась $\delta = 0.2$.

На рис. 4.40 показана схема нагружения пластины в плане для обратной задачи.

На рис. 4.41 показаны исходные для идентификации – “зашумленное” изменение прогиба (w_δ), а также для визуальной оценки зашумления – точные значения изменения прогиба (w_s).

На рис. 4.42 для удобства оценки идентификации показано изменение возмущающей нагрузки $P(t)$ (полуволна синусоиды – тонкая кривая) и идентифицированные значения возмущающей силы $P(t)$ (показаны точками), а также определенная в результате решения прямой задачи реакция амортизатора

$R(t)$ (тонкая кривая) и идентифицированные значения реакции амортизатора $R(t)$ (показаны точками).

Идентифицированные значения $P(t)$ и $R(t)$ были получены при значениях параметров регуляризации $\alpha_P = 10^{-45}$, а $\alpha_R = 10^{-45}$. Как видно из рис. 4.42 идентифицированные силы (найденные при решении блочной СЛАУ) хорошо накладываются на кривые, соответствующие точным значениям (с исходными данными для прямой задачи).

Параметры регуляризации α_P и α_R определялись на основе минимизации по α соответствующих функционалов относительной невязки и суммарной нагрузки (4.28)-(4.31), которые показаны на рис. 4.43.

Описание следующих рис. 4.43 и рис. 4.44 подобно описанию аналогичных рисунков из предыдущего пункта – рис. 4.27 и рис. 4.28 соответственно.

Из анализа функционалов, приведенных на рис. 4.43 и компромиссных кривых рис. 4.44 можно выделить следующие оптимальные диапазоны для параметров регуляризации: $10^{-46} \leq \alpha_P \leq 10^{-43}$ и $10^{-46} \leq \alpha_R \leq 10^{-43}$.

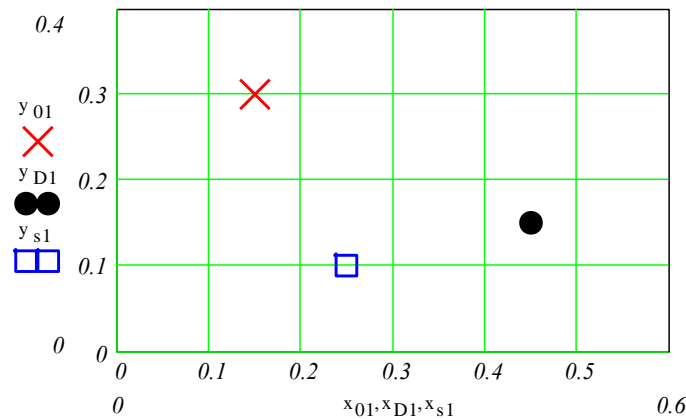


Рис. 4.40. Схема нагружения пластины для обратной задачи:
 × – точка нагружения внешней силой;
 • – точка присоединения дополнительной упругой опоры;
 □ (квадратиком) показана точка установки датчика прогиба

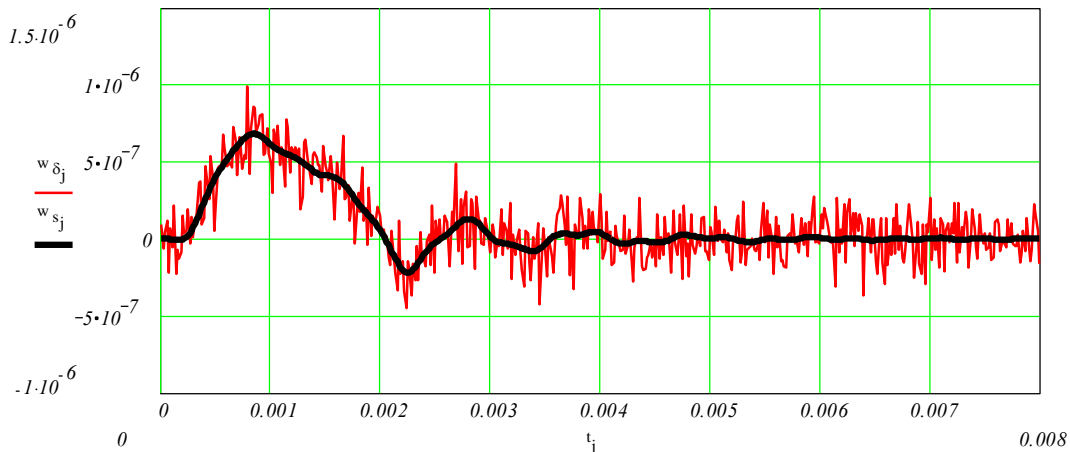


Рис. 4.41. Исходные данные идентификации

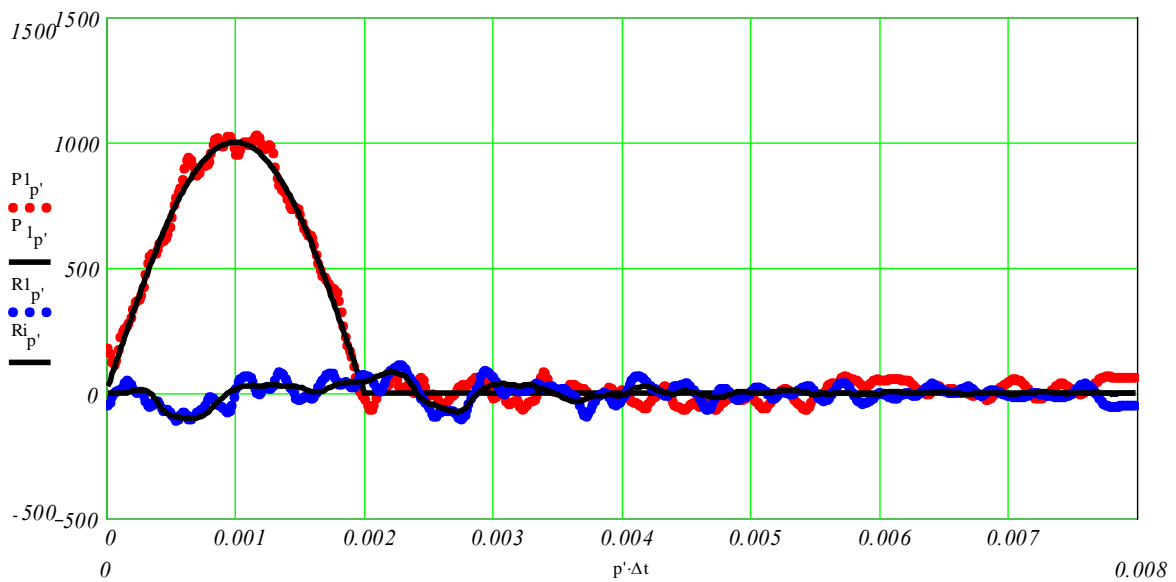
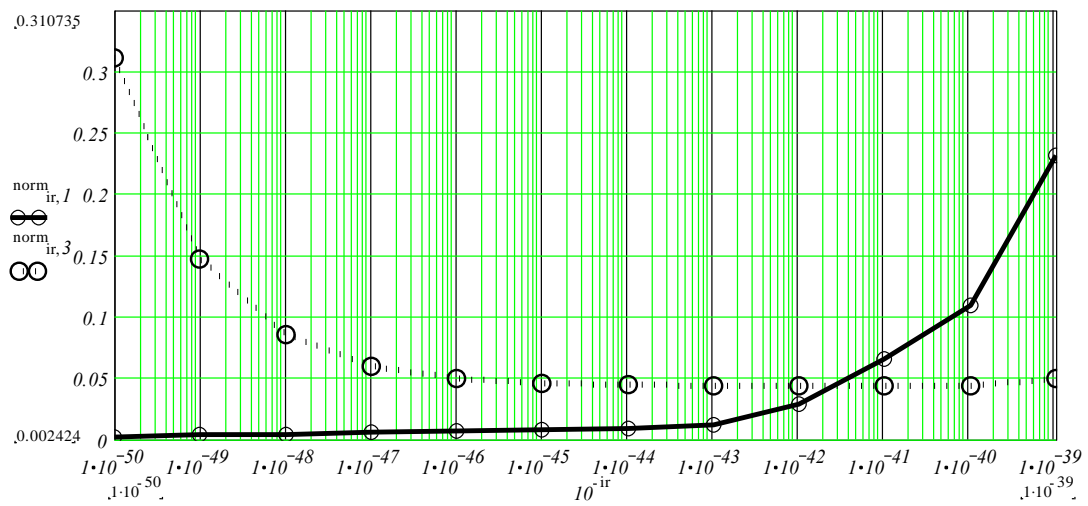
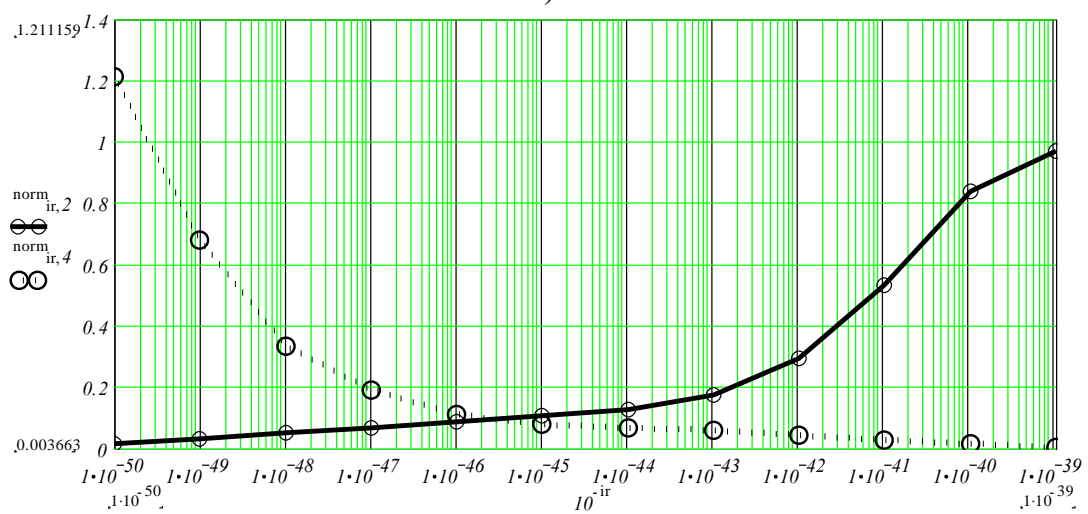


Рис. 4.42. Идентификация неизвестных нагрузок



а)



б)

Рис. 4.43. Выбор значений параметра регуляризации α_p и α_R

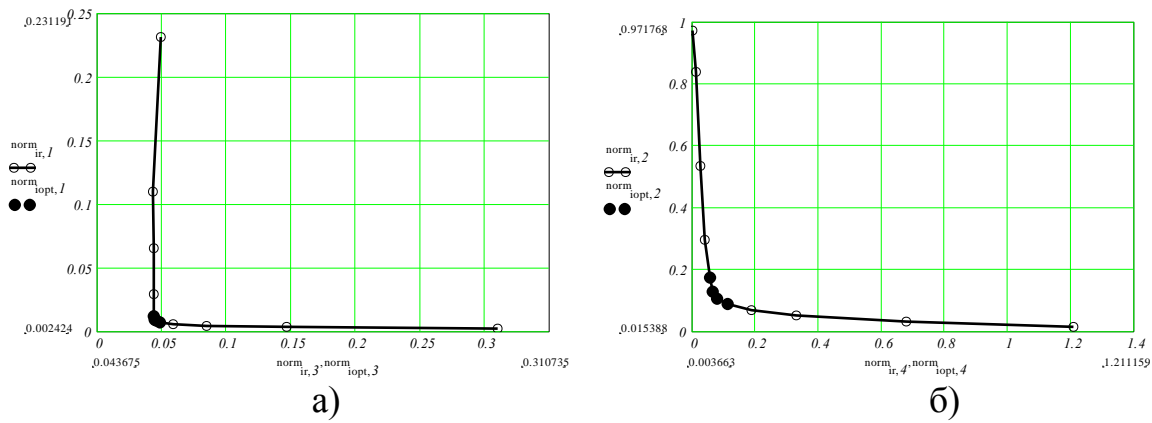


Рис. 4.44. Компромиссные кривые для α_P и α_R

Предложен новый подход при моделировании нестационарного деформирования прямоугольной пластины, с установленным на ней амортизатором, в виде неизвестной силы, которая прикладывается к пластине. На основе предложенного подхода, имеется возможность получать устойчивые аналитико-численные решения прямой и обратной нестационарных задач механики твердого деформируемого тела. Показана возможность идентификации неизвестной возмущающей нагрузки по “зашумленным” исходным данным, что обуславливает применимость описанной методики при экспериментальных исследованиях для реальных результатов измерений.

4.7. Нестационарные колебания пластины с дополнительной вязкоупругой опорой

Механическая система состоит из прямоугольной пластины средней толщины шарнирно-опёртой по контуру и дополнительной сосредоточенной вязкоупругой опоры (рис. 4.45). На пластину воздействует нестационарное нагружение, вызывающее колебания.

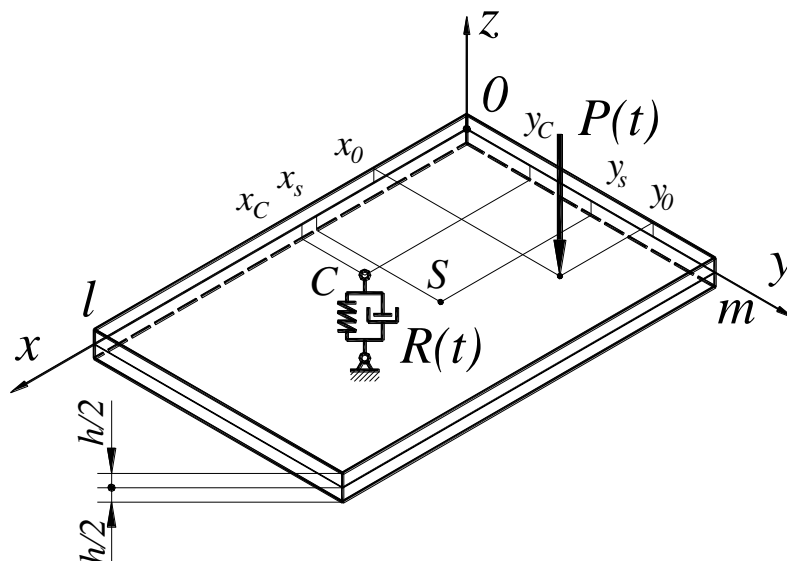


Рис. 4.45. Дополнительная вязкоупругая опора

Рассматриваются дополнительные вязкоупругие опоры, так как на практике крайне редко встречаются чисто упругие или чисто вязкие опоры.

Для точки, в которой находится дополнительная опора, можно записать следующие соотношения для прогиба:

$$\begin{cases} R(t) = c \cdot w_C(x_C, y_C, t) + \kappa \cdot \frac{dw_C(x_C, y_C, t)}{dt}, \\ w(x_C, y_C, t) = \int_0^t P(\tau) K_P^W(x_C, y_C, t - \tau) d\tau - \int_0^t K_R^W(x_C, y_C, t - \tau) R(\tau) d\tau. \end{cases} \quad (4.34)$$

Система интегро-дифференциальных уравнений (4.34) может быть преобразована к системе интегральных уравнений путем замены первого уравнения в (4.34) его интегральным аналогом (4.9):

$$\begin{cases} w(x_C, y_C, t) = \int_0^t K_e(t - \tau) R(\tau) d\tau, \\ w(x_C, y_C, t) = \int_0^t P(\tau) K_P(t - \tau) d\tau - \int_0^t R(\tau) K_R(t - \tau) d\tau, \end{cases} \quad (4.35)$$

где $K_e(t) = \frac{1}{\kappa} \cdot e^{-\frac{c}{\kappa}t}$ – конечно-разностное ядро Коши, учитывающее вязкие (κ) и упругие (c) характеристики дополнительной вязкоупругой опоры, а вид ядер $K_P(t)$ и $K_R(t)$ не однократно приводился ранее.

Исключив в (4.35) $w(x_C, y_C, t)$ получим следующее ИУ Вольтерра I рода:

$$\int_0^t [K_{RC}(t - \tau) + K_e(t - \tau)] R(\tau) d\tau = \int_0^t K_{PC}(t - \tau) P(\tau) d\tau, \quad (4.36)$$

которое после дискретизации в матричном виде можно записать:

$$\mathbf{A}_R^* \mathbf{R} = \mathbf{A}_P \mathbf{P}, \quad (4.37)$$

где матрица \mathbf{A}_R^* соответствует интегральному оператору в левой части (4.36), а \mathbf{A}_P – интегральному оператору в правой части ИУ (4.36).

Уравнение (4.37) решается численно с использованием РА Тихонова.

Для рассматриваемой механической системы возможны следующие постановки обратных задач:

- 1) идентификация параметров внешнего нагружения или получение зависимости изменения внешнего нестационарного нагружения пластины во времени при известной реакции между пластиной и дополнительно опорой;
- 2) определение параметров дополнительной вязкоупругой опоры при известном (тарифованном) нагружении;
- 3) идентификация полной системы нагружения, как возмущающей силы, так и реакции между пластиной и дополнительно опорой;
- 4) подбор требуемых характеристик вязкоупругой опоры (жесткости и коэффициента демпфирования) для обеспечения требуемых параметров

напряженно-деформированного состояния или удовлетворения некоторым ограничениям,

5) идентификация полной системы нагружения, как возмущающей силы, так и составляющих реакций между пластиной и дополнительно опорой, а также мест приложения возмущающей нагрузки и дополнительной опоры.

Пятая постановка из указанных выше является наиболее общей. Решение обратной задачи для пятой постановки будет иметь два этапа – определение координат и нахождение законов изменения во времени этих нагружений (это и есть третья постановка). Поэтому рассмотрим подробно решение обратной задачи для третьей постановки.

В качестве исходных данных для перечисленных обратных задач используются изменения прогиба или деформации пластины во времени (они известны или могут быть измерены экспериментально), причем погрешность их задания (измерения) не превышает величины $\delta > 0$, то есть $\|w_\delta - \bar{w}\| \leq \delta$.

На пластину в некоторой точке воздействует поперечная импульсная нагрузка $P(t)$, вызывающая нестационарные колебания пластины с дополнительной опорой. Деформирование пластины моделируется в рамках уточненной теории пластин средней толщины типа С. П. Тимошенко. Воздействие дополнительной опоры на пластину заменяется неизвестной нестационарной силой $R(t)$, приложенной к пластине в месте установки опоры. Коэффициенты жесткости и демпфирования опоры считаются постоянными.

В точке $S(x_S, y_S)$ (см. рис. 4.45) аналитическое выражение для определения прогиба пластины будет иметь следующий вид:

$$w(x_S, y_S, t) \equiv w_S(t) = \int_0^t K_P^W(x_S, y_S, t - \tau)P(\tau)d\tau - \int_0^t K_R^W(x_S, y_S, t - \tau)R(\tau)d\tau. \quad (4.38)$$

Если в выражении (4.38) неизвестно изменение во времени возмущающей нагрузки $P(t)$ и реакции между пластиной и дополнительной опорой $R(t)$, то это выражение является интегральным уравнением (ИУ) Вольтера с двумя неизвестными. Для решения обратной задачи интегральное уравнение (4.38) необходимо дополнить двумя выражением для прогиба в точке контакта пластины и дополнительной опоры (4.36).

Тогда из (4.38) и (4.36) можно составить следующую систему ИУ:

$$\begin{cases} \int_0^t K_{11}(t - \tau)P(\tau)d\tau + \int_0^t K_{12}(t - \tau)R(\tau)d\tau = w_S(t); \\ \int_0^t K_{21}(t - \tau)P(\tau)d\tau + \int_0^t K_{22}(t - \tau)R(\tau)d\tau = 0, \end{cases} \quad (4.39)$$

где ядра можно определить как $K_{11}(t) = K_P^W(x_S, y_S, t)$, $K_{12}(t) = K_R^W(x_S, y_S, t)$, $K_{21}(t) = K_P^W(x_C, y_C, t)$, $K_{22}(t) = K_R^W(x_C, y_C, t) + K_e(t)$.

Решение подобной системы ИУ Вольтерра можно отнести к некорректным задачам математической физики (причем, как по Адамару, так и по Тихонову) и для решения системы (4.39) использовался РА Тихонова.

Дискретный аналог системы ИУ (4.39) имеет следующий вид:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_s \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

В матричной системе (4.40) вектор \mathbf{p}_1 соответствует неизвестной функции изменения во времени внешней нагрузки $P(t)$, вектор \mathbf{p}_2 – реакции между пластиной и дополнительной вязкоупругой опорой $R(t)$, \mathbf{w}_s – исходным данным для идентификации (изменениям прогиба) $w_s(t)$; матрицы \mathbf{A}_{11} , \mathbf{A}_{12} , \mathbf{A}_{21} и \mathbf{A}_{22} – соответствуют ядрам $K_{11}(t)$, $K_{12}(t)$, $K_{21}(t)$ и $K_{22}(t)$.

Матричная система (4.40) сводится к двум независимым матричным уравнениям на основе обобщения метода Крамера, т.е. применения обобщенного алгоритма Крамера для блочных матриц:

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{p}_j = \mathbf{D}_j, \quad (4.41)$$

где \mathbf{D} – определитель блочной матрицы \mathbf{A} , а \mathbf{D}_j – определитель блочной матрицы \mathbf{A}_j , в которой j -й столбец заменялся столбцом правой части.

Каждое матричное уравнение (4.41) является независимой системой линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) и согласно РА Тихонова здесь решались эквивалентные регуляризованные СЛАУ вида:

$$(\mathbf{D}^T \mathbf{D} + \alpha_j \mathbf{C}) \cdot \mathbf{p}_j = \mathbf{D}^T \mathbf{D}_j \quad (4.42)$$

где \mathbf{C} – симметричная трехдиагональная матрица, вид которой для безразмерной задачи приведен в [101, 109, 119], а в работе [33] указаны варианты обезразмеривания, $\alpha_j > 0$ – параметр регуляризации, оптимальный выбор которого в подобных задачах также описан в [33] и производится путем введения и минимизации функционалов типа невязки с учетом дополнительных условий и ограничений, базирующихся на априорной информации об искомым неизвестных силах.

В результате решения двух СЛАУ вида (4.42) находится сила взаимодействия между пластиной и дополнительной вязкоупругой опорой $R(t)$ и неизвестная возмущающая нагрузка $P(t)$.

При расчетах срединная плоскость пластины была связана с плоскостью xOy декартовой системы координат. Численные расчеты производились при следующих значениях: $\rho=7890$ кг/м³; $\nu=0.3$; $E=2.07 \cdot 10^{11}$ Па; $h=0.04$ м; $l=0.6$ м, $m=0.4$ м. Координаты точки приложения возмущающей нагрузки: $x_0=0.4$ м, $y_0=0.2$ м. Координаты точки крепления дополнительной вязкоупругой опоры к пластине: $x_c=0.2$ м, $y_c=0.2$ м. Координаты точки, в которой изменение прогиба считается известным: $x_s=0.3$ м, $y_s=0.2$ м. Значение коэффициента жесткости дополнительной опоры $c = 10^8$ Н/м, а коэффициент демпфирования $\kappa = 4 \cdot 10^4$ Н·с/м; число членов в соответствующих двойных рядах Фурье 50×50 .

Далее описывается вычислительный эксперимент, в котором значения прогиба не измеряются на реальной пластине, а определяются из решения прямой (тестовой) задачи, в которой возмущающая нагрузка $\overline{P(t)}$ задается. В качестве исходных данных (рис. 4.46) брались значения прогиба в точке $S - \overline{w(t)}$, взятые из решения прямой задачи – толстая (незашумленная) кривая, а также использовались значения прогиба, на которые был наложен шум по зависимости:

$$w_{\delta}(t) = \overline{w(t)} + w_{\max} \cdot \delta \cdot Rnd(t) \quad (4.43)$$

где w_{\max} – максимальное значение прогиба пластины в исследуемой точке при действии нагрузки $\overline{P(t)}$, $Rnd(t)$ – случайные числа в диапазоне $[-1;1]$, $\delta = 20\%$ – уровень накладываемого шума.

В случае правильного решения обратной задачи, идентифицированные силы $P(t)$ и $R(t)$ должны быть близки (или совпадать) с тестовой силой $\overline{P(t)}$ и определенной при решении прямой задачи реакцией $\overline{R(t)}$, что наглядно показывает достоверность полученных результатов. Также появляется возможность как качественной, так и количественной оценки решения обратной задачи.

На рис. 4.47 сплошными линиями показано изменение во времени возмущающей нагрузки $\overline{P(t)}$ (полуволна синусоиды) и определенная в результате решения прямой задачи реакция между пластиной и дополнительной вязкоупругой опорой $\overline{R(t)}$, а точками показаны идентифицированные значения сил $P(t)$ и $R(t)$ найденные из численно-аналитического решения обратной задачи по незашумленным исходным данным.

На рис. 4.48 показаны идентифицированные значения сил $P(t)$ и $R(t)$ найденные на основе численного решения интегральных уравнений Вольтера с неточно заданной правой частью (по зашумленным исходным данным).

На рис. 4.49 и рис. 4.50 показаны функционалы, на основе которых выбирался параметр регуляризации α при решении регуляризованных СЛАУ вида (4.42), причем рис. 4.49 соответствует невозмущенной правой части $\overline{w(t)}$, а рис. 4.50 – зашумленным исходным данным $w_{\delta}(t)$.

Кривым 1 на рис. 4.49 и рис. 4.50 соответствуют значения функционала «невязки» вида:

$$\left\| \mathbf{A}_P \cdot \mathbf{P}^{\alpha} + \mathbf{A}_R \cdot \mathbf{R}^{\alpha} - \mathbf{w} \right\|_{l_2}^2. \quad (4.44)$$

Укажем, что в случае незашумленной правой части «невязка» должна стремиться к нулю и оптимальные значения параметра регуляризации соответствуют глобальному минимуму функционала, как видно на рис. 4.49 кривая 1 – это значение параметра регуляризации $\alpha_{opt} = 10^{-51}$. Использование в качестве исходных данных зашумленных значений (в тестовой задаче –

случайное зашумление, при реальных измерениях – погрешности усиления, преобразования и пр.) влечет отсутствие механической обусловленности глобального минимума функционала «невязки». Следовательно нас интересует нахождение не глобального минимума (который может не существовать, или же параметр регуляризации может соответствовать не физическим значениям определяемых функций $P(t)$ и $R(t)$), а локального минимума или перегиба кривой, соответствующей функционалу «невязки» – на рис. 4.50 кривая 1 можно выделить значение параметра регуляризации $\alpha \leq 10^{-42}$.

Для дальнейшего выбора параметра регуляризации требуется, используя априорную информацию об идентифицируемых нагрузках, вводить дополнительные ограничения или функционалы, например, кривые 2 на рис. 4.49 и рис. 4.50 соответствуют значениям функционала «суммарного воздействия» возмущающей нагрузки и реакции дополнительной опоры:

$$\|\mathbf{P}^\alpha\|_{l_2}^2 + \|\mathbf{R}^\alpha\|_{l_2}^2, \quad (4.45)$$

так как внешняя возмущающая нагрузка $\overline{P(t)}$ конечна (и ограничена определенной максимальной величиной), а величина реакции между пластиной и дополнительной опорой $\overline{R(t)}$ должна по возможности принимать минимальные значения, но не равные нулю (что соответствовало бы отсутствию реакции).

Для незашумленных данных на рис. 4.49 (кривая 2) видно, что величина функционала «суммарного воздействия» практически не изменяется в диапазоне $\alpha \in [10^{-53}; 10^{-42}]$, что объясняется вычислительной устойчивостью алгоритма при невозмущенной правой части. В случае зашумленных исходных данных функционал «суммарного воздействия» оказывается очень чувствителен к возмущению, это позволяет нам выделить рациональную зону параметра регуляризации в диапазоне $\alpha \in [10^{-44}; 10^{-42}]$ (см. рис. 4.50 кривая 2). Так как решается тестовая обратная задача (известны точные значения искомых функций $\overline{P(t)}$ и $\overline{R(t)}$), то имеется возможность «оценки» идентификации посредством анализа функционала вида:

$$\|\mathbf{P}^\alpha - \overline{\mathbf{P}}\|_{l_2}^2 + \|\mathbf{R}^\alpha - \overline{\mathbf{R}}\|_{l_2}^2, \quad (4.46)$$

значения которого представлены на рис. 4.51, где кривая 1 получена для решения обратной задачи с невозмущенными исходными данными, а кривая 2 – для зашумленных значений прогиба $w_\delta(t)$.

Отметим, что на рис. 4.49, рис. 4.50 и рис. 4.51 значения вдоль оси абсцисс для наглядности отложены на логарифмической шкале, а на рис. 4.49 и рис. 4.51 также на логарифмической шкале отложены и значения вдоль оси ординат (на рис. 4.49 в левом нижнем углу показана кривая 2 с осью ординат, отложенной на обычной шкале).

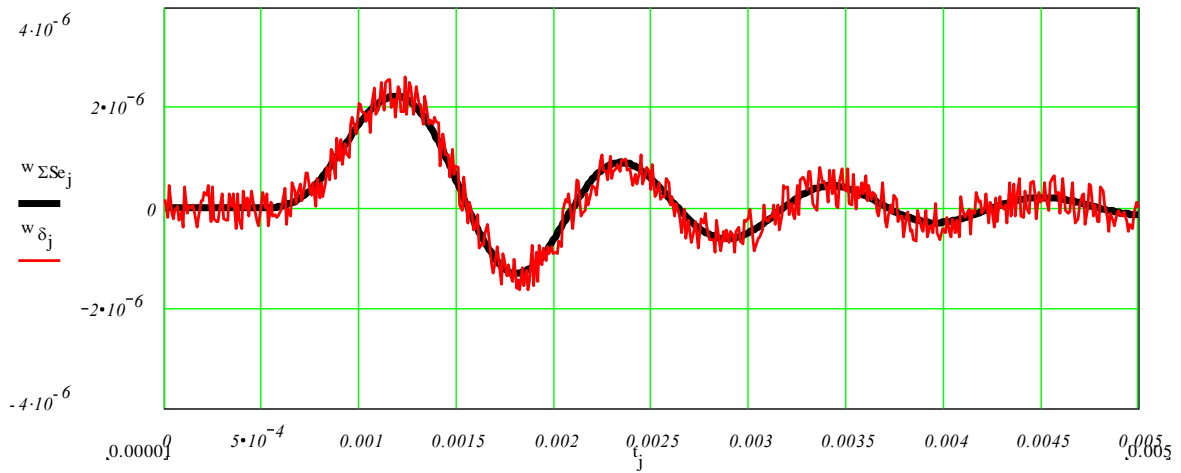


Рис. 4.46. Исходные данные для обратной задачи

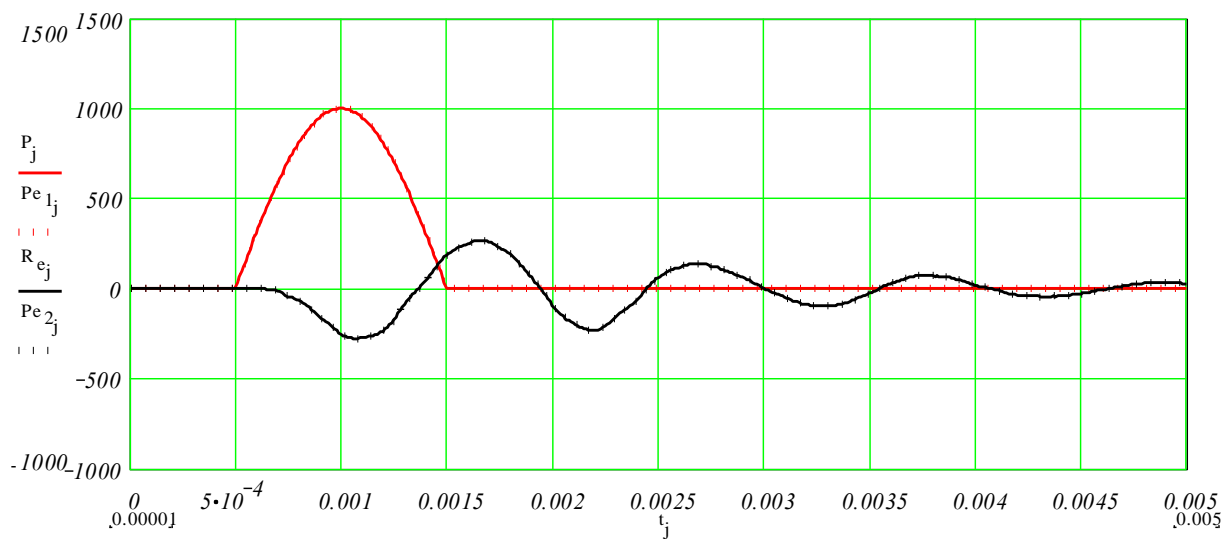


Рис. 4.47. Возмущающая нагрузка и реакция дополнительной вязкоупругой опоры

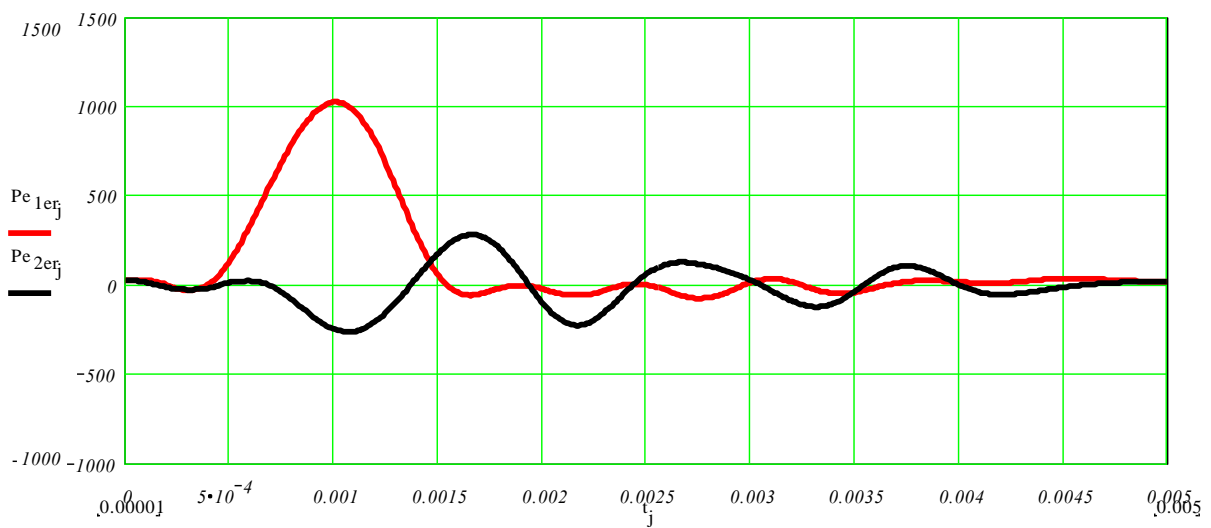


Рис. 4.48. Результаты решения задачи идентификации.

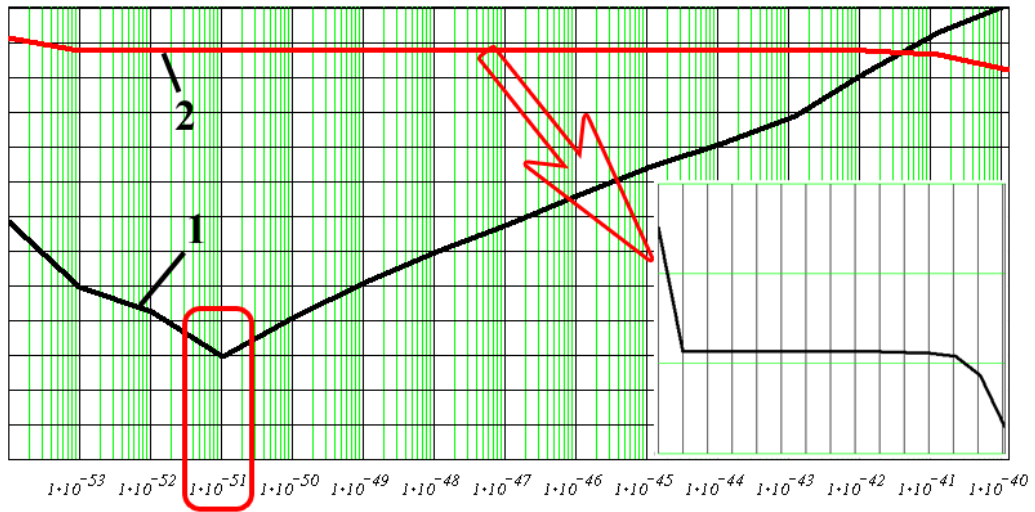


Рис. 4.49. Выбор параметра регуляризации для точно заданной правой части

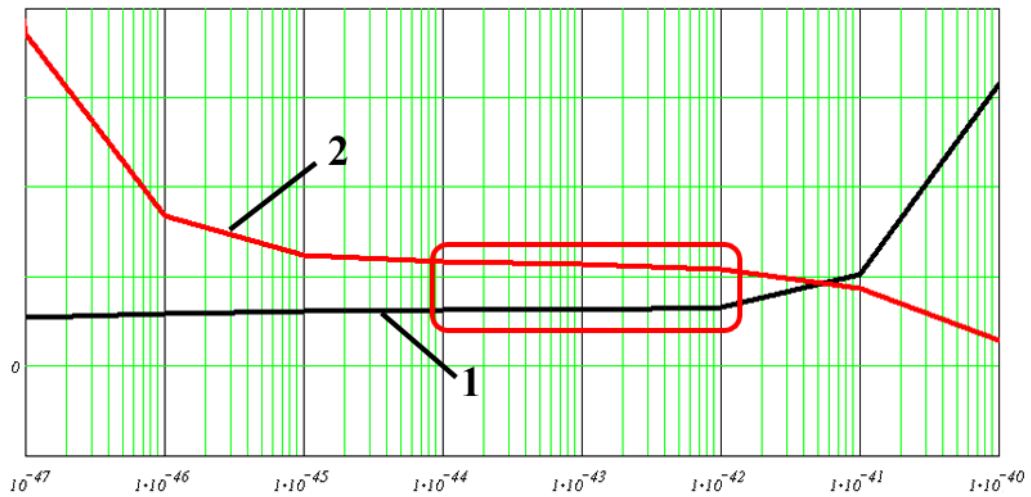


Рис. 4.50. Выбор параметра регуляризации для зашумлённой правой части

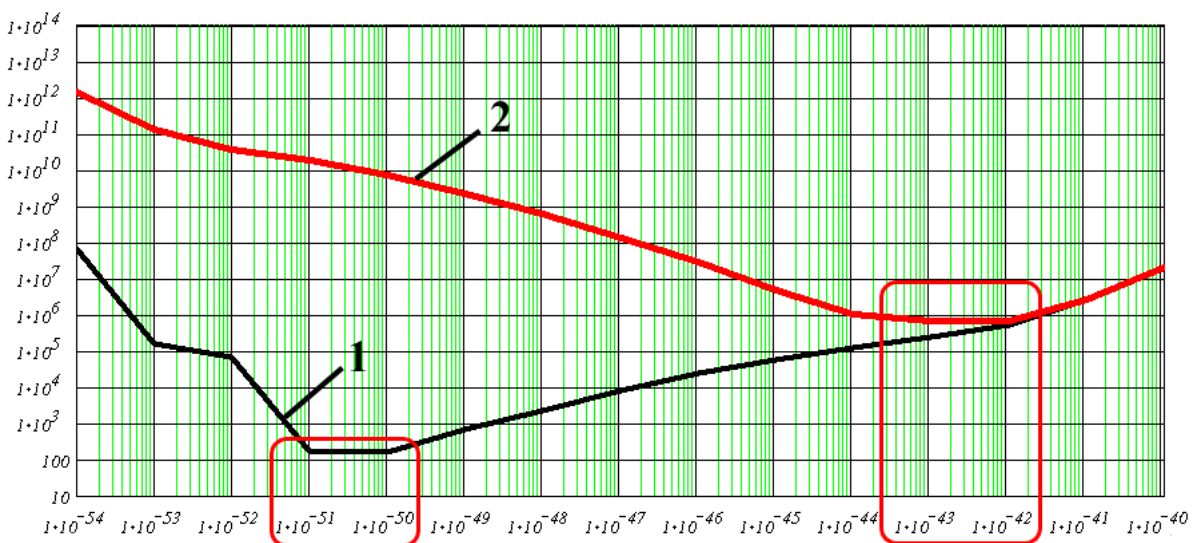


Рис. 4.51. Оценка идентификации

На рис. 4.51 можно четко выделить оптимальные значения параметра регуляризации для незашумленного случая $\alpha_{opt} \in [10^{-51}; 10^{-50}]$ (значение функционала немного меньше при $\alpha = 10^{-51}$) и для зашумленного – $\alpha_{opt} \in [10^{-43}; 10^{-42}]$ (значение функционала немного меньше при $\alpha = 10^{-43}$). Отметим, что, не используя точные значения сил $\overline{P(t)}$ и $\overline{R(t)}$ (в реальной задаче они были бы неизвестны), удалось определить значения параметра регуляризации близкие к оптимальным. Идентифицированные нагрузки, приведенные на рис. 4.47 и рис. 4.48 рассчитаны как раз при этих оптимальных значениях $\alpha = 10^{-51}$ и $\alpha = 10^{-43}$ соответственно.

Описана методика решения обратной задачи идентификации неизвестных нагрузок, вызывающих нестационарное деформирование пластины с дополнительной опорой, согласно которой получены устойчивые аналитико-численные решения без использования итерационных схем.

4.8. Распределение вязкой и упругой составляющих в реакции дополнительной вязкоупругой опоры, контактирующей с пластиной

В случае, когда при решении задачи приоритетом является определение внешнего возмущающего воздействия во времени $P(t)$, методика, описанная в выше, демонстрирует достаточно высокую эффективность. В указанных задачах влияние вязкоупругой опоры, заменялось одной реакцией (4.8), что позволяет определить ее в результате решения соответствующей прямой или обратной задачи.

Однако для задач, связанных с идентификацией точных параметров вязкоупругой опоры (жесткости и вязкости), или при оптимальном проектировании дополнительных опор, снижающих амплитуды прогибов, определение полной реакции недостаточно. Необходимо знать отдельно влияние вязкой и упругой составляющей реакции. В этом случае целесообразно рассмотреть задачу в следующей постановке: пусть прямоугольная пластина имеет две независимые дополнительные опоры – вязкую (демпфирующую) и линейно упругую, которые приложены в двух разных точках (рис. 4.52).

Предполагается, что точка D с координатами проекции на срединную плоскость пластины (x_D, y_D) – это место контакта с демпфером, действие которого заменяется реакцией $R_D(t) = k \cdot dw(x_D, y_D, t) / dt$, а точка C с координатами (x_C, y_C) – место контакта с линейно упругой дополнительной опорой (своего рода жесткой пружиной), реакция которой $R_C(t) = c \cdot w(x_C, y_C, t)$.

В общем случае предполагается, что точки C и D не совпадают, но расположены на небольшом расстоянии, то в силу принципа суперпозиции совместное действие вязкой и упругой опор приблизительно совпадает с действием вязкоупругой опоры $R(t) = R_D(t) + R_C(t)$.

Если же (в частном случае) точки C и D совпадают, то с точки зрения механики совместное воздействие вязкой и упругой опор эквивалентно влиянию вязкоупругой опоры. Решение для частного случая оказалось возможным, поскольку разрешающая система уравнений в прямой и обратной задачах получилась не вырожденной.

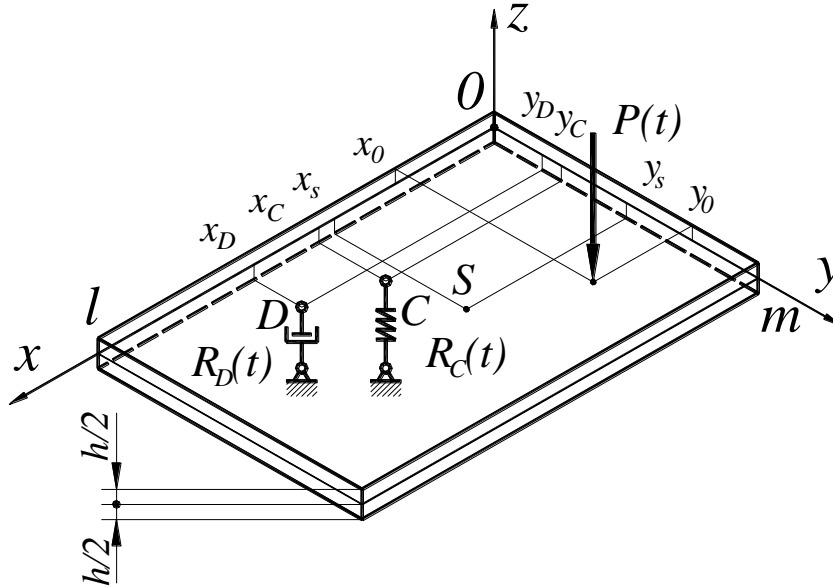


Рис. 4.52. Пластина с двумя дополнительными независимыми опорами.

