

**О.М. ЛИТВИН**, д-р фіз.-мат. наук, проф., УІПА, Харків;

**К. В. НОСОВ**, канд. фіз.-мат. наук, наук. співр., ХНУ ім. В. Н. Каразіна,  
Харків;

**Т. А. БАРАНОВА**, асистент, НТУ «ХП»

## **ВИБІР ОПТИМАЛЬНИХ КООРДИНАТНИХ ФУНКЦІЙ В МЕТОДІ СКІНЧЕНИХ ЕЛЕМЕНТІВ ДЛЯ ЕЛІПТИЧНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ**

Пропонується схема для наближеного розв'язання еліптичних крайових задач у частинних похідних парного порядку методом скінчених елементів для областей спеціального вигляду. Знаходження наближеного розв'язку ґрунтується на варіаційних принципах. На відміну від раніше запропонованих схем, з кожним вузлом сітки пов'язується своя система координатних функцій, що дозволяє отримати більш високу точність наближення.

Предложена схема для приближенного решения эллиптических краевых задач в частных производных четного порядка методом конечных элементов для областей специального вида. Нахождение приближенного решения основано на вариационных принципах. В отличие от предложенных ранее схем, с каждым узлом сетки связывается своя система координатных функций, что позволяет получить более высокую точность приближения.

In the paper the schema for approximate solution of elliptic boundary problems in partial derivatives of even order by the finite element method for special shaped domains is suggested. Calculation of approximate solution is based upon variational principles. In contrast to earlier suggested schemas, in this case a specified system of coordinate functions corresponds to each node of mesh. This fact allows to obtain higher precision of approximation.

**Вступ.** Наш час характерний різким розширенням застосувань математики, що значною мірою пов'язане зі створенням та розвитком засобів обчислювальної техніки. Бурхливий розвиток швидкодіючих обчислювальних систем (ЕОМ) призвів до нового етапу розвитку науки та технології досліджень. Більшість проблем, пов'язаних з фізико-технічними, економічними, біологічними галузями знань, не може бути успішно розв'язана без використання математичного моделювання, чисельних експериментів та залучення нових чисельних методів розв'язання граничних задач, що орієнтовані на сучасні ЕОМ.

*Метод скінчених елементів* (МСЕ) набув загальне визнання як ефективний метод розв'язання найрізноманітніших задач математичної фізики і техніки. Така популярність методу пояснюється простотою його фізичної інтерпретації та математичної форми. До переваг цього методу можливо також віднести гнучкість та різноманітність сіток, відносну простоту побудови схем підвищених порядків точності для еліптичних крайових задач в довільних областях.

При побудові схем МСЕ виникає задача вибору системи координатних функцій, за допомогою яких будується наближений розв'язок. Використання

тієї чи іншої системи координатних функцій підпорядковується задачам забезпечення потрібного класу диференційованості шуканого наближеного розв'язку в області інтегрування та досягнення необхідного порядку збіжності наближеного розв'язку до точного (при подрібненні сітки). Незважаючи на різноманітність схем МСЕ для еліптичних задач з частинними похідними, практичне отримання розв'язку з великою точністю зустрічає серйозні перешкоди у зв'язку із стрімким зростанням обчислювальних витрат та накопиченням похибок округлення при збільшенні ступенів свободи та/або збільшенні степені використовуваних інтерполянтів. Тому розробка обчислювальних схем МСЕ, які при заданому, як правило, відносно невеликому, числі степенів свободи забезпечують мінімальну похибку, залишається цілком актуальною.

Аналіз згаданих схем МСЕ показав, що побудова систем координатних функцій враховує лише деякі властивості крайової задачі (належність узагальненого розв'язку до певного класу, задовільнення головним крайовим умовам тощо) і мало пов'язана з властивостями диференціального оператора задачі. Тому врахування цих властивостей привело до одного з плідних підходів до розв'язання цієї проблеми.

**Аналіз останніх досліджень.** Схеми МСЕ з вибором координатних функцій, які є оптимальними з точки зору мінімізації функціоналу енергії варіаційної задачі, що еквівалентна початковій, вперше запропоновані у роботах О. М. Литвина [1-2]. У подальших роботах О. М. Литвина, К. В. Носова, Т. А. Баранової [3-7] були розроблені різні обчислювальні схеми для МСЕ з вибором координатних функцій. Так, у роботі [4] координатні функції наближеного розв'язку будувалися з використанням сплайнів першого степеня, параметри яких визначалися з умови мінімуму функціоналу енергії з використанням *методу Гауса-Зейделя*. У роботах [5-6] була розроблена ітераційна схема "фліп-флоп", згідно якої сукупності вузлових параметрів та координатних функцій обчислювалися на окремих кроках ітераційного процесу.