На основе (4.1) можно записать следующие выражения для точек контакта с демпфером (x_D, y_D) и линейно упругой дополнительной опорой (x_C, y_C) :

$$\begin{cases} w(x_C, y_C, t) = \int_0^t K_{PC}(t-\tau) \cdot P(\tau) d\tau - \int_0^t K_{CC}(t-\tau) \cdot R_C(\tau) d\tau - \int_0^t K_{DC}(t-\tau) \cdot R_D(\tau) d\tau; \\ w(x_D, y_D, t) = \int_0^t K_{PD}(t-\tau) \cdot P(\tau) d\tau - \int_0^t K_{CD}(t-\tau) \cdot R_C(\tau) d\tau - \int_0^t K_{DD}(t-\tau) \cdot R_D(\tau) d\tau, \end{cases} \quad (4.47)$$

где $P(t)$ – внешняя возмущающая нестационарная нагрузка, $K_{ij}(t)$ – ядра, записанные для конкретной i -той нагрузки в j -той точке, вид которых будет приведен ниже, $R_C(t)$ и $R_D(t)$ – соответствующие реакции в точках контакта с демпфером и линейно упругой опорой.

Укажем, что реакции $R_C(t)$ и $R_D(t)$, действующие со стороны дополнительных опор на пластину, считались условно отрицательными (взяты в выражениях (4.47) со знаком минус), действия со стороны пластины на демпфер и «пружину» считались равными по величине, но условно положительными (для удобства записи).

В случае, когда $P(t)$ известна, систему интегральных уравнений (4.47) относительно неизвестных сил $R_C(t)$ и $R_D(t)$ можно дополнить выражениями в точках контакта (3.20) и (4.7). Исключим из уравнений прогибы и перенесем известные слагаемые в правую часть:

$$\begin{cases} \int_0^t K_{CC}(t-\tau) \cdot R_C(\tau) d\tau + \frac{R_C(t)}{c} + \int_0^t K_{DC}(t-\tau) \cdot R_D(\tau) d\tau = \int_0^t K_{PC}(t-\tau) \cdot P(\tau) d\tau; \\ \int_0^t K_{CD}(t-\tau) \cdot R_C(\tau) d\tau + \int_0^t K_{DD}(t-\tau) \cdot R_D(\tau) d\tau + \int_0^t \frac{R_D(\tau)}{\kappa} d\tau = \int_0^t K_{PD}(t-\tau) \cdot P(\tau) d\tau, \end{cases} \quad (4.48)$$

Для решения системы интегральных уравнений (4.48) была выполнена дискретизация методом частичного интегрирования ядер. То есть на малых дискретных участках времени ($\Delta t = T/J$, где T – исследуемый промежуток, а J – число шагов дискретизации) сила $P(t) = P(j \cdot \Delta t) = P_j$, а также реакции $R_C(j \cdot \Delta t)$ и $R_D(j \cdot \Delta t)$ считались постоянными. В результате получена следующая система матричных уравнений:

$$\begin{cases} \mathbf{A}_{CC} \cdot \mathbf{R}_C + \mathbf{A}_{DC} \cdot \mathbf{R}_D = \mathbf{A}_{PC} \cdot \mathbf{P}; \\ \mathbf{A}_{CD} \cdot \mathbf{R}_C + \mathbf{A}_{DD} \cdot \mathbf{R}_D = \mathbf{A}_{PD} \cdot \mathbf{P}, \end{cases} \quad (4.49)$$

где матрицы \mathbf{A}_{PC} , \mathbf{A}_{PD} соответствуют частично проинтегрированным ядрам $K_{PC}(t-\tau)$ и $K_{PD}(t-\tau)$, элементы которых могут быть найдены в виде $a_{ji} = K^*[(j-i)\Delta t]$, как значения проинтегрированного ядра

$$K^*[i\Delta t] = \int_{(i-1)\Delta t}^{i\Delta t} K(\tau) d\tau \quad (4.50)$$

Матрицы \mathbf{A}_{DC} , \mathbf{A}_{CD} и \mathbf{A}_{CC}^* соответствуют частично проинтегрированным ядрам $K_{DC}(t-\tau)$, $K_{CD}(t-\tau)$ и $K_{CC}(t-\tau)$.

Матрица \mathbf{A}_{CC} эквивалентна выражению: $\mathbf{A}_{CC} = \mathbf{A}_{CC}^* + \frac{1}{c}\mathbf{E}$, а \mathbf{E} – единичная матрица.

Произведение $\mathbf{A}_{DD} \cdot \mathbf{R}_D$ соответствует интегралу:

$$\int_0^t \left[K_{DD}(t-\tau) + \frac{1}{\kappa} \right] \cdot R_D(\tau) d\tau \quad (4.51)$$

Система (4.49) решается с использованием ОАК для блочных матриц и РА Тихонова. В результате решения (4.49) определяются \mathbf{R}_C и \mathbf{R}_D , являющиеся дискретными аналогами неизвестных независимых реакций $R_C(t)$ и $R_D(t)$.

Возможно несколько вариантов постановки обратной нестационарной задачи. Рассмотрим основные варианты.

Точки приложения нагрузки и установки дополнительных опор известны, а также известны коэффициент жесткости и коэффициент демпфирования, требуется определить внешнюю возмущающую сила $P(t)$ и, как следствие, $R_C(t)$ и $R_D(t)$ (которые также неизвестны). Для идентификации требуется знать (измерить) изменение прогиба $w(x_S, y_S, t)$ или деформации (например, $\varepsilon_x(x_S, y_S, t)$) в одной произвольной точке пластины.

Внешняя возмущающая сила $P(t)$ известна, требуется определить неизвестные параметры дополнительной вязкоупругой опоры. Для идентификации требуется знать (измерить) изменение прогиба или деформации в двух произвольных точках пластины.

Неизвестна как внешняя возмущающая сила $P(t)$ так и параметры дополнительной вязкоупругой опоры (коэффициент жесткости и коэффициент демпфирования). Для идентификации требуется знать (измерить) изменение прогиба или деформации минимум в трех произвольных точках пластины.

Рассмотрим решение обратной задачи в первой постановке.

Предположим, что нам известно изменение во времени прогиба в некоторой точке пластины, а именно, $w(x_S, y_S, t) = w_S(t)$, тогда на основе (4.1), для точки S можно записать:

$$w(x_S, y_S, t) = \int_0^t K_{PS}(t-\tau) \cdot P(\tau) d\tau + \int_0^t K_{CS}(t-\tau) \cdot R_C(\tau) d\tau + \int_0^t K_{DS}(t-\tau) \cdot R_D(\tau) d\tau. \quad (4.52)$$

Причем в выражении (4.52) слагаемые, содержащие значения $R_C(t)$ и $R_D(t)$, записаны со знаком плюс, поскольку при решении обратной задачи реакции $R_C(t)$ и $R_D(t)$ рассматриваются как дополнительные внешние независимые силы, которые могут принимать положительные или отрицательные значения.

В матричной форме выражение (4.52) запишется так:

$$\mathbf{A}_{PS} \cdot \mathbf{P} + \mathbf{A}_{CS} \cdot \mathbf{R}_C + \mathbf{A}_{DS} \cdot \mathbf{R}_D = \mathbf{w}_S. \quad (4.53)$$

где вектор \mathbf{w}_S соответствует дискретным значениям функции $w(x_S, y_S, t) = w_S(t)$ (что как раз имеет место при реальных измерениях), остальные обозначения аналогичны использованным в (4.49). По сути, выражение (4.53) является матричным уравнением с тремя неизвестными векторами \mathbf{P} , \mathbf{R}_C и \mathbf{R}_D . Для его решения необходимо записать ещё два матричных уравнения, которые могут быть получены из (4.49) путем переноса всех неизвестных в левую часть и изменения знаков перед слагаемыми, содержащими \mathbf{R}_C и \mathbf{R}_D , на положительные.

Для удобства записи и решения системы трёх матричных уравнений целесообразно переобозначить искомые векторы нагрузок \mathbf{P} , \mathbf{R}_C и \mathbf{R}_D как \mathbf{p}_1 , \mathbf{p}_2 и \mathbf{p}_3 , соответственно, тогда матрицы \mathbf{A}_{ji} будут вместо буквенных индексов иметь стандартные численные обозначения, а именно – строка будет соответствовать точке пластины, а столбец – нагрузке:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{13} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{23} \\ \mathbf{A}_{31} & \mathbf{A}_{32} & \mathbf{A}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{p}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.54)$$

Система (4.54) решается аналогично системе (4.49). В результате решения (4.54) определяются \mathbf{p}_1 , \mathbf{p}_2 и \mathbf{p}_3 , то есть дискретные аналоги неизвестных сил $P(t)$, $R_C(t)$ и $R_D(t)$. Для удобства исследования положительные направления

сил совпадают с положительными направлениями прогибов, а отрицательные значения соответствуют противоположному направлению.

При расчетах срединная плоскость пластины была связана с плоскостью xOy декартовой системы координат. Расчеты производились при следующих значениях параметров: $\rho=7890$ кг/м³; $\nu=0.3$; $E=2.07 \cdot 10^{11}$ Па; $h=0.04$ м; $l=0.6$ м, $m=0.4$ м. Координаты точки приложения возмущающей нагрузки имеют значения: $x_0=0.4$ м, $y_0=0.2$ м. Координаты точки крепления дополнительной вязкоупругой опоры к пластине: $x_{CD}=0.2$ м, $y_{CD}=0.2$ м. Значение коэффициента жесткости дополнительной опоры $c = 10^8$ Н/м, а коэффициент линейно-вязкого демпфирования $\kappa = 4 \cdot 10^4$ Н/(м/с); число членов в соответствующих двойных рядах Фурье 50×50 .

При решении прямой задачи рассматривалось два случая. Поскольку точки контакта пластины с «вязкой» и «упругой» дополнительными опорами в общей постановке являются независимыми, то в первом случае считалось, что они совпадают (частный случай $x_C = x_D = x_{CD} = 0.2$ м, $y_C = y_D = y_{CD} = 0.2$ м), а во втором случае считалось, что они располагались на некотором расстоянии, когда их суммарное влияние еще подобно влиянию одной вязкоупругой опоры ($x_C = 0.15$ м, $y_C = 0.15$ м и $x_D = 0.25$ м, $y_D = 0.25$ м).

На рис. 4.53 и рис. 4.54 показаны результаты вычислений для первого случая.

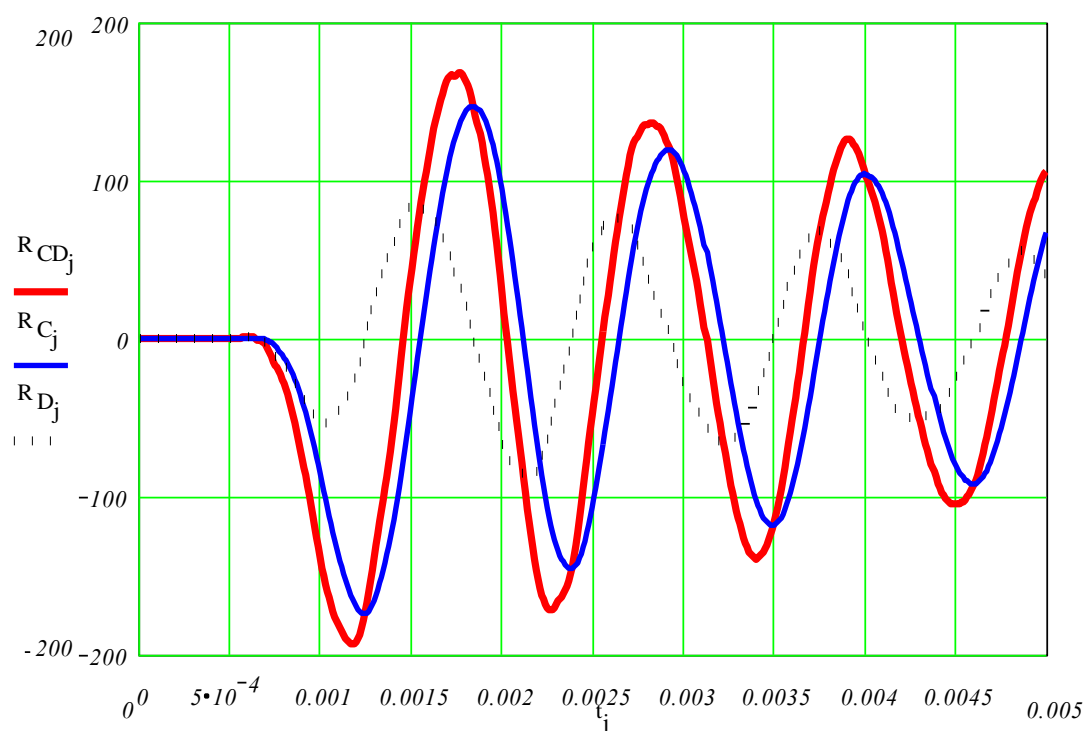


Рис. 4.53. Составляющие реакции вязкоупругой опоры

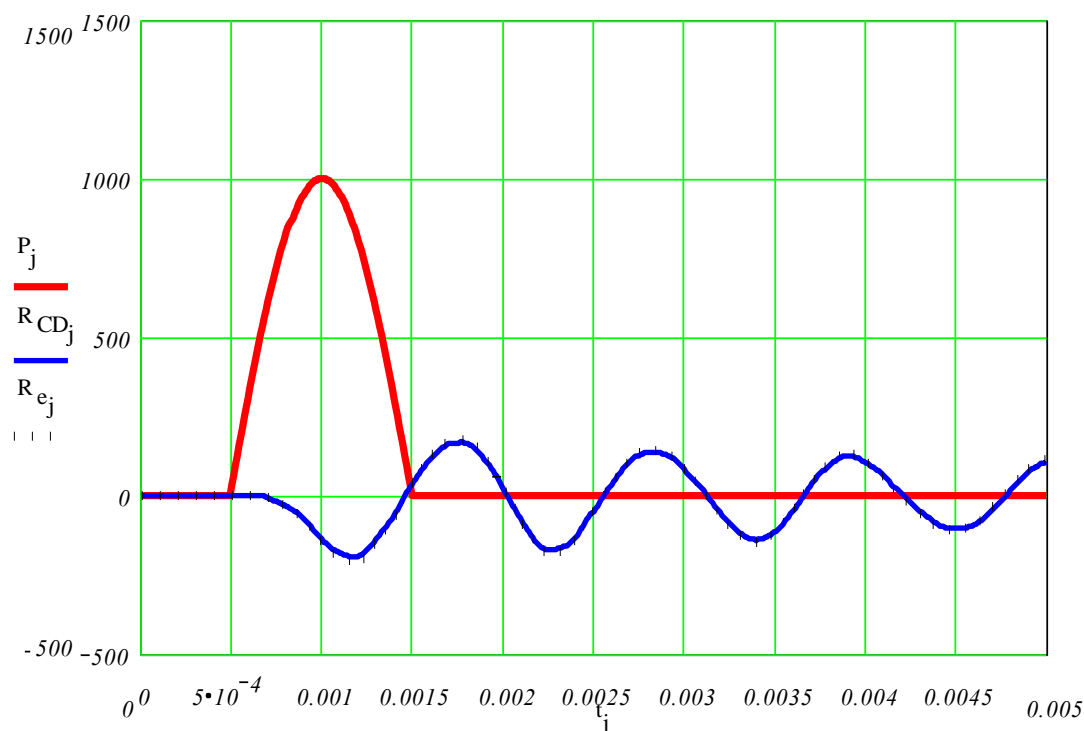


Рис. 4.54. Реакции вязкоупругой опоры, найденные двумя разными методами

Определенные в результате решения системы уравнений (4.49) составляющие реакции между пластиной и дополнительной вязкоупругой опорой приведены на рис. 4.53: 1-я кривая соответствует суммарной реакции вязкоупругой опоры $R_{CD}(t) = R_C(t) + R_D(t)$; 2-я кривая – упругая составляющая вязкоупругой опоры $R_C(t)$; 3-я кривая – вязкая составляющая $R_D(t)$. На рис. 4.54 показано изменение во времени возмущающей нагрузки $P(t)$ (полуволна синусоиды) и две кривые, соответствующие реакции вязкоупругой опоры $R_{CD}(t)$ и $R_e(t)$. Укажем, что $R_{CD}(t)$, то есть суммарная реакция, показана сплошной линией, а $R_e(t) = R(t)$ – это реакция именно вязкоупругой опоры (4.8), определение которой описано ранее, на рис. 4.54 отложена точками, причем видно, что эти две кривые полностью совпадают. Совпадение кривых доказывает правильность решения и возможность использования любого из двух методов для определения реакции вязкоупругой опоры.

На рис. 4.55 и рис. 4.56 показаны результаты вычислений для второго случая. Здесь точки опоры выбирались на небольшом расстоянии – точка контакта вязкоупругой опоры полагалась в центре небольшой окружности с радиусом $5\sqrt{2}$ см (примерно 1/10 величины пластины), а точки контакта «вязкой» и «упругой» опор располагались на концах диаметра этой окружности. Рассматривался случай, когда две дополнительных опоры моделируют одну вязкоупругую, и их суммарное действие ещё подобно, но уже заметно и отличие суммарной реакции от реакции вязкоупругой опоры. Кривые рис. 4.55 и рис. 4.56, в основном аналогичны, описанным выше для рис. 4.53 и рис. 4.54. Укажем лишь на некоторые отличия:

– на рис. 4.55 приведено на одну кривую больше, поскольку дополнительно показана реакция вязкоупругой опоры;

– на рис. 4.56 реакция одной дополнительной вязкоупругой опоры и суммарная реакция (совместное действие вязкой и упругой опор) не совпадают, причем максимальные значения реакции вязкоупругой опоры примерно на треть выше, чем величины суммарной реакции.

Такое увеличение объясняется, по-видимому, тем, что двойная опора оказывает некоторое сглаживающее и усредняющее действие (причем, как с математической, так и с механической точек зрения).

Вычисления при решении обратной задачи выполнялись только для первого случая, то есть решалась задача идентификации неизвестного нестационарного нагружения, воздействовавшего на пластину, и распределения неизвестных вязкой и упругой составляющих дополнительной вязкоупругой опоры, присоединенной к шарнирно-опертой пластине в некоторой ее точке.

На рис. 4.57 показаны исходные данные для решения задачи идентификации: изменения прогиба в некоторой точке пластины (полученные при решении прямой задачи) – гладкая кривая, а также зашумленные значения прогиба. Укажем, что для моделирования случайных погрешностей, возникающих при экспериментальном измерении прогибов или деформаций в точках пластины, принималось нормальное распределение зашумления со среднеквадратичным отклонением, равным 10%.

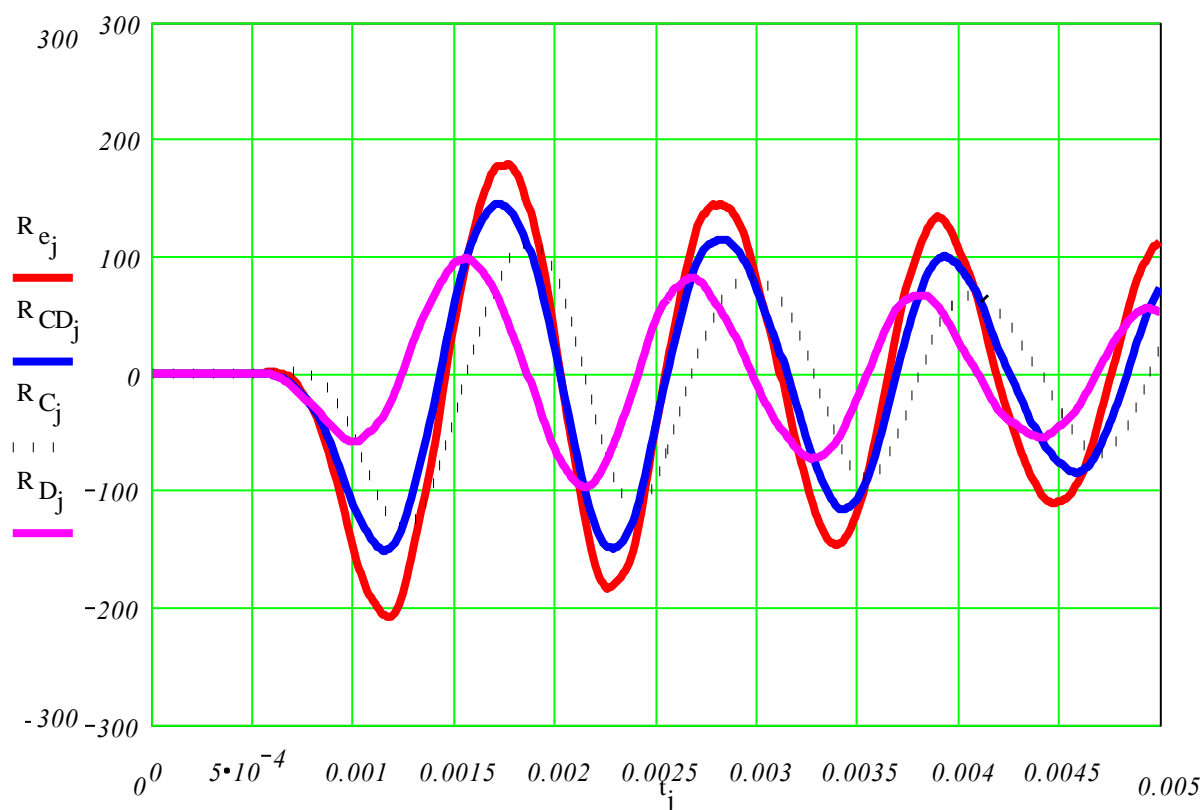


Рис. 4.55. Составляющие реакции дополнительных вязкой и упругой опор

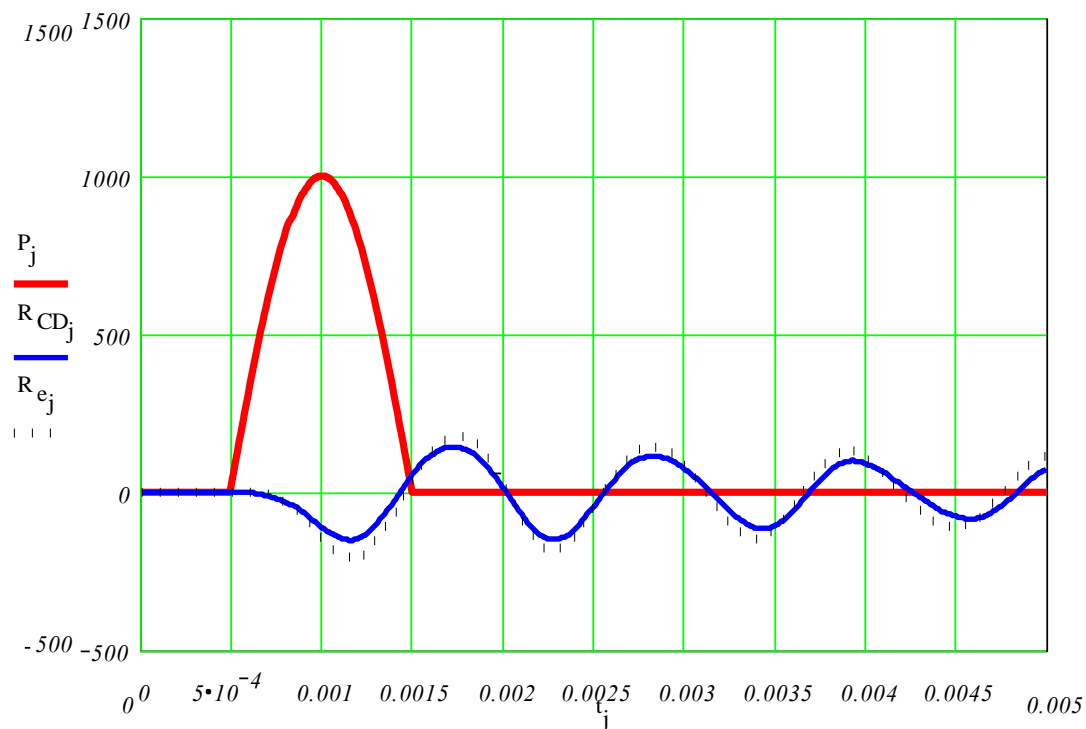


Рис. 4.56. Реакции вязкоупругой опоры, найденные двумя разными способами

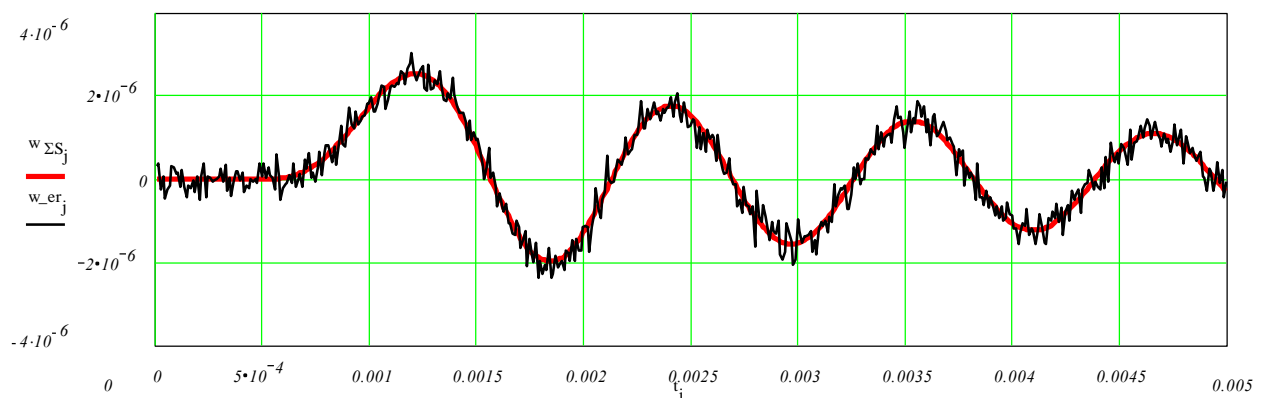


Рис. 4.57. Исходные данные для идентификации (расчет для первого случая)

На рис. 4.58 и рис. 4.59 сплошными линиями показаны возмущающая нагрузка и составляющие вязкоупругой опоры, полученные при решении прямой задачи, а точками представлены идентифицированные значения сил $P(t)$, $R_C(t)$ и $R_D(t)$, найденные в результате численно-аналитического решения матричной системы (4.54).

Рис. 4.58 соответствует идентификации изменения во времени нестационарных нагрузок по незашумленным исходным данным, а рис. 4.59 – по зашумленным.

Графики на рис. 4.58 демонстрируют практически полное соответствие идентифицированных нагрузок аналогичным величинам из прямой задачи. Исключение составляет промежуток в самом конце исследуемого интервала времени, где наблюдаются небольшие отклонения, вызванные, по-видимому, накоплением погрешностей вычислений при численно-аналитическом решении системы (4.54). На рис. 4.59 можно наблюдать, что удовлетворительные

результаты при решении задачи идентификации могут быть получены даже при значительном зашумлении исходных данных, и описанная методика может успешно применяться при обработке экспериментальных данных для косвенного измерения нестационарных возмущающих нагрузок и реакций «вязких» и «упругих» опор.

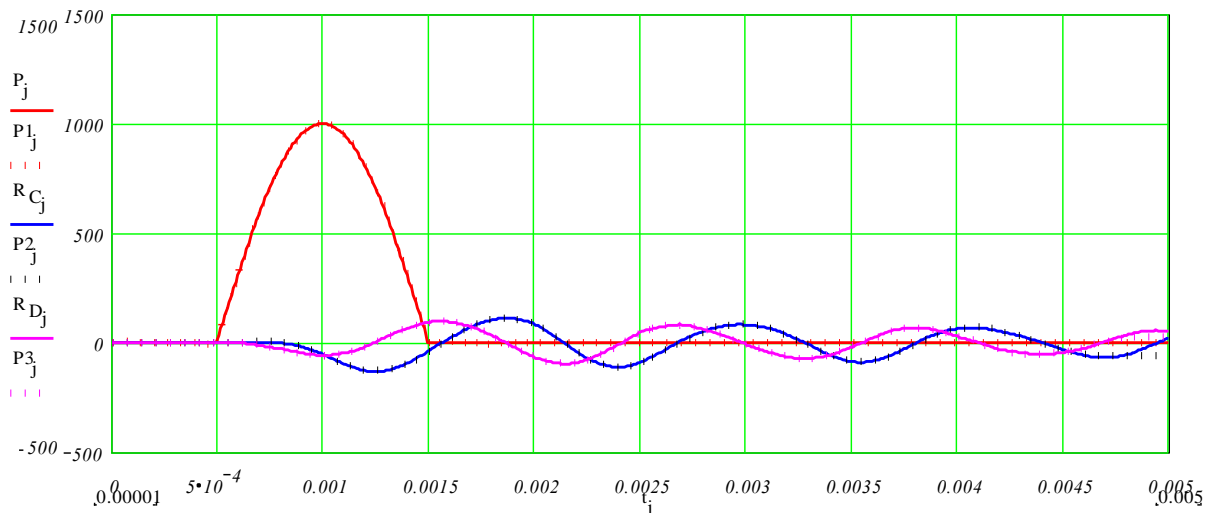


Рис. 4.58. Идентифицированные силы по незашумленным исходным данным

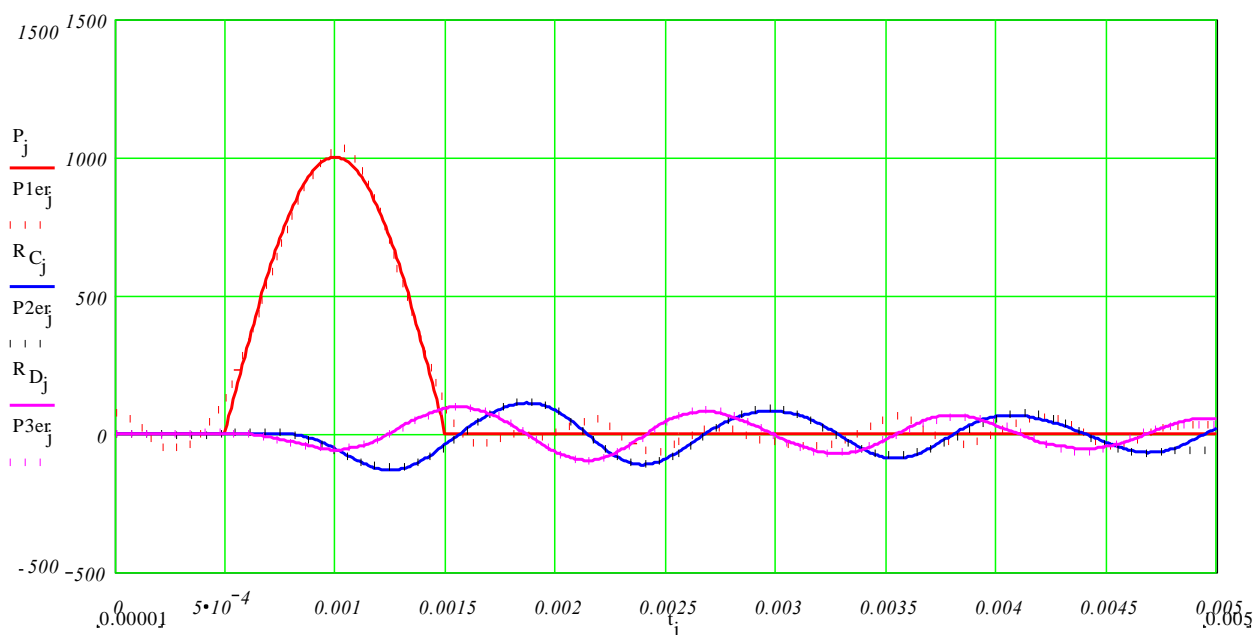


Рис. 4.59. Идентифицированные силы по зашумленным исходным данным (внешняя и две составляющих реакции).

Выводы. Описан эффективный подход, при котором воздействие дополнительной вязкоупругой опоры на пластину моделируется в виде двух неизвестных независимых нестационарных сил – вязкой и упругой составляющих реакции между пластиной и дополнительной опорой. Неизвестные нестационарные нагрузки определяются из решения системы интегральных уравнений Вольтерра. На основе предложенного подхода при моделировании нестационарного деформирования пластинчатых элементов

конструкций с дополнительными опорами имеется возможность получать устойчивые аналитико-численные решения задач механики деформируемого твердого тела без использования итерационных схем.

Описана методика решения прямой и обратной задачи идентификации неизвестной нагрузки, вызывающей нестационарное деформирование пластины с дополнительной вязкоупругой опорой, позволяющая получать устойчивые аналитико-численные решения.

4.9. Заключение

Описанный подход, позволяет исследовать нестационарное деформирование пластинчатых элементов конструкций при наличии сосредоточенных масс, дополнительных опор и ребер жесткости, влияние которых заменяется неизвестными силами (реакциями). Идентификации неизвестных реакций производится на основе решения интегральных уравнений Вольтерра или их систем.

5. УПРАВЛЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫМИ КОЛЕБАНИЯМИ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ, СОДЕРЖАЩИХ ПЛАСТИНЫ

5.1. Введение

В настоящее время активно развиваются исследования по управлению напряженно-деформированным состоянием элементов конструкций. Одним из основных факторов, способствующих развитию этой тематики, является создание современных компактных и эффективных устройств по управлению колебаниями, например, пьезодатчик/пьезопривод (piezosensor/actuator); магнитореологические (MR) датчики; слои вязкоупругого материала, помещенные между магнитными (электромагнитными) слоями; элементы конструкций в целом, созданные из так называемых усовершенствованных материалов (smart materials), функционально упорядоченных материалов (ФУМ или FGM) и т.д. Укажем некоторые опубликованные работы этого направления: [226, 228] это работы по управлению колебаниями механических объектов, выполненных из специальных материалов. В статьях [220, 221, 244] описано управление колебаниями с помощью специальных устройств пьезодатчик/пьезопривод (piezosensor/actuator), изготовленных в виде накладок, растяжек и т.д., вводимых в механические системы.

Зачастую задачи управления параметрами напряженно деформированного состояния или нестационарными колебаниями посвящены «гашению» колебаний. Существует несколько подходов к реализации активной и пассивной виброзащиты.

Гашение колебаний (особенно нестационарных) является важным направлением задач виброзащиты элементов конструкций. Актуальность указанных задач в настоящее время несомненна. При необходимости гашения колебаний уже созданных элементов конструкций используют различные управляемые и неуправляемые устройства – гасители колебаний (vibration absorbers). Наиболее известными и распространенными устройствами являются амортизаторы, которые широко распространены во всех отраслях машиностроения, в частности, в автомобилестроении.

Одним из наиболее простых и распространенных методов гашения колебаний является использование амортизаторов. Применение амортизаторов или других видов гасителей может относиться как к системам пассивной виброзащиты, так и активной, в зависимости от того имеются ли возможности управления этими устройствами.

Обратим внимание на некоторые работы, связанные с пластинчатыми элементами конструкций. В работе [257] рассмотрен активный гаситель колебаний для изгибающейся пластинки, который контактирует с ней по её граничному контуру, однако сама пластина представлена, по сути, в виде колеблющейся массы. В работе [243] рассматриваются вынужденные

колебания тонкой пластины с «дискретным динамическим гасителем» с использованием метода конечных элементов.

Гашение колебаний можно рассматривать как частный случай управления колебаниями, когда целью управления является минимизация амплитуд перемещений/деформаций или их полное устранение. В теории автоматического управления (ТАУ) часто рассматриваются задачи подобного рода. Известны основные схемы автоматического управления/регулирования (САУ или САР): замкнутая САУ (управление с обратной связью) и разомкнутая САУ.

Замкнутые САУ обладают рядом преимуществ, которые подробно рассмотрены в ТАУ. Такие схемы активно используются в настоящее время и являются основой для создания современных систем управления реального времени. Однако при управлении высокоскоростными процессами (например, нестационарными колебаниями) построение замкнутых САУ является серьезной задачей, требующей также наличия сложного и дорогостоящего оборудования при построении обратной связи. В случае управления нестационарными колебаниями, вызываемыми импульсными (ударными) нагрузками, характер изменения во времени, которых является повторяемым и может быть отдельно изучен на основании решения задач идентификации, возможно построение более дешевых разомкнутых САУ.

Для решения подобных задач целесообразно использовать следующий подход – управление колебаниями осуществляется с помощью введения в механическую систему дополнительных управляющих нагрузок. Тогда задача управления сводится к идентификации этих неизвестных нагрузок, которые определяются из решения соответствующих обратных нестационарных задач. Выбор конкретной системы управления и механизмов реализации найденных управляющих сил осуществляется уже на стадии практических или экспериментальных исследований.

В данном разделе рассматривается возможность управления нестационарными колебаниями механических систем, в которых имеются прямоугольные пластины при импульсном поперечном нагружении. Искомое решение начально-краевой задачи комбинируется из решения, отвечающего воздействию на пластины заданной системы возмущающих нагрузок, и решения, которое соответствует воздействию на пластину дополнительных (управляющих) системы нагрузок. На финишном этапе построения решения используется сглаживающий функционал А. Н. Тихонова.

5.2. Управление нестационарными колебаниями механической системы, состоящей из пластины и сосредоточенной массы

Механическая система состоит из прямоугольной упругой изотропной пластины средней толщины шарнирно-опертой по ее периметру и сосредоточенной массы, лежащей на ее верхней лицевой поверхности (рис. 5.1).

Предполагается, что изменение перемещения во времени сосредоточенной массы полностью совпадает с изменением прогиба пластины в точке, где находится масса, т.е. $w_M(t) = w(x_M, y_M, t)$.

На пластину в некоторой точке воздействует поперечная импульсная нагрузка $P(t)$, вызывающая нестационарные колебания пластины и массы. Требуется управлять нестационарными колебаниями в точке пластины $w_S(t) = w(x_S, y_S, t)$, так чтобы удовлетворить требуемому критерию (заранее сформулированному). В качестве критерия управления может быть выбрано уменьшение амплитуд прогиба, то есть изменение прогиба пластины в точке управления стремится к нулю $w_S(t) \rightarrow 0$ (гашение колебаний) или же колебания в точке управления должны отвечать некоторому требуемому закону изменения во времени $w_S(t) = w_C(t)$ (например, иметь вид синусоиды).

Укажем, что задача решается в общей постановке, когда точки управления (x_S, y_S) и сосредоточенной массы (x_M, y_M) не совпадают, однако полученное решение будет справедливо и для частного случая, когда точка управления совпадает с точкой присоединения сосредоточенной массы $(x_M = x_S, y_M = y_S)$.

Управление осуществляется посредством приложения к пластине дополнительной (управляющей) нагрузки $P_C(t)$. Задача управления заключается в идентификации закона изменения во времени этой нагрузки $P_C(t)$. Таким образом, для определения закона изменения во времени управляющего воздействия требуется решить обратную нестационарную задачу для механической системы, состоящей из пластины и массы.

При решении задачи предполагалось, что координаты точек приложения нагрузок (возмущающей и управляющей), и координаты сосредоточенной массы произвольны (любые точки принадлежащие пластине и не лежащие на ее границе). Также считалась известной величина сосредоточенной массы.

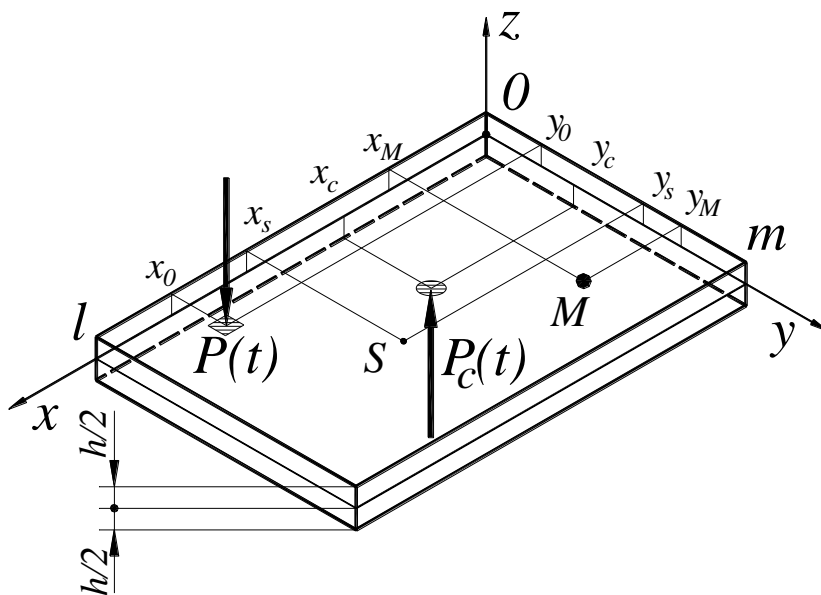


Рис. 5.1. Схема управления нестационарными колебаниями массы

В рамках теории пластин С. П. Тимошенко представим следующую систему дифференциальных уравнений [74], которая с учетом соответствующих начальных и граничных условий определяет решение, описывающее нестационарные деформационные процессы в пластине с учетом сосредоточенной массы M :

$$\left\{ \begin{array}{l} G'h(\nabla^2 w + \psi_{xy}) = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - P(x, y, t) + P_c(x, y, t) + R(x, y, t); \\ D\nabla^2 \psi_{xy} - G'h(\psi_{xy} + \nabla^2 w) = \rho \cdot I \frac{\partial^2 \psi_{xy}}{\partial t^2}; \\ \frac{D}{2} [(1-\nu)\nabla^2 \varphi_{xy} + (1+\nu)\nabla_1^2 \psi_{xy}] - G'h(\varphi_{xy} + \nabla_1^2 w) = \rho \cdot I \frac{\partial^2 \varphi_{xy}}{\partial t^2}, \\ M \frac{d^2 w(x_M, y_M, t)}{dt^2} = R(x_M, y_M, t). \end{array} \right. \quad (5.1)$$

Укажем, что:

$P(x, y, t)$ – возмущающая нагрузка (сосредоточенная или распределенная);

$P_c(x, y, t)$ – управляющее воздействие на пластину (сосредоточенная или распределенная нагрузка);

$R(x, y, t) = \delta(x - x_M) \cdot \delta(y - y_M) \cdot R(x_M, y_M, t)$ – реакция пластины на воздействие сосредоточенной массы M .

Описание решения подобных систем и итоговые соотношения приведены ранее.

Для нахождения перемещения сосредоточенной массы $w(x_M, y_M, t) = w_M(t)$, можно записать два интегральных соотношения, рассматривая по отдельности динамику точки пластины и сосредоточенной массы:

$$\left\{ \begin{array}{l} w_M(t) = \int_0^t P(\tau) K_P(t - \tau) d\tau - \int_0^t P_c(\tau) K_{P_c}(t - \tau) d\tau - \int_0^t R(\tau) K_R(t - \tau) d\tau; \\ w(x_M, y_M, t) = w_M(t) = \int_0^t R(\tau) \frac{t - \tau}{M} d\tau. \end{array} \right. \quad (5.2)$$

После подстановки $w_M(t)$ из второго уравнения в первое система (5.2) может быть преобразована к следующему интегральному уравнению

$$\int_0^t R(\tau) \left[K_R(t - \tau) + \frac{t - \tau}{M} \right] d\tau = \int_0^t P(\tau) K_P(t - \tau) d\tau - \int_0^t P_c(\tau) K_{P_c}(t - \tau) d\tau. \quad (5.3)$$

Интегральное уравнение (5.3) после дискретизации можно представить в матричном виде:

$$\mathbf{A}_{RM} \mathbf{R} = \mathbf{A}_{PM} \mathbf{P} - \mathbf{A}_{PcM} \mathbf{P}_c \quad (5.4)$$

где вектор \mathbf{P} – соответствует известной функции $P(t)$; $\mathbf{P}_c - P_c(t)$; \mathbf{R} – неизвестный вектор, соответствующий $R(t)$; матрицы \mathbf{A}_{RM} , \mathbf{A}_{PM} и \mathbf{A}_{PCM} отвечают соответствующим ядрам уравнения (5.3).

Матричное уравнение (5.4) справедливо в случае, когда управляющее воздействие $P_c(t)$ известно. Однако при решении задач управления целью является определение управляющего воздействия. То есть в уравнении (5.4) входит две неизвестных функции $P_c(t)$ и $R(t)$. Для их определения необходимо в уравнении (5.4) перенести неизвестное слагаемое в левую часть уравнения и дополнить его выражением для критерия управления, в которое также войдут две искомые функции $P_c(t)$ и $R(t)$. Таким образом получается система двух интегральных уравнений Вольтерра, записанная для двух точек пластины – точке, в которой расположена присоединённая сосредоточенная масса $w_M(t) = w(x_M, y_M, t)$, и точке, в которой осуществляется управление согласно требуемого критерия $w_S(t) = w(x_S, y_S, t)$. В матричном виде можно записать:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_c \\ \mathbf{R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{PM}\mathbf{P} \\ \mathbf{w}_C - \mathbf{A}_{PS}\mathbf{P} \end{bmatrix}, \quad (5.5)$$

где матрицы соответствующие ядрам, входящим в интегралы искомых функций обозначены \mathbf{A}_{ij} , так что индекс $j = 1$ отвечает $P_c(t)$; $j = 2 - R(t)$; $i = 1 -$ точке (x_M, y_M) ; $i = 2 - (x_S, y_S)$; вектор \mathbf{w}_C – соответствует требуемому критерию управления $w_C(t)$. Причем для случая гашения колебаний можно принять $w_C(t) = -w_S(t)$, тогда $w_C(t) + w_S(t) = 0$.

В результате численно-аналитического решения (5.5) определяются искомые зависимости $R(t)$ и $P_c(t)$. Решение указанной системы уравнений в силу некорректности осуществляется с использованием РА Тихонова.

Существенное влияние на «качество» управления оказывает параметр регуляризации α , содержащийся в РА Тихонова. В задачах управления этот параметр определяется на основе минимизации по α функционала «качества», соответствующего приближению полученных значений прогиба к требуемым значениям критерия:

$$M^\alpha[P_c] = \left\| w_C - A_P P + A_R R^\alpha + A_{Pc} P_c^\alpha \right\| \quad (5.6)$$

При расчетах срединная плоскость пластины была связана с плоскостью xOy декартовой системы координат. Считалось, что возмущающая нагрузка равномерно распределена по прямоугольной области со сторонами Δx и Δy соответственно и центром (x_0, y_0) , а управляющая нагрузка равномерно распределена по кругу радиуса r с центром (x_C, y_C) . При вычислениях принимались следующие значения:

– $E = 2.07 \cdot 10^{11}$ Па; $\nu = 0.3$; $\rho = 7890$ кг/м³;

– $h = 0.04$ м; $l = 0.6$ м; $m = 0.4$ м;

– число членов в соответствующих двойных рядах Фурье 50×50 .

На рис. 5.2 приведена схема расположения точек при управлении колебаниями. Предполагается, что необходимо обеспечить требуемый закон изменения перемещения в точке пластины $w_C(t)$ в виде синусоиды.

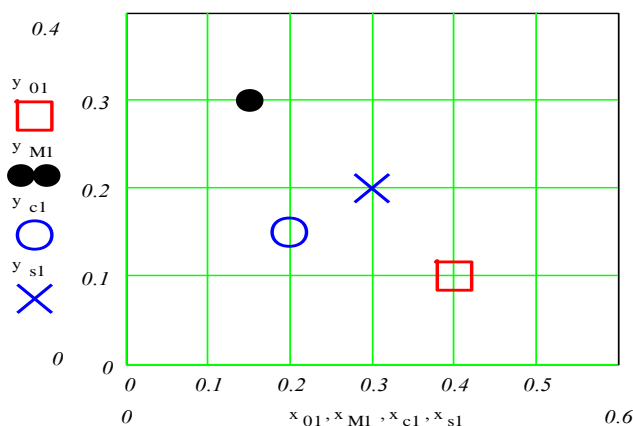


Рис. 5.2. Схема нагружения пластины с массой

Координаты точек:

- $x_0=0.4$ м, $y_0=0.1$ м – приложения возмущающей нагрузки;
- $x_C=0.2$ м, $y_C=0.15$ м – приложения управляющей нагрузки;
- $x_S=0.3$ м, $y_S=0.2$ м – в которой осуществляется управление;
- $x_M=0.15$ м, $y_M=0.3$ м – присоединения сосредоточенной массы.

На рис. 5.3 показаны графики изменения функционалов качества (5.6) – кривая 1 и суммарной нагрузки – кривая 2 в зависимости от параметра регуляризации α . Укажем, что значение параметра регуляризации для удобства отложены в логарифмической шкале.

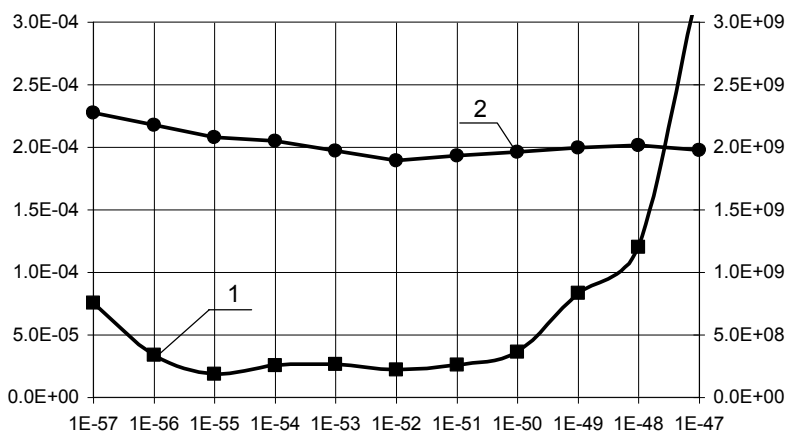


Рис. 5.3. К выбору параметра регуляризации

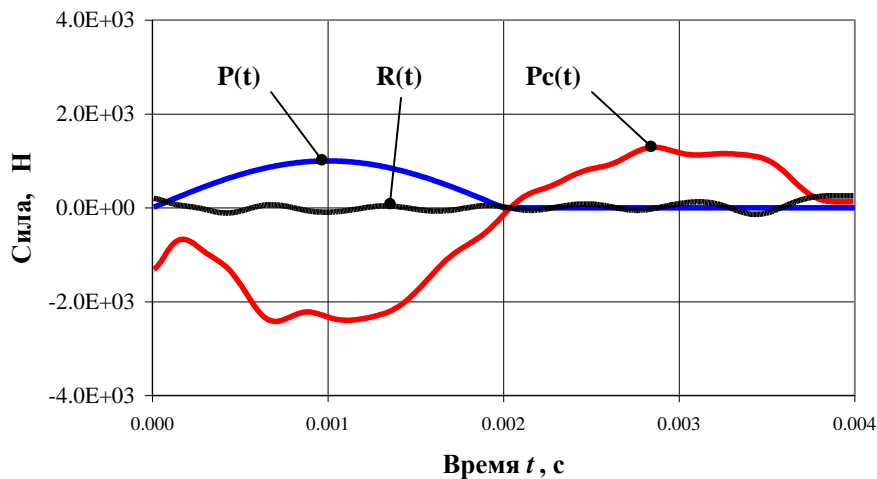
Из рис. 5.3 видно, что параметр регуляризации желательно брать меньше $\alpha = 10^{-49}$, а наилучшее «качество» достигается при $\alpha = 10^{-55}$. Однако можно выделить ещё локальный минимум функционала (5.6) при $\alpha = 10^{-52}$, который соответствует минимуму функционала суммарной нагрузки и соответствует меньшим значениям управляющего воздействия $P_c(t)$.

На рис. 5.4 показаны изменения нагрузок $P(t)$, $P_c(t)$, $R(t)$:

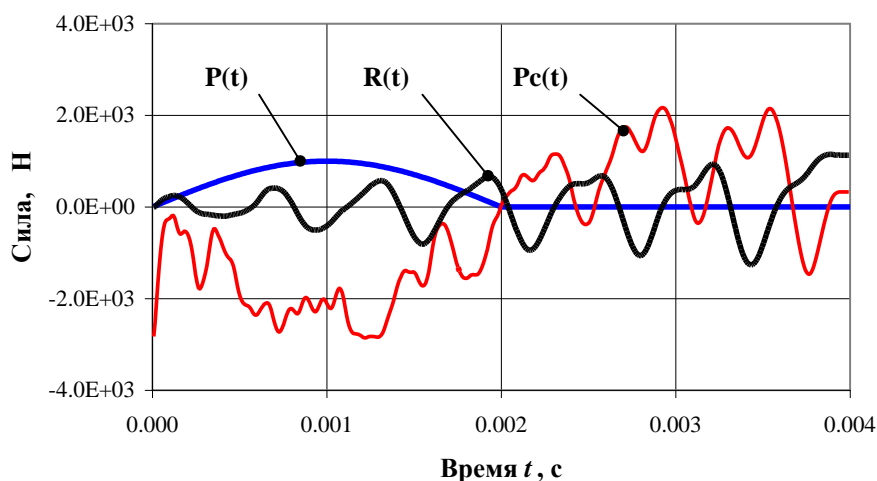
– возмущающая нагрузка $P(t)$ изменяется в виде полуволны синусоиды с длительностью импульса $2 \cdot 10^{-3}$ секунды;

– определенные в результате решения СИУ (5.5) значения управляющего воздействия $P_c(t)$ (имеет амплитуды превышающие возмущающее воздействие) и реакции массы $R(t)$ (по величине значительно меньше $P(t)$ и $P_c(t)$). На рис. 5.4 представлены результаты, полученные при значениях $\alpha = 10^{-52}$ и $\alpha = 10^{-55}$.

Укажем, что для удобства анализа результатов величины возмущающей и управляющей нагрузок, а также реакция сосредоточенной массы, приведены в ньютонах (равномерно распределенные нагрузки, измеряемые в паскалях, были умножены на соответствующие площади контакта, которые предполагались неизменными).



a



б

Рис. 5.4. Определение реакции сосредоточенной массы и управляющего воздействия: *a* – при $\alpha = 10^{-52}$; *б* – при $\alpha = 10^{-55}$

Из рис. 5.4 можно сделать вывод, что при значениях параметра регуляризации $\alpha = 10^{-52}$ амплитуды и пульсации управляющего воздействия заметно меньше, чем при $\alpha = 10^{-55}$. Следовательно при практической реализации активного управления колебаниями целесообразно при выборе параметра регуляризации учитывать не только функционал качества, но и минимизировать «суммарное воздействие».

На рис. 5.5 показаны три кривые изменения перемещения в точке управления:

– требуемое перемещение в точке управления – целевая функция для управления (синусоидальное изменение);

– перемещение в точке управления при воздействии только возмущающей нагрузки;

– результат управления при воздействии возмущающей нагрузки и управляющего воздействия (тонкая кривая – практически совпадает с требуемой кривой, но имеет незначительные отклонения).

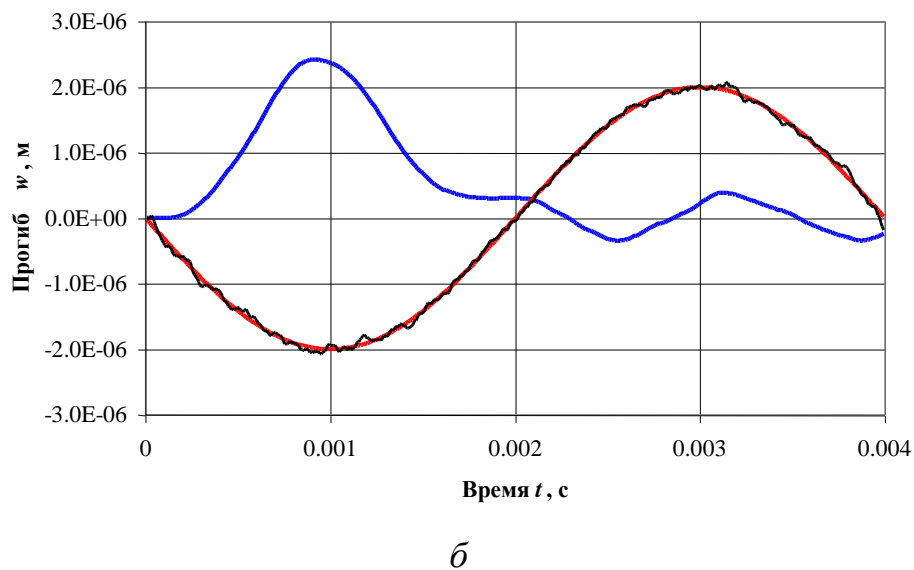
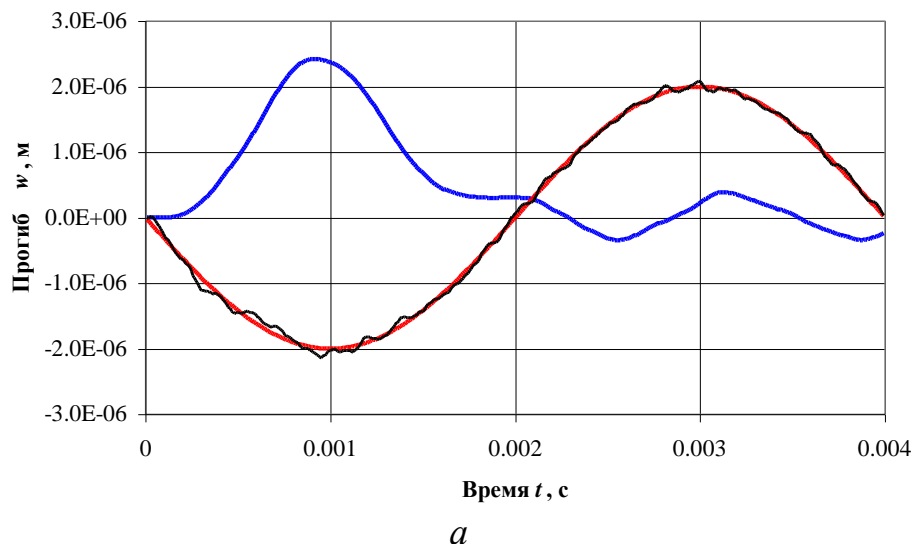


Рис. 5.5. Результаты управления: *a* – при $\alpha = 10^{-52}$; *б* – при $\alpha = 10^{-55}$

Как видно из рис. 5.5 кривые требуемого перемещения и достигаемого в результате осуществления управления практически полностью совпадают, что свидетельствует о достижении требуемых результатов. Так же отметим, что результаты управления на рис. 5.5 а практически не уступают результатам на рис. 5.5 б, хотя вид управляющего воздействия значительно проще. Следовательно, можно утверждать, что при выборе параметра регуляризации необходимо выбирать компромиссное решение, которое учитывает не только «качество» управления, но и «суммарное воздействие».

Далее представлены результаты расчетов аналогичной задачи, за исключением того, что критерием является гашение колебаний.

Описание рис. 5.6, рис. 5.7 и рис. 5.8 аналогично описанию рис. 5.3, рис. 5.4 и рис. 5.5, соответственно.

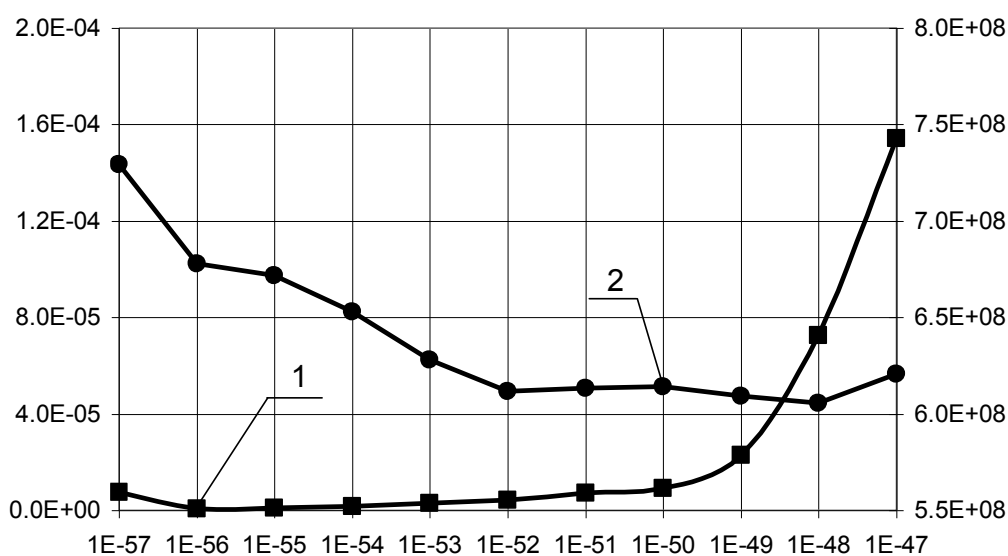


Рис. 5.6. К выбору параметра регуляризации

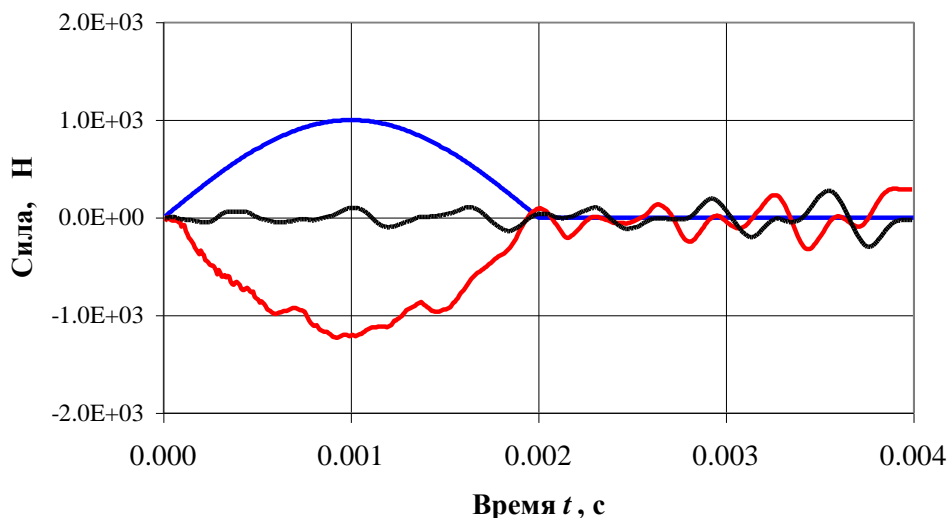


Рис. 5.7. Реакции сосредоточенной массы и управляющего воздействия

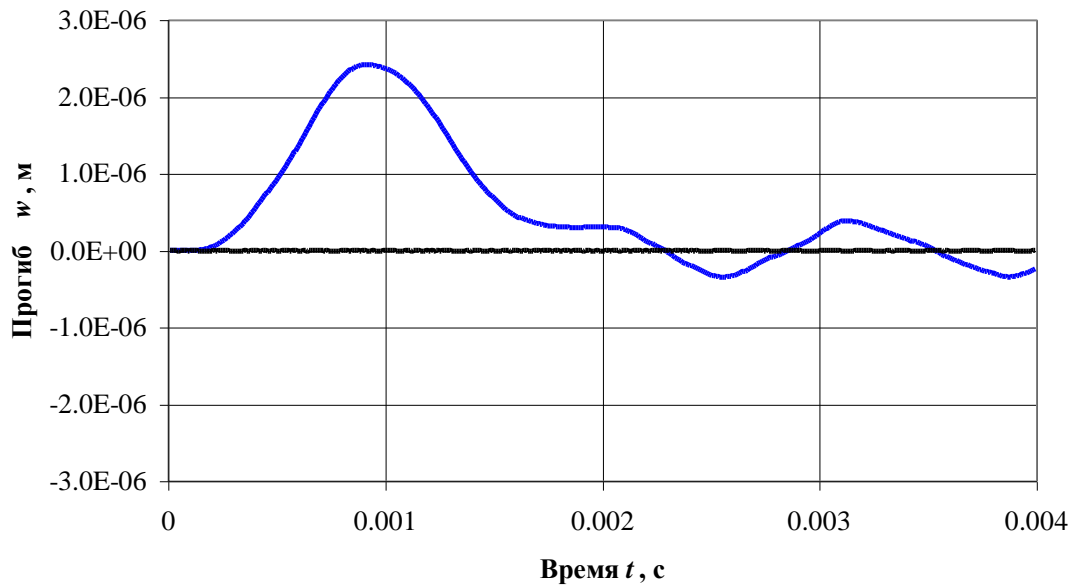


Рис. 5.8. Результаты управления при $\alpha = 10^{-52}$

Укажем, что также исследовалась возможность решения и расчётов частного случая, когда точка управления совпадает с точкой присоединения сосредоточенной массы, что при другой постановке можно рассматривать, как возможность управления перемещением сосредоточенной массы, помещённой на прямоугольной шарнирно опертой пластине при нестационарных колебаниях.

Описание рис. 5.9, рис. 5.10, рис. 5.11 и рис. 5.12 также аналогично описанию рис. 5.2, рис. 5.3, рис. 5.4 и рис. 5.5, соответственно.

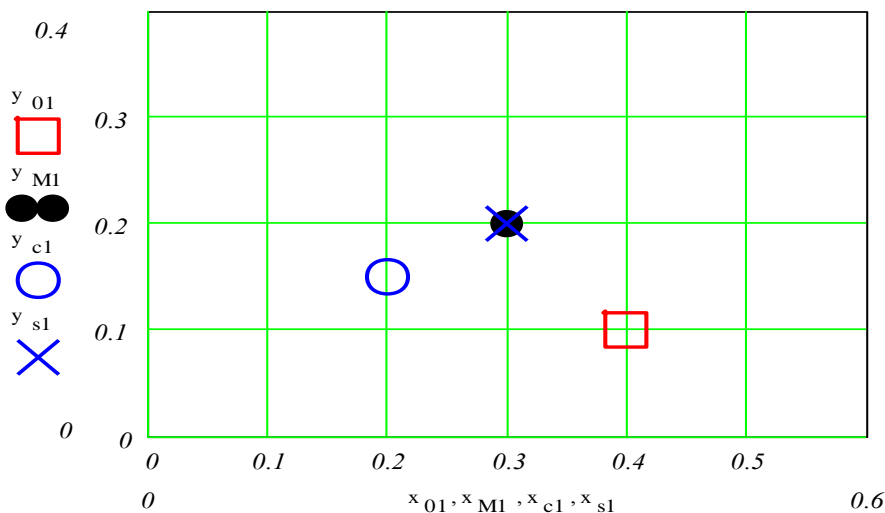


Рис. 5.9. Схема управления колебаниями точки пластины и сосредоточенной массой

Отличие рис. 5.9 от аналогичного рис. 5.2 состоит только в координатах точки управления и сосредоточенной массы: $x_s = x_M = 0.3$ м, $y_s = y_M = 0.2$ м – центр пластины.

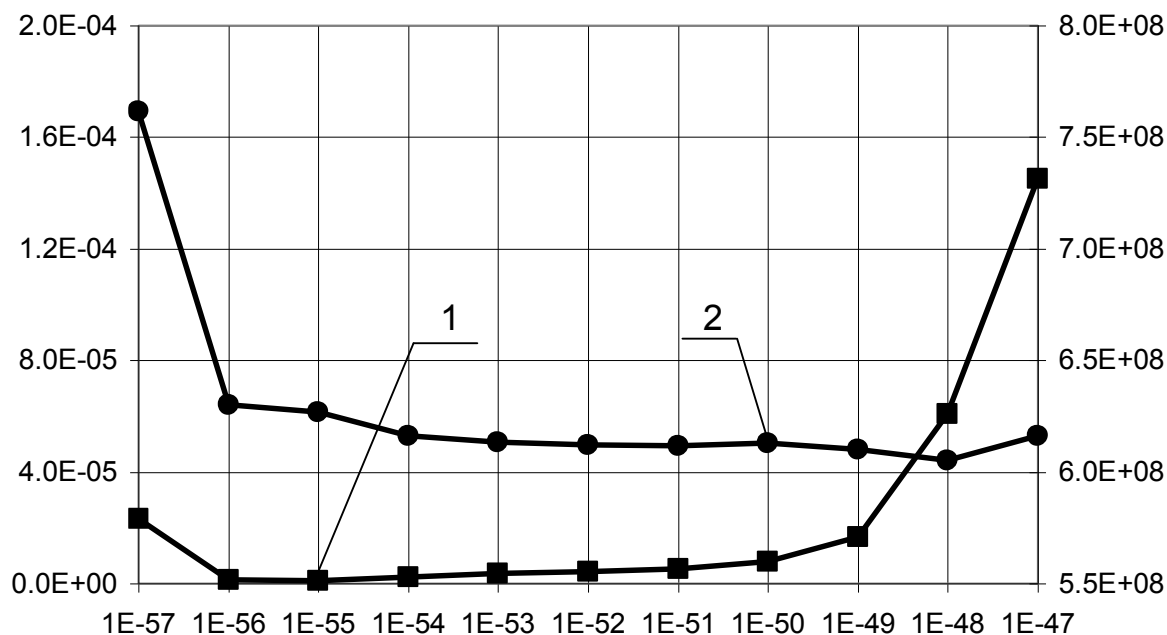


Рис. 5.10. К выбору параметра регуляризации

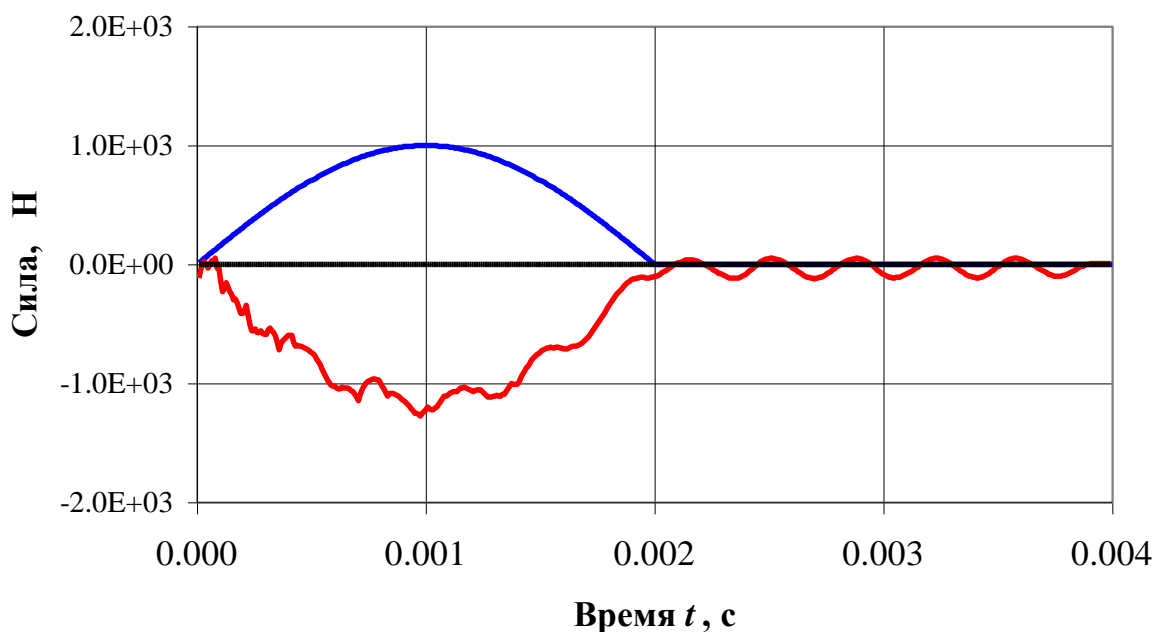


Рис. 5.11. Реакции сосредоточенной массы и управляющего воздействия

Так как требуется погасить колебания пластины в точке присоединения сосредоточенной массы, то реакция между пластиной и массой будет практически равна нулю (чем лучше удаётся погасить колебания, тем меньше будут перемещения точки, следовательно, и реакция взаимодействия между пластиной и массой). Это утверждение очень хорошо демонстрирует рис. 5.11, на котором четко видно, что управляющее воздействие похоже на возмущающее, но имеет противоположный знак и пульсации волнового характера, а $R(t) = 0$.

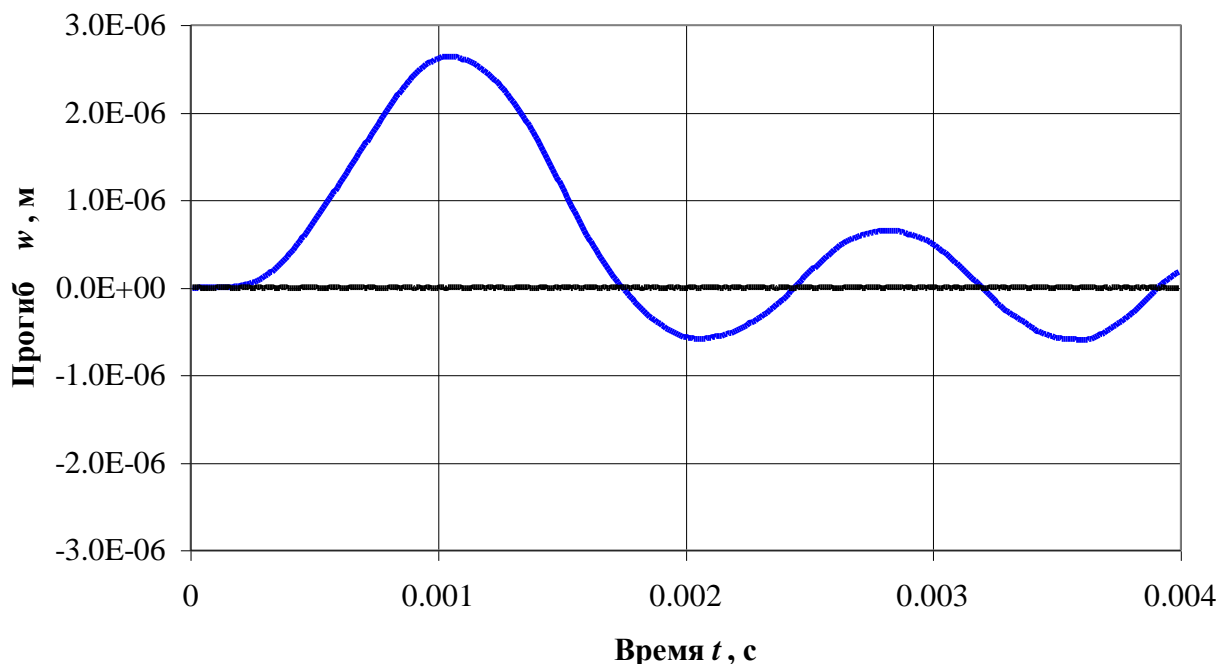


Рис. 5.12. Результаты управления при $\alpha = 10^{-52}$

Выводы. Показана возможность управления нестационарными колебаниями механической системы, состоящей из сосредоточенной массы, лежащей на прямоугольной шарнирно опёртой пластине, с помощью дополнительной (управляющей) нагрузки. На основе представленных результатов можно сделать вывод о том, что предложенная схема управления и алгоритм определения управляющего воздействия при решении обратной задачи для механической системы являются эффективными и достаточно устойчивыми.

5.3. Гашение нестационарных колебаний механической системы, состоящей из пластины и сосредоточенной массы. Пассивная виброзащита

В предыдущем пункте приведен пример гашения колебаний, который можно отнести к активной виброзащите. Здесь будет рассмотрена подобная задача, которая относится к пассивной виброзащите.

Исследуется возможность гашения нестационарных колебаний механической системы, состоящей из прямоугольной шарнирно опёртой пластины и лежащей на ней сосредоточенной массы, при помощи специально присоединённого к пластине в некоторой точке пассивного гасителя колебаний (рис. 5.13).

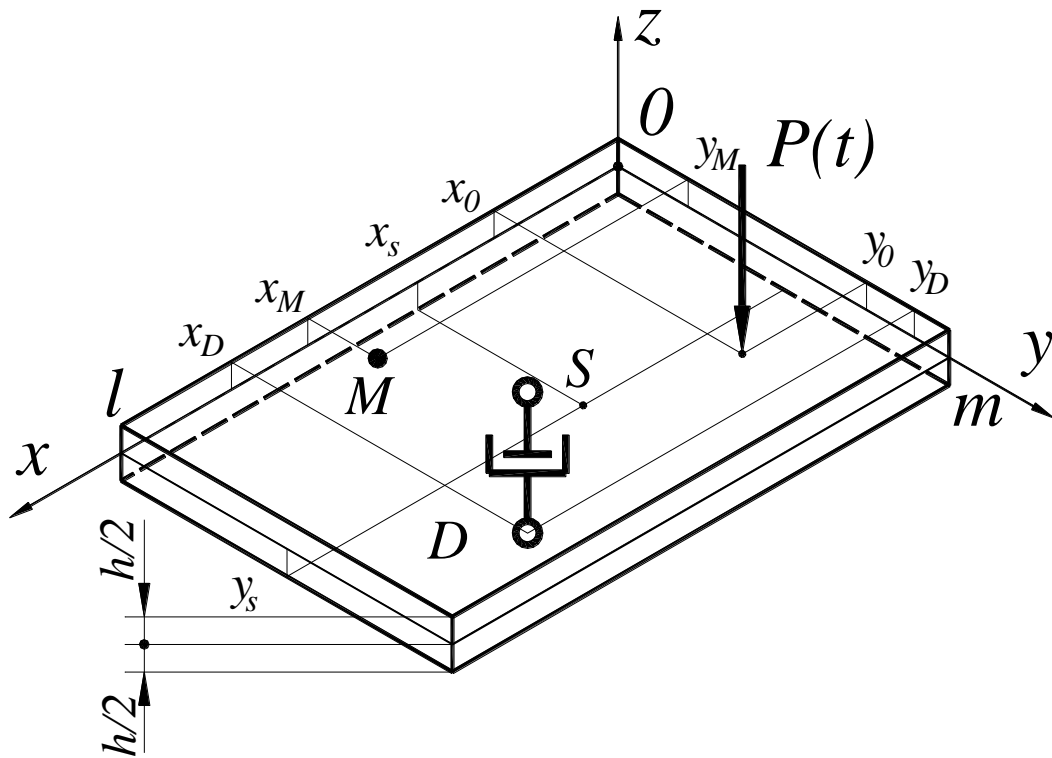


Рис. 5.13. Схема гашения нестационарных колебаний пластины и массы

Система дифференциальных уравнений, описывающая нестационарные деформационные процессы в пластине с присоединенной массой M , аналогична приведенной ранее (5.1).

Для перемещений точек, в которых присоединены сосредоточенная масса $w(x_M, y_M, t) = w_M(t)$ и гаситель колебаний $w(x_D, y_D, t) = w_D(t)$, можно записать следующие интегральные соотношения:

$$\left\{ \begin{array}{l} w(x_D, y_D, t) = \int_0^t \frac{R_D(\tau)}{\kappa} d\tau, \\ w(x_D, y_D, t) = \int_0^t P(\tau) K_{PD}(t-\tau) d\tau - \int_0^t R_D(\tau) K_{DD}(t-\tau) d\tau - \int_0^t R_M(\tau) K_{MD}(t-\tau) d\tau, \\ w(x_M, y_M, t) = \int_0^t R_M(\tau) \frac{t-\tau}{M} d\tau, \\ w(x_M, y_M, t) = \int_0^t P(\tau) K_{PM}(t-\tau) d\tau - \int_0^t R_D(\tau) K_{DM}(t-\tau) d\tau - \int_0^t R_M(\tau) K_{MM}(t-\tau) d\tau. \end{array} \right. \quad (5.7)$$

Исключив из интегральных соотношений (5.7) $w(x_M, y_M, t)$ и $w(x_D, y_D, t)$, получаем следующую систему интегральных уравнений Вольтерра I рода относительно неизвестных $R_D(t)$ и $R_M(t)$:

$$\begin{cases} \int_0^t R_D(\tau) \left[K_{DD}(t-\tau) + \frac{1}{\kappa} \right] d\tau + \int_0^t R_M(\tau) K_{MD}(t-\tau) d\tau = \int_0^t P(\tau) K_{PD}(t-\tau) d\tau, \\ \int_0^t R_D(\tau) K_{DM}(t-\tau) d\tau + \int_0^t R_M(\tau) \left[K_{MM}(t-\tau) + \frac{t-\tau}{M} \right] d\tau = \int_0^t P(\tau) K_{PM}(t-\tau) d\tau. \end{cases} \quad (5.8)$$

Описание и вид ядер, входящих в (5.8) приводилось ранее. Система (5.7), как и подобные, решается с использованием РА Тихонова. После дискретизации её можно переписать в виде:

$$\begin{cases} \mathbf{A}_{DD} \mathbf{R}_D + \mathbf{A}_{MD} \mathbf{R}_M = \mathbf{A}_{PD} \mathbf{P}, \\ \mathbf{A}_{DM} \mathbf{R}_D + \mathbf{A}_{MM} \mathbf{R}_M = \mathbf{A}_{PM} \mathbf{P}. \end{cases} \quad (5.9)$$

Как указывалось ранее для решения матричной системы (5.9) удобно использовать обобщённые алгоритмы, в случае прямой задачи, когда возмущающее воздействие $P(t)$ известно, а искомыми являются $R_D(t)$ и $R_M(t)$ в системе (5.9) удобно переобозначить матрицы и записать её в блочном виде:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_D \\ \mathbf{R}_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_{PD} \\ \mathbf{w}_{PM} \end{bmatrix}. \quad (5.10)$$

Тогда в случае решения обратной задачи, когда все три силовые зависимости $P(t)$, $R_D(t)$ и $R_M(t)$ неизвестны, а задано изменение прогиба в некоторой точке $w(x_S, y_S, t) = w_S(t)$ можно записать следующую блочную систему:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{13} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{23} \\ \mathbf{A}_{31} & \mathbf{A}_{32} & \mathbf{A}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P} \\ -\mathbf{R}_D \\ -\mathbf{R}_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{w}_s \end{bmatrix}. \quad (5.11)$$

При расчетах, как и обычно, предполагалось, что срединная плоскость пластины была связана с плоскостью xOy декартовой системы координат. Считалось, что возмущающая нагрузка, реакции массы и демпфера сосредоточены в точках. При вычислениях принимались следующие значения:

– $E=2.07 \cdot 10^{11}$ Па; $\nu=0.3$; $\rho=7890$ кг/м³;

– $h=0.04$ м; $l=0.6$ м; $m=0.4$ м;

– число членов в соответствующих двойных рядах Фурье 50×50 .

На рис. 5.14 приведена схема расположения точек для расчётов при решении прямой и обратной задачи.

Координаты точек:

– $x_0=0.4$ м, $y_0=0.3$ м – приложения возмущающей нагрузки;

– $x_D=0.3$ м, $y_D=0.2$ м – присоединения демпфера;

– $x_M=0.15$ м, $y_M=0.3$ м – сосредоточенной массы;

– $x_S=0.2$ м, $y_S=0.15$ м – в которой, считалось известным изменение прогиба $w(x_S, y_S, t) = w_S(t)$ при решении обратной задачи.

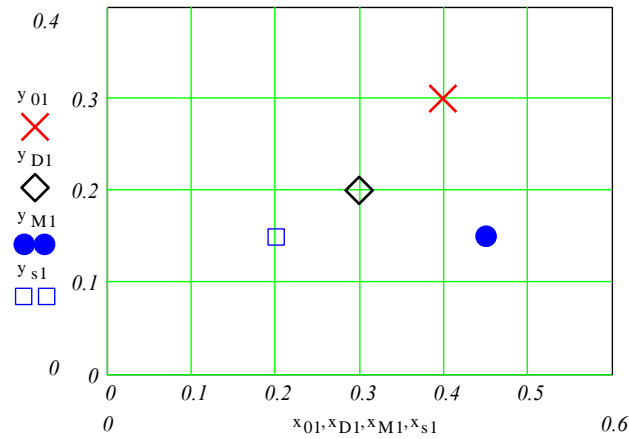


Рис. 5.14. Схема пластины с массой и демпфером в плане:

× – внешняя сила; • – точка присоединения сосредоточенной массы;
 ◇ – точка присоединения демпфера; □ – точка измерения прогибов пластины

При вычислениях в рамках анализа прямой задачи искомые функции $R_D(t)$ и $R_M(t)$ определялись из решения системы (5.10), которая решалась численно-аналитически согласно РА Тихонова. Параметры регуляризации α_D и α_M определялись на основе минимизации по α соответствующих функционалов невязки. На рис. 5.15 показаны графики изменения невязок для $R_D(t)$ (показан точками) и $R_M(t)$ в зависимости от параметра регуляризации α . Укажем, что значения параметра регуляризации для удобства отложены в логарифмической шкале.

Из рис. 5.15 видно, что имеются зоны оптимальных значений параметров регуляризации: для α_D это $10^{-47} < \alpha_D < 10^{-43}$; для α_M это $10^{-48} < \alpha_M < 10^{-46}$, причём при дальнейших расчетах принимались $\alpha_D = 10^{-46}$ и $\alpha_M = 10^{-47}$.

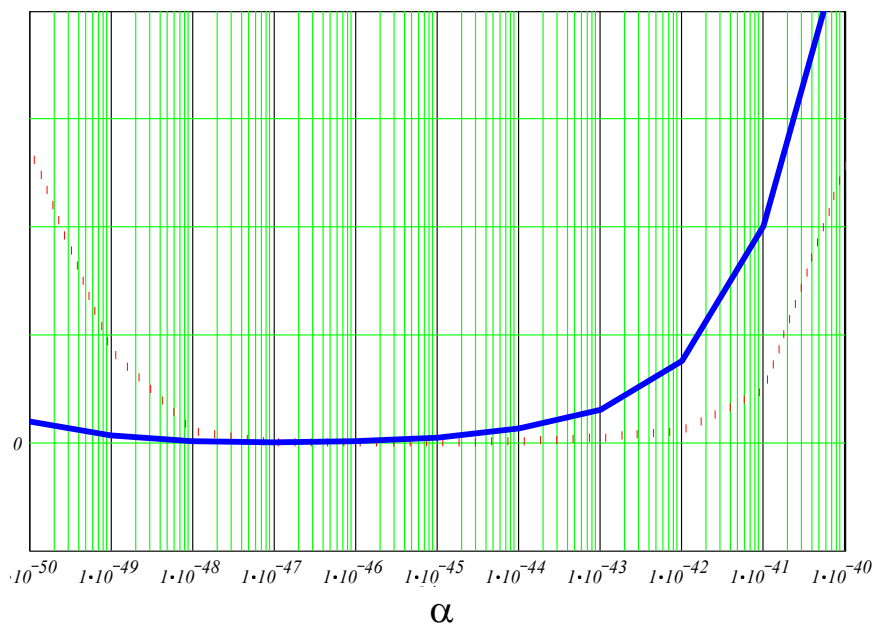


Рис. 5.15. К выбору параметров регуляризации α_D и α_M

На рис. 5.16 показаны графики изменения прогибов пластины в точке S , вызванных действием только возмущающей силы $P(t) - w_{PS}(t)$; только реакцией между гасителем и пластиной $R_D(t) - w_{DS}(t)$; только реакцией сосредоточенной массы $R_M(t) - w_{MS}(t)$, а также график, показывающий изменение прогиба исследуемой точки для пластины с массой (суммарная кривая) при наличии сосредоточенного гасителя $- w_S(t)$.