Метою даної роботи є розробка обчислювальної схеми МСЕ з вибором координатних функцій, яка у відомому сенсі є узагальненням попередніх схем [1-7]. Узагальнення торкається використання своєї системи координатних функцій для кожного вузла розбиття сітки. Обчислювальний експеримент, проведений для модельної задачі на кількох областях, підтвердив високу точність запропонованої схеми.

**Постановка задачі у загальному випадку.** Розглянемо наступну граничну задачу для самоспряженого диференціального оператора:

$$\begin{aligned} Au(\mathbf{x}) &= f(x), \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega, \\ \partial^s u / \partial \mathbf{v}^s &= 0, \mathbf{x} \in \partial\Omega, s = \overline{0, m-1}, \end{aligned} \quad (1)$$

де  $\Omega$  —  $n$ -вимірний багатогранник, грані якого паралельні координатним площинам,  $\mathbf{v}$  — нормаль до  $\partial\Omega$ ,  $f(\mathbf{x}) \in L_2(\Omega)$ ,  $A$  — самоспряжений дифе-

ренціальний оператор еліптичного типу порядку  $2m$ :

$$A = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D_x^\alpha (a_\alpha(x) D_x^\alpha u), \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), \quad (2)$$

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n, \quad D_x^\alpha u = \partial^{|\alpha|} u / \partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}.$$

Звичайним чином вводиться розбиття області  $\Omega$  на гіперпаралелепіеди гіперплощинами  $x_k = x_{k,i_k}, i_k = \overline{1, N_k}, k = \overline{1, n}$ , і далі будується наближений розв'язок з використанням вузлових параметрів у кожній точці розбиття та системи функцій, які забезпечують відповідні характеристики розв'язку. Введемо позначення  $dx = dx_1 dx_2 \dots dx_n$ ,  $\Delta_{k,i_k} = x_{k,i_k+1} - x_{k,i_k}$ ,  $k = \overline{1, n}$ . Гіперпаралелепед, що відповідає точці  $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \dots, i_n)$ , позначимо

$$\Pi_{\mathbf{i}} = \{\mathbf{x} \mid x_k \in [x_{k,i_k}, x_{k,i_k+1}], k = \overline{1, n}\}.$$

У  $\Pi_{\mathbf{i}}$  наближений розв'язок представимо у формі

$$\tilde{u}_{\mathbf{i}}(\mathbf{x}) = \sum_{r_1=0}^{m-1} \dots \sum_{r_n=0}^{m-1} \sum_{\mu_1=0}^1 \dots \sum_{\mu_n=0}^1 u_{\mathbf{i}+\boldsymbol{\mu}}^{\langle r_1, \dots, r_n \rangle} \prod_{q=1}^n h_{q, \mathbf{i}, 1-\mu_q, r_q} \left( \frac{x_q - x_{q, i_q}}{\Delta_{q, i_q}} \right) \Delta_{q, i_q}^{r_q}, \quad (3)$$

де індекси  $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ ,  $\mathbf{i} + \boldsymbol{\mu} = (i_1 + \mu_1, i_2 + \mu_2, \dots, i_n + \mu_n)$ , а функції  $h_{q, \mathbf{i}, \mu, p}(\cdot) \in W_2^{2m}[0, 1]$  мають властивості:

$$h_{q, \mathbf{i}, 1-\mu, p}^{(s)}(\gamma) = \delta_{\mu, \gamma} \delta_{s, p}, \quad \mu = 0, 1; s = \overline{0, m-1}; p = \overline{0, m-1}; q = 0, 1. \quad (4)$$

Нескладно перевірити, що для  $\tilde{u}_{\mathbf{i}}(\mathbf{x})$ , як і для наближеного розв'язку, запропонованого у [2], виконується умова

$$D^\alpha \tilde{u}(\mathbf{x}) \Big|_{x_1=x_{1, i_1}, \dots, x_n=x_{n, i_n}} = u_{\mathbf{i}, \dots, i_n}^{\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle}$$

для всіх вузлових параметрів  $u_{\mathbf{i}, \dots, i_n}^{\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle}$  області  $\Omega$ .