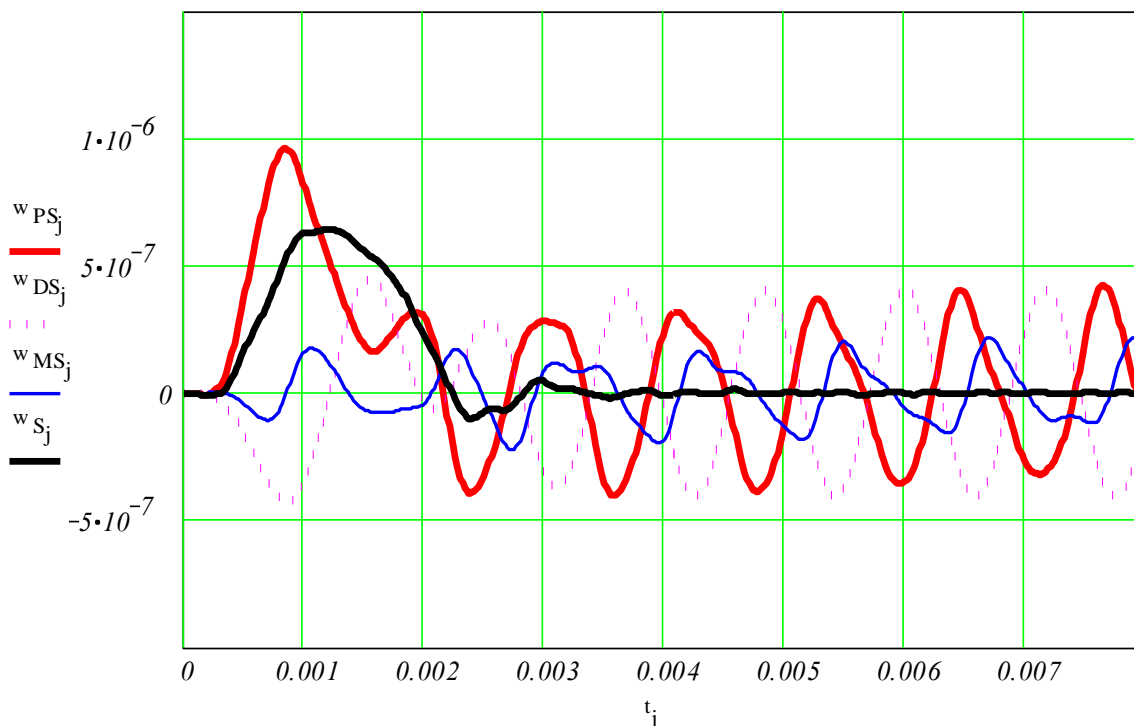


Рис. 5.16. Изменение прогиба в точке пластины $x_S = 0.2$ м, $y_S = 0.15$ м

Приведенный рис. 5.16 демонстрирует (кривая $w_S(t)$), что, используя гаситель колебаний с выбранным оптимальным коэффициентом демпфирования, можно несколько сгладить основной пик прогибов, а потом в течении нескольких периодов почти полностью погасить нестационарные колебания (значительно уменьшить амплитуды прогибов). Это подтверждает эффективность систем пассивной виброзащиты.

На рис. 5.17 показаны графики изменения во времени внешней возмущающей нагрузки $P_1(t)$, а также определенные из решения системы (5.10) реакции между пластиной и демпфером $R_D(t)$ и реакции сосредоточенной массы $R_M(t)$, найденные при значениях параметров регуляризации $\alpha_D = 10^{-46}$ и $\alpha_M = 10^{-47}$ соответственно.

При вычислительном эксперименте в процессе решения обратной задачи закон изменения возмущающей нагрузки $P(t)$ считался неизвестным. Идентификация производилась по зашумленным и незашумленным значениям прогиба $w_S(t)$ в точке S , найденным в результате решения прямой задачи.

На рис. 5.18 показаны незашумленные значения прогиба в точке S $w_S(t)$ и зашумленные $w_\delta(t)$. Зашумление исходных данных осуществлялось с использованием закона нормального распределения (которое моделирует погрешности случайного характера), механизм наложения которого описывался ранее; относительная погрешность “зашумления” (дисперсия) принималась $\delta = 0.2$.

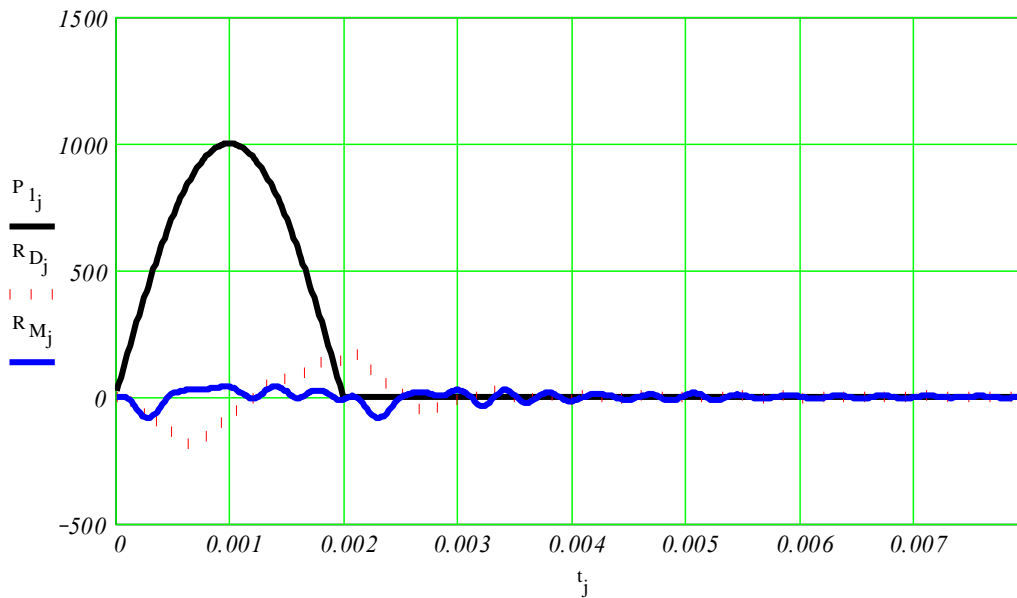


Рис. 5.17. Воздействующие на пластину нагрузки.

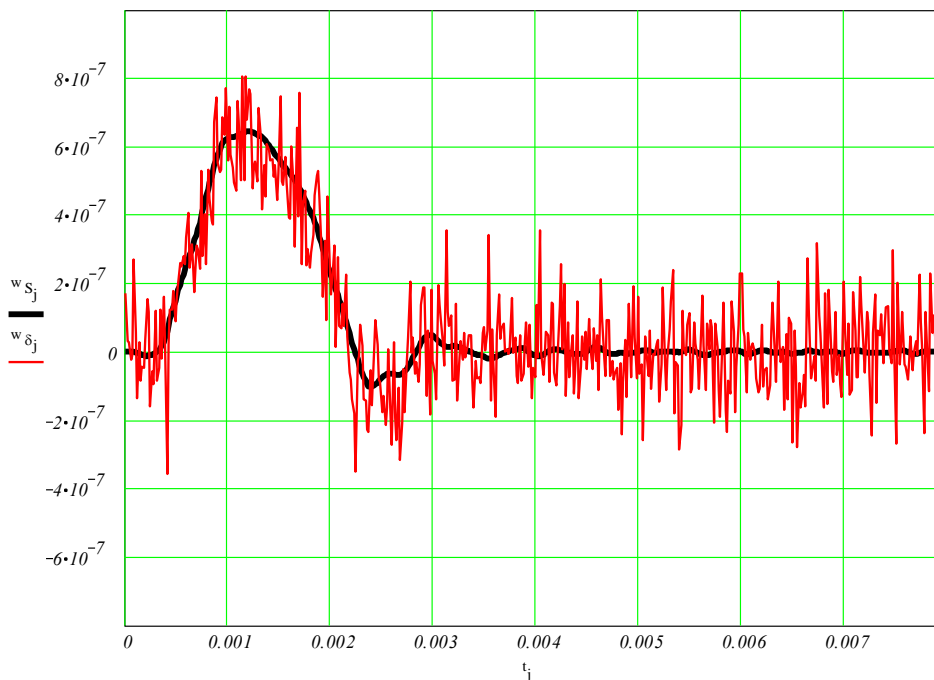


Рис. 5.18. Исходные данные идентификации (изменение прогиба)

На рис. 5.19 и рис. 5.20 показаны идентифицированные по $w_S(t)$ и $w_\delta(t)$ зависимости изменения во времени $P(t)$, $R_D(t)$ и $R_M(t)$.

Отметим, что на рис. 5.19 и рис. 5.20 идентифицированные $P(t)$, $R_D(t)$ и $R_M(t)$ показаны точками, а точные зависимости, которые были взяты из результатов решения прямой задачи, показаны сплошными линиями.

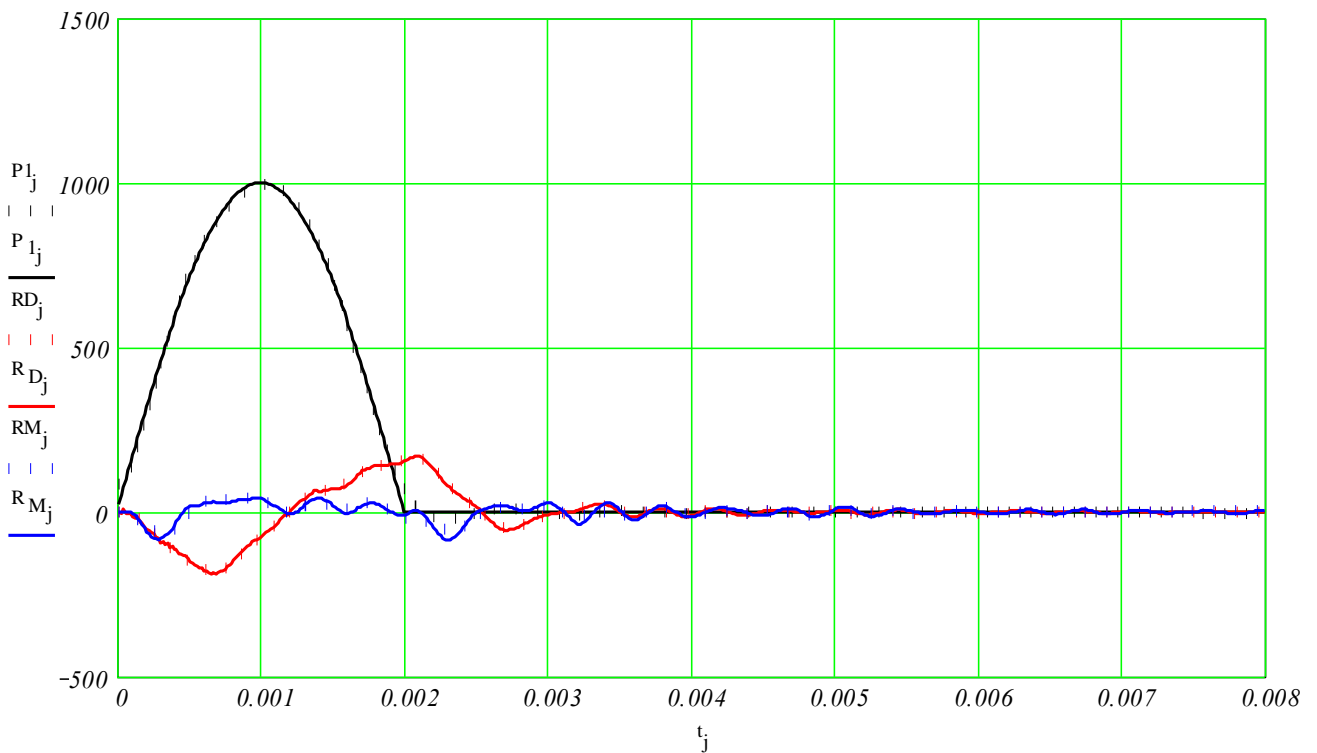


Рис. 5.19. Результаты идентификации по незашумленным исходным данным

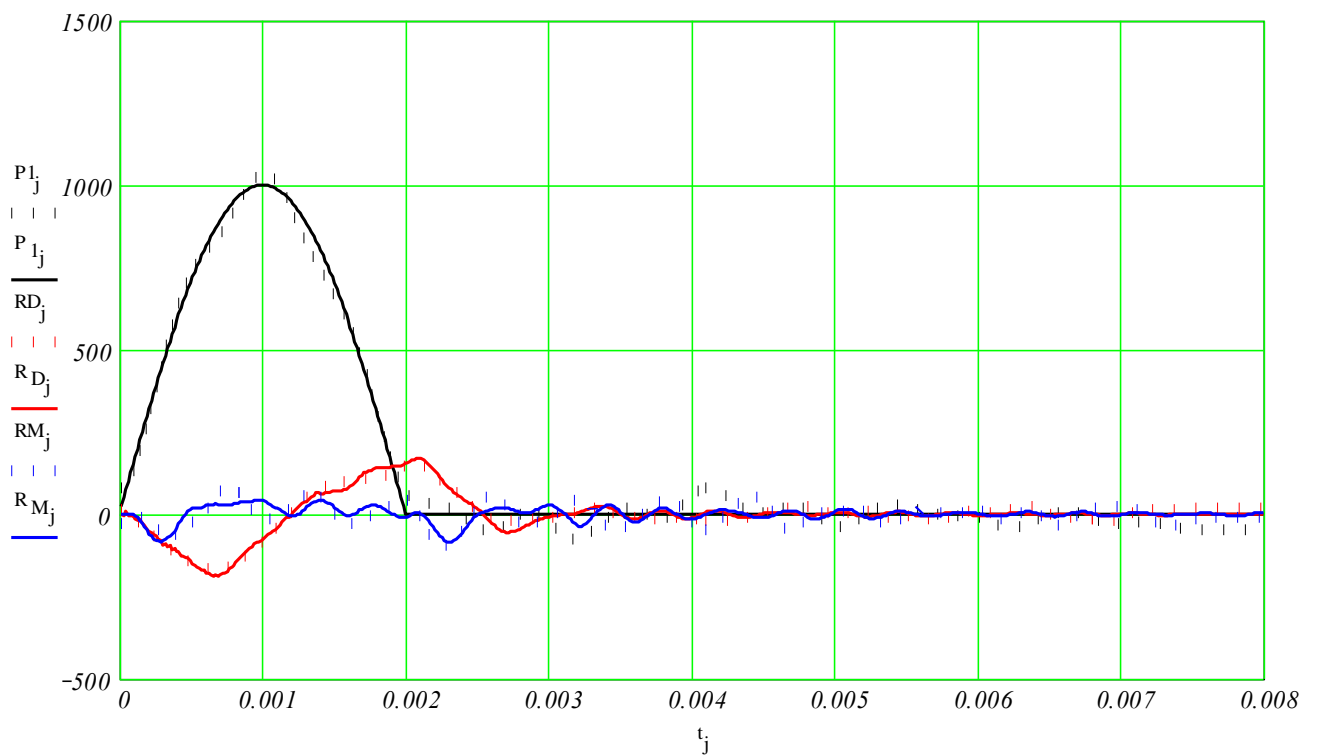


Рис. 5.20. Результаты идентификации по зашумленным исходным данным

Из рис. 5.19 хорошо видно, что идентифицированные $P(t)$, $R_D(t)$ и $R_M(t)$ по незашумленным исходным данным практически полностью совпадают с точными их значениями. В случае использования зашумленных исходных данных (рис. 5.20) результаты идентификации получаются весьма удовлетворительные, особенно в зоне с большими амплитудами, которая представляет значительный интерес при исследовании нестационарных процессов.

Укажем, что идентификация $P(t)$, $R_D(t)$ и $R_M(t)$ производилась при значении параметров регуляризации $\alpha_P = 10^{-61}$, $\alpha_D = 10^{-62}$ и $\alpha_M = 10^{-62}$ соответственно. Вид соответствующих функционалов невязки, на основе минимизации которых выбирались оптимальные значения параметров регуляризации подобен показанным на рис. 5.15 и отдельно для обратной задачи не приводится.

На основе представленных на рис. 5.20 результатов можно сделать вывод о том, что предложенная методика решения обратной задачи и алгоритм определения неизвестных нагрузок являются эффективными и достаточно устойчивыми к возмущению исходных данных.

5.4. Управление поперечными колебаниями на небольшой области пластины

Используемая в настоящем исследовании методика управления колебаниями прямоугольной пластины с помощью приложения системы нескольких внешних управляющих воздействий и является логическим продолжением методики, приведенной в [262], где приведено решение соответствующей задачи об управлении нестационарными колебаниями в одной точке прямоугольной пластины с помощью применения одной управляющей силы.

Здесь опишем решение более общей задачи об управлении нестационарными колебаниями. Рассматривается возможность управления на существенно меньшей по сравнению с размерами пластины прямоугольной площадке. Пластина – упругая, изотропная, прямоугольная, средней толщины (рис. 5.21). Габариты пластины $l \times m$, а толщина h . Схема закрепления пластины соответствует шарнирному опиранию. Предположим, что на пластину воздействует система нескольких независимых поперечных нагрузок, приложенных в точках (x_{0i}, y_{0i}) . Требуется управлять колебаниями (например, обеспечить необходимый закон изменения во времени прогиба пластины или, наоборот, уменьшить величины прогибов или деформаций пластины) на небольшой прямоугольной области пластины. Управление осуществляется с помощью системы, состоящей из четырех независимых управляющих воздействий (сил), которые являются искомыми.

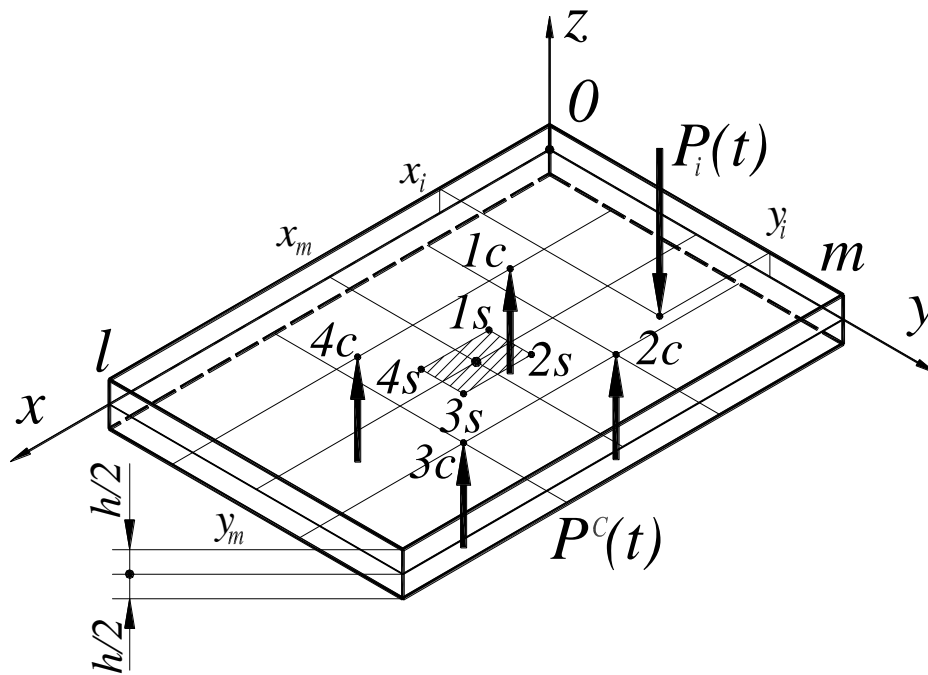


Рис. 5.21. Схема управления колебаниями

На рис. 5.22 показан частный случай схемы управления, когда управляющие силы приложены в углах границы малой области, в которой осуществляется управление. Такая схема не всегда применима (в силу геометрических соображений), но позволяет несколько упростить схему управления, а также уменьшить величины управляющих сил, то есть энергию, затрачиваемую на управление.

В случае, если закон изменения во времени возмущающих нагрузок известен, поставленная задача сводится к отысканию четырех неизвестных управляющих нагрузок.

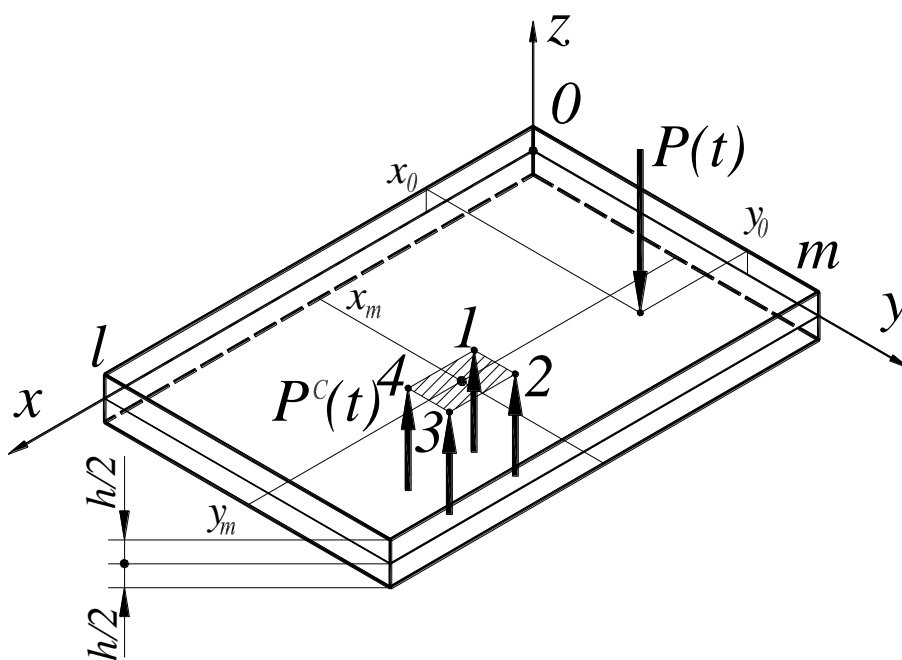


Рис. 5.22. Схема управления колебаниями

Уравнения нестационарных колебаний прямоугольной пластины под действием системы поперечных нагрузок (управляющих и возмущающих) по аналогии с (5.1) можно записать следующем виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} G'h(\nabla^2 w_0 + \psi_{xy}) = \rho h \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^N P_i(x, y, t) + \sum_{i=1}^{Nc} P_i^c(x, y, t); \\ D\nabla^2 \psi_{xy} - G'h(\psi_{xy} + \nabla^2 w_0) = \rho \cdot I \frac{\partial^2 \psi_{xy}}{\partial t^2}; \\ \frac{D}{2} [(1-\nu)\nabla^2 \varphi_{xy} + (1+\nu)\nabla_1^2 \psi_{xy}] - G'h(\varphi_{xy} + \nabla_1^2 w_0) = \rho \cdot I \frac{\partial^2 \varphi_{xy}}{\partial t^2}, \end{array} \right. \quad (5.12)$$

Укажем, что $\sum_{i=1}^N P_i(x, y, t)$ – система возмущающих нагрузок (в настоящей работе – две сосредоточенные нагрузки $P_1(x, y, t)$ и $P_2(x, y, t)$, приложенные в двух различных точках, причем $P_1(t) \neq P_2(t)$); а $\sum_{i=1}^{Nc} P_i^c(x, y, t)$ – система управляющих нагрузок (в данном случае $Nc=4$).

В результате для прогиба и углов поворота решение прямой задачи получается в виде суммы интегралов Дюамеля (свёрток):

$$\begin{aligned} w(x, y, t) &= \sum_{i=1}^N \int_0^t P_i(\tau) K_i^W(x, y, t - \tau) d\tau - \sum_{i=1}^{Nc} \int_0^t P_i^c(\tau) K_i^W(x, y, t - \tau) d\tau; \\ \psi_x(x, y, t) &= \sum_{i=1}^N \int_0^t P_i(\tau) K_i^{\Psi x}(x, y, t - \tau) d\tau - \sum_{i=1}^{Nc} \int_0^t P_i^c(\tau) K_i^{\Psi x}(x, y, t - \tau) d\tau; \\ \psi_y(x, y, t) &= \sum_{i=1}^N \int_0^t P_i(\tau) K_i^{\Psi y}(x, y, t - \tau) d\tau - \sum_{i=1}^{Nc} \int_0^t P_i^c(\tau) K_i^{\Psi y}(x, y, t - \tau) d\tau, \end{aligned} \quad (5.13)$$

где $K_i^{\Psi x}(x, y, t)$, $K_i^{\Psi y}(x, y, t)$, $K_i^W(x, y, t)$ – соответствующие ядра интегралов Дюамеля (сверток), вида:

$$\begin{aligned} K_i^{\Psi x}(x, y, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{ikn} \cdot b \cdot \lambda_k^*}{\Delta_{kn}} \cdot \cos \frac{k\pi \cdot x}{l} \cdot \sin \frac{n\pi \cdot y}{m} \cdot \sum_{p=1}^2 \frac{\sin \omega_{pkn}(t)}{\omega_{pkn}}, \\ K_i^{\Psi y}(x, y, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{ikn} \cdot b \cdot \mu_n^*}{\Delta_{kn}} \cdot \sin \frac{k\pi \cdot x}{l} \cdot \cos \frac{n\pi \cdot y}{m} \cdot \sum_{p=1}^2 \frac{\sin \omega_{pkn}(t)}{\omega_{pkn}}, \\ K_i^W(x, y, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{ikn}}{\Delta_{kn}} \cdot \sin \frac{k\pi \cdot x}{l} \cdot \sin \frac{n\pi \cdot y}{m} \cdot \sum_{p=1}^2 \Omega_{pkn} \cdot \sin \omega_{pkn}(t). \end{aligned}$$

Предположим, что требуется погасить колебания (по возможности существенно уменьшить амплитуды колебаний прогиба пластины) на небольшой по сравнению с размерами пластины прямоугольной области.

Так как критерием управления является уменьшение амплитуд прогиба, тогда можно считать, что справедливы следующие выражения:

$$w(x_{sj}, y_{sj}, t) = 0, \quad (5.14)$$

где (x_{sj}, y_{sj}) – четыре точки, ограничивающие прямоугольную область гашения.

Используя вид решения прямой задачи для прогибов (5.13) и критерии управления (5.14) можно получить систему четырех интегральных уравнений Вольтерра I рода:

$$\sum_{i=1}^{N_c} \int_0^t P_i^C(\tau) K_i^W(x_{sj}, y_{sj}, t - \tau) d\tau = \sum_{i=1}^N \int_0^t P_i(\tau) K_i^W(x_{sj}, y_{sj}, t - \tau) d\tau. \quad (5.15)$$

Система интегральных уравнений в матричном виде для рассматриваемого случая будет иметь вид

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{13} & \mathbf{A}_{14} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{23} & \mathbf{A}_{24} \\ \mathbf{A}_{31} & \mathbf{A}_{32} & \mathbf{A}_{33} & \mathbf{A}_{34} \\ \mathbf{A}_{41} & \mathbf{A}_{42} & \mathbf{A}_{43} & \mathbf{A}_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{c1} \\ \mathbf{P}_{c2} \\ \mathbf{P}_{c3} \\ \mathbf{P}_{c4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1} \mathbf{A}0_{1i} \mathbf{P}_i \\ \sum_{i=1} \mathbf{A}0_{2i} \mathbf{P}_i \\ \sum_{i=1} \mathbf{A}0_{3i} \mathbf{P}_i \\ \sum_{i=1} \mathbf{A}0_{4i} \mathbf{P}_i \end{bmatrix}. \quad (5.16)$$

Решение подобных систем уравнений относительно искомым функций $P_{cj}(t)$ описано ранее и осуществляется с применением комплекса методов, который базируется на использовании ОАК для блочной матрицы \mathbf{A} и РА Тихонова при обращении матриц.

На следующих рисунках представлены результаты численных расчетов.

Численные расчеты производились при следующих значениях параметров: $\rho=7890$ кг/м³; $E=2.07 \cdot 10^{11}$ Па; $\nu=0.3$; $h=0.04$ м; $l=0.6$ м, $m=0.4$ м.

Координаты точек приложения возмущающих нагрузок: $x_{01} = 0.1$ м, $y_{01} = 0.25$ м, $x_{02} = 0.5$ м, $y_{02} = 0.15$ м.

Координаты приложения системы управляющих нагрузок: $x_{c1} = 0.2$ м, $y_{c1} = 0.1$ м, $x_{c2} = 0.2$ м, $y_{c2} = 0.3$ м, $x_{c3} = 0.4$ м, $y_{c3} = 0.3$ м, $x_{c4} = 0.4$ м, $y_{c4} = 0.1$ м.

Координаты точек, ограничивающих прямоугольную область управления: $x_{s1} = 0.29$ м, $y_{s1} = 0.19$ м, $x_{s2} = 0.29$ м, $y_{s2} = 0.21$ м, $x_{s3} = 0.31$ м, $y_{s3} = 0.21$ м, $x_{s4} = 0.31$ м, $y_{s4} = 0.19$ м.

Координаты центра пластины: $x_m = 0.3$ м, $y_m = 0.2$ м.

Для удобства восприятия все эти точки показаны на рис. 5.23.

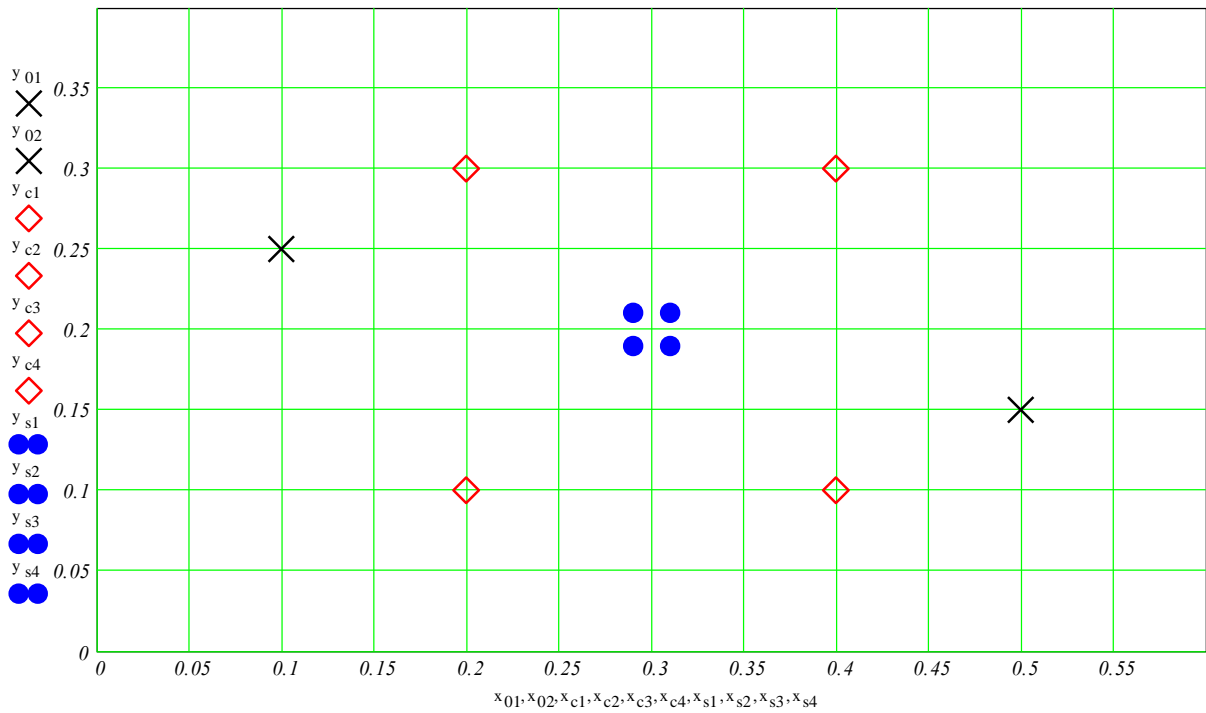


Рис. 5.23. Схема пластины в плане:

- × – внешние возмущающие силы (2 шт.);
- ◇ – точки, в которых приложены управляющие воздействия (4 шт.);
- – точка на границе малой области управления (4 шт.)

Так как система (5.16) решалась с использованием ОАК и РА Тихонова, то для определения каждого из четырёх управляющих воздействий можно воспользоваться одинаковым значением параметра регуляризации, то есть $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha$. Это обусловлено тем, что ядра, входящие в систему интегральных уравнений, сопоставимы по величине, а следовательно и управляющие воздействия должны быть одного порядка.

На рис. 5.24 показан функционал «суммарного прогиба» для точки которая находится в центре площадки, на которой осуществляется управление (эта точка, как видно из

рис. 5.23 совпадает с геометрическим центром пластины):

$$M^\alpha[w_m] = \|w_m\|_{l_1}, \quad (5.17)$$

где w_m – прогиб в центре площадки «гашения» колебаний.

Функционал (5.17) показан при значениях параметра регуляризации α , взятых в рациональном для данной задачи диапазоне $10^{-94} < \alpha < 10^{-84}$. (Значения параметра α на рис. 5.24 отложены в логарифмической шкале). Из рис. 5.24 видно, что явно выделяются два значения параметра: $\alpha = 10^{-86}$ и $\alpha = 10^{-89}$. Далее приводятся результаты расчётов по управлению колебаниями при этих значениях параметра регуляризации α .

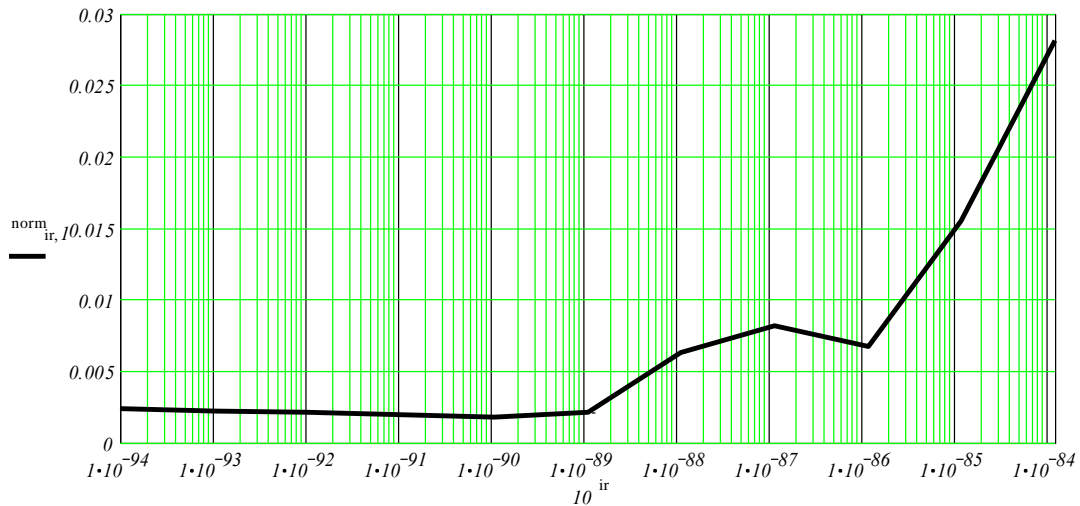


Рис. 5.24. К выбору параметра регуляризации

На рис. 5.25 показаны изменения во времени прогибов пластины в точках управления (точках, ограничивающих прямоугольную область управления), а также в геометрическом центре области «гашения» колебаний. На рисунке приведены две группы кривых: одна соответствует случаю, когда отсутствуют управляющие воздействия, а вторая – когда приложено четыре управляющих воздействия, закон изменения во времени, которых найден в результате решения задачи управления при значении $\alpha = 10^{-86}$.

На рис. 5.26 показаны изменения во времени двух внешних возмущающих сил изменяющихся, как «полуволны синусоиды» и «прямоугольные ступеньки конечной продолжительности», а также четырех управляющих воздействий, которые носят осциллирующий характер. Изменения во времени управляющих воздействий найдены на основе решения обратной задачи (см. систему уравнений (5.16)). На этом рисунке кривые отдельно не помечены.

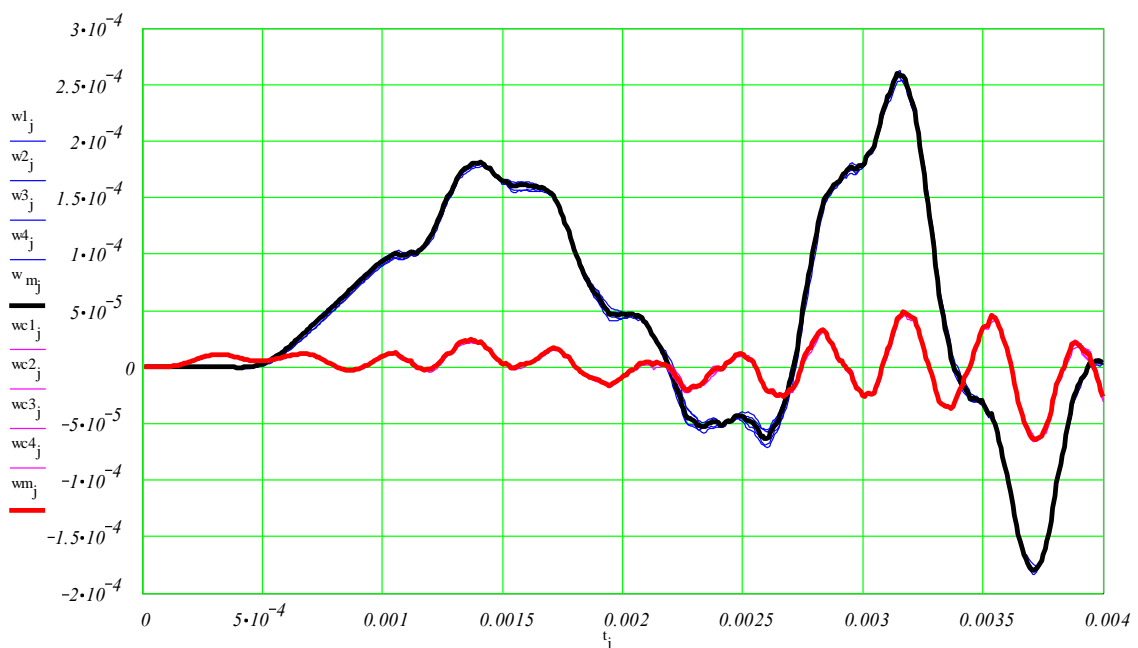


Рис. 5.25. Изменение прогиба в области управления

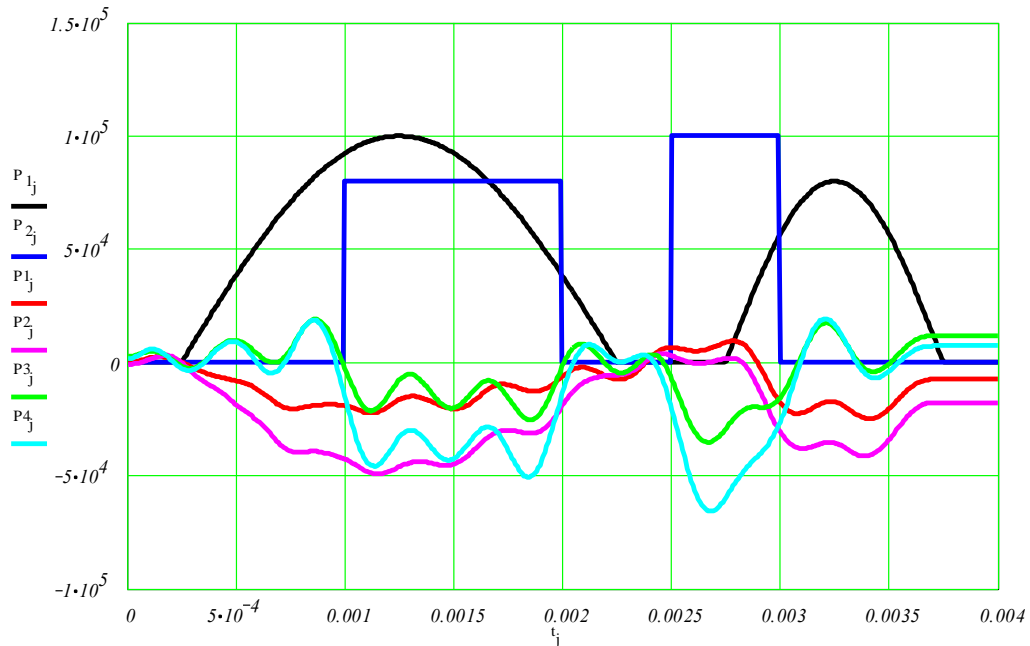


Рис. 5.26. Возмущающие и управляющие воздействия

Из рис. 5.25 видно, что при найденных значения управляющих воздействий хотя и не удается полностью погасить нестационарные колебания, амплитуды прогибов снижаются более чем в 5 раз, чего в некоторых случаях может быть достаточно. Иногда значительные амплитуды колебаний могут оказать решающее влияние на появление повреждений объектов, связанных с пластинчатыми элементами (например, остекления).

Описание рис. 5.27 и рис. 5.28 полностью аналогично описанию рис. 5.25 и рис. 5.26, за исключением значения параметра регуляризации, при которых были рассчитаны представленные результаты – это оптимальное значение $\alpha = 10^{-89}$.

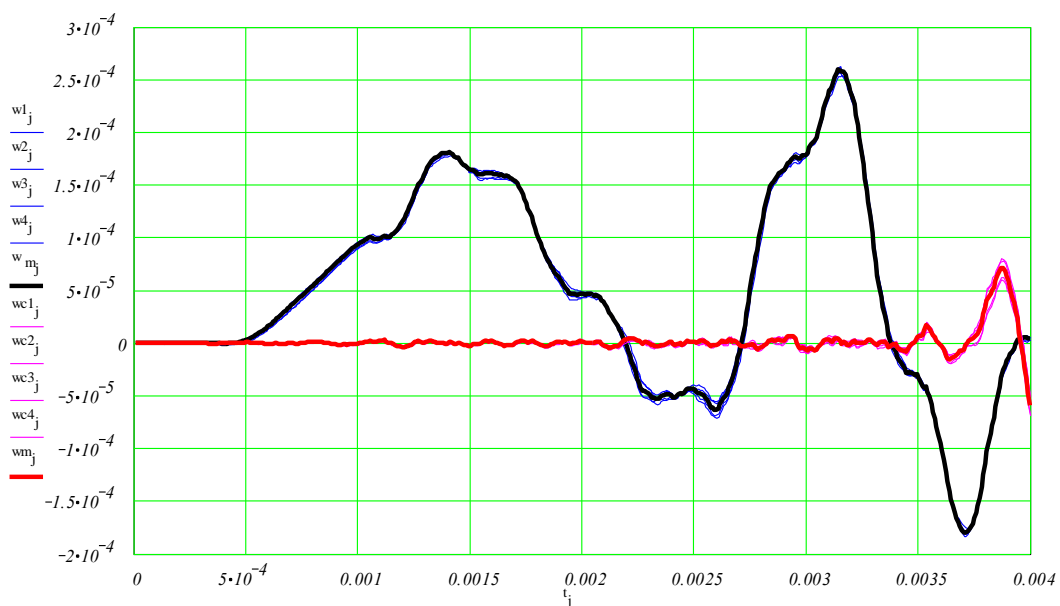


Рис. 5.27. Изменение прогиба в области управления

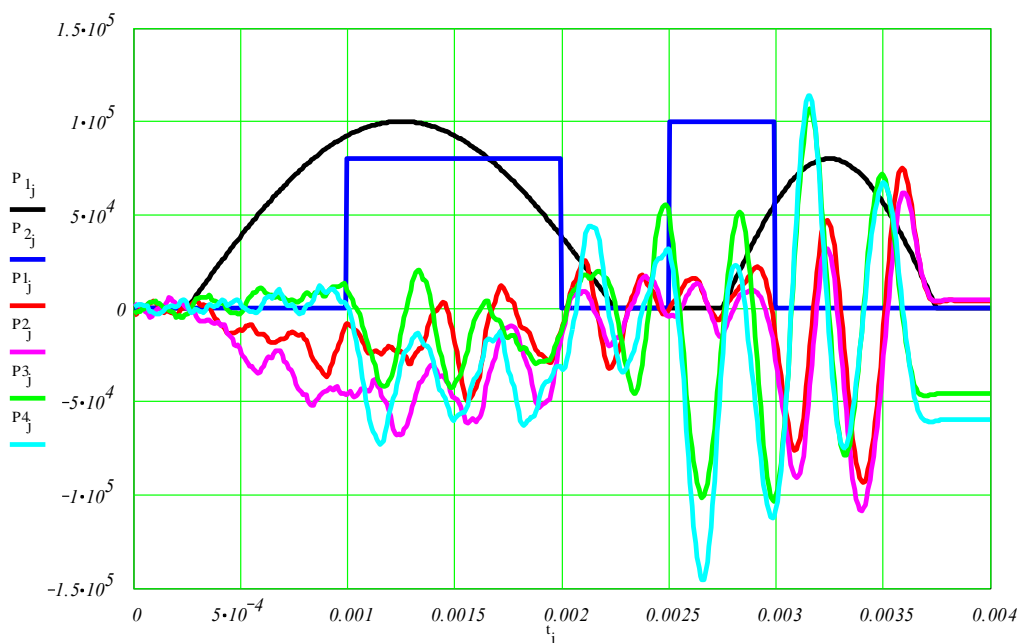


Рис. 5.28. Возмущающие и управляющие воздействия

Из рис. 5.28 видно, что изменения управляющих воздействий во времени, найденных при оптимальном значении $\alpha = 10^{-89}$, носят более ярко выраженный осциллирующий характер, а их амплитуды по величине превосходят значения возмущающих воздействий.

Результаты, приведенные на рис. 5.27 показывают, что удастся почти полностью погасить нестационарные колебания на малой области пластины, за исключением небольшого промежутка времени, в конце исследуемого временного диапазона. Это вызвано, по-видимому, накоплением погрешностей вычислений при численном решении системы уравнений (5.16).

Далее рассматривается частный случай по гашению колебаний на малой площадке, когда управляющие воздействия будут приложены прямо по углам этой площадки (см. рис. 5.22). На рис. 5.29 показана схема управления, детальное описание рис. 5.29 аналогично приведенному для рис. 5.23.

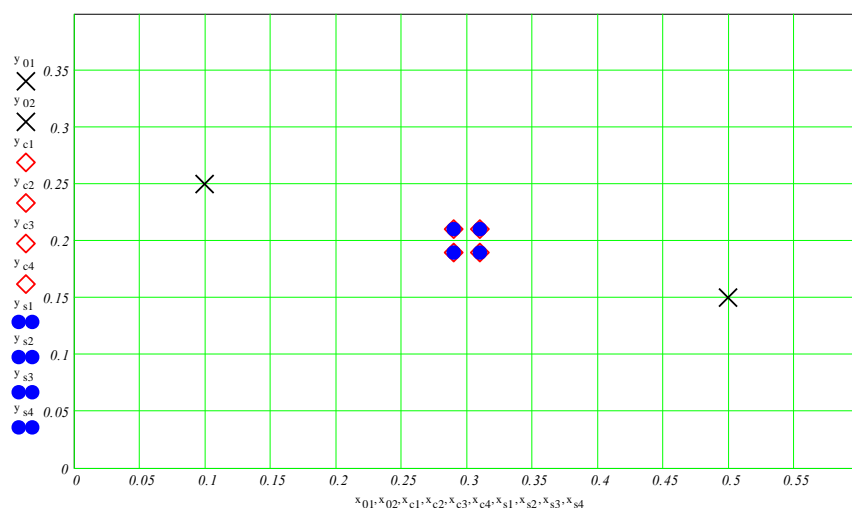


Рис. 5.29. Схема пластины в плане

Параметры пластины и координаты точек приложения возмущающих нагрузок приняты такими же как и в предыдущих расчётах: $x_{01} = 0.1$ м, $y_{01} = 0.25$ м, $x_{02} = 0.5$ м, $y_{02} = 0.15$ м.

Координаты точек, ограничивающих прямоугольную область управления, полностью совпадают с координатами приложения управляющих нагрузок: $x_{s1} = 0.29$ м, $y_{s1} = 0.19$ м, $x_{s2} = 0.29$ м, $y_{s2} = 0.21$ м, $x_{s3} = 0.31$ м, $y_{s3} = 0.21$ м, $x_{s4} = 0.31$ м, $y_{s4} = 0.19$ м.

Координаты центра пластины: $x_m = 0.3$ м, $y_m = 0.2$ м.

На рис. 5.30 показаны функционалы «суммарного прогиба» – сплошная кривая и «суммарного управляющего воздействия» – показан точками.

Вид функционала «суммарного управляющего воздействия»:

$$M 2^\alpha [P_C] = \sum_{i=1}^4 \|P_{C_i}\|, \quad (5.18)$$

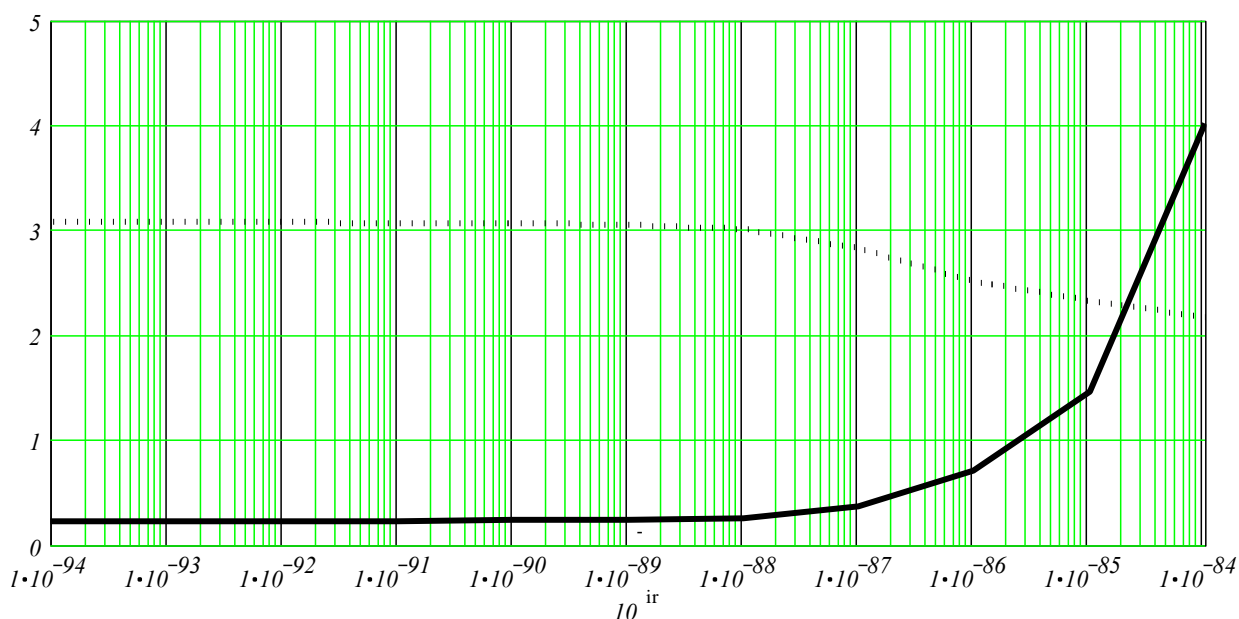


Рис. 5.30. К выбору параметра регуляризации

Из рис. 5.30 видно, что для решения задачи достаточно брать значения параметра регуляризации $\alpha \leq 10^{-88}$, так как далее значения практически не меняются.

На рис. 5.31 показаны изменения во времени прогибов пластины в точках управления, а на рис. 5.32 – изменения во времени двух внешних возмущающих сил и четырех управляющих воздействий при $\alpha = 10^{-88}$. Напомним, что детальное описание рисунков аналогично приведенным ранее.

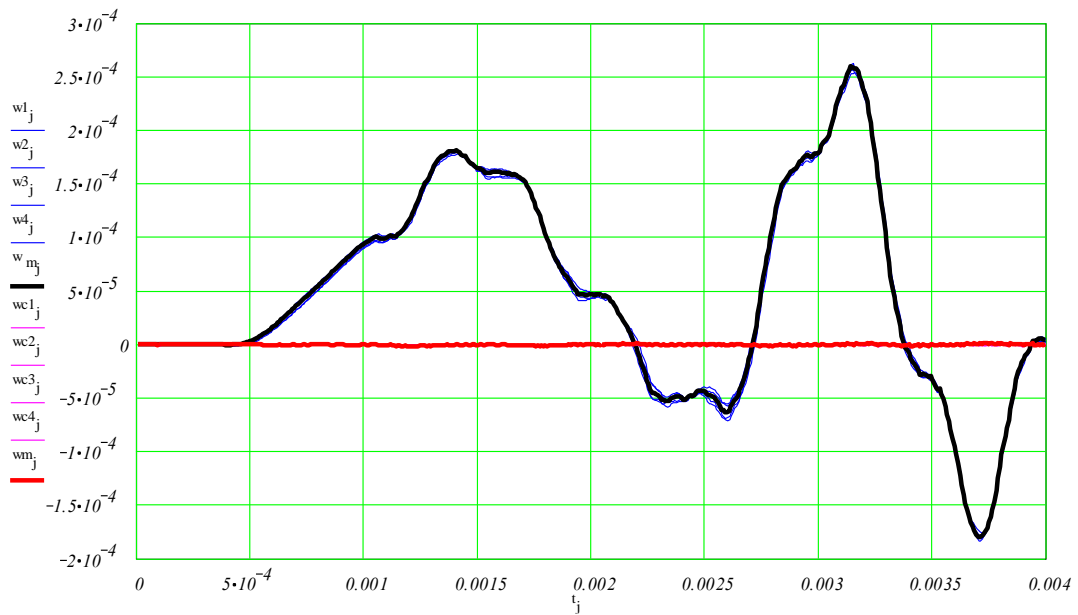


Рис. 5.31. Изменение прогиба в области управления

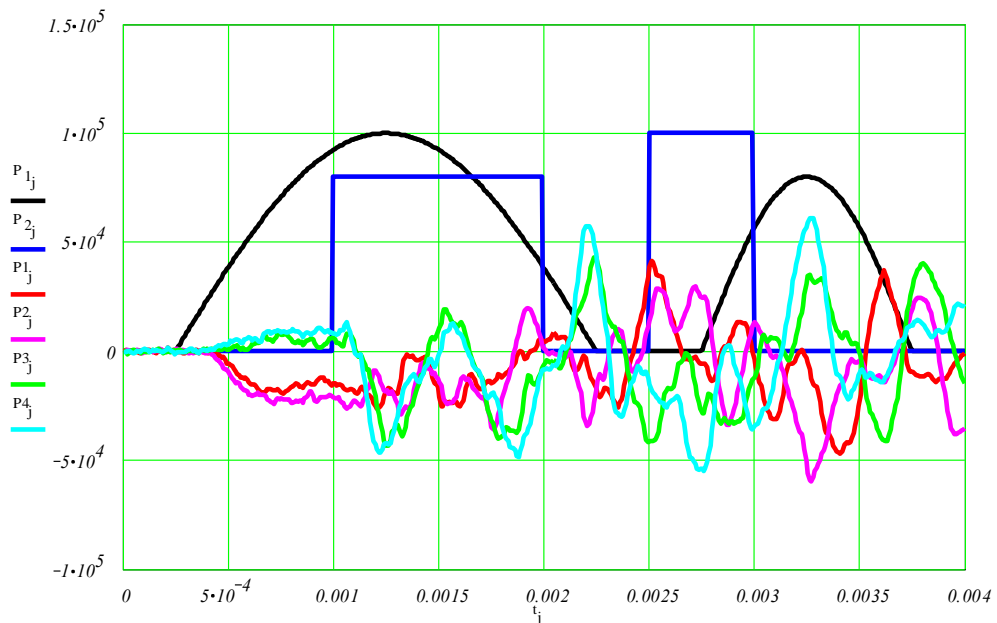


Рис. 5.32. Возмущающие и управляющие воздействия

Из рис. 5.31 и рис. 5.32 видно, что в случае, когда точки в которых осуществляется управление совпадают с точками приложения управляющих воздействий, решение системы уравнений (5.16) получается значительно устойчивее и удаётся практически полностью погасить колебания на малой области управления.

На следующих рис. 5.33, рис. 5.34, рис. 5.35 показано распределение прогиба по поверхности пластины (двумерные эпюры) в различные моменты времени.

Рис. 5.33 соответствует моменту времени $t = 0.0014$ с (окрестности первого максимального прогиба колебаний пластины);

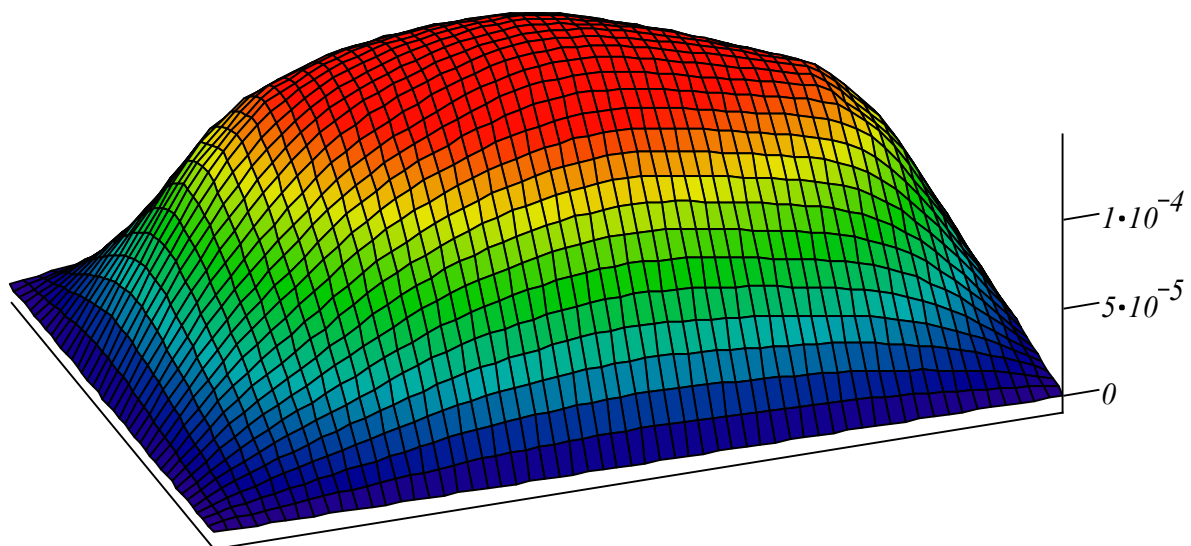
рис. 5.34 – $t = 0.00252$ с;

рис. 5.35 – $t = 0.0032$ с.

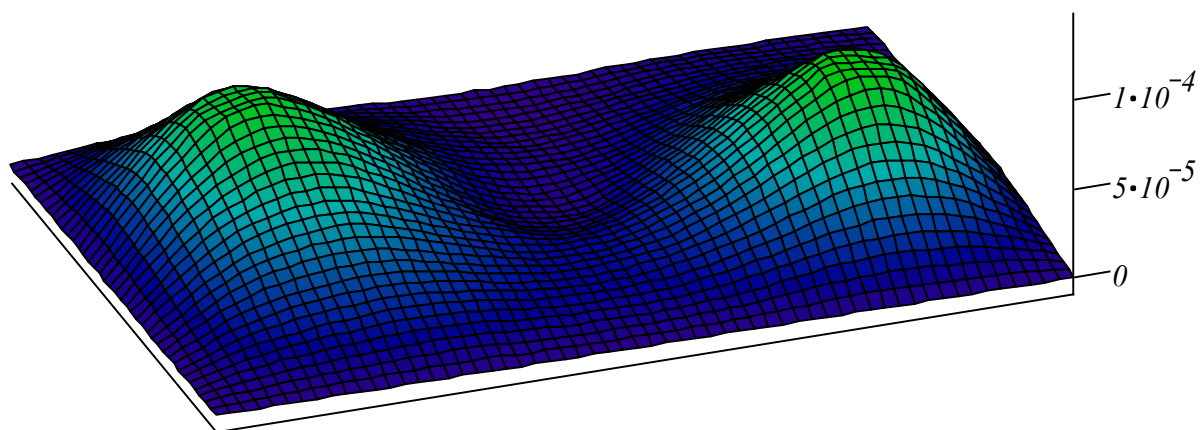
На этих рисунках показаны результаты расчетов для двух случаев:

а) когда приложены только возмущающие воздействия;

б) когда осуществляется управление на малой области, причем вид управляющих воздействий показан на рис. 5.32.



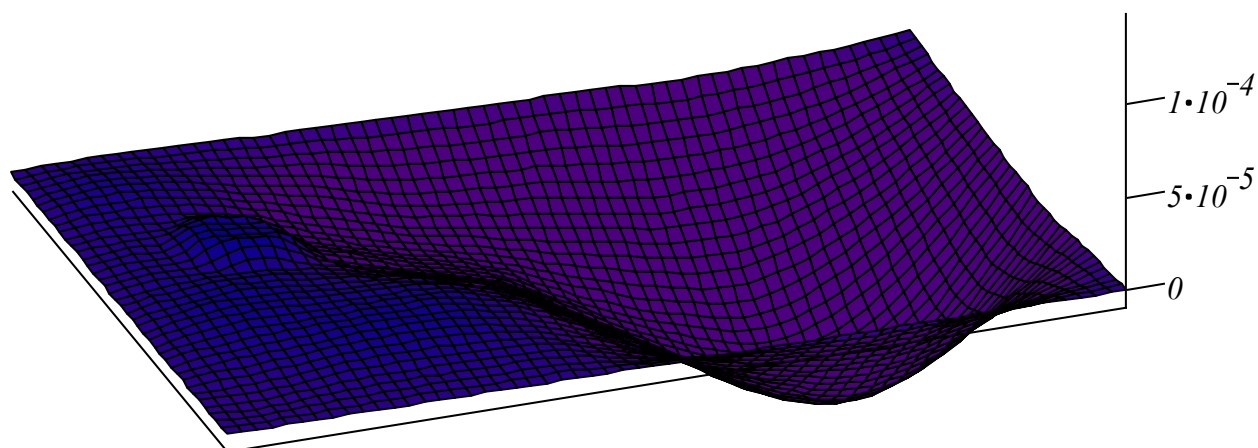
а)



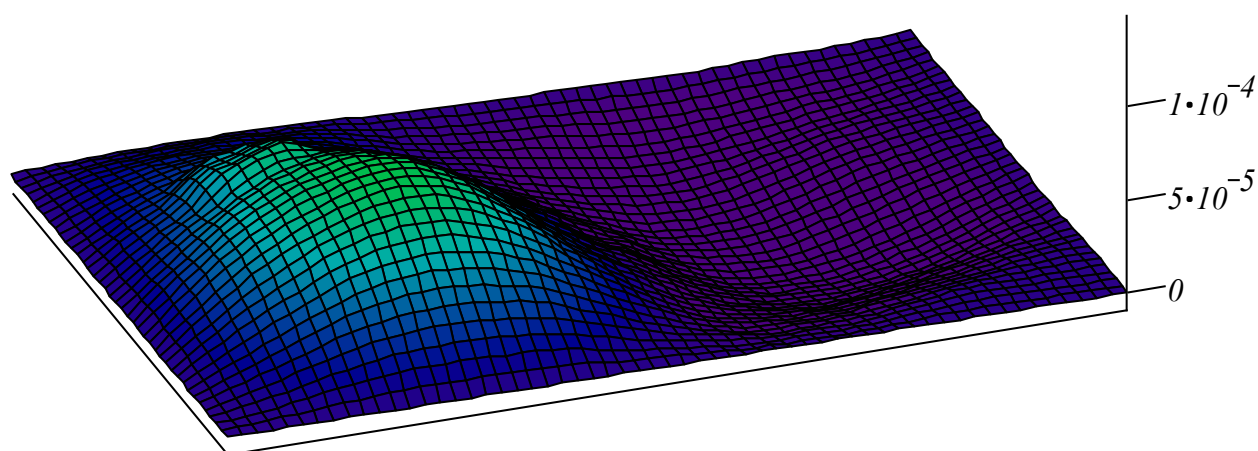
б)

Рис. 5.33. Распределение прогиба по пластине при $t = 0.0014$ с

На рис. 5.34 демонстрируется момент времени между возмущающими импульсами, когда эпюра прогиба пластины, в силу волновых процессов имеют противоположные по знаку значения. Таким образом, показано, что управление колебаниями осуществляется при любых направлениях нагрузок и имеется возможность управлять вне зависимости от знака максимальных перемещений.



а)

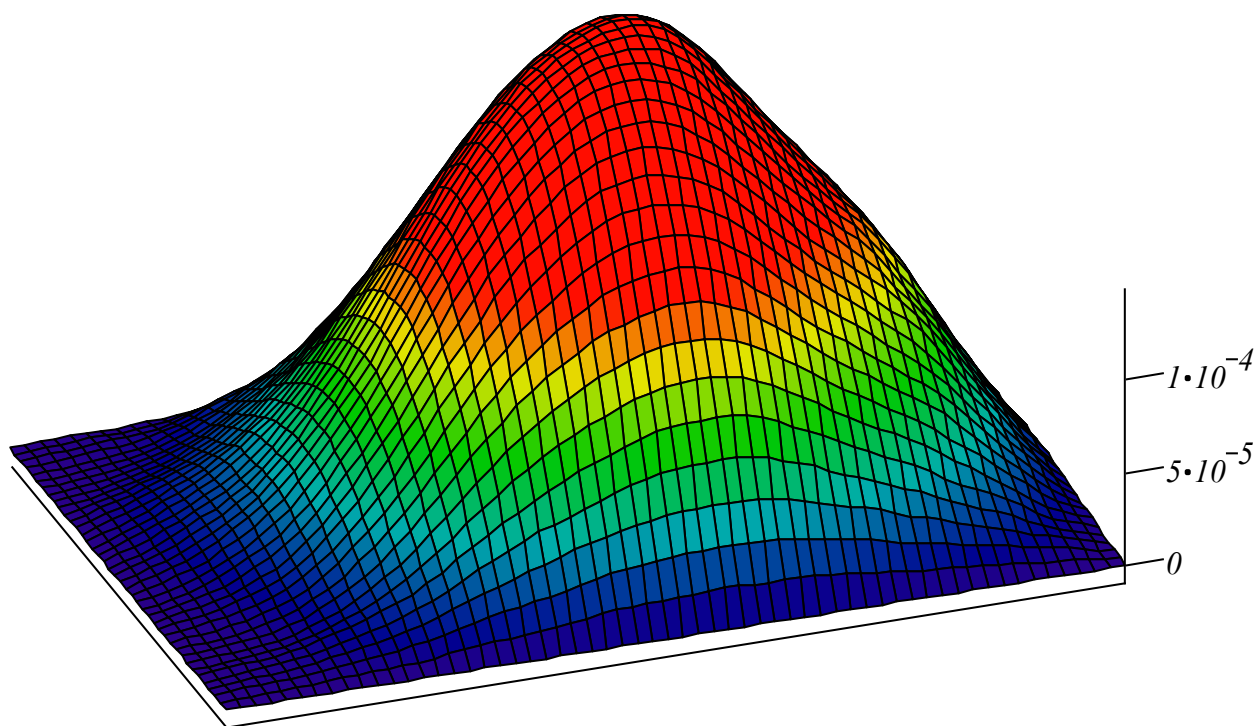


б)

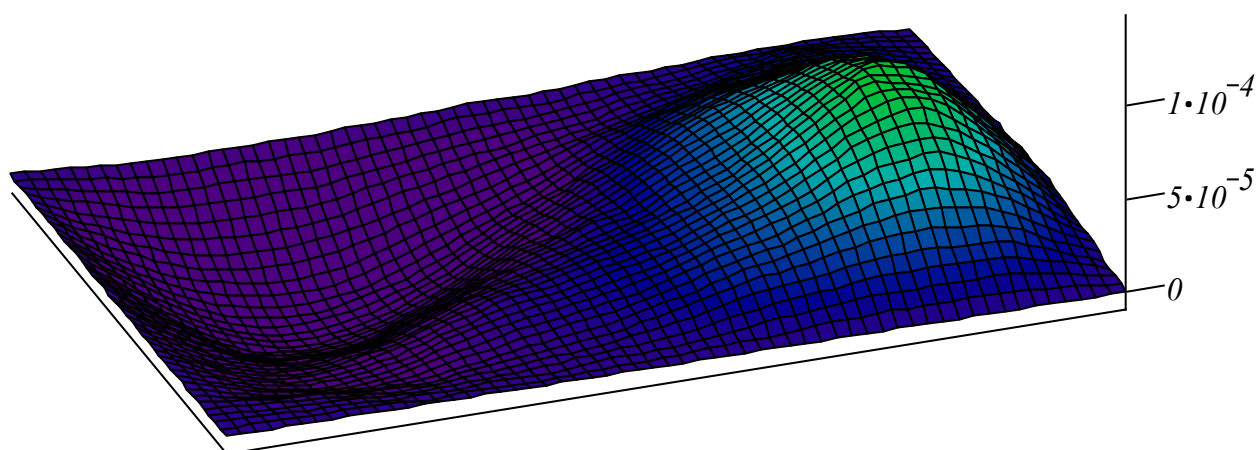
Рис. 5.34. Распределение прогиба по пластине при $t = 0.00252$ с

На рис. 5.35 показан момент времени, соответствующий наибольшим нормальным перемещениям пластины, когда совпадает действие возмущающих нагрузок с последствием волновых процессов от предыдущих импульсов.

Напомним, что малая область пластины, на которой осуществляется управление (гашение) колебаниями находится в центре пластины (на трёхмерных графиках она отдельно не выделена). А четыре управляющих воздействия приложены на границе этой области.



а)



б)

Рис. 5.35. Распределение прогиба по пластине при $t = 0.0032$ с

На рис. 5.33, рис. 5.34, рис. 5.35 можно наблюдать, что независимо от направления перемещений точек пластины, её середина остаётся практически неподвижна. Все рисунки для удобства визуального сравнения показаны в одинаковом масштабе и позволяют оценить: насколько благодаря управляющим воздействиям снизились перемещения не только в малой области управления, но и по всей пластине.

5.5. Активное гашение нестационарных колебаний прямоугольной пластины

Одной из важнейших проблем в инженерии является проблема виброзащиты. С развитием современных конструкций, материалов и новых технологий все чаще начинают применяться схемы активной виброзащиты. Особенно это касается элементов конструкций, которые подвержены импульсному нагружению, так как в этом случае элементы пассивной виброзащиты не всегда могут работать удовлетворительно, особенно на начальных этапах возмущения.

Рассмотрим упругую изотропную прямоугольную пластину средней толщины (как и в предыдущем пункте). Габариты пластины – $l \times m$, а толщина h (рис. 5.36). Схема закрепления пластины соответствует шарнирному опиранию.

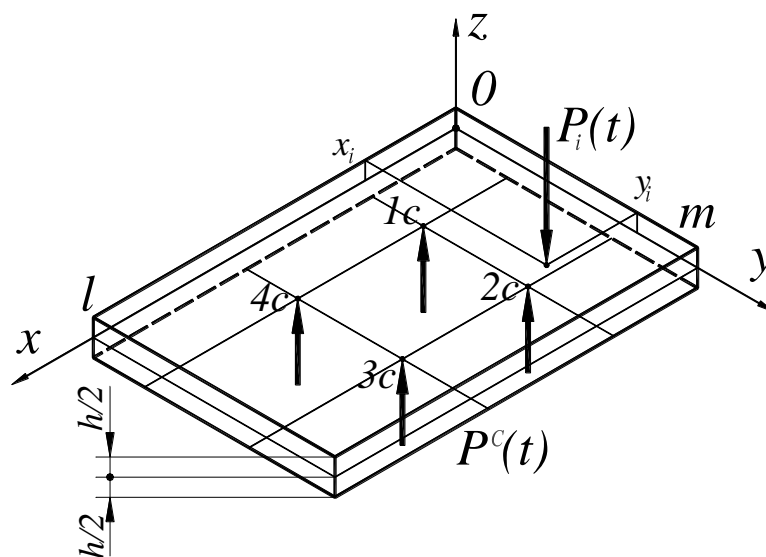


Рис. 5.36. Схема «гашения» колебаний

Отметим, что выбранный подход к решению задачи является приближенным, однако получаемые результаты физичны и интересны.

Предположим, что на пластину воздействует система N независимых поперечных нагрузок, приложенных в точках (x_{0i}, y_{0i}) , которые вызывают деформирования пластины. Требуется «погасить» колебания (по возможности значительно уменьшить амплитуды колебаний прогиба во времени) на всей пластине. При этом предполагается, что на пластину воздействует система, состоящая из N_c независимых между собой, управляющих воздействий. В качестве примера рассматривается система, состоящая из четырех сосредоточенных управляющих воздействий (сил) для компенсации воздействия на пластину двух возмущающих нагрузок. В случае, если закон изменения во времени возмущающих нагрузок известен, поставленная задача сводится к отысканию всех неизвестных управляющих нагрузок.

Система уравнений нестационарных колебаний прямоугольной пластины под действием системы поперечных нагрузок (управляющих и возмущающих) аналогична (5.12).

Укажем, что в (5.12) $\sum_{i=1}^N P_i(x, y, t)$ и $\sum_{i=1}^{N_c} P_i^c(x, y, t)$ – системы

возмущающих и управляющих нагрузок (для активного «гашения»).

Так как требуется «гасить» колебания по всей срединной плоскости пластины, то в качестве критерия управления можно выбрать:

$$w(x, y, t) = 0 \quad (5.19)$$

(равенство нулю значений прогибов). В принципе для выполнения условия (5.19) необходимо воздействовать на пластину бесконечной системой управляющих сил, расположенных по всей поверхности пластины. Однако практическая реализация такого случая нагружения невозможна. Заменяем условие (5.19) более реальным, а именно, будем рассматривать только конечное число управляющих воздействий N_c . В качестве критерия управления можно выбрать следующие выражения:

$$w(x_{cj}, y_{cj}, t) = 0, \quad (5.20)$$

где (x_{cj}, y_{cj}) – точки приложения N_c управляющих воздействий.

Используя решение прямой задачи для прогибов (5.13) и критерии управления (5.20) для N_c управляющих воздействий, можно получить систему из N_c интегральных уравнений Вольтерра I рода:

$$\sum_{i=1}^{N_c} \int_0^t P_i^c(\tau) K_i^w(x_{cj}, y_{cj}, t - \tau) d\tau = \sum_{i=1}^N \int_0^t P_i(\tau) K_i^w(x_{cj}, y_{cj}, t - \tau) d\tau \quad (5.21)$$

Решение указанной системы уравнений (5.21) аналогично системе (5.15).

Численные расчеты производились при следующих значениях параметров: $\rho = 7890 \text{ кг/м}^3$; $E = 2.07 \cdot 10^{11} \text{ Па}$; $\nu = 0.3$; $h = 0.04 \text{ м}$; $l = 0.6 \text{ м}$, $m = 0.4 \text{ м}$.

Координаты точек приложения двух независимых возмущающих поперечных нагрузок, приложенных в точках (x_{01}, y_{01}) и (x_{02}, y_{02}) нагрузок: $x_{01} = 0.1 \text{ м}$, $y_{01} = 0.25 \text{ м}$, $x_{02} = 0.5 \text{ м}$, $y_{02} = 0.15 \text{ м}$.

Координаты приложения системы управляющих нагрузок: $x_{c1} = 0.29 \text{ м}$, $y_{c1} = 0.19 \text{ м}$, $x_{c2} = 0.29 \text{ м}$, $y_{c2} = 0.21 \text{ м}$, $x_{c3} = 0.31 \text{ м}$, $y_{c3} = 0.21 \text{ м}$, $x_{c4} = 0.31 \text{ м}$, $y_{c4} = 0.19 \text{ м}$.

Координаты центра пластины: $x_m = 0.3 \text{ м}$, $y_m = 0.2 \text{ м}$.

Первый расчетный случай почти полностью аналогичен изложенному в предыдущем пункте, за исключением схемы расположения управляющих воздействий (см. рис. 5.37).

На рис. 5.38 и рис. 5.39 представлены результаты численных расчетов по гашению колебаний на пластине. На рис. 5.38 показаны возмущающие и управляющие воздействия. На рис. 5.39 – прогибы без управляющих воздействий и в случае активного гашения. Жирной кривой на этом графике показаны прогибы в центре пластины.

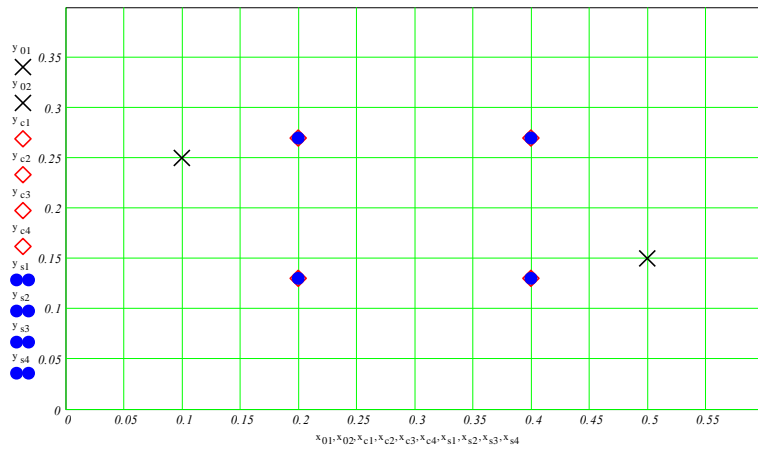


Рис. 5.37. Схема пластины в плане

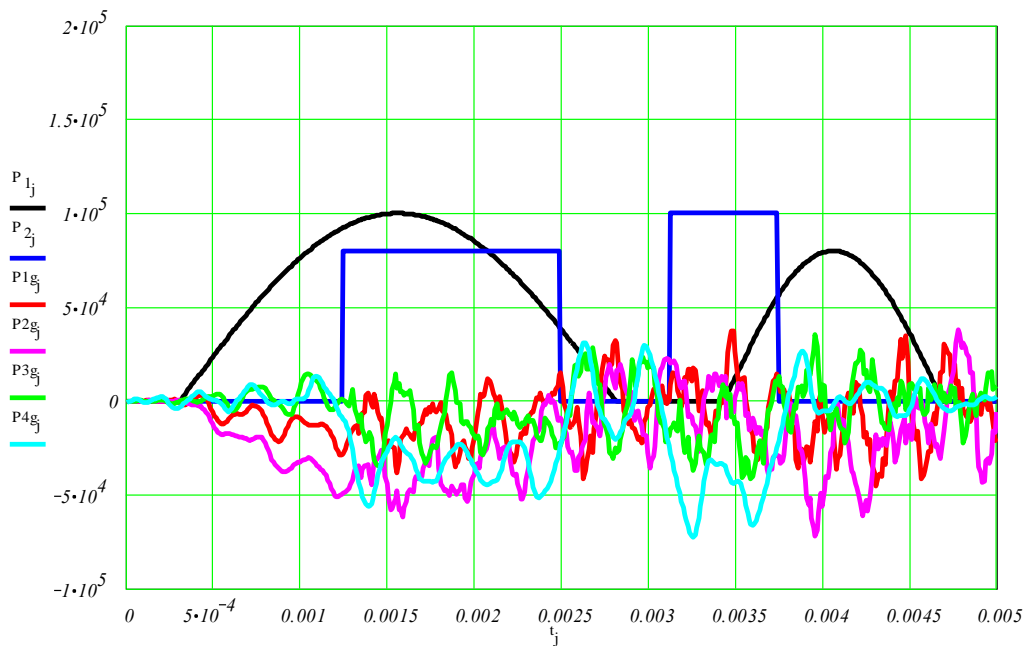


Рис. 5.38. Управляющие воздействия при гашении колебаний пластины

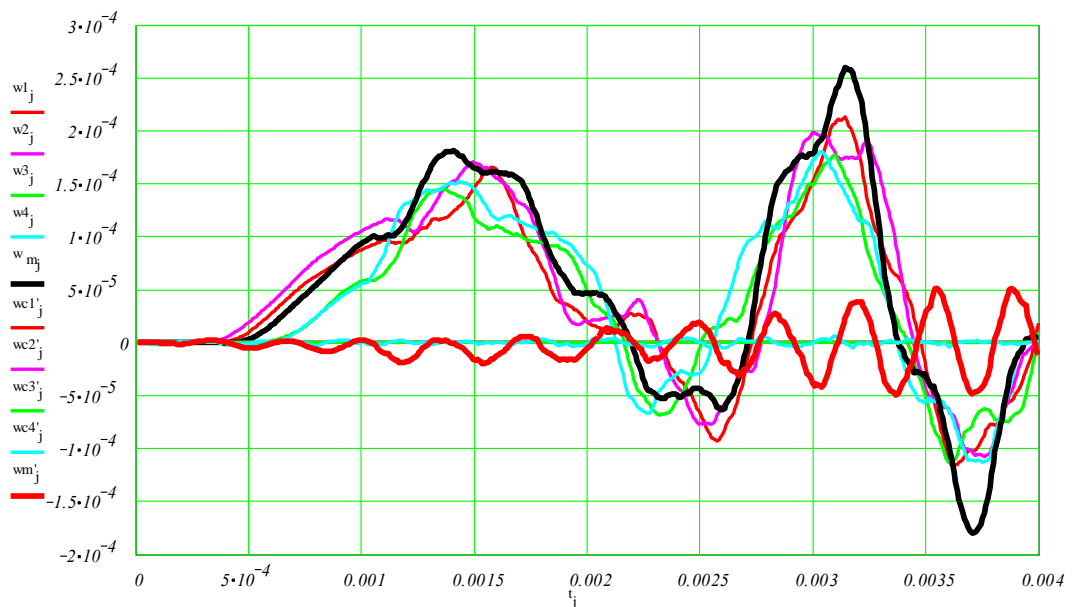
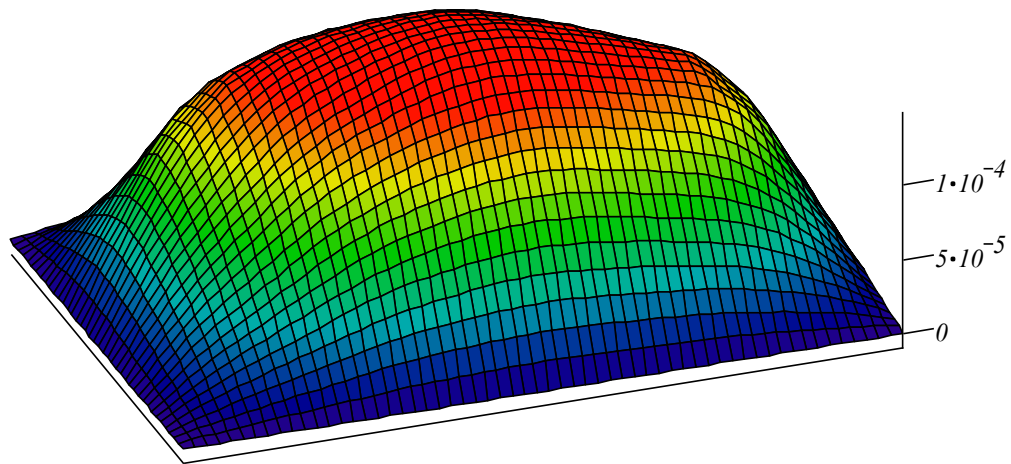
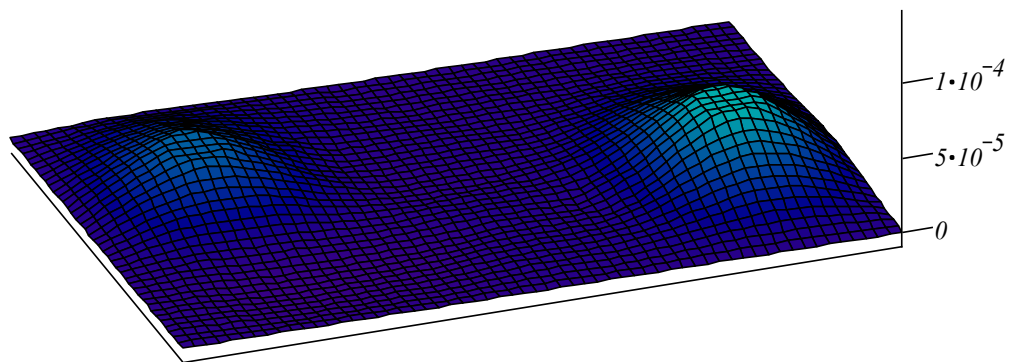


Рис. 5.39. Прогибы при гашении колебаний пластины

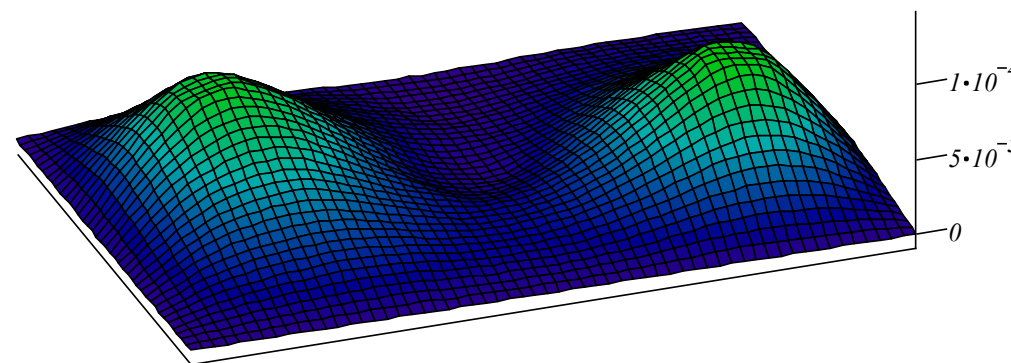
На следующих рисунках (рис. 5.40, рис. 5.41, рис. 5.42) показано распределение прогиба по поверхности пластины в те же моменты времени ($t = 0.0014$ с; $t = 0.00252$ с; $t = 0.0032$ с) как и для случая управления на малой области. Описание рисунков так же аналогично приведенным выше. Для возможности визуального сравнения на рисунках рис. 5.40 в, рис. 5.41 в, рис. 5.42 в (третьим изображением) показаны рис. 5.33 б, рис. 5.34 б, рис. 5.35 б (второе изображение из предыдущего расчета).



а)

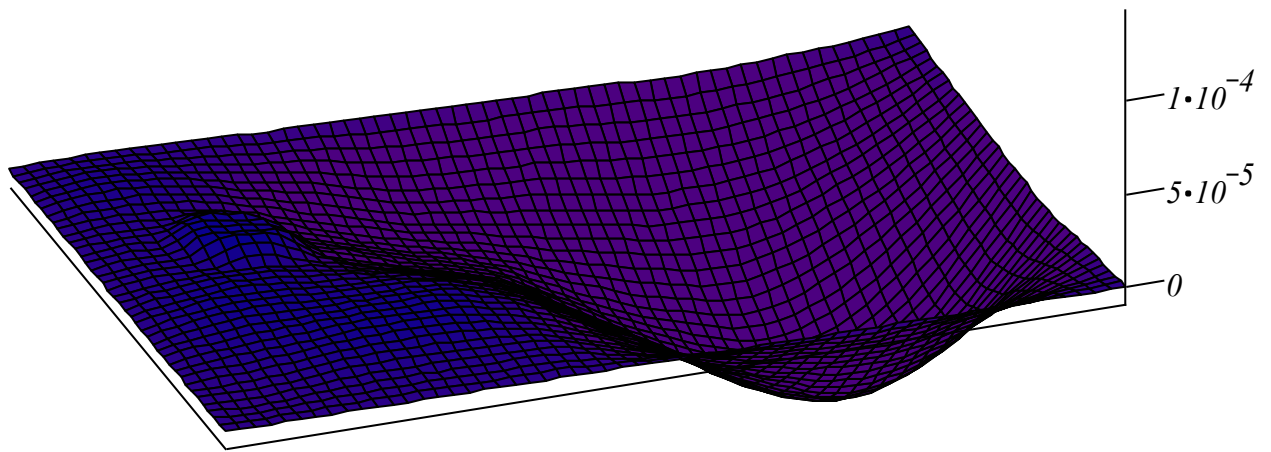


б)

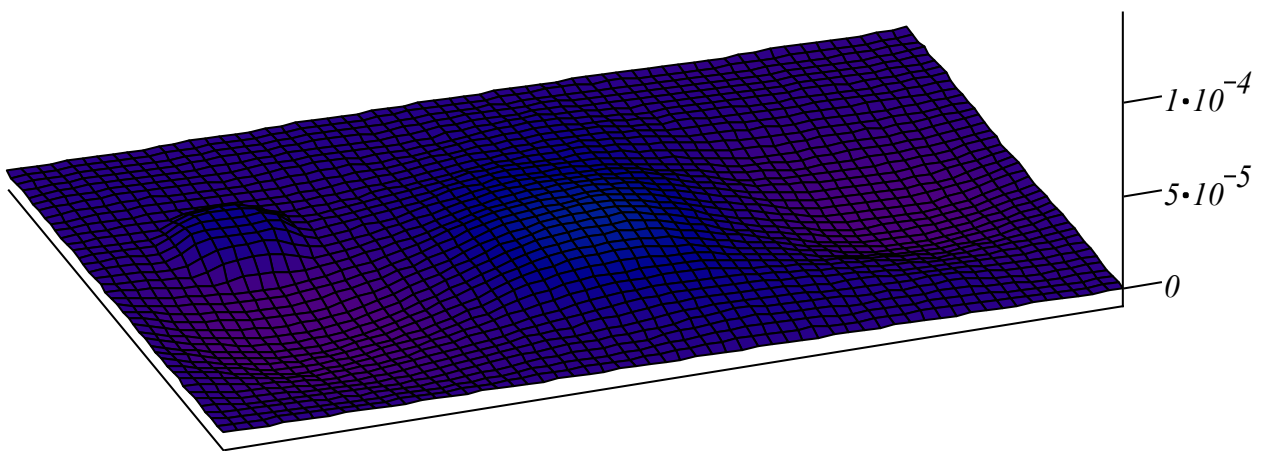


в)

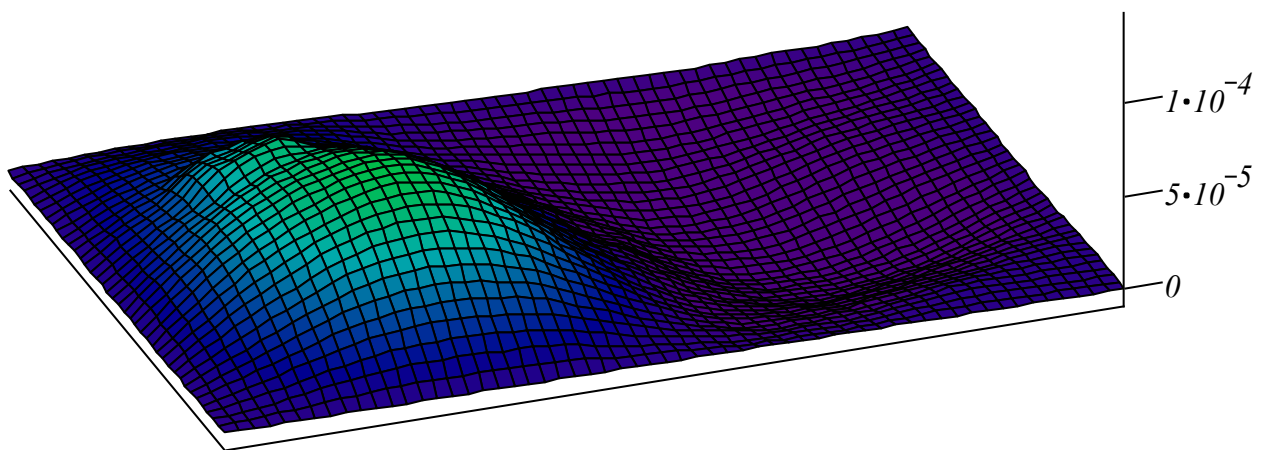
Рис. 5.40. Распределение прогиба по пластине при $t = 0.0014$ с



a)

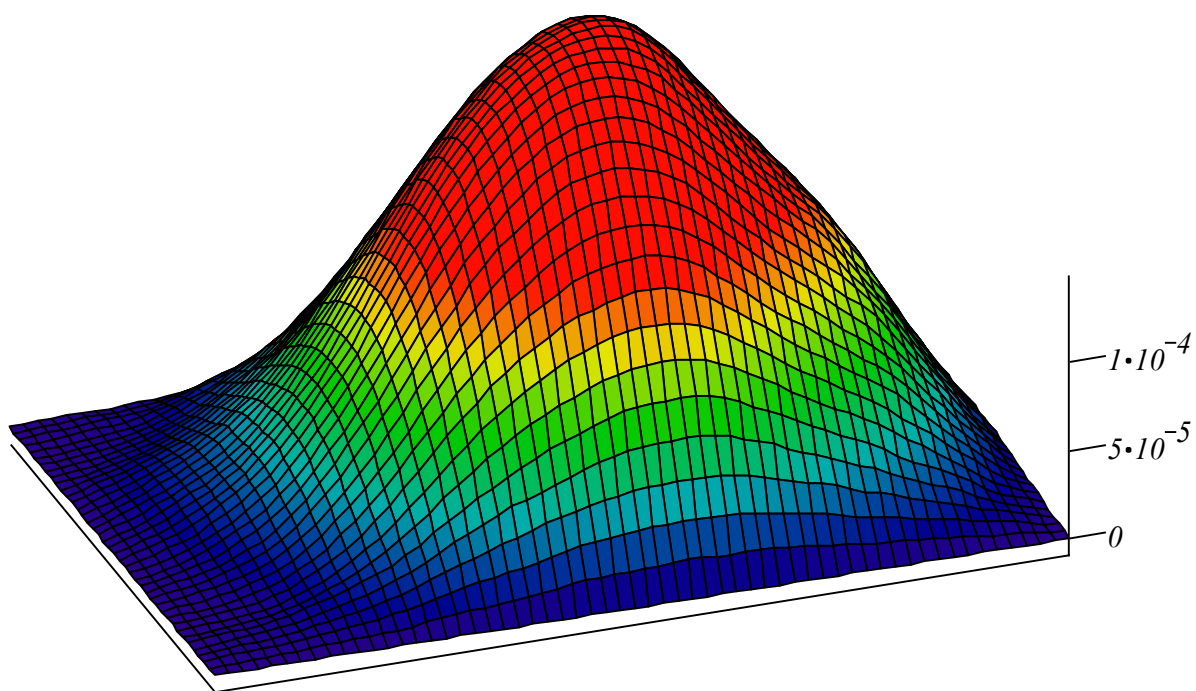


б)

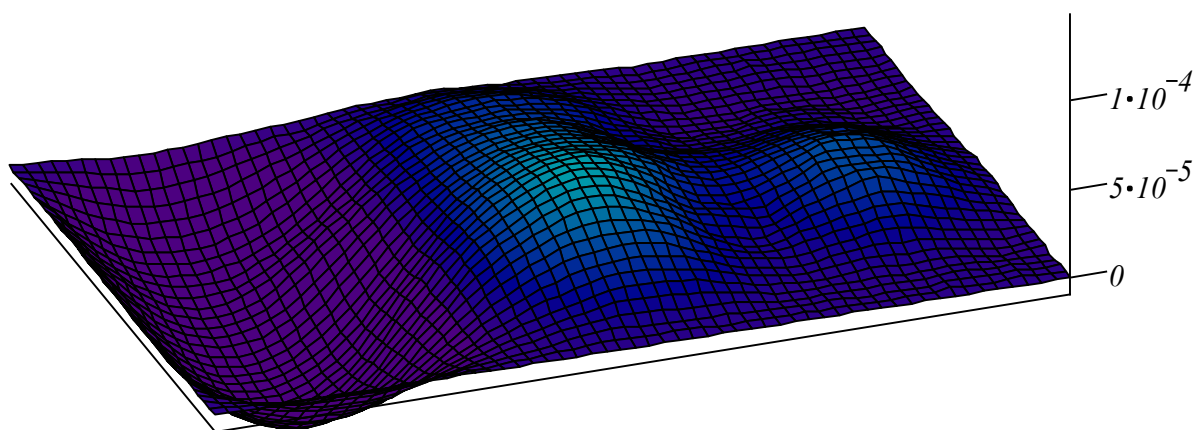


в)

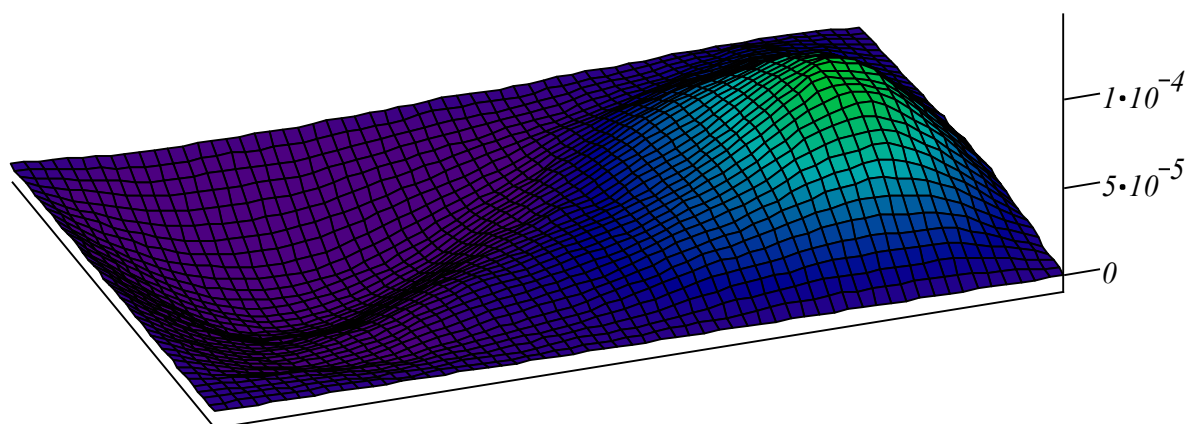
Рис. 5.41. Распределение прогиба по пластине при $t = 0.00252$ с



a)



б)



в)

Рис. 5.42. Распределение прогиба по пластине при $t = 0.0032$ с

Если сравнить на рис. 5.40, рис. 5.41, рис. 5.42 случай гашения по всей пластине – б) с гашением на малой области в центре пластины – в), то видно, что удаётся заметно уменьшить амплитуды прогибов практически по всей поверхности пластины. Исключением являются области вокруг точек приложения возмущающих сил – в этих точках амплитуды снижены, но всё равно нагружения остаются.

Также исследовалось влияние геометрических размеров пластины на возможность гашения колебаний по всей поверхности пластины.

Для расчёта были приняты такие же параметры, как и в первом примере расчёта, за исключением длины и ширины пластины: $l=1.2$ м, $m=0.8$ м (см. рис. 5.43), а также координат точек.

Координаты точек приложения двух независимых возмущающих поперечных нагрузок, приложенных в точках (x_{01}, y_{01}) и (x_{02}, y_{02}) нагрузок: $x_{01} = 0.1$ м, $y_{01} = 0.25$ м, $x_{02} = 1$ м, $y_{02} = 0.5$ м.

Координаты приложения системы управляющих нагрузок: $x_{c1} = 0.4$ м, $y_{c1} = 0.2$ м, $x_{c2} = 0.4$ м, $y_{c2} = 0.6$ м, $x_{c3} = 0.8$ м, $y_{c3} = 0.6$ м, $x_{c4} = 0.8$ м, $y_{c4} = 0.2$ м.

Координаты центра пластины: $x_m = 0.6$ м, $y_m = 0.4$ м.

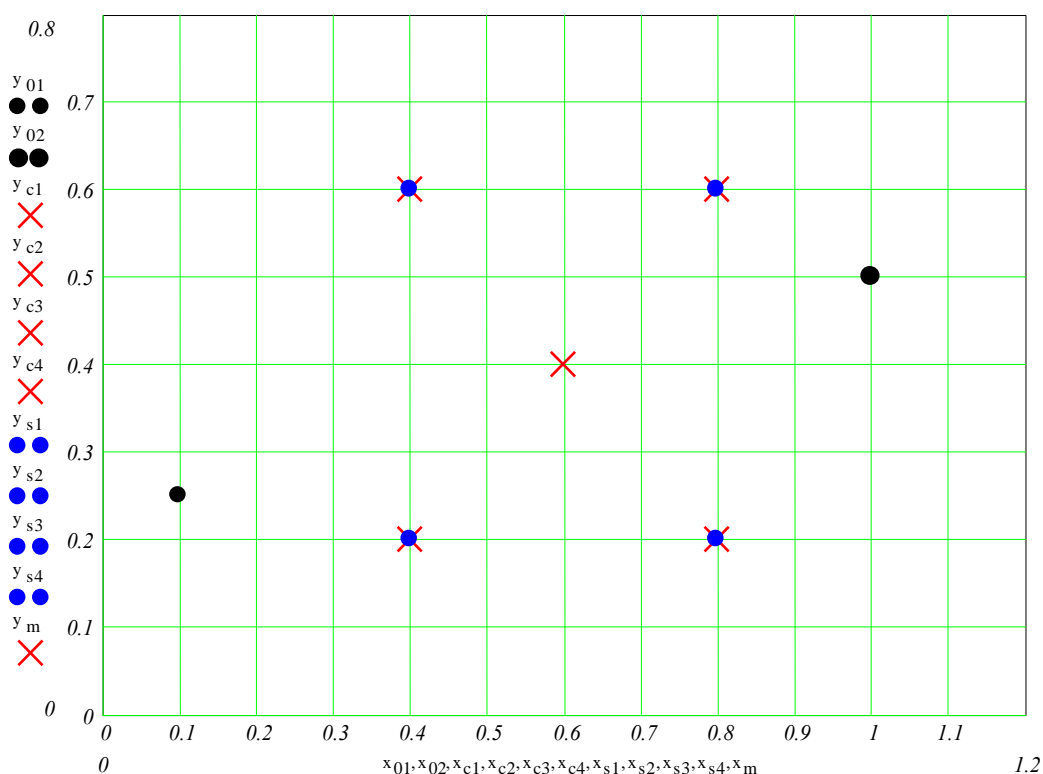


Рис. 5.43. Схема пластины в плане

На рис. 5.44 и рис. 5.45 представлены результаты численных расчетов для случая с увеличенными размерами. Описание рисунков аналогично приведенному ранее.

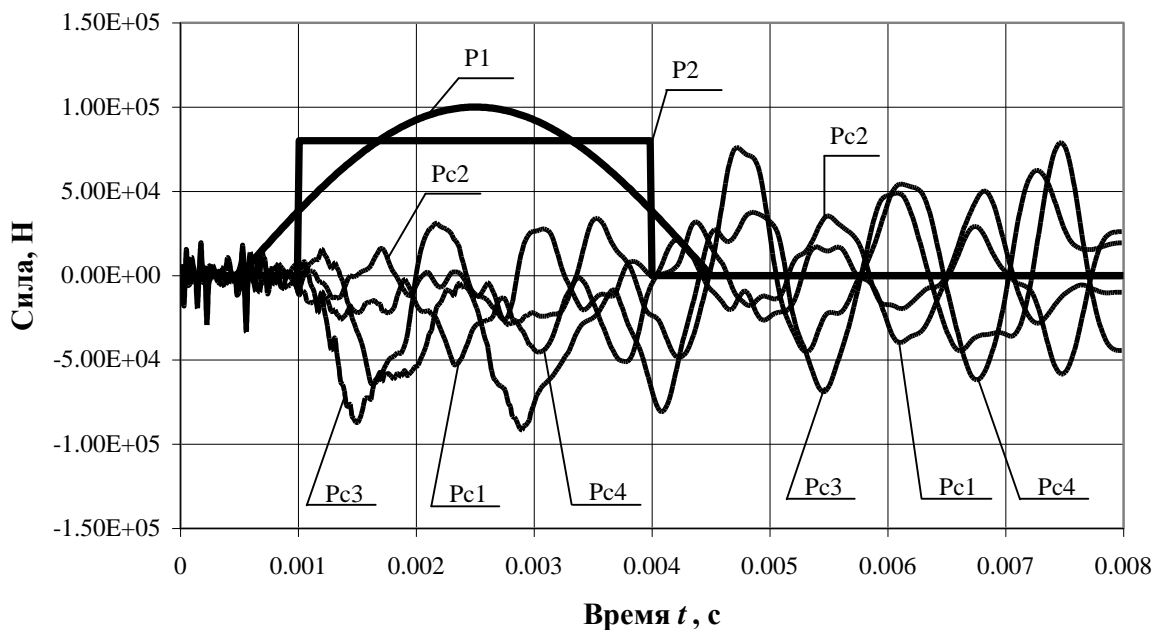


Рис. 5.44. Результаты гашения колебаний пластины (силы)

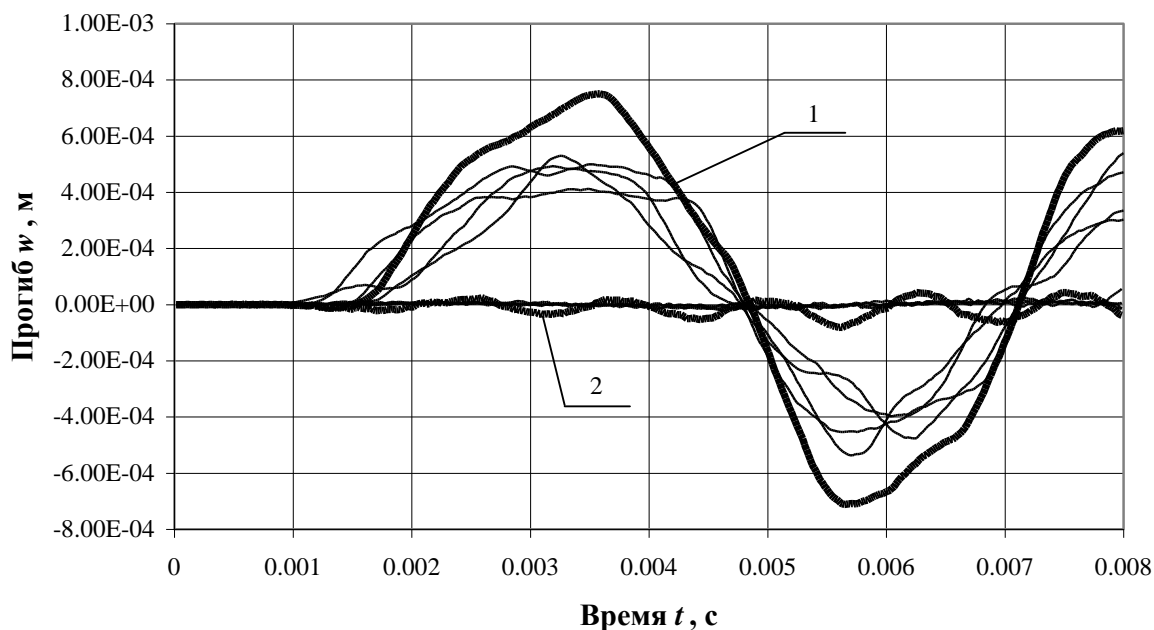
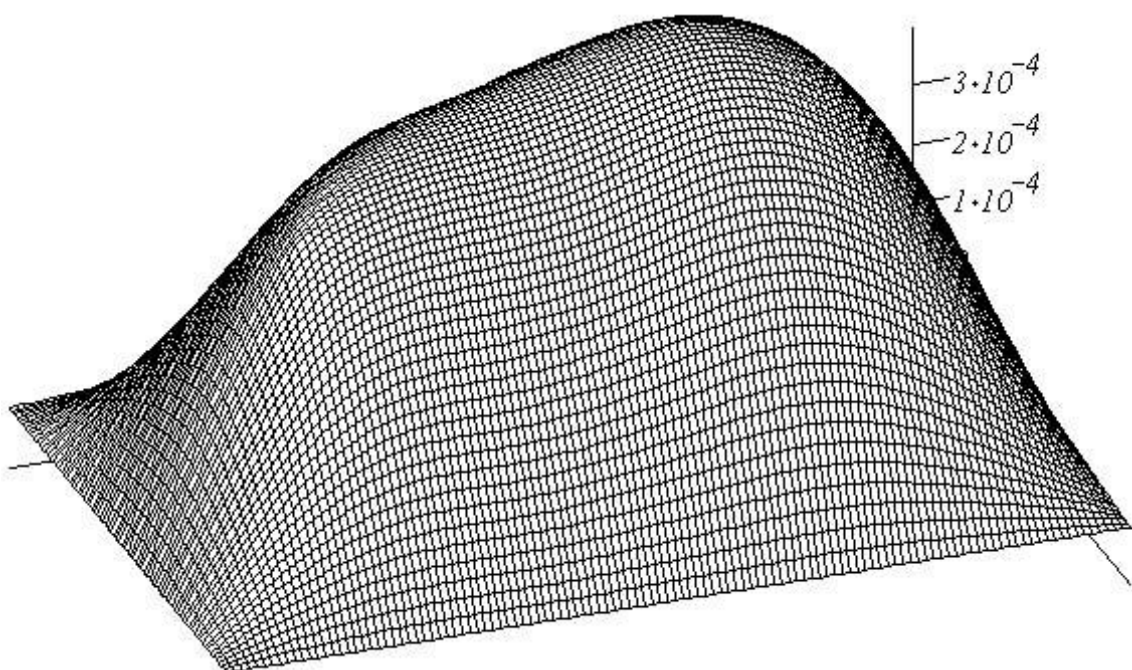
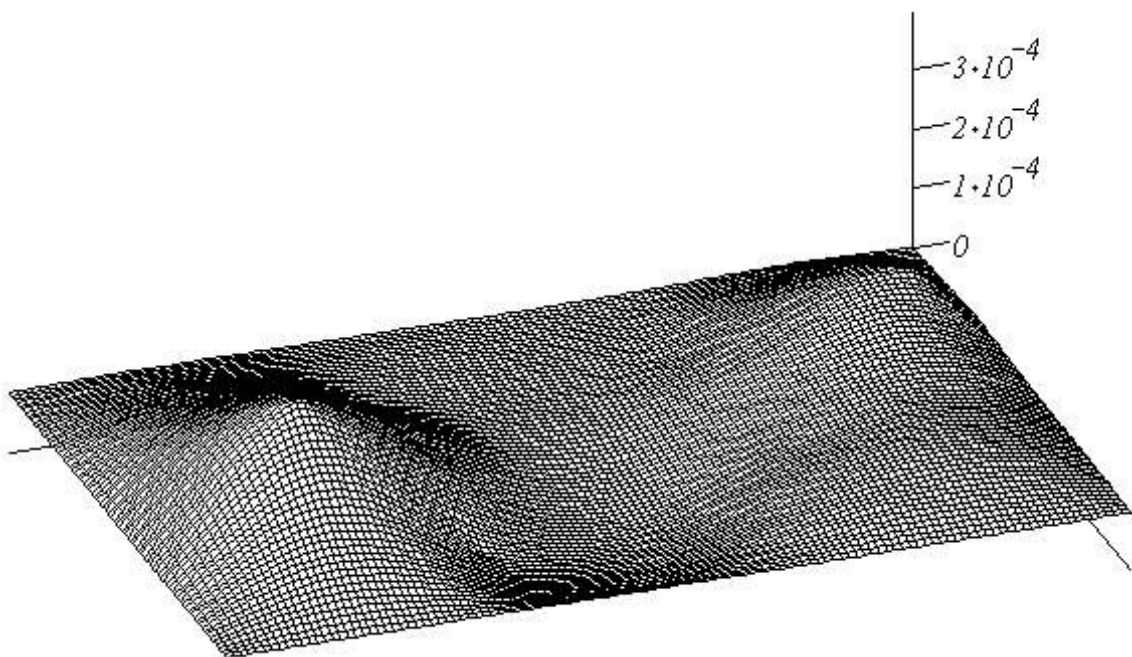


Рис. 5.45. Результаты гашения колебаний пластины (прогибы)

На рис. 5.45 показаны изменения во времени прогибов пластины в точках приложения управляющих нагрузок и в центре пластины. Группа кривых 1 на рис. 5.45 получена при отсутствии управляющих воздействий, а группа кривых 2 на этом соответствует приложению четырех управляющих воздействий, закон изменения во времени, которых найден в результате решения обратной задачи управления.



a)



б)

Рис. 5.46. Распределение прогиба по срединной плоскости пластины

На рис. 5.46 иллюстрируется распределение прогибов в срединной плоскости пластины в момент времени $t_0 = 3.2 \cdot 10^{-3}$ с.

Рис. 5.46 а соответствует случаю, когда отсутствует управляющее воздействие, а на пластину воздействуют только возмущающие импульсные нагрузки, а рис. 5.44 соответствует случаю, когда осуществляется управление – приложена система тех же возмущающих и четырех «гасящих» нагрузок.

Укажем, что для приведенного расчета (см. рис. 5.44) величина максимального прогиба уменьшается более чем в 3 раза, а величина

суммарного прогиба пластины уменьшается почти в 8 раз: $\frac{w_{\Sigma}}{w_{C_{\Sigma}}} = 7.756$, где

$w_{\Sigma} = \sum_x \sum_y w(x, y, t_0)$ – суммарный прогиб пластины, в случае, когда приложены

только возмущающие силы; $w_{C_{\Sigma}} = \sum_x \sum_y w(x, y, t_0)$ – суммарный прогиб

пластины в случае, когда осуществляется активное «гашение».

В рассмотренной задаче число управляющих сил (для того, чтобы с высокой точностью обеспечить выполнение критериев управления) должно быть велико. Поэтому возникает проблема о выборе оптимальных параметров в задаче с большим числом критериев (в том числе и противоречивых), а, следовательно, для существенного улучшения системы управления необходимо использовать специальные математические подходы, один из которых описан в монографии [104].

В заключении укажем, что в случае создания систем гашения нестационарных колебаний для ответственных конструкций и сооружений необходимо сочетать активные и пассивные схемы виброзащиты. Таким образом, значительно улучшатся результаты гашения колебаний, так как активные элементы будут эффективно снижать первые быстрые всплески, а пассивные, хотя имеют некоторое запаздывание, благодаря накопительному эффекту будут хорошо сглаживать колебания на заключительных этапах управления колебательным процессом.

6. УЧЁТ ДИССИПАТИВНЫХ СВОЙСТВ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ

Описаны два подхода, позволяющих на базе упругих решений, полученных в рамках теории упругости, для деформируемых элементов конструкции учитывать диссипативные свойства в материале. В частности имеется возможность моделировать внутреннее вязкое и гистерезисное трение, описываемое моделями Кельвина – Фойхта и Бока – Шлиппе – Колара.

Первый подход базируется на использовании дифференциальных операторов и сводится к модификации аналитических соотношений для соответствующих ядер интегралов и частот, которые могут быть найдены из решения характеристических уравнений, записанных для различных моделей трения.

Второй использует сглаживающие линейные интегральные операторы и может быть применен для любых решений в рамках теории упругости, которые представлены в виде интегралов Дюамеля типа свёртки с ядрами Коши. Сглаживающие интегральные операторы позволяют рассчитывать эти ядра для измененных коэффициентов трения, а также восстанавливать упругую составляющую решения, возмущенную внутренним трением. Исследованы алгебраические свойства этих операторов. Так как при расчетах интегралов выполняется дискретизация, то можно воспользоваться предложенной в работе модификацией ядер согласно процедуре Эфроса, причем эта модификация осуществляется за счет умножения исходных ядер на специальным образом полученные матрицы.

Приведены примеры расчетов для поперечных колебаний пластины в вязкоупругой постановке, а именно прогибов и деформаций упругой и вязкоупругой пластины, а также получены ядра интегралов свёртки для упругого решения и с учетом диссипации (учетом внутреннего вязкого и гистерезисного трения в материале пластины).

6.1. Введение и постановка задачи

К настоящему моменту в теории упругости получено значительное количество аналитических решений для задач нестационарного деформирования упругих элементов конструкций [59, 72, 73, 74, 85, 86, 92, 117, 118, 145, 203]. Существует ряд общепринятых аналитических методов решения упомянутых задач. Один из основных методов получения аналитического решения нестационарных задач – это использование интегрального преобразования Лапласа. В этом случае многие решения могут быть представлены в виде свёрточных интегралов с ядрами Коши, например, в монографиях [72, 73, 74, 92, 203] описано несколько таких решений для упругого деформирования различных элементов конструкции.

Исследование диссипативных свойств вязкоупругих материалов, как правило, осуществляется с использованием дифференциальных операторов, которые хорошо изучены и описаны, например в [6, 7, 98].

В статье [39] показано, что для полученных в рамках теории упругости аналитических решений в виде свёрточных интегралов с ядрами Коши можно модификацией ядра моделировать наличие внутреннего вязкого трения Кельвина – Фойхта.

Укажем, что в работе [38], которая является продолжением работы [39] описано:

- влияние вязкого и гистерезисного трения на частоты и амплитуды колебаний;

- сглаживающие операторы Кельвина – Фойхта и Бока – Шлиппе – Колара, а также их свойства;

- характер изменения корректирующего ядра для малых времён;

- корректирующие ядра для общего случая и для смешанного трения;

- область применения нового метода и перспективы его расширения.

Аналитические решения для задач упругого деформирования различных элементов конструкции можно записать в следующем виде:

$$u(t) = \int_0^t K_0(t - \tau) \cdot P(\tau) d\tau, \quad (6.1)$$

где $u(t)$ – перемещения исследуемого объекта в некоторой точке, $P(\tau)$ – внешняя нестационарная нагрузка, вызывающая колебания, $K_0(t)$ – ядро интеграла, несущее, по существу, всю информацию об упруго деформируемом объекте.

При деформировании большинства реальных элементов конструкций происходит не чисто упругое, а вязкоупругое деформирование. В случае, когда вязкие (пластические) деформации малы – ими естественно пренебрегают. Однако, в ряде случаев, диссипацию энергии при механических колебаниях все-таки необходимо учитывать.

Учет диссипации сводится к корректировке соотношения (6.1), в котором используется другое интегральное ядро $K_\eta(t)$, форма которого сглажена трением:

$$u(t) = \int_0^t K_\eta(t - \tau) \cdot P(\tau) d\tau, \quad (6.2)$$

Разностное ядро $K_\eta(t)$ может быть получено тремя основными способами:

- 1) как исследование реакции системы на удар, зарегистрированной в результате физического моделирования динамики объекта (то есть, в ходе специально поставленного и проведенного эксперимента);

- 2) при решении уравнений, описывающих аналогичный переходной процесс с учётом трения;

3) путем соответствующей выглаживающей модификации ядра $K_0(t)$, полученного при математическом моделировании упругих деформаций без учета трения

Так как первый способ относится к экспериментальным исследованиям, которые к тому же являются весьма дорогостоящими, рассмотрим более детально второй и третий способы.

Не будем здесь углубляться в физические аспекты моделей, а, прежде всего, рассмотрим возможность сглаживающей модификации ядра согласно гипотезам внутреннего вязкого трения, описываемого моделью Кельвина – Фойхта и гистерезисного трения Бока – Шлиппе – Колара.

6.2. Модификации аналитических соотношений для ядер интегралов и частот. Использование дифференциальных операторов

Если в задаче не учитывается трение, то ядро интеграла (6.1), которое здесь и далее обозначено $K_0(t)$, может быть вычислено как сумма ряда [72]

$$K_0(t) = \sum_j f(\omega_j) \cdot [\sin(\omega_j t) / \omega_j], \quad (6.3)$$

где ω_j – круговые частоты свободных колебаний континуума, перечисленные в порядке возрастания их величины; $f(\omega_j)$ – амплитудные функции, возникающие при локализации собственных форм колебаний с частотой ω_j в точке x_0 .

Ядру – оригиналу $K_0(t)$ отвечает его изображение по Лапласу

$$K_0(s) = \sum_j f(\omega_j) / [s^2 + \omega_j^2]. \quad (6.4)$$

После учета внутреннего трения Кельвина–Фойхта, имеющего коэффициент трения η , в операторе сил упругости появляется слагаемое, пропорциональное скорости перемещения. Учитывающее внутренне трение ядро $K_\eta(t)$ в пространстве изображений по Лапласу для модели Кельвина–Фойхта приобретает следующий вид:

$$K_\eta(s) = \sum_j f(\omega_j) / [s^2 + \eta \cdot \omega_j^2 \cdot s + \omega_j^2], \quad (6.5)$$

откуда можно получить формулу для оригинала

$$K_\eta(t) = \sum_j f(\omega_j) \cdot \exp(-\alpha_j \cdot t) \cdot [\sin(\beta_j t) / \beta_j], \quad (6.6)$$

где вещественные числа ω_j те же, что и описанные выше, а комплексные частоты

$$\lambda_j = \alpha_j + i \cdot \beta_j, (\alpha_j < 0, \beta_j > 0, i^2 = -1) \quad (6.7)$$

находятся из характеристического уравнения

$$\lambda_j^2 + \eta \omega_j^2 \cdot \lambda_j + \omega_j^2 = 0. \quad (6.8)$$

В результате решения (6.8) получаем для вязкого внутреннего трения:

$$\alpha_j^\eta = \eta \cdot \omega_j^2 / 2; \quad (6.9)$$

$$\beta_j^\eta = \omega_j \cdot \sqrt{1 - (\eta \omega_j / 2)^2}. \quad (6.10)$$

В модели гистерезисного трения Бока–Шлиппе–Колара в операторе гистерезисного трения вместо производной по времени используется производная по фазовому углу для каждой формы собственных колебаний. Учитывающее гистерезисное трение ядро $K_\gamma(t)$ в пространстве изображений по Лапласу приобретает следующий вид:

$$K_\gamma(s) = \sum_j f(\omega_j) / [s^2 + \gamma \omega_0 \omega_j \cdot s + \omega_j^2], \quad (6.11)$$

где γ – коэффициент диссипации при гистерезисном трении. Коэффициент γ , как и η , имеет физическую размерность времени, с; а ω_0 – круговая частота колебаний основной гармоники.

Из (6.11) можно получить формулу, аналогичную (6.7), для оригинала:

$$K_\gamma(t) = \sum_j f(\omega_j) \cdot \exp(-\alpha_j \cdot t) \cdot [\sin(\beta_j t) / \beta_j], \quad (6.12)$$

где комплексные частоты

$$\lambda_j = \alpha_j + i \cdot \beta_j, \quad (6.13)$$

находятся из характеристического уравнения

$$\lambda_j^2 + \gamma \omega_0 \omega_j \cdot \lambda_j + \omega_j^2 = 0. \quad (6.14)$$

В результате решения (6.14) получаем для гистерезисного трения:

$$\alpha_j^\gamma = \gamma \cdot \omega_0 \cdot \omega_j / 2; \quad (6.15)$$

$$\beta_j^\gamma = \omega_j \cdot \sqrt{1 - (\gamma \omega_0 / 2)^2}. \quad (6.16)$$

Укажем, что на рис. 6.1 показаны ядра для расчета поперечных колебаний прямоугольной пластины с размерами $0.6 \times 0.4 \times 0.04$ м; декремент затухания $d_0 = 0.07$. После учета трения затухание (или, выражаясь точнее, сглаживание формы) ядра усиливается.

При условии $\omega_j < 2/\eta$ частоты λ_j размещаются в комплексной плоскости на окружности, показанной на рис. 6.2 а, а соответствующие гармоники описывают затухающие периодические колебания; демпфирующий множитель j -той гармоники имеет вид

$$\exp(-0.5 \eta \omega_j^2 \cdot t). \quad (6.17)$$

При значениях $\omega_j > 2/\eta$ частоты λ_j «перемещаются» на отрицательную полуось, а колебания становятся аperiодическими.

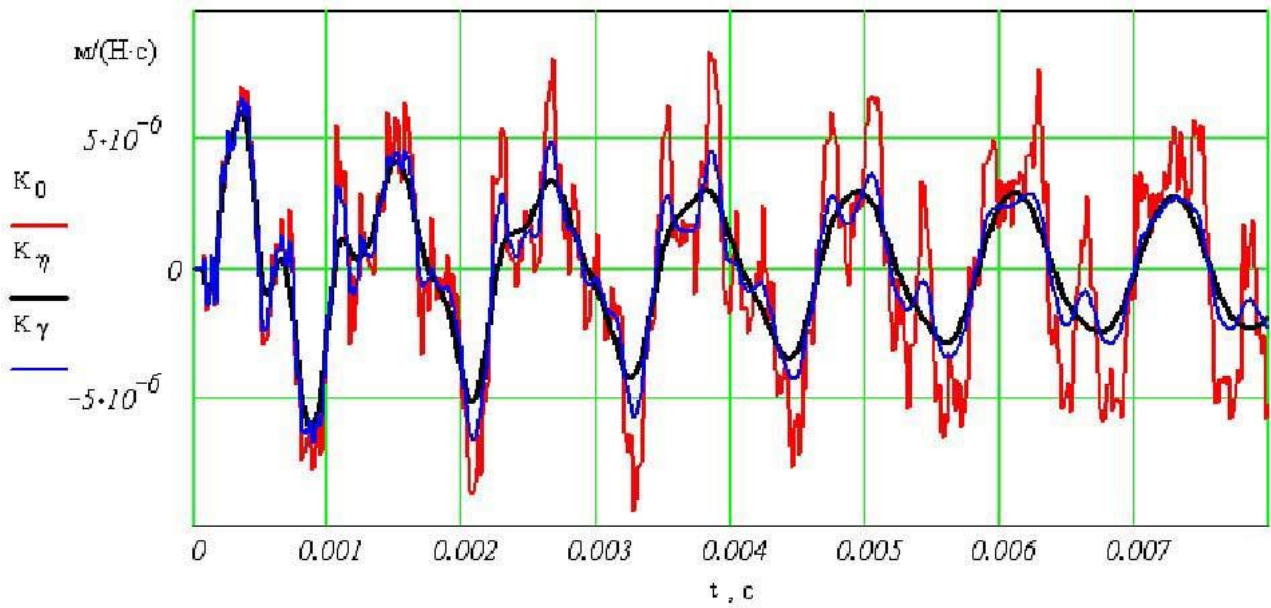


Рис. 6.1. Ядра интегралов для упругого решения $K_0(t)$, а также под действием вязкого $K_\eta(t)$ и гистерезисного $K_\gamma(t)$ трения.

На рис. 6.2 а левее штрихпунктирной прямой соответствующее вязкое демпфирование влияет настолько сильно, что на промежутке дискретизации $\Delta t = 0.01 \cdot T_0$ (здесь T_0 – это период колебаний основной гармоники) амплитуда колебания уменьшается в 2 и более раз, и такие колебания, в принципе, далее можно не рассматривать. В результате для примера динамического деформирования пластины сумму (6.6) можно принять конечной, содержащей около 80 слагаемых.

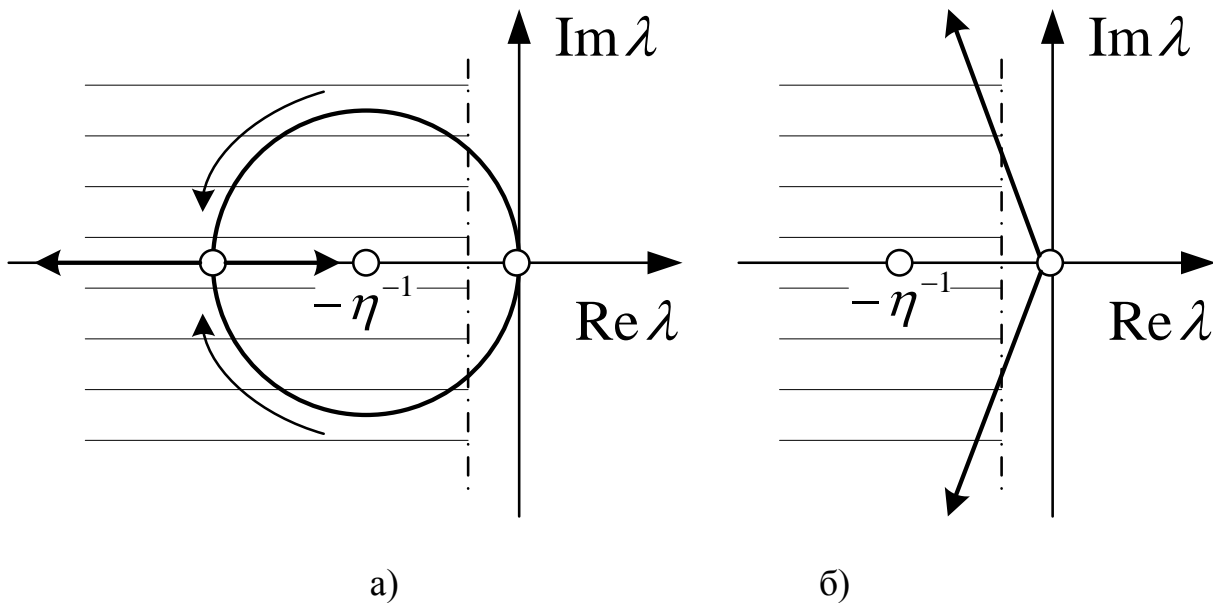


Рис. 6.2. Расположение комплексных частот колебаний при различных моделях: а) Кельвина – Фойхта; б) Бока – Шлиппе – Колара

Для различных упругих материалов декремент d_0 затухания основной гармоники разный [6, 98], но, как правило, он не выходит за границы диапазона 0.01...0.1; на рис. 6.1 использовано декремент затухания 7%. Следовательно,

$$\eta/T_0 = 0.5d_0/\pi^2 \in [0.0005; 0.005]. \quad (6.18)$$

В [38, 39] использовалось это соотношение при аппроксимациях корректирующего ядра.

6.3. Сглаживающие интегральные операторы

Для случая вязкого внутреннего трения в статьях [38, 39] с учетом известной теоремы Эфроса об оригинале сложного изображения [76, 87] доказано, что ядра $K_0(t)$ и $K_\eta(t)$ связаны соотношением

$$K_\eta(t) = \int_0^\infty \Psi_\eta(t, \tau) \cdot K_0(\tau) d\tau, \quad (6.19)$$

где

$$\Psi_\eta(t, \tau) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\eta t}} \cdot \exp\left(-\frac{(\tau-t)^2}{2\eta t}\right). \quad (6.20)$$

Здесь неотрицательное число τ играет роль параметра.

Учитывая вид (6.20) и свойства кривой Гаусса [84] соотношение (6.19) можно достаточно точно вычислять по приближенной формуле:

$$K_\eta(t) = \int_{t-3\cdot\sigma}^{t+3\cdot\sigma} \Psi_\eta(t, \tau) \cdot K_0(\tau) d\tau, \quad (6.21)$$

где σ – дисперсия, $\sigma^2 = \eta t$.

Для случая гистерезисного внутреннего трения по аналогии с (6.19) можно записать:

$$K_\gamma(t) = \int_0^\infty \Psi_\gamma(t, \tau) \cdot K_0(\tau) d\tau, \quad (6.22)$$

где

$$\Psi_\gamma(t, \tau) \approx \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\arctg \frac{\tau-t}{0.5\gamma\omega_0 t} \right] \frac{1}{2+1} = \frac{2}{\pi\gamma\omega_0 t} \cdot \frac{1}{[2(\tau-t)/\gamma\omega_0 t]^2 + 1}. \quad (6.23)$$

Укажем, что получение корректирующего ядра $\Psi_\gamma(t, \tau)$ для гистерезисного трения описано в [38].

График этой функции (его называют кривой Коши) приведен на рис. 6.3 (сплошная кривая), там же, для сравнения, показана кривая Гаусса (показана точками), являющаяся корректирующим ядром (6.20) для вязкого трения.

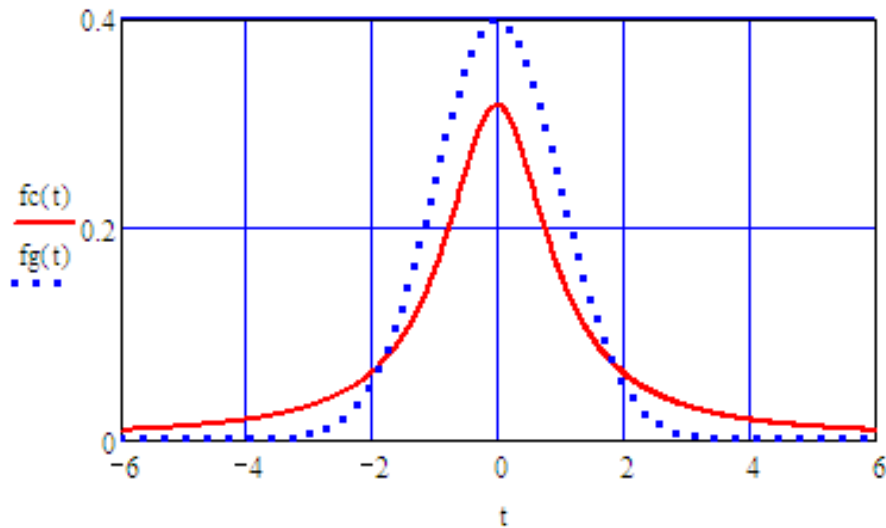


Рис. 6.3. Сглаживающие кривые Коши и Гаусса при одинаковом декременте затухания

При больших значениях аргумента арктангенс убывает медленнее, чем плотность нормального распределения. Поэтому, чтобы не усложнять расчёт учётом несобственного интеграла и, при этом, сохранить необходимую точность расчёта интервал сглаживания $[t - \Delta t, t + \Delta t]$ в интеграле

$$K_\gamma(t) = \int_{t-\Delta t}^{t+\Delta t} \Psi_\gamma(t, \tau) \cdot K_0(\tau) d\tau \quad (6.24)$$

расширяется до множества $[0, 2t]$, то есть используется значение $\Delta t = t$. Однако, если $\Delta t > T_0$, то погрешность перехода к собственному интегралу дополнительно уменьшается вследствие осциллирующих свойств ядра $K(t)$. Поэтому в нашей работе выбор интервала сглаживания был подчинен условию

$$\Delta t = \min(t, T_0) \quad (6.25)$$

Как видим, учет трения сводится к корректировке упруго разностного ядра Коши $K_0(t)$ в интеграле (6.1) на ядро $K_\eta(t)$ в случае внутреннего вязкого трения (модель Кельвина–Фойхта) или $K_\gamma(t)$ в случае внутреннего гистерезисного трения (модель Бока–Шлиппе–Колара).

6.4. Пример использования разработанной теории для прямоугольной пластины

Выражения для определения прогиба шарнирно опертой пластины и её деформаций (рис. 6.4) в случае, когда на неё действует нестационарная поперечная нагрузка $P_0(t)$ импульсного типа (рис. 6.5), приведены, например, в [47, 72, 178], и имеют следующий вид:

$$w(x, y, t) = \int_0^t K_w(x, y, t - \tau) \cdot P(\tau) d\tau, \quad (6.26)$$

$$\varepsilon(x, y, t) = \int_0^t K_e(x, y, t - \tau) \cdot P(\tau) d\tau, \quad (6.27)$$

где $w(x, y, t)$ – изменение прогиба пластины во времени; $\varepsilon(x, y, t)$ – изменение деформации; $K_i(x, y, t)$ – упругие разностные ядра интегралов типа свертки в точке пластины с координатами (x, y) . Методы получения ядер и их вид описаны в [47, 72, 178].

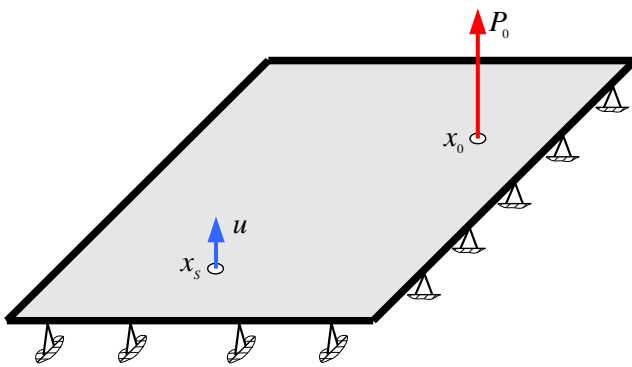


Рис. 6.4. Схема нагружения пластины

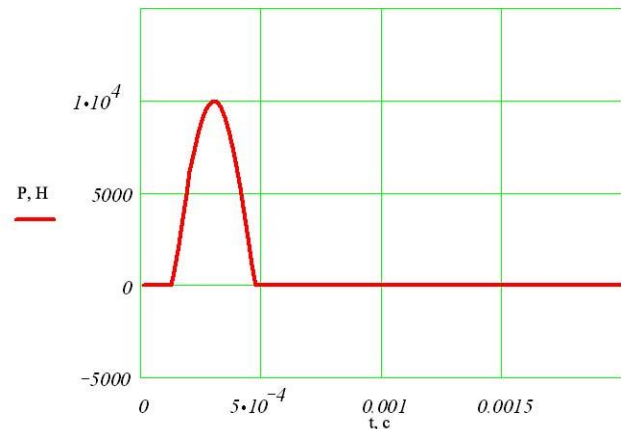


Рис. 6.5. Сила, возбуждающая колебания в пластине

Если предположить, что возмущающая сила является сосредоточенной нагрузкой, то соответствующие ядра Коши $K_0(t)$ для шарнирно-опертой пластины средней толщины по модели типа С. П. Тимошенко будут иметь вид:

$$K_w(x_S, y_S, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [\Omega_{1kn} \cdot \sin(\omega_{1kn}t) - \Omega_{2kn} \cdot \sin(\omega_{2kn}t)] \times \\ \times \sin\left(\frac{k\pi x_0}{l}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi y_0}{m}\right) \cdot \sin\left(\frac{k\pi x_S}{l}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi y_S}{m}\right), \quad (6.28)$$

$$K_e(x_S, y_S, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Omega_{kn} \left[\frac{\sin(\omega_{1kn}t)}{\omega_{1kn}} - \frac{\sin(\omega_{2kn}t)}{\omega_{2kn}} \right] \times \\ \times \sin\left(\frac{k\pi x_0}{l}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi y_0}{m}\right) \cdot \sin\left(\frac{k\pi x_S}{l}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi y_S}{m}\right), \quad (6.29)$$

где ω_{1kn} и ω_{2kn} – собственные частоты колебаний пластины; l и m – длина и ширина пластины;

(x_0, y_0) – координаты точки, в которой прикладывается нагрузка,

(x_S, y_S) – это координаты точки, в которой определяется изменение прогиба во времени.

При расчетах срединная плоскость пластины была связана с плоскостью xOy декартовой системы координат. Расчеты производились при следующих значениях параметров:

- плотность материала $\rho = 7890 \text{ кг/м}^3$; коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$;
- модуль упругости $E = 2.07 \cdot 10^{11} \text{ Па}$;
- толщина пластины $h = 0.04 \text{ м}$; длина $l = 0.6 \text{ м}$, ширина $m = 0.4 \text{ м}$;
- координаты точки приложения возмущающей нагрузки имеют значения: $x_0 = 0.4 \text{ м}$, $y_0 = 0.3 \text{ м}$;
- координаты точки, в которой исследуются вязкоупругие колебания пластины: $x_s = 0.25 \text{ м}$, $y_s = 0.1 \text{ м}$;
- декремент затухания основной формы колебаний $d_0 = 0.05$.

Число слагаемых в соответствующих двойных рядах Фурье, описывающих разложение решения по собственным формам колебаний, во всех расчётах принималось конечным, равным 40×40 ; но, как указывалось выше, после учета трения оно (без снижения точности расчета) могло быть сокращено до $80 \dots 100$ гармоник в целом, то есть 9×9 или 10×10 .

На рис. 6.6 представлен вид ядер для свёрточных интегралов (6.26): кривая 1 – это исходное ядро (6.26), а кривые 2, 3 и 4 соответствуют модифицированным (согласно описанной выше процедуре) ядрам (6.21) с декрементами затухания основной формы колебаний $d_0 = 0.01$, $d_0 = 0.02$, $d_0 = 0.1$.

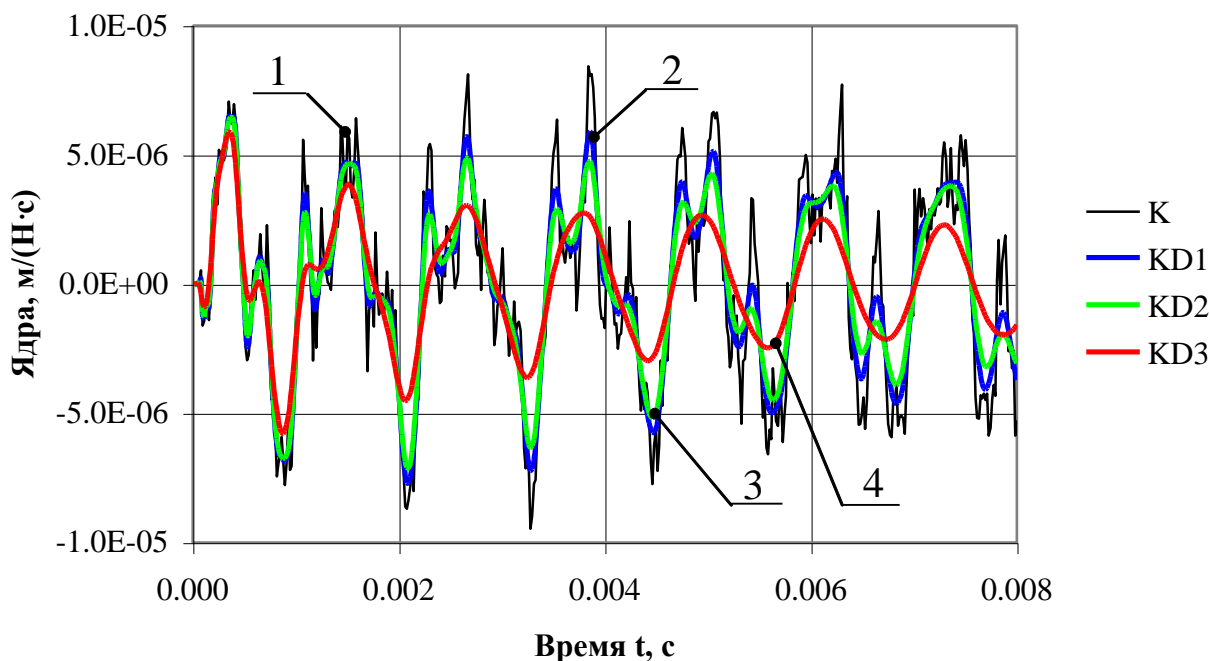


Рис. 6.6. Вид исходных и модифицированных ядер Коши:
 $K(t) \equiv K_0(t)$; $KD1(t) \equiv K_{\eta_1}(t)$; $KD2(t) \equiv K_{\eta_2}(t)$; $KD3(t) \equiv K_{\eta_3}(t)$

Результаты расчетов прогибов без учета трения и при заданных декрементах затухания колебаний приведены на рис. 6.7. Кривой 1 отвечает упругое изменение прогиба, а кривым 2, 3 и 4 – прогибы с учетом внутреннего вязкого трения при $d_0 = 0.01$, $d_0 = 0.02$ и $d_0 = 0.1$, соответственно. Возбуждающая сила (вид которой аналогичен изображенной кривой на рис. 6.5) представляла собой первую полуволну синусоиды с амплитудой 10 кН и длительностью 2 мс; началу воздействия импульса отвечает время 0.8 мс. Модуляция амплитуды на кривой 1 объясняется наложением нескольких колебаний с разными частотами и фазами.

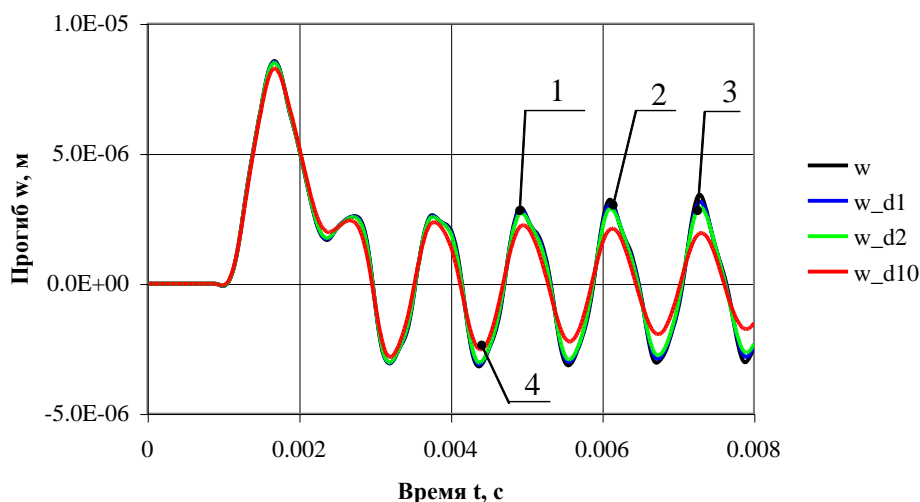


Рис. 6.7. Изменения прогиба пластины при колебаниях (расчет с учетом и без учета вязкого трения)

На рис. 6.8 и рис. 6.9 представлены модифицированные ядра для свёрточных интегралов (6.28) и (6.29), соответственно: кривые 1 ($Kw_e, K\varepsilon_e$) – внешнее; кривые 2 ($Kw_H, K\varepsilon_H$) – гистерезисное; кривые 3 ($Kw_F, K\varepsilon_F$) – вязкое трение.

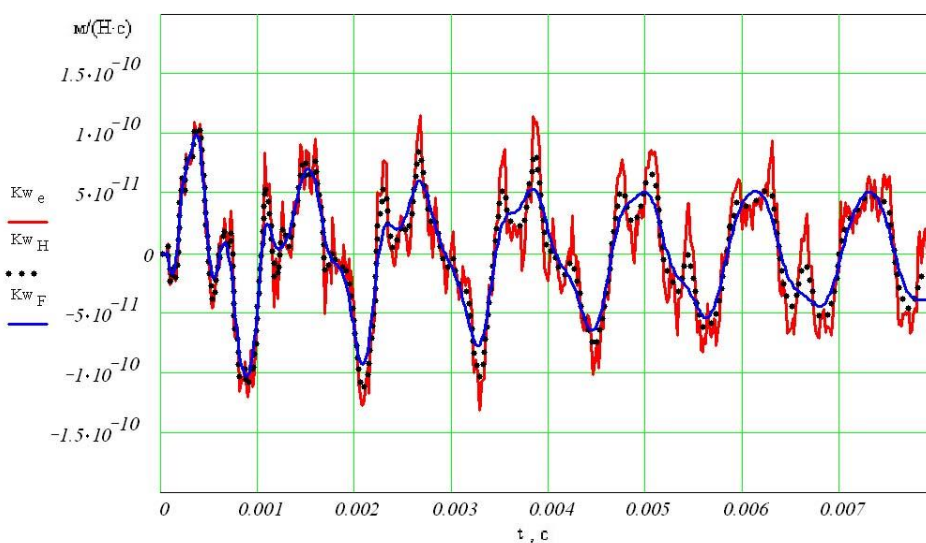


Рис. 6.8. Модифицированные ядра для прогибов

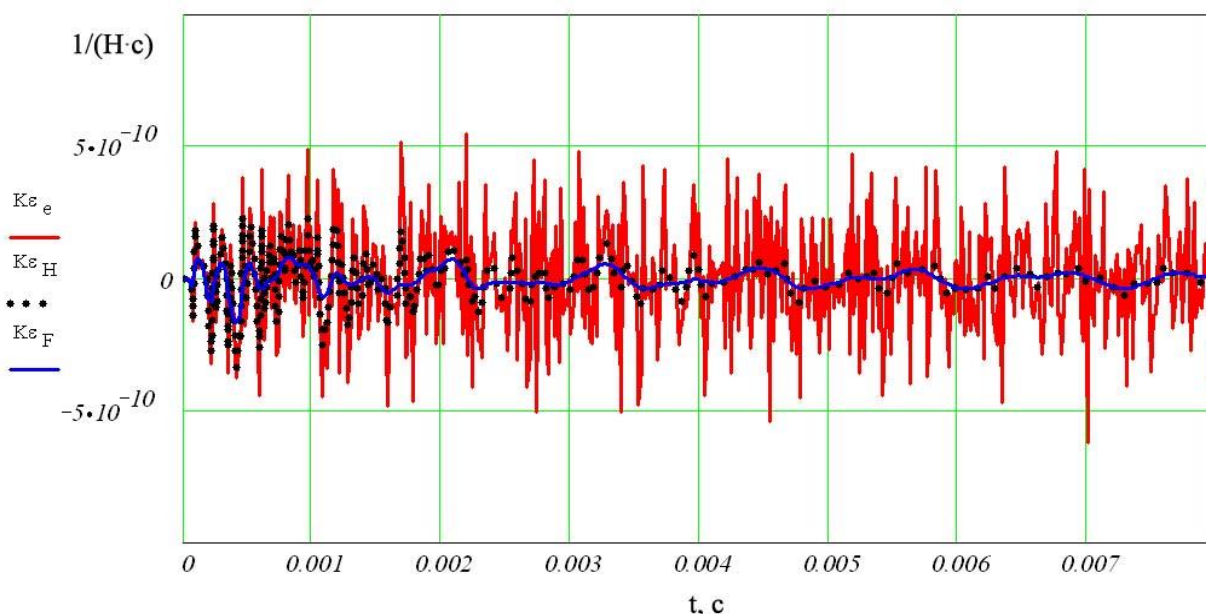


Рис. 6.9. Модифицированные ядра для деформаций
(очищены от высокочастотных компонент):
 $K\varepsilon_e$ – внешнее, $K\varepsilon_H$ – гистерезисное, $K\varepsilon_F$ – вязкое трение

Результаты расчетов прогибов и деформаций пластины с учетом различных моделей трения с помощью модифицированных ядер приведены на рис. 6.10 и рис. 6.11: кривые 1 (w_e, ε_e) – внешнее; кривые 2 (w_H, ε_H) – гистерезисное; кривые 3 (w_F, ε_F) – вязкое трение. Возмущающая сила (рис. 6.5) представляла собой первую полуволну синусоиды с амплитудой 10 кН и длительностью 340 мкс; началу воздействия импульса на рис. 6.10 и рис. 6.11 отвечает время 136 мкс.

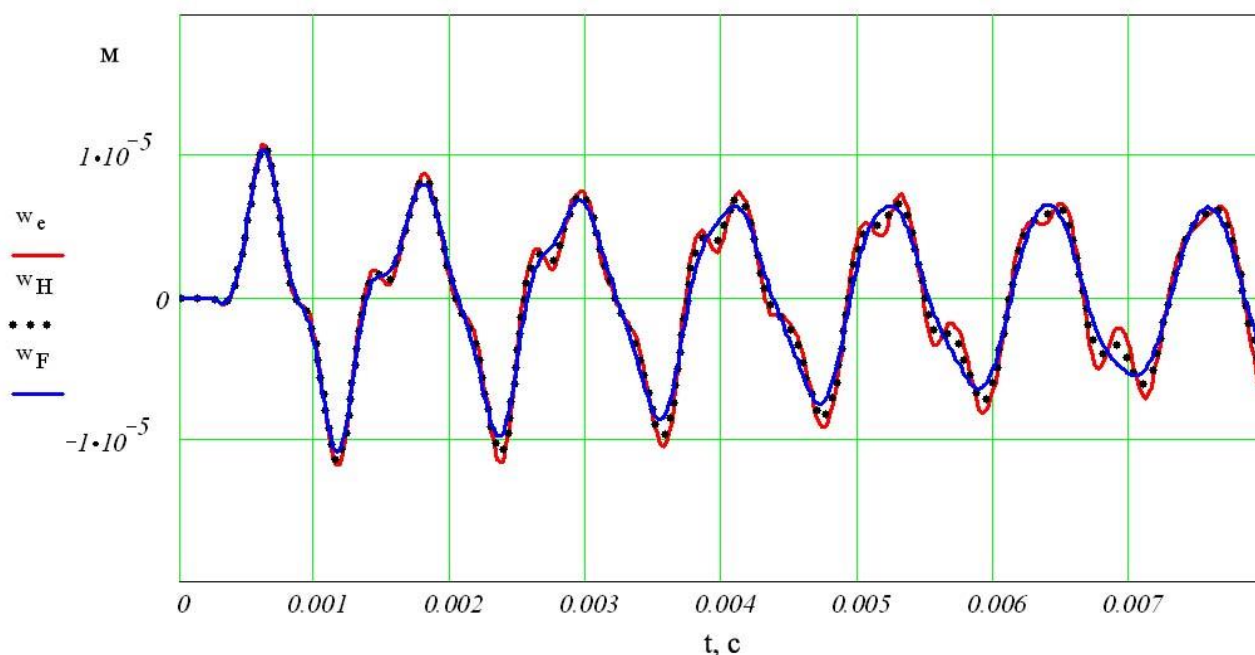


Рис. 6.10. Изменения прогиба пластины при колебаниях с учетом трения:
 w_e – внешнее, w_H – гистерезисное, w_F – вязкое трение

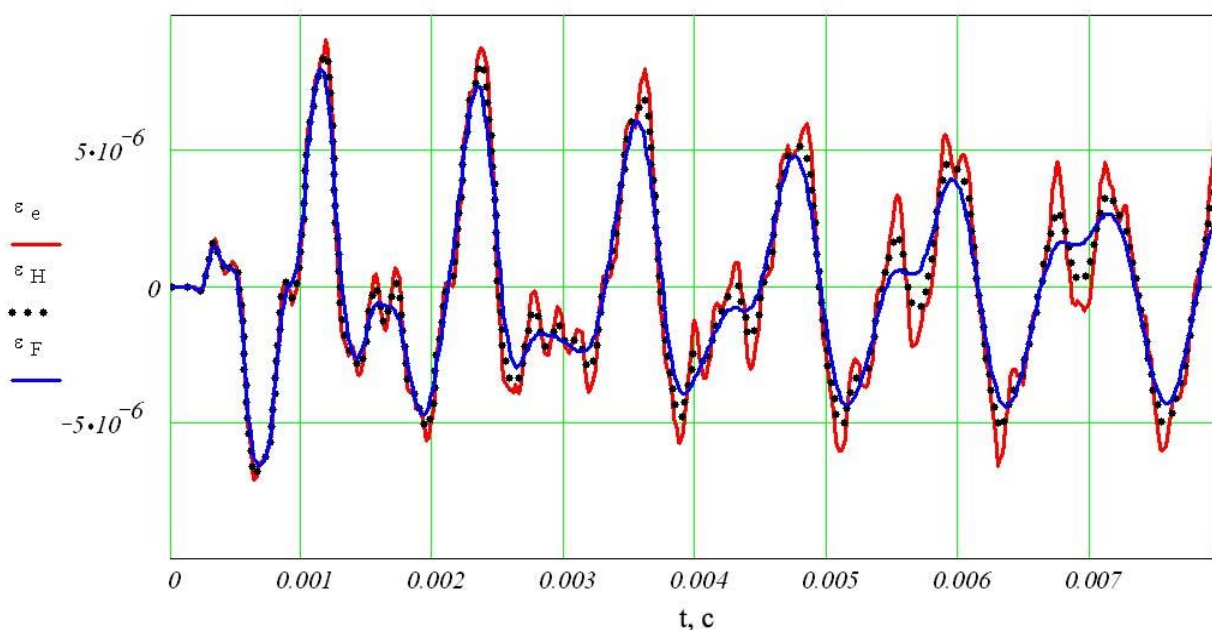


Рис. 6.11. Изменения деформации пластины при колебаниях с учетом трения: ε_e – внешнее, ε_H – гистерезисное, ε_F – вязкое трение

6.5. Выводы

Для вязкоупругого континуума, моделируемого с учетом внутреннего вязкого трения, которое описывается моделью Кельвина–Фойхта, или гистерезисного трения, которое описывается моделью Бока–Шлиппе–Колара, разработан новый численно-аналитический подход расчета переходных процессов, происходящих под воздействием нестационарного силового нагружения. Подход использует операционное исчисление и синус-преобразование Фурье, и сводится к применению новых сглаживающих интегральных операторов, использующих кривые Гаусса и Коши при моделировании вязкого внутреннего и гистерезисного трения. Указанный подход основан на введении сглаживающих линейных интегральных операторов и может быть использован для любых решений, полученных в рамках теории упругости, которые представлены в виде интегралов Дюамеля типа свёртки.

Главным достоинством, которое предопределило высокую эффективность нового подхода, является то, что он не использует информацию о структуре решения, а именно о частотах и формах свободных колебаний континуума, и, следовательно, он не чувствителен к погрешностям описания граничных условий и несовершенству принятых гипотез деформирования (Кирхгофа, С.П. Тимошенко, и др.). Благодаря чему этот подход удается использовать в режиме обработки осциллограмм, полученных в результате проведения эксперимента.

Описанный подход позволяет выделять из исследуемых колебаний так называемую упругую составляющую и наименее трудоемким способом моделировать переходные процессы при различных значениях коэффициентов диссипации, что, например, отвечает изменяющемуся термическому состоянию материала.

Возможности разработанного подхода проиллюстрированы на примере вынужденных нестационарных колебаний двумерного континуума – прямоугольной пластины.

ЛИТЕРАТУРА

1. Араманович И. Г., Левин В. И. Уравнения математической физики. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1964. – 288 с.
2. Бабаев А. Э., Янчевский И. В. Идентификация ударной нагрузки, действующей на круглую электроупругую биморфную пластину // Прикл. механика. – 2011. – Т. 47, № 5. – С. 97–107.
3. Бабаев А. Э., Бабаев А. А., Янчевский И. В. Нестационарные колебания биморфной балки в режимах прямого и обратного пьезоэлектрического эффекта // Актуальные проблемы физико-механических исследований. Акустика и волны. – 2007. – №3. – С. 16–27.
4. Бабаев А. Е., Янчевський І. В. Активне керування деформуванням станом асиметричної триморфної балки в нестационарних режимах роботи // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2011. – Т. 54, № 2. – С. 70–78.
5. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов / М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит.-ры, 1981, 718 с.
6. Василенко Н.В. Теория колебаний. – К.: "Вища школа", 1992. – 430с.
7. Василенко М. В., Алексейчук О. М. Теорія коливань і стійкості руху. – К.: Вища школа, 2004. – 525с.
8. Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функций: в 2-х ч. Ч. 1. / Г.Н. Ватсон. – М.: Изд-во иностр. лит., 1949. – 798 с.
9. Ватульян А.О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела / А.О. Ватульян. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 224 с.
10. Верлань А.Ф. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы: справочное пособие / А.Ф. Верлань, В.С. Сизиков. – Киев: Наукова думка, 1986. – 544 с.
11. Власов В.З., Леонтьев Н.Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. – М.: ФИЗМАТГИЗ, 1960. – 492 с.
12. Вольмир А. С. Гибкие пластины и оболочки. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1956. – 419 с.
13. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек / А.С. Вольмир. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1972. – 432 с.
14. Воробьев Ю. С., Колодяжный А. В., Севрюков В. И., Янютин Е. Г. Скоростное деформирование элементов конструкций. – Киев: Наук. думка, 1989. – 192 с.
15. Воробьев Ю.С. Академик Анатолий Петрович Филиппов – лидер научной школы в области динамики и прочности машин (к 110-летию со дня рождения) / Ю.С. Воробьев, А.А. Ларин, Г.И. Львов // Вестник НТУ «ХПИ»: сб. науч. работ. Тематический выпуск: Динамика и прочность машин. – Харьков: НТУ «ХПИ», 2009. – № 42. – С. 3-7.
16. Воропай А. В. Воздействие на прямоугольную пластину конечной системы произвольных нагружений / А. В. Воропай // Вісник НТУ «ХПІ».

Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХП», 2017. – № 30 (1252). – С. 27 – 38. Бібліогр.: 14 назв. – ISSN 2222-0631.

17. Воропай А. В. Идентификация нестационарной сосредоточенной нагрузки, действующей на прямоугольную мембрану. – «Вестник Харьковского государственного политехнического университета», Технологии в машиностроении. Выпуск 124, 2000, с. 95-99

18. Воропай А. В. Измерительный комплекс для экспериментальных исследований напряженно-деформированного состояния упругих элементов конструкций при ударном нагружении / А. В. Воропай, А. А. Дзюбенко, П. А. Егоров // [Электронный ресурс] / Автомобіль і електроніка. Сучасні технології: електронне наукове фахове видання. – Х.: ХНАДУ, 2015. – №2(8). – С. 182-187. – ISSN 2226–9266 – Режим доступа: <http://www.khadi.kharkov.ua/nauka/naukovo-doslidna-chastina/naukovi-vidannja/avtomobil-elektronika-suchasni-tehnologiji/arkhiv-nomeriv.html>.

19. Воропай А. В. Использование интегральных уравнений в задачах моделирования элементов виброзащиты. Сборник тезисов Международной научно-практической конференции по случаю Дня автомобилиста и дорожника: "Новейшие технологии развития конструкции, производства, эксплуатации, ремонта и экспертизы автомобиля" Посвящённой 90-летию проф. Говорущенко Н. Я. 15-16 октября 2014 г. – С. 186-187.

20. Воропай А. В. Моделирование воздействия на пластину дополнительных вязко-упругих опор // Наукові праці Міжнародної науково-практичної та науково-методичної конференції присвяченої 85-річчю кафедри автомобілів, та 100-річчю з Дня народження професора А. Б. Гредескула "Новітні технології в автомобілебудуванні, транспорті і при підготовці фахівців" 20-21 жовтня 2016 р. – Х.: Видавництво «Форт», 2016. –С. 234-235.

21. Воропай А. В. Моделирование нестационарного деформирования прямоугольной пластины с гасителем колебаний / Воропай А. В. // Вестник Харьковского национального автомобильно-дорожного университета. Сборник научных трудов. – 2011 / Выпуск 53, С. 87-90.

22. Воропай А. В. Моделирование нестационарного деформирования шарнирно-опертой пластины с дополнительной упругой подпоркой. Математическое моделирование прикладных задач математики, физики, механики: материалы Международной научно-практической Интернет-конференции (Харьков 10-25 мая 2013 г.) / Ред. совет: Тропина А. А. и др. – Х.: Экограф, 2013. с. 24-28.

23. Воропай А. В. Моделирование нестационарных колебаний прямоугольной пластины с гасителем / Материалы XV международной конференции "Dynamical system modelling and stability investigation – DSMSI" (25-27 мая 2011 г., Киев) / К.: КНУ ім. Т. Шевченко. – 2011. – с. 253.

24. Воропай А. В. Моделирование нестационарных колебаний прямоугольной пластины с дополнительной упругой подпоркой / Материалы XVI международной конференции "Dynamical system modelling and stability investigation – DSMSI" (29-31 мая 2013 г., Киев) / К.: КНУ ім. Т. Шевченко. – 2013. – с. 264.

25. Воропай А. В. Нестационарные колебания пластины с дополнительной вязкоупругой опорой // Вестник национального технического университета "ХПИ". Серия: Динамика и прочность машин. – Х.: НТУ «ХПИ». – 2015. – № 55 (1164). – С. 43-46.
26. Воропай А. В. Нестационарные колебания пластины с присоединенной сосредоточенной массой // Вестник национального технического университета "ХПИ". Динамика и прочность машин. – Харьков: НТУ "ХПИ", 2008. №47 – с. 42-48.
27. Воропай А. В. Нестационарные колебания прямоугольной пластины с амортизатором / Воропай А. В. // Вестник национального технического университета "ХПИ". Динамика и прочность машин. – Харьков: НТУ "ХПИ", 2011. №52 – С. 42-48.
28. Воропай А. В. Нестационарные колебания прямоугольной пластины с установленным на ней амортизатором / Воропай А. В. // Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях: Тезисы докладов международной конференции, посвященной 50-летию механико-математического факультета (17-22 апреля 2011 г.). – Харьков, 2011. – С. 31-32.
29. Воропай А. В. Нестационарные колебания прямоугольной пластины с упругой подпоркой / Воропай А. В. // Вестник национального технического университета "ХПИ". Динамика и прочность машин. – Харьков: НТУ "ХПИ", 2012. №55 – С. 30-37.
30. Воропай А. В. Нестационарные колебания шарнирно-опертой пластины с дополнительной вязко-упругой опорой // «Современные проблемы математики, механики и информатики». Тезисы докладов международной школы-конференции «Тараповские чтения – 2013» г. Харьков 29 сентября - 4 октября 2013 г. / под. ред. Н. Н. Кизиловой, Г. Н. Жолткевича.– Х.: Цифрова друкарня №1, 2013. – С. 35-36.
31. Воропай А. В. Обратная задача при нестационарном деформировании прямоугольной пластины с дополнительной вязкоупругой опорой // Вестник национального технического университета "ХПИ". Серия: Динамика и прочность машин. – Х.: НТУ «ХПИ». – 2015. – № 57 (1166). – С. 25-29.
32. Воропай А. В. Распределение вязкой и упругой составляющих в реакции дополнительной вязкоупругой опоры, контактирующей с пластиной // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2016. – №16 (1188). – С. 16-22. Бібліогр.: 7 назв. – ISSN 2222-0631.
33. Воропай А. В. Регуляризирующий алгоритм А. Н. Тихонова в некорректных задачах нестационарной динамики упругих элементов конструкции // Вестник НТУ «ХПИ». Серия: Математическое моделирование в технике и технологиях. – Харьков: НТУ «ХПИ», 2015. – № 55 (1097). – С. 17-22. – Библиогр.: 7 назв. – ISSN 2079-0023.
34. Воропай А. В. Управление нестационарными колебаниями пластины, несущей сосредоточенную массу // Тринадцята Міжнародна наукова

конференція імені академіка М. Кравчука 13-15 травня 2010 року, Київ. Матеріали конференції Т. I. – К., НТУУ, 2010. – с. 98.

35. Воропай А. В. Управление нестационарными колебаниями сосредоточенной массы, лежащей на пластине // Вестник национального технического университета "ХПИ". Динамика и прочность машин. – Харьков: НТУ "ХПИ", 2010. №69 – с. 46-52.

36. Воропай А. В. Управление поперечными колебаниями на малой области прямоугольной пластины // Вестник Харьковского национального автомобильно-дорожного университета Северо-Восточного научного центра Транспортной академии Украины. Сборник научных трудов. – 2010 / Выпуск 49, С. 84-87.

37. Воропай А. В. Экспериментальное измерение деформаций балок из различных материалов при ударном нагружении / А. В. Воропай, А. А. Дзюбенко, П. А. Егоров, Е. С. Малахов // [Электронный ресурс] / Автомобіль і електроніка. Сучасні технології: електронне наукове фахове видання. – Х.: ХНАДУ, 2016. – №1(9). – С. 128-138. – ISSN 2226-9266 – Режим доступу: http://www.khadi.kharkov.ua/fileadmin/P_SIS/AE16_1/5.5.pdf

38. Воропай А. В., Григорьев А. Л. Использование сглаживающих интегральных операторов для учета внутреннего трения при нестационарном деформировании элементов конструкций // Механіка та машинобудування, – Харків : НТУ «ХП», 2018 – №1. С. 3-22.

39. Воропай А. В., Григорьев А. Л. Использование теоремы Эфроса для учета диссипативных свойств деформируемых элементов конструкций / А. В. Воропай, А. Л. Григорьев // Вісник НТУ «ХП». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХП», 2017. – № 6 (1228). – С. 29-44. Бібліогр.: 11 назв. – ISSN 2222-0631.

40. Воропай А. В., Егоров П. А., Малахов Е. С. Нестационарное деформирование балок и пластин при наличии дополнительных опор и ребер жесткости // Труды XVIII Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (МДОЗМФ-2017) Харьков, 2017, с. 74-78.

41. Воропай А. В., Кучерова Н. И. Нестационарные задачи для прямоугольных пластин и пластин-полос при наличии сосредоточенных сил и масс // IX Крымская Международная математическая школа «Метод функций Ляпунова и его приложения»: Тез. докл.; Алушта, 15-20 сентября 2008 г. / Таврический национальный ун-т.– Симферополь, 2008, с. 46.

42. Воропай А. В., Малахов Е. С. Нестационарные колебания струн и их систем, контактирующих с различными сосредоточенными нагрузками // Вісник НТУ «ХП». Серія: Динамика и прочность машин. – Х.: НТУ «ХПИ». – 2016. – № 26 (1198). – С. 45-49.

43. Воропай А. В., Малахов Е. С. Обратные нестационарные задачи для балок и пластин с учетом диссипации // Dynamical system modeling and stability investigation: XVIII International Conference: Abstract of Conf. reports, Kyiv, Ukraine, 24-26 May / National Committee of Ukraine by Theoretical and Applied

Mechanics [etal.] – Київ, ДП Інформ.-аналіт. агентство, 2017. 214 с. – (Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка). с. 113.

44. Воропай А. В., Малахов Е. С. Применение интегральных уравнений Вольтерра для моделирования нестационарных колебаний консольной балки // Наукові праці Міжнародної науково-практичної конференції «Автомобільний транспорт і автомобілебудування. Новітні технології і методи підготовки фахівців» 19-20 жовтня 2017 р. – Х.: Вид-во «ХНАДУ», 2017. – С. 225-226.

45. Воропай А. В., Поваляев С. И., Шарапата А. С., Янютин Е. Г. Применение теории интегральных уравнений Вольтерра при решении динамических обратных задач для пластин и оболочек // Вестник Харьковского национального университета. Серия «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління» – № 661, 2005– С. 69-82.

46. Воропай А. В., Шупиков А. Н. Обратная задача для шарнирно-опертой пластины с дополнительной упругой опорой при нестационарном нагружении // Вестник национального технического университета "ХПИ". Серия: Динамика и прочность машин. – Х.: НТУ «ХПИ». – 2013. – № 63 (1036). – С. 29-34.

47. Воропай А. В., Янютин Е. Г. Идентификация нескольких импульсных нагрузок, воздействующих на пластину // Прикл. Механика. – 2007. – 43. – №7. – С. 90-97.

48. Воропай А.В. Некорректные обратные нестационарные задачи для балок и пластин при сложном нестационарном нагружении / О. В. Воропай, Є. Г. Янютін, В. Т. Гришакін // Вісник Харківського національного університету серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління» №775, 2007, Харьков, с. 73-80.

49. Воропай Н. И. Идентификация кинематического нагружения на поверхности цилиндрической полости упругого пространства / Н.И. Воропай // Вестник НТУ «ХПИ»: сб. научн. тр. – Х., 2011. – № 52. – С. 48-53.

50. Воропай Н. И. Математическое моделирование в задачах нестационарного деформирования цилиндрических оболочек / Н. И. Воропай, Г. А. Гнатенко, Е. Г. Янютин // Труды научно-технической конференции с международным участием «Компьютерное моделирование в наукоемких технологиях» (КМНТ–2010): (18-21 мая 2010 г., Харьков). – Харьков, 2010. – Ч. 1. – С. 92-96.

51. Воропай Н. И. Нестационарное деформирование упругого пространства с цилиндрической полостью / Н. И. Воропай, Е. Г. Янютин // Международная конференция «Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях»: (Харьков, 17-22 апреля 2011 г.): тезисы докладов. – Харьков, 2011. – С. 32-33.

52. Воропай Н. І. Математичне моделювання імпульсного впливу на пружну циліндричну оболонку / Н. І. Воропай, Є. Г. Янютін // Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров'я: тези доповідей XVIII Міжнародної науково-практичної конференції (Харків, 12-14 травня 2010 р.): Ч. I. – Харків, 2010. – С. 53.

53. Воропай О. В., Поваляев С. І., Гришакін В. Т. Дослідження різних моделей дорожньої конструкції за нестационарного навантаження // Вестник

Харьковского национального автомобильно-дорожного университета. Сборник научных трудов. – 2011 / Выпуск 55, С. 25-31.

54. Галимов Ш.К. Уточненные теории пластин и оболочек / Ш. К. Галимов. – Саратов: Изд-во ун-та, 1990. – 136 с.

55. Галиуллин А.С. Методы решения обратных задач динамики / А.С. Галиуллин. – М.: Наука, 1986. – 224 с.

56. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. Издание третье. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1967. – 576с.

57. Геворкян Ю. Л. Скалярный и векторный анализ для классического инженерного образования. Общий курс математики в 2-х т. / Ю. Л. Геворкян, А. Л. Григорьев. – Т. 1. – Харьков: Вид-во «Підручник НТУ «ХПІ», 2011. 652 с.

58. Глэдвелл Г.М.Л. Обратные задачи теории колебаний: пер. с англ. / Г.М.Л. Глэдвелл. – М.; Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика; Институт компьютерных исследований, 2008. – 607 с.

59. Голоскоков Е.Г. Нестационарные колебания механических систем / Е.Г. Голоскоков, А.П. Филиппов. – К.: Наук. думка, 1977. – 340 с.

60. Гончарский А.В. Численные методы решения обратных задач астрофизики / А.В. Гончарский, А.М. Черепашук, А.Г. Ягола. – М.: Наука, 1978. – 336 с.

61. Григолюк Э.И., Селезов И.Т. Механика твердых деформируемых тел. Т. 5. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. – М.: ВИНТИ, 1973. -272 с.

62. Гришакин В. Т. Идентификация импульсной нагрузки, воздействующей на вязко-упругую балку // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – 2015. – № 6 (1115). – С. 22-29.

63. Гузь И. С., Янютин Е. Г., Титарев В. Г. Использование сигналов акустической эмиссии для определения координат развивающихся дефектов в анизотропных оболочках и пластинах. – “Проблемы прочности”, 1977, №6

64. Гузь А.Н. Гидроупругость систем оболочек / А.Н. Гузь, В.Д. Кубенко, А.Э. Бабаев. – Киев: Вища шк., 1984. – 208 с.

65. Гузь А.Н. Методы расчета оболочек. Т. 5. Теория нестационарной аэрогидроупругости оболочек / А.Н. Гузь, В.Д. Кубенко. – Киев: Наукова думка, 1982. – 400 с.

66. Динамічний відгук пластин, які лежать на пружній основі / Н.В. Сметанкіна, С.В. Угрімов, О.М. Шупіков, Я.П. Бузько // Вісник Харківського національного університету «ХПІ». Тематичний випуск: Технології в машинобудуванні. – 2002. – № 19. – С. 68-72.

67. Диткин В. А., Прудников А. П. Справочник по операционному исчислению. – М.: Высшая школа, 1965. – 466 с.

68. Диткин В.А., Прудников А.П. Операционное исчисление. – М.: Высшая школа, 1966. – 405 с.

69. Егоров П. А. Идентификация нестационарных нагрузок, воздействующих на шарнирно-опертую оболочку, подкрепленную концентрическими ребрами жесткости / П. А. Егоров // Вісник НТУ «ХПІ».

Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – 2014. – № 39 (1082). – С. 71-80.

70. Егоров П. А. Нестационарные колебания шарнирно-опертой оболочки с концентрическими ребрами жесткости / П. А. Егоров // Новейшие технологии развития конструкции, производства, эксплуатации, ремонта и экспертизы автомобиля: междунар. науч.-практ. конф., 15-16 окт. 2014 г.: тез. докл. – Харьков: ХНАДУ, 2014. – С. 190.

71. Егоров П. А. О влиянии жесткости основания на результаты экспериментальных исследований нестационарного деформирования элементов конструкций / П. А. Егоров // Новітні технології в автомобілебудівництві та транспорті: міжнар. наук.-практ. конф., 15-16 жовтня 2015 г.: наук. пр. – Харків: ХНАДУ, 2015. – С. 273-274.

72. Задачи импульсного деформирования элементов конструкций / Янютин Е. Г., Янчевский И. В., Воропай А. В., Шарапата А. С.: Монография. – Харьков ХНАДУ, 2004. – 392 с.

73. Идентификация нагрузок при импульсном деформировании тел. Монография в 2-х ч. Часть I / Е. Г. Янютин, Д. И. Богдан, Н. И. Воропай, Г. А. Гнатенко, В. Т. Гришакин. – Харьков: Изд-во ХНАДУ, 2010. – 180 с.

74. Идентификация нагрузок при импульсном деформировании тел. Монография в 2-х частях. Часть II / Е. Г. Янютин, А. В. Воропай, С. И. Повалев, И. В. Янчевский. – Харьков: Изд-во ХНАДУ, 2010. – 212 с.

75. Инструкция по проектированию дорожных одежд нежесткого типа. ВСН 46-83. МИНТРАНССТРОЙ. – М.: Транспорт, 1985. – 157 с.

76. Интегральные преобразования и операционное исчисление / В. А. Диткин, А. П. Прудников / Государственное издательство физико-математической литературы. М. – 1961, 524 с.

77. Исследование деформирования образца из асфальтобетона на раскол с использованием тензометрической аппаратуры / А. Г. Батракова, В. Н. Ряпухин, А. В. Воропай, Е. В. Дорожко, П. А. Егоров // Вестник Харьковского национального автомобильно-дорожного университета Северо-Восточного научного центра Транспортной академии Украины. Сборник научных трудов. – 2015 / Выпуск 71, С. 45-49.

78. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи / С.И. Кабанихин. – Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009. – 458 с.

79. Карнаухова Т.В. Активное демпфирование вынужденных резонансных изгибных колебаний изотропной вязкоупругой прямоугольной пластины с жестким защемлением торцов/ Т.В. Карнаухова // Доповіді НАН України. – 2009. – № 6. – С. 68-72.

80. Карнаухова Т.В. Влияние механических граничных условий на активное демпфирование вынужденных изгибных резонансных колебаний изотропных вязкоупругих прямоугольных пластин / Т.В. Карнаухова // Доповіді НАН України. – 2009. – № 8. – С. 58-61.

81. Карнаухова Т.В. О новом подходе к активному демпфированию вынужденных резонансных изгибных колебаний изотропных вязкоупругих пластин / Т.В. Карнаухова // Доповіді НАН України. – 2009. – № 5. – С. 78-82.

82. Ковальчук П. С., Янчевский И. В. Управление колебаниями незамкнутой сферической оболочки из электроупругого материала // Зб. наук. праць «Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій». – 2012. – Вип. 18. – С. 79-90.
83. Ковальчук П. С., Янчевский И. В. Управление радиальными колебаниями толстостенного сферического пьезокерамического излучателя // Зб. наук. праць «Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла». – 2012. – Вип. 13. – С. 212-223.
84. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных сотрудников и инженеров). – М.: Наука. –1977, – 832 с.
85. Кохманюк С. С., Филиппов А. П. Колебания многопролетных балок на упругих опорах при подвижной нагрузке // Строительная механика и расчет сооружений. – 1965. , № 6, с.32-36.
86. Кохманюк С.С. Колебания деформируемых систем при импульсных и подвижных нагрузках / С.С. Кохманюк, Е.Г. Янютин, Л.Г. Романенко. – Киев: Наукова думка, 1980. – 232 с.
87. Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости: Учебное пособие, 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы. – 1981, 305 с.
88. Кубенко В. Д., Янчевський І. В. Невісесиметричні коливання вигину круглої біморфної пластини з п'єзокерамічним шаром при імпульсному електромеханічному навантаженні // Зб. наук. пр. укр.-рос. наук. семінару «Нестационарні процеси деформування елементів конструкцій, зумовлені дією полів різної фізичної природи», м. Львів, 12-15 вересня 2012 р. – С. 73-77.
89. Луговой П.З. Нестационарная динамика неоднородных оболочечных конструкций / П.З. Луговой, В.Ф. Мейш, Э.А. Штанцель. – К.: Издательско-полиграфический центр «Киевский университет», 2005. – 536 с.
90. Лурье А. И. Операционное исчисление. – М.: Гостехтеориздат, 1950. – 432 с.
91. Малахов Е. С., Воропай А. В. Обратная задача для нестационарных колебаний системы струн // Вісник НТУ «ХП». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХП», 2016. – №6 (1178). – С. 56-62. Бібліогр.: 7 назв. – ISSN 2222-0631.
92. Математическое моделирование нестационарных колебаний элементов конструкций (монография). /Воропай Н. І., Гнатенко Г. О., Шарапата А. С.// Харьков: Издательство «Лидер», 2014.– 297 с.
93. Механика в СССР за 50 лет. Т. 3 / А.И. Каландия, А.И. Лурье, Г.Ф. Манджavidзе [и др.]; ред. А.И. Лурье. – М.: Наука, 1972. – С. 4-70.
94. Механика в СССР за 50 лет: в 3 т. / гл. ред. Л.И. Седов. – М.: Наука. – Т. 1 : Общая и прикладная механика. – 1968. – 416 с; Т. 2 : Механика жидкости и газа. – 1970. – 880 с; Т. 3 : Механика деформируемого твердого тела. – 1972. – 480 с.
95. Морозов В. А. Регулярные методы решения некорректно поставленных задач / В.А. Морозов. – М.: Наука, 1987. – 608 с.

96. Нестационарные колебания многослойных пластин и оболочек и их оптимизация / А.Н. Шупиков, Я.П. Бузько, Н.В. Сметанкина, С.В. Угримов. – Харьков: Изд. ХНЭУ, 2004. – 252 с.
97. Петров Ю. П. Корректные, некорректные и промежуточные задачи с приложениями: учебное пособие для вузов / Ю.П. Петров, В.С. Сизиков – СПб: Политехника, 2003. – 261 с.
98. Писаренко Г. С., Яковлев А. П., Матвеев В. В. Вибропоглощающие свойства конструкционных материалов. – К.: Наук. думка, 1971. – 375 с.
99. Пространственные задачи теории упругости и пластичности: в 6 т. Т. 5. Динамика упругих тел / Головчан В.Т., Кубенко В.Д., Шульга Н.А., Гузь А.Н., Гринченко В.Т. – Киев: Наук. думка, 1986 – 288 с.
100. Радовский Б. С. Проблемы механики дорожно-строительных материалов и дорожных одежд. – К.: ООО «Полиграфконсалтинг», 2003, 240 с.
101. Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация / А.Н. Тихонов, А.В. Гончарский, В.В. Степанов, А.Г. Ягола. – М.: Наука, 1983. – 200 с.
102. Самарский А.А. Численные методы решения обратных задач математической физики: учебное пособие / А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич. – М.: Изд-во ЛКИ, 2009. – 480 с.
103. Сметанкина Н. В. Нестационарное деформирование, термоупругость и оптимизация многослойных пластин и цилиндрических оболочек: монография / Н. В. Сметанкина. – Харьков: «Міськдрук», 2011. – 376 с.
104. Соболев И.М., Статников Р.Б. Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями: учебное пособие для вузов. / Издание второе, переработанное и дополненное. М.:Дрофа, 2006. 175 с.
105. Тербушко О. И. Основы теории упругости и пластичности. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984. – 320 с.
106. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. - 2-е изд. - М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1979. - 560 с.
107. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле. – М.: Наука. 1967, – 444 с.
108. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. – М.: Наука, 1966. – 636 с.
109. Тихонов А.Н. Методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. – М.: Наука, 1979. – 288 с.
110. Тихонов А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Наука, 1966. – 724 с.
111. Уорден К. Новые интеллектуальные материалы и конструкции. Свойства и применение. – М.: Техносфера, 2006. – 224 с.
112. Успехи механики: в 6 т. / ред. А.Н. Гузя. – Киев: «А.С.К.». – Т. 1. – 2005. – 776 с.; Т. 2. – 2006. – 832 с.; Т. 3. – 2007. – 752 с.
113. Успехи механики: в 6 т. / ред. А.Н. Гузя. – Киев: «Літера ЛТД». – Т. 4. – 2008. – 720 с.; Т. 5. – 2009. – 752 с.
114. Уфлянд Я.С. Распространение волн при поперечных колебаниях стержней и пластин / Я.С. Уфлянд. – ПММ. – 1948. – Т. 12, № 3. – С. 287-300.

115. Филиппов А. П., Скляр В. А. Колебания стержней и плит при ударе // Динамика и прочность машин. – Харьков: Изд-во Харьк. ун-та, 1967. – Вып. 6. – с. 42-47.
116. Филиппов А. П., Скляр В. А. Поперечный удар по прямоугольной плите нелинейным упругим телом // Динамика и прочность машин. – Харьков: Изд-во Харьк. ун-та, 1973. – Вып. 18. – с. 45.
117. Филиппов А.П. Деформирование элементов конструкций под действием ударных и импульсных нагрузок / А.П. Филиппов, С.С. Кохманюк, Е.Г. Янютин. – К.: Наук. думка, 1978. – 184 с.
118. Филиппов А.П. Колебания деформируемых систем / А.П. Филиппов. – М.: Машиностроение, 1970. – 736 с.
119. Численные методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, А.В. Гончарский, В.В. Степанов, А.Г. Ягола. – М.: Наука, 1990. – 230 с.
120. Шарапата А. С. Прямая и обратная задача для нестационарно нагруженной круглой мембраны // Вестник Харьковского государственного политехнического университета. – 2000. – Вып. 106. – С. 20-25.
121. Янчевский И. В. Идентификация действующих на упругодеформируемые элементы конструкций нестационарных нагрузок с помощью МКЭ // Мат-лы Междунар. научно-техн. конф. «Датчики, приборы, системы – Приборостроение 2013», пгт. Гурзуф, 16-20 сентября 2013 г. – С. 3.
122. Янчевский И. В. Идентификация нестационарной нагрузки, воздействующей на асимметричный биморф // Вестник НТУ «ХПИ». Вып. «Динамика и прочность машин». – 2008. – № 36. – С. 184–190.
123. Янчевский И. В. Исследование волновых колебаний составных стержней при импульсном деформировании. – Вестник Харьковского государственного политехнического университета, 1998, Вып. 23, с. 74-78.
124. Янчевский И. В. К проблеме восстановления временной зависимости нестационарного воздействия, приложенного к упруго-деформируемому элементу конструкции. – Пробл. машиностроения, 2015, Т. 18, № 2, с. 43-54.
125. Янчевский И. В. Решение нестационарной задачи управления напряженным состоянием стержневого элемента. – Вестник Харьковского государственного автомобильно-дорожного технического университета, 2000, Вып. 11, с. 51-54.
126. Янчевский И. В. Управление нестационарными колебаниями слойно-ступенчатого биморфа // Вестник НТУ «ХПИ». Вып. «Динамика и прочность машин». – 2009. – № 42. – С. 196–204.
127. Янчевский И. В., Бабаев А. Э. Определение ударной нагрузки, действующей на электроупругую биморфную балку с разрезными токопроводящими покрытиями // Прикладная механика. – 2010. – 46, № 9. – С. 60–70.
128. Янчевский И. В., Бабаев А. Э., Бабаев А. А. Активное демпфирование нестационарных изгибных колебаний биморфной балки // Прикладная механика. – 2010. – 46, № 7. – С. 84–92.
129. Янютін Є. Г. Ідентифікація нестационарного навантаження, яке діє на циліндричну шарнірно-обперту оболонку, підкріплену концентричними

ребрами жорсткості / Є. Г. Янютін, П. А. Єгоров // Матеріали всеукр. наук.-метод. конф. «Сучасні науково-методичні проблеми математики у вищій школі», 25-26 червня 2015 р. – К. : НУХТ. – 2015. – С. 48-50.

130. Янютін Є. Г. Прямі та обернені задачі для балки та пластини-полоси / Є. Г. Янютін, Н. І. Воропай, Г. О. Гнатенко // Машинознавство. – 2009. – №8(146). – С. 10-15.

131. Янютін Є. Г. Розв'язання нестационарних прямих та обернених задач для балок з пружним додатковим спиранням / Є. Г. Янютін, Г. О. Гнатенко, В. Т. Гришакін // Машинознавство. – 2007. – № 8. – С. 18-23.

132. Янютін Є. Г. Розв'язування обернених нестационарних задач теорії пружності / Є. Г. Янютін, А. С. Шарапата, П. А. Єгоров // Матеріали всеукр. наук.-метод. конф. «Сучасні науково-методичні проблеми математики у вищій школі», 26-27 червня 2013 р. – К. : НУХТ. – 2013. – С. 28-29.

133. Янютін Є. Г., Богдан Д. І., Поваляєв С. І. Обернені задачі імпульсного деформування пластин та стержнів // Машинознавство. – 2006. – №2. – С.17-22.

134. Янютін Є. Г., Богдан Д. І., Поваляєв С. І. Обернені задачі імпульсного деформування пластин та стрижнів // Тези доповідей сьомого міжнародного симпозіуму українських інженерів-механіків у Львові. – Львів. – 2005. – С.33-34.

135. Янютін Є. Г., Воропай О. В. Ідентифікація нестационарного зосередженого навантаження, що діє на прямокутну пластину. – Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров'я. X міжнародна науково-практична конференція. Тези доповідей НТУ "ХПІ", 2002, с. 85-86

136. Янютін Є. Г., Шарапата А. С. Рішення некоректної динамічної задачі для кругової мембрани // Анотації доповідей міжнародної науково-практичної конференції «Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров'я. – Харків. – 16-17 травня 2002 р. – С. 87.

137. Янютин Е. Г. Восстановление во времени функции нагрузки, воздействующей на бесконечную мембрану-полосу / Е. Г. Янютин, Н. И. Кучерова // Вестник НТУ «ХПИ»: сб. научн. тр. – Х., 2007. – №. 22. – С. 182-187.

138. Янютин Е. Г. Восстановление динамических нагрузок, действующих на конические оболочки / Е. Г. Янютин, С. И. Поваляев // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – 2012. – № 2. – С. 218-224.

139. Янютин Е. Г. Восстановление импульсного воздействия на бесконечную цилиндрическую оболочку / Е. Г. Янютин, Н. И. Воропай // Вестник ХНАДУ: сб. научн. тр. – Х., 2010. – Вып. 49. – С. 116-119

140. Янютин Е. Г. Идентификация нагрузки, воздействующей на составную балку / Е. Г. Янютин, Г. А. Гнатенко // Вестник ХНАДУ: Сб. научн. тр. – Харьков: Изд-во ХНАДУ., 2010. – Вып. 49. – С. 93-97.

141. Янютин Е. Г. Идентификация параметров нестационарно колеблющейся системы «балка-масса» / Е. Г. Янютин, П. А. Егоров // Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – 2013. – № 54 (1027). – С. 207-213.

142. Янютин Е. Г. Идентификация подвижной нагрузки для вязко-упругих балок / Є. Г. Янютін, В. Т. Гришакін // Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». Зб. наукових праць. – 2008. – №47. – С 178-184.

143. Янютин Е. Г. Идентификация подвижных нагрузок, воздействующих на вязко-упругие балки и плиты / Є.Г. Янютін, В.Т. Гришакін // International Conference «Dynamical system modeling and stability investigation», (Київ, 27-29 травня 2009 р.). – М-во освіти та науки України, Київський національний ун-т ім. Тараса Шевченка. – К.: Київський національний ун-т ім. Тараса Шевченка, 2009. – С. 267.

144. Янютин Е. Г. Идентификация сосредоточенного нестационарного воздействия на бесконечную пластину-полосу / Е. Г. Янютин, Н. И. Кучерова // Вісник НТУ «ХПІ»: зб. наукових праць. – Х., 2008. – №. 36. – С. 190-195.

145. Янютин Е. Г. Импульсное деформирование упругих элементов конструкций / Е.Г. Янютин. – Киев: Наук. думка, 1993. – 147 с.

146. Янютин Е. Г. Исследование влияния нестационарной подвижной нагрузки на балки конечной длины / Є. Г. Янютін, В. Т. Гришакін // Автомобільний транспорт. – 2003. – №13. – С. 184-186.

147. Янютин Е. Г. Исследование влияния подвижной нагрузки на балки конечной длины / Є. Г. Янютін, В. Т. Гришакін // Матеріали 1-й міжвузівської науково-практичної конференції «Можливості використання методів механіки для розв'язання питань безпеки в умовах надзвичайних ситуацій», (Харків, 25 грудня 2003 р.) Академія пожежної безпеки України. – Х.: Академія пожежної безпеки України, 2003. – С. 22.

148. Янютин Е. Г. Исследование динамических процессов в пластине на основе уточненной теории с учетом поперечного обжатия / Е. Г. Янютин, Н. И. Воропай // XV International Conference «Dynamical System Modelling and Stability Investigation» (DSMSI): (25-27 may 2011, Kyiv). – Киев, 2011. – С. 335.

149. Янютин Е. Г. Исследование динамического деформирования пластины на основе одного волнового уравнения / Е. Г. Янютин, Н. И. Воропай // Вісник НТУ «ХПІ»: зб. наукових праць. – Х., 2011. – №. 13. – С. 194-200.

150. Янютин Е. Г. Колебания мембраны, контактирующей с упругим основанием, при импульсном нагружении / Е. Г. Янютин, П. А. Егоров // Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – 2013. – № 37 (1010). – С. 223-230.

151. Янютин Е. Г. Начальный этап деформирования упругого полупространства при кинематическом воздействии / Е. Г. Янютин, Д. И. Богдан // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – 2012. – № 54 (960). – С. 202-208.

152. Янютин Е. Г. Нестационарные колебания мембран с присоединенными массами / Е. Г. Янютин, П. А. Егоров // Вестник ХНАДУ : сб. науч. тр. – 2012. – Вып. 56. – С. 75-79.

153. Янютин Е. Г. Нестационарные колебания мембраны с присоединенной массой / Е. Г. Янютин, П. А. Егоров // Прикладные задачи математики и

механики («ПЗММ» – 2012) : междунар. науч.-техн. конф., 10-14 сент. 2012 г. : материалы конференции – Севастополь : 2012. – С. 38-42.

154. Янютин Е. Г. Нестационарные колебания мембраны, несущей несколько сосредоточенных масс / Е. Г. Янютин, П. А. Егоров // Вісник НТУ «ХП». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – 2012. – № 54 (960). – С. 209-216.

155. Янютин Е. Г. Нестационарные колебания шарнирно-опертой пластины, подкрепленной линейными ребрами жесткости (прямая и обратная задача) / Е. Г. Янютин, П. А. Егоров // Вісник НТУ «ХП». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – 2015. – № 6 (1115). – С. 191-200.

156. Янютин Е. Г. Неустановившиеся колебания шарнирно-опертой пластины, подкрепленной линейными ребрами жесткости / Е. Г. Янютин, П. А. Егоров // Материалы XVII междунар. конф. "Dynamical system modelling and stability investigation – DSMSI", 27–29 мая 2015 г. – Киев: КНУ им. Т. Шевченко. – 2015. – С. 104.

157. Янютин Е. Г. Обратные нестационарные задачи для балок и пластин с учетом особенностей нагружения / Е. Г. Янютин, О. В. Воропай, В. Т. Гришакін // Труды XIII міжнародного симпозиуму «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики», (Херсон, 11-13 жовт. 2007 р.) / М-во освіти та науки України, Харк. національний ун-т ім. Каразіна. – ХНУ ім. Каразіна, 2007. – С. 350-353.

158. Янютин Е. Г. Обратные нестационарные задачи для упруго-деформируемых балок и пластин / Е. Г. Янютин, А. В. Воропай, В. Т. Гришакін, Г. А. Гнатенко // Международная научно-техническая конференция «Инновации в машиностроении», (Минск, 30-31 октября 2008 г.). Национальная академия наук Беларуси. – Минск, 2008. – С. 152-158.

159. Янютин Е. Г. Обратные нестационарные задачи при упругом деформировании балок и пластин / Е. Г. Янютин, Д. І. Богдан, В. Т. Гришакін // VIII Кримська Міжнародна математична школа «Метод функций Ляпунова и его приложения», (Крим, Алушта, 10-17 вересня 2006 р.). – М-во освіти та науки України, Таврійський національний університет ім. В.І. Вернадського. – Сімферополь, 2006. – С. 199.

160. Янютин Е. Г. Определение влияния сосредоточенного нестационарного воздействия на мембрану-полосу / Е. Г. Янютин, Н.И. Кучерова // Вестник ХНАДУ: сб. научн. тр. – Х., 2006. – Вып. 32. – С. 80-83.

161. Янютин Е. Г. Определение импульсного нагружения балки / Е. Г. Янютин, Г. А. Гнатенко // Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». Зб. наукових праць. – Харків: НТУ «ХП», 2008. – № 47. – С. 184-189.

162. Янютин Е. Г. Определение точки приложения нестационарной сосредоточенной силы, действующей на балку / Е. Г. Янютин, П. А. Егоров // Тез. докл. междунар. науч. шк.-конф. «Тараповские чтения», 29 сент. – 4 окт. 2013 г. – Харьков : 2013. – С. 78.

163. Янютин Е. Г. Постановка и решение динамических прямых и обратных задач для прямоугольной пластины с учетом поперечного обжатия /

Є. Г. Янютін, Н. І. Воропай // Вісник НТУ «ХПІ»: зб. наукових праць. – Х., 2010. – №68. – С. 155-166.

164. Янютин Е. Г. Приближенный способ идентификации произвольной осесимметричной нагрузки, действующей на цилиндрическую оболочку / Е. Г. Янютин, С. И. Поваляев // Прикл. мех. – 2008. – Т. 44, № 7. – С. 91-100.

165. Янютин Е. Г. Применение интегральных уравнений Вольтерра в задачах нестационарного деформирования балок / Є. Г. Янютін, В. Т. Гришакін, Г. О. Гнатенко // Дванадцята міжнародна наукова конференція ім. академіка М. Кравчука, (Київ, 15-17 травня 2008 р.). – М-во освіти та науки України, Національний технічний університет України «КПІ». – Київ, 2008. – С. 472.

166. Янютин Е. Г. Применение интегральных уравнений Вольтерра в задачах импульсного деформирования цилиндрических оболочек / Е.Г. Янютин, Н. И. Воропай, Г. А. Гнатенко // Тринадцята міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука: (13-15 травня 2010 р., Київ). – Киев, 2010. – Т. 1.– С. 460.

167. Янютин Е. Г. Прямые и обратные нестационарные задачи теории упругости / Е. Г. Янютин, А. С. Шарапата, П. А. Егоров // Материалы XVI междунар. конф. "Dynamical system modelling and stability investigation – DSMSI", 29-31 мая 2013 г. – Киев : КНУ им. Т. Шевченко. – 2013. – С. 279.

168. Янютин Е. Г. Решение обратных задач для деформирующихся нестационарно полупространств и балок / Є. Г. Янютін, Д. І. Богдан, В. Т. Гришакін, Г. О. Гнатенко // IX Кримська Міжнародна математична школа «Метод функций Ляпунова и его приложения». (Крим, Алушта, 15-20 вересня 2008 р.) /М-во освіти та науки України, Таврійський національний університет ім. В.І. Вернадського. – Сімферополь, 2008. – С. 191.

169. Янютин Е. Г. Управление нестационарными колебаниями бесконечно длинной цилиндрической оболочки / Е.Г. Янютин, Н.И. Воропай // Вестник НТУ «ХПІ»: сб. научн. тр. – Х., 2010. – №. 37. – С. 170-175

170. Янютин Е. Г., Богдан Д. И. Идентификация нестационарной подвижной нагрузки, действующей на плиту на упругом инерционном основании // Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут» №21: Зб. наук. праць. – Харків, 2005. – С. 133-139.

171. Янютин Е. Г., Богдан Д. И. Решение прямых и обратных нестационарных задач теории упругости для прямоугольной плиты на упругом инерционном основании // Можливості використання методів механіки для розв'язання питань безпеки в умовах надзвичайних ситуацій: Матеріали II міжвузівської науково-практичної конференції. Харків 28 грудня 2004 р. – Харків, 2004. – С. 12-15.

172. Янютин Е. Г., Богдан Д. И., Гришакін В. Т. Идентификация нагрузок, действующих на круглую плиту и двухпролетную балку // International conference. Dynamical system modeling and stability investigation. Kyiv, May 22-25 – 2007. – Киев, 2007. – С. 351.

173. Янютин Е. Г., Богдан Д. И., Гришакін В. Т. Идентификация подвижных нагрузок, действующих на балки и плиты // Збірник наукових

праць Національного гірничого університету № 24: Зб. наук. праць. – Дніпропетровськ, 2006. – С. 145-150.

174. Янютин Е. Г., Богдан Д. И., Поваляев С. И. Два подхода к решению обратных задач теории упругости // VII Международная научная школа-семинар. Импульсные процессы в механике сплошных сред. Николаев, 21-25 августа – 2007. – Николаев, 2007. – С 41-42.

175. Янютин Е. Г., Воропай А. В. Активное гашение нестационарных колебаний прямоугольной пластины // Вестник национального технического университета "ХПИ". Динамика и прочность машин. – Харьков: НТУ "ХПИ", 2007. №38 – с. 174-180.

176. Янютин Е. Г., Воропай А. В. Активное снижение амплитуд нестационарных колебаний на прямоугольной области пластины. //VIII Крымская Международная математическая школа «Метод функций Ляпунова и его приложения»: Тез. докл.; Алушта, 10-17 сентября 2006 г. / Таврический национальный ун-т. – Симферополь: ДиАйПи, 2006, с. 200.

177. Янютин Е. Г., Воропай А. В. Идентификация изменения во времени импульсно воздействующей на прямоугольную пластину распределенной нагрузки. – Вісник ХДТУСГ. Підвищення надійності відновлюємих деталей машин. Фізичні та комп'ютерні технології. Випуск 10, 2002, с. 297-301.

178. Янютин Е. Г., Воропай А. В. Идентификация импульсного нагружения упругой прямоугольной пластины. // Прикл. Механика. – 2003. – 39. – №10. – С. 97-102.

179. Янютин Е. Г., Воропай А. В. Идентификация нестационарного нагружения, касательного к лицевой поверхности прямоугольной пластины // Пробл. машиностроения. – 2004. – 7, №1.– С 76-81.

180. Янютин Е. Г., Воропай А. В. Идентификация нестационарной сосредоточенной нагрузки, воздействующей на прямоугольную плиту. – Вестник НТУ "ХПИ". Динамика и прочность машин. 9'2002 т. 9, с. 146-152.

181. Янютин Е. Г., Воропай А. В. Идентификация ударного нагружения пластины на основе экспериментальных данных. Международная научная конференция "Интегральные уравнения и их применения" 29 июня – 4 июля 2005 года. Одесса, с. 167.

182. Янютин Е. Г., Воропай А. В. Импульсное деформирование прямоугольных пластин на упругом основании. / Автомобильный транспорт. Сборник научных трудов. Выпуск 13. – 2003, с. 181-183.

183. Янютин Е. Г., Воропай А. В. Моделирование дорожных одежд с учетом движущихся многоосных автомобилей. XI научно-техническа конференция с международно участие "Транспорт, экология – устойчиво развитие". Болгария. Варна. Сборник доклады 2005, с. 402-408.

184. Янютин Е. Г., Воропай А. В. Распознавание изменения во времени импульсно воздействующей на прямоугольную пластину нагрузки. – Физические и компьютерные технологии в народном хозяйстве. Труды 5 международной научно-технической конференции. Харьков, ФЭД, 2002, с. 560-563.

185. Янютин Е. Г., Воропай А. В. Решение обратной нестационарной задачи теории упругости для прямоугольной пластины. – Вестник ХГАДТУ. Выпуск 17, 2002, с. 79-82.

186. Янютин Е. Г., Воропай А. В. Управление нестационарными колебаниями мембраны. – Вестник национального технического университета "ХПИ". Динамика и прочность машин. 12'2003 т. 1, с. 151-155

187. Янютин Е. Г., Воропай А. В., Поваляев С. И., Богдан Д. И., Гришакин В. Т. Обратные нестационарные задачи для упругодеформируемых стержней пластин и оболочек // Международная конференция. Актуальные проблемы прикладной математики и механики. Харьков, 23-26 октября 2006г. – Харьков, 2006. – С. 104.

188. Янютин Е. Г., Воропай А. В., Шарапата А. С., Поваляев С. И. Идентификация нестационарных нагружений воздействующих на пластины и оболочки / Материалы международной конференции "Dynamical system modelling and stability investigation – DSMSI-2005" (23-25 мая 2005 г., Киев) / К.: КНУ ім. Т. Шевченко. – 2005. – с. 360.

189. Янютин Е. Г., Воропай А. В., Шарапата А. С., Поваляев С. И. Применение теории интегральных уравнений Вольтера при решении задач динамической теории пластин и оболочек // Труды XII Международного симпозиума "Методы дискретных особенностей в задачах математической физики" (МДОЗМФ–2005). – Харьков-Херсон. – 2005. – С. 63-66.

190. Янютин Е. Г., Воропай А. В., Ярещенко В. Г. Идентификация ударного нагружения элементов конструкции в виде пластин тензометрическим методом // Пробл. машиностроения. – 2009. – 12, №2. – С. 47-55.

191. Янютин Е. Г., Воропай А. В., Ярещенко В. Г. Идентификация ударного нагружения пластины на основе экспериментальных данных. – Вестник национального технического университета "ХПИ". Динамика и прочность машин. – Харьков: НТУ "ХПИ", –2004. №31 – с. 176-179.

192. Янютин Е. Г., Перегон В. А., Янчевский И. В. Решение нестационарных задач теории упругости (прямых, обратных и управления) для стержневых элементов конструкций. – Проблемы машиностроения, 1999, 2, №3-4, с. 86-92.

193. Янютин Е. Г., Перегон В. А., Янчевский И. В. Управление динамическим напряженным состоянием составных стержней. – Материалы Международной научной конференции "Математичні проблеми механіки неоднорідних структур", Львов-Луцк, 26-29 сент. 2000 г., 2, с. 295-299.

194. Янютин Е. Г., Поваляев С. И. Идентификация и управление в задачах импульсного деформирования стержней переменного сечения // Автомобильный транспорт. – 2003. – №13. – С. 187-189.

195. Янютин Е. Г., Поваляев С. И. Некорректные задачи динамического деформирования составного стержня // Сборник научных трудов Национального горного университета. – 2004. – №19, том 4. – С. 77-83.

196. Янютин Е. Г., Поваляев С. И. Некорректные задачи импульсного деформирования для цилиндрической оболочки // Вестник национального технического университета "ХПИ". – 2005. – №22. – С. 129-138.

197. Янютин Е. Г., Поваляев С. И. Прямая и обратная задачи для нестационарно нагруженного стержня переменного сечения // Вестник Харьковского национального автомобильно-дорожного университета. – 2003. – №23. – С. 53-55.

198. Янютин Е. Г., Поваляев С. И. Прямая и обратная задачи для составного стержня переменного сечения // Материалы 1-й межвузовской научно-практической конференции “Возможности использования методов механики для решения вопросов безопасности в условиях чрезвычайных ситуаций”. – Харьков. – 2003. – С. 11-15.

199. Янютин Е. Г., Светличная С. С., Янчевский И. В. Численно-аналитический способ решения начально-краевых задач теории упругости. – Тезисы докладов 4-го Международного симпозиума украинских инженеров-механиков, Львов, 19–21 мая 1999 г., с. 9.

200. Янютин Е. Г., Шарапата А. С. Обратная нестационарная задача теории упругости для цилиндрической оболочки // Вестник Национального технического университета “Харьковский политехнический институт”. – Харьков: НТУ “ХПИ”. – 2004. – № 31. – С. 172-175.

201. Янютин Е. Г., Шарапата А. С. Решение некорректной динамической задачи для круговой мембраны // Вестник Национального технического университета “Харьковский политехнический институт”. – Харьков: НТУ “ХПИ”. – 2002. – № 9, т. 9. – С. 153-156.

202. Янютин Е. Г., Шарапата А. С., Воропай А. В. Вычислительный эксперимент в задачах идентификации нестационарных нагружений прямоугольной пластины и пологой сферической оболочки. – Вісник Харківського національного університету. № 590. Серія "Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління.", 2003, с. 255-258.

203. Янютин Е. Г., Янчевский И. В. Импульсные воздействия на упруго-деформируемые элементы конструкций (монография). – Харьков: Изд-во ХГАДТУ (ХАДИ), 2001. – 184 с.

204. Янютин Е. Г., Янчевский И. В. Обратная задача теории упругости при нестационарном неосесимметричном нагружении цилиндрической оболочки. – Вестник Харьковского государственного политехнического университета, 2000, Вып. 104, с. 125-129.

205. Янютин Е. Г., Янчевский И. В. Распознавание импульсной нагрузки, воздействующей на полусферическую оболочку средней толщины. – Тезисы докладов X-й Международной конференции "Dynamical system modeling and stability investigation" DSMSI–2001, Киев, 22-25 мая 2001 г., с. 348.

206. Янютин Е. Г., Янчевский И. В. Распознавание импульсной нагрузки, воздействующей неосесимметрично на цилиндрическую оболочку. – Материалы X-го Международного симпозиума "Методы дискретных особенностей в задачах математической физики" МДОЗМФ–2000, пос. Лазурное, 29 мая – 5 июня 2001 г., с. 391-395.

207. Янютин Е. Г., Янчевский И. В., Шарапата А. С. Идентификация внешней нагрузки, действующей на круговую мембрану // Автомобильный транспорт. – 2001. – Вып. 7-8. – С. 226-229.

208. Янютин Е.Г. Идентификация нестационарной подвижной нагрузки, действующей на балку конечной длины / Е. Г. Янютин, В. Т. Гришакин // XIV Международная научно-практическая конференция «Информационные технологии: наука, техника, технология, образование, здоровье», (Харьков, 18-19 травня 2006 р.). – М-во освіти та науки України, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут». – Х.: НТУ «ХПІ», 2006. – С. 12.

209. Янютин Е. Г., Янчевський І. В., Шарапата А. С., Воропай О. В., Некоректні задачі імпульсного деформування пластин та оболонок // Машинознавство. – 2003. – № 8. – С. 31-34.

210. Янютин Е. Г., Богдан Д. І., Воропай О. В., Поваляев С. І. Вибір моделі дорожньої конструкції для розв'язку задачі ідентифікації за нестационарного навантаження // Автомобильный транспорт. Сборник научных трудов. Выпуск 27. – 2010, с. 153-156.

211. Янютин Е. Г., Янчевський І. В., Шарапата А. С., Воропай О. В. Некоректні задачі імпульсного деформування пластин та оболонок. – Шостий міжнародний симпозіум українських інженерів-механіків у Львові. Тези доповідей. Львів, 2003, с. 33-34.

212. A simplified vibration compensation through magnetostrictive actuators / Zucca M.; Raffa F. A.; Fasana A.; Colella N.. - In: JOURNAL OF VIBRATION AND CONTROL. - ISSN 1077-5463. - STAMPA. - 21:14(2015), pp. 2903-2912.

213. Active damping of nonstationary vibrations of a rectangular plate under impulse loading / Veniamin D. Kubenko, Igor V. Yanchevskiy / Journal of Vibration and Control, 19(10):1514-1523 July 2013.

214. Active vibration suppression in smart structures subjected to model uncertainties and environmental disturbances: an adaptive approach / Hamid Reza Koofgar, Shahab Amelian / Journal of Vibration and Control. – Volume: 19 (2013) issue: 13, pp. 2046–2053.

215. Amir Younespour, Hosein Ghaffarzadeh. Structural active vibration control using active mass damper by block pulse functions //Journal of Vibration and Control. – Volume: 21 issue: 14, page(s): 2787–2795.

216. Babaev A. E., Yanchevskiy I. V. Active control of the strained state of an asymmetric trimorphic beam under nonstationary modes of operation // J. of Math. Sc. – 2012. – Vol. 184, No. 1. – P. 78-87.

217. Birman Victor. Shape memory elastic foundation and supports for passive vibration control of composite plates / Victor Birman // International Journal of Solids and Structures. – 2008. – V. 45, № 1. – P. 320-335.

218. Bryan Lewis, Lothar Reichel Arnoldi-Tikhonov regularization methods // Journal of Computational and Applied Mathematics Volume 226, Issue 1, 1 April 2009, Pages 92-102.

219. Carra S. Active vibration control of a thin rectangular plate in air or in contact with water in presence of tonal primary disturbance / S. Carra, M. Amabili,

R. Ohayon, P.M. Hutin // *Aerospace Science and Technology*. – 2008. – V. 12, № 1. – P. 54-61.

220. Caruso G. Active vibration control of an elastic plate using multiple piezoelectric sensors and actuators / G. Caruso, S. Galeani, L. Menini // *Journal of Simulating Modelling Practice and Theory*, 11(5-6), P. 403-419. 2003.

221. Chen Lin-Hung, Huang Shyh-Chin. Vibration attenuation of a cylindrical shell with constrained layer damping strips treatment // *Comput. and Struct.* – 2001. – 79, N 14. – P. 1355 – 1362.

222. Design of non-traditional dynamic vibration absorber for damped linear structures /ND Anh and NX Nguyen / *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*. – Vol 228, Issue 1 (2014), pp. 45–55.

223. E. Voronova. Identification of a non-stationary movable load by means of a movable sensors system / Є.М. Воронова, Є.Г. Янютин, В.Т. Гришакин // *Х.: Вестник Харьковского национального автомобильно-дорожного университета*. – 2007. – №37. – С. 143-144.

224. Gang Yan. Impact load identification of composite structure using genetic algorithms / Gang Yan, Li Zhou // *Journal of Sound and Vibration*. – 2009. – V. 319, № 3-5. – P. 869-884.

225. Glasko V. *Inverse Problems of Mathematical physics* / V. Glasko. – American Institute of Physics, 1988. – 108 p.

226. He X.Q., Ng T.Y., Sivashanker S., Liew K.M. Active control of FGM plates with integrated piezoelectric sensors and actuators // *Int. J. Solids and Struct.* – 2001. – 38, N 9. – P. 1641 – 1655.

227. Jang T.S. Indirect measurement of the impulsive load to a nonlinear system from dynamic responses: Inverse problem formulation / T.S. Jang, Hyongsu Baek, S.L. Han, T. Kinoshita // *Mechanical Systems and Signal Processing*. – 2010. – V. 24, № 6. – P. 1665-1681.

228. Kapuria S., Dumir P.C. Coupled FSDT for piezotermoelectric hybrid rectangular plate // *Int. J. Solids and Struct.* – 2000. – 37, N 42. – P. 6131 – 7153.

229. Kirchhoff G.R. Ueber das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe / G.R. Kirchhoff // *J. Reine und Angew. Math.* – 1850. – V. 40, № 1. – P. 51–88.

230. Lamm P.K., Scofield T.I. Sequential predictor-corrector methods for the variable regularization of Volterra inverse problems // *Inverse problems*. – 2000. – 16. – P. 373 – 399.

231. Law S.S. Moving load identification on a simply supported orthotropic plate / S.S. Law, J.Q. Bu, X.Q. Zhu, S.L. Chan // *International Journal of Mechanical Sciences*. – 2007. – V. 49, № 11. – P. 1262-1275.

232. Li Y. Y. Modeling and vibration control of a plate coupled with piezoelectric material / Y. Y. Li, L. Cheng, P. Li // *Composite Structures*. – 2003. – V. 62, № 2. – P. 155-162.

233. Lo K.H. A high-order theory of plate deformation. Part 1: Homogeneous plates / K.H. Lo, R.M. Christensen, E.M. Wu // *ASME J. of Applied Mechanics*. – 1977. – № 44. – P. 663-668.

234. M.E. Hochstenbach, L. Reichel, G. Rodriguez Regularization parameter determination for discrete ill-posed problems // *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Volume 273, 1 January 2015, Pages 132-149.

235. Mindlin R.D. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates / R.D. Mindlin // *J. Appl. Mech.* – 1951. – Vol. 18, № 1. – P. 31-38.

236. Optimal design of a new vibration absorber setup for randomly forced systems / Jimmy S Issa / *Journal of Vibration and Control*. – Vol 19 (2012), Issue 16, pp. 2335–2346.

237. Parameswaran, AP & Gangadharan, K. Parametric modeling and FPGA based real time active vibration control of a piezoelectric laminate cantilever beam at resonance // *JVC/Journal of Vibration and Control*, 2015, vol 21, no. 14, pp. 2881-2895. DOI: 10.1177/1077546313518818.

238. Park H.W. Determination of optimal regularization factor in system identification with Tikhonov regularization for linear elastic continua / H.W. Park, S. Shin, H.S. Lee // *Intern. J. numerical, methods engin.* – 2001. – V 51. – P. 1211-1230.

239. Qiu Zhi-cheng. Acceleration sensors based modal identification and active vibration control of flexible smart cantilever plate / Zhi-cheng Qiu, Hong-xin Wu, Chun-de Ye // *Aerospace Science and Technology*. – 2009. – V. 13, № 6. – P. 277-290.

240. Qiu Zhi-cheng. Experimental researches on sliding mode active vibration control of flexible piezoelectric cantilever plate integrated gyroscope / Zhi-cheng Qiu, Hong-xin Wu, Dong Zhang // *Thin-Walled Structures*. – 2009. – V. 47, № 8-9. – P. 836-846.

241. Ramm A.G. *Inverse Problems: Mathematical and Analytical Techniques with Applications to Engineering* / A.G. Ramm. – Springer, 2005. – 462 p.

242. Ramm A.G. *Inverse Problems: Mathematical and Analytical Techniques with Applications to Engineering* / A.G. Ramm. – Springer, 2005. – 462 p.

243. Ranjan V., Ghosh M. K. Forced vibration response of thin plate with attached discrete dynamic absorbers // *Journal of Thin-Walled Structures*, 2005. – Vol. 43. – P. 1513-1533.

244. Saadat S., Noori M. et al. Using NiTi SMA tendons for vibration control of coastal structures // *Smart Mater. and Struct.* – 2001. – 10, N 4. – P. 695 – 704.

245. Sarhadi, Pouria et al. “Identification of nonlinear actuators with time delay and rate saturation using meta-heuristic optimization algorithms.” *J. Systems & Control Engineering* 229 (2015): 808-817

246. Semi-active fuzzy control for seismic response reduction of building frames using variable orifice dampers subjected to near-fault earthquakes / Ghaffarzadeh Hosein, Alizadeh Dehrod Ebrahim, Talebian Nima / *Journal of Vibration and Control*. – vol. 19 2013, pp. 1980–1998.

247. Semi-active structural fuzzy control with MR dampers subjected to near-fault ground motions having forward directivity and fling step / Hosein Ghaffarzadeh / *Smart Structures and Systems* Vol. 12, Number 6, Dec. 2013, pp. 595-617

248. Shupikov A.N. High-order theory of multilayer plates. The impact problem / A.N. Shupikov, S.V. Ugrimov, A.V. Kolodiazhny, V.G. Yareschenko // *Int. J. Solids Structures*. – 1998. – V. 35, № 25. – P. 3391-3403.

249. Silvia Gazzola and James G. Nagy Generalized Arnoldi-Tikhonov Method for Sparse Reconstruction // *Computational Methods in Science and Engineering*. – SIAM J. Sci. Comput., 36(2), B225–B247. (23 pages).

250. Silvia Gazzola, Paolo Novati. Automatic parameter setting for Arnoldi–Tikhonov methods // *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Volume 256, 15 January 2014, Pages 180-195.

251. Tani J., Takagi T., Qiu J. Intelligent material systems: application of functional materials // *Appl. Mech. Rev.* – 1998. – 51. – P. 505 – 521.

252. Tautenhahn U. Tikhonov regularization and a posteriori rules for solving nonlinear ill posed problems / U. Tautenhahn, Jin Qi-nian // *Inverse problems*. – 2003. – V. 19. – P. 1-21.

253. Tavakolpour Ali Reza. Self-learning active vibration control of a flexible plate structure with piezoelectric actuator / Ali Reza Tavakolpour, Musa Mailah, Intan Z. Mat Darus, Osman Tokhi // *Simulation Modelling Practice and Theory*. – 2010. – V. 18, № 5. – P. 516-532.

254. *The Encyclopedia of Smart Materials* / M. Schwartz, editor-in-chief. – NY: A Wiley-Intersc. Publ., 2002. – 1193 p.

255. Think Tran Ich. Static behavior and vibration control of piezoelectric cantilever composite plates and comparison with experiments / Tran Ich Think, Le Kim Ngoc // *Computational Materials Science*. – 2010. – V. 49, № 4. – P. 276-280.

256. Voropay N. Identification of impulse load action on the plate–strip / N. Voropay // *Active processes in higher technical education to train specialists for transportation and highway engineering and automotive industry: матеріали Міжнародної науково–практичної конференції студентів та молодих вчених вищих технічних навчальних закладів іноземними мовами: (28-29 квітня 2009 р., Харків) / ХНАДУ*. – Харків, 2009. – С. 139-142.

257. Wu S. T., Chen J.Y., Yeh Y.C., Chiu Y.Y. An active vibration absorber for a flexible plate boundary-controlled by a linear motor // *Journal of Sound & Vibration*, 300(1-2), 2007, P. 250-64.

258. Xiao-Juan Yang, Li Wang A modified Tikhonov regularization method// *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Volume 288, November 2015, Pages 180-192.

259. Yanchevskiy I. V. Excitation of the bending vibrations of a rectangular metal-piezoceramic plate by a nonstationary electric signal // *J. of Math. Sc.* – 2012. – Vol. 185, No. 6. – P. 852-857.

260. Yanchevskiy I. V., Babaev A. E., Babaev A. A. Influence of an oscillating circuit on the radiation of transient acoustic waves by an electroelastic cylinder // *Journal of the Acoustic Society of America*. – 2010. – 127, Iss. 4. – P. 2282–2289.

261. Yanchevsky, I.V., Yanyutin, Ye.G., 2004. Identification of an impulse load acting on an axisymmetrical hemispherical shell. *International Journal of Solids and Structures* 41, 3643-3652.

262. Yanyutin E. G., Voropay A. V. Controlling nonstationary vibrations of a plate by means of additional loads. *Int. J. Solids and Struct.* 41 (2004) 4919-4926.

263. Yanyutin E. G., Voropay A. V., Sharapata A. S. Controlling of nonstationary rectangular plate vibrations and identification of spherical shallow shell loading. Dynamical system modelling and stability investigation. Thesis of conference reports. Kyiv. 2003, p. 382

264. Yanyutin E. G., Bogdan D. I., Voronova E. M. Solution of the problem of plate forced oscillations in case of the movable loading // Вестник Харьковского национального автомобильно-дорожного университета №31: Сб. науч. труд. – Харьков, 2005. – С. 92-94

265. Zhu X.Q. Identification of moving loads on an orthotropic plate / X.Q. Zhu, S.S. Law // *Journal Vibr. and Acoust.* – 2001. – V. 123, № 2. – P. 238-244.

Наукове видання

Воропай Алексей Валериевич

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА
В НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧАХ
НЕСТАЦИОНАРНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ПЛАСТИН

Монографія
(російською мовою)
Відповідальний за випуск В. А. Перегон
В авторській редакції

Підписано до друку 25.05.2018 р.
Формат 60x84^{1/16}. Папір офсетний. Гарнітура Times New Roman.
Друк ксерографічний. Ум. друк. арк. 12,44. Обл.-вид.арк.10,7.
Наклад 300 прим. Зам. №08-18

Надруковано ТОВ «Видавництво «Лідер»
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру
видавців, виготовників і розповсюджувачів видавничої продукції
серія ДК №4224 від 08.12.2011 р.
61168, м.Харків, вул. Блюхера, 12. Тел. (057) 758-77-75