Але суттєвим розширенням попередньої схеми [2] є використання для кожного вузлового параметра  $u_{\mathbf{i}+\boldsymbol{\mu}}^{\langle r_1, \dots, r_n \rangle}$  окремої системи координатних функцій, що і відображено у (1).

Наближений розв'язок будемо знаходити з умови мінімуму функціоналу енергії для задачі (1)

$$J(u) = \int_{\Omega} \left[ \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(\mathbf{x}) (D_x^\alpha u(\mathbf{x})) - 2f(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) \right] dx$$

по координатним функціям  $h_{q, \mathbf{i}, \mu, p}(\cdot)$  та вузловим параметрам  $u_{\mathbf{i}+\boldsymbol{\mu}}^{\langle r_1, \dots, r_n \rangle}$ .

Повторюючи міркування, аналогічні до наведених у роботі [2] (Теорема

1.1), можна показати, що сталі  $u_{i_1, \dots, i_n}^{\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle}$  та координатні функції  $h_{q,i,\mu,p}(\cdot)$ , які реалізують мінімум функціоналу енергії, задовольняють системі Рітца

$$\frac{\partial J(\tilde{u})}{\partial u_{i_1, \dots, i_n}^{\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle}} = 0,$$

та крайовій задачі для системи звичайних нелінійних інтегро - диференціальних рівнянь виду

$$\delta_{h_{q,i,1-\mu_q,r_q}} J(\tilde{u}) = 0,$$

де  $u_{i_1, \dots, i_n}^{\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle}$  пробігають усі вузлові параметри області  $\Omega$ , а через  $\delta$  позначена варіація функціоналу  $J$  по функціям  $h_{q,i,1-\mu_q,r_q}(\cdot)$ .

Кожна така варіація представляє собою звичайне нелінійне інтегродиференціальне рівняння. Крайові умови невідомих функцій, що входять до цих рівнянь, визначаються з умов (4)

**Задача Діріхле для рівняння Пуассона.** Проведемо детальне дослідження схеми побудови наближеного розв'язку модельної задачі (задача Діріхле для рівняння Пуассона)

$$\Delta u(x, y) = f(x, y), \quad (x, y) \in G,$$

$$u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \overline{\partial G}.$$

Спираючись на припущення щодо виду області  $G$ , її можна розбити прямими

$$x = x_i, j = \overline{0, n_x} \quad y = y_j, j = \overline{0, n_y}$$

на прямокутні елементи

$$\Pi_{ij} = \{(x, y) : x_i \leq x \leq x_{i+1}; y_j \leq y \leq y_{j+1}\}$$

і вважати, що з кожним вузлом розбиття пов'язується система із 4-х базисних функцій. Тоді наближений розв'язок у  $\Pi_{ij}$  можна представити у формі

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x, y) = & u_{i,j} h_{1,i,j} \left( \frac{x-x_i}{\Delta_{1,i}} \right) H_{1,i,j} \left( \frac{y-y_j}{\Delta_{2,j}} \right) + u_{i+1,j} h_{0,i+1,j} \left( \frac{x-x_i}{\Delta_{1,i}} \right) H_{1,i+1,j} \left( \frac{y-y_j}{\Delta_{2,j}} \right) + \\ & + u_{i,j+1} h_{1,i,j+1} \left( \frac{x-x_i}{\Delta_{1,i}} \right) H_{0,i,j+1} \left( \frac{y-y_j}{\Delta_{2,j}} \right) + u_{i+1,j+1} h_{0,i+1,j+1} \left( \frac{x-x_i}{\Delta_{1,i}} \right) H_{0,i+1,j+1} \left( \frac{y-y_j}{\Delta_{2,j}} \right). \end{aligned}$$

Функції  $h_{0,i,j}(x)$ ,  $h_{1,i,j}(x)$ ,  $H_{0,i,j}(y)$ ,  $H_{1,i,j}(y)$  мають наступні властивості:

- належать до класу  $W_2^1$  (це забезпечує існування функціоналу енергії).

- задовольняють граничним умовам

$$h_{\mu,i,j}(\gamma) = \delta_{\mu,1-\gamma}, \quad H_{\mu,i,j}(\gamma) = \delta_{\mu,1-\gamma} \quad \gamma = 0,1, \quad \mu = 0,1.$$

Для знаходження наближеного розв'язку використовується така ітеративна схема.

Вважаючи функції  $h_{\mu,i,j}(x)$ ,  $H_{\mu,i,j}(y)$  відомими (на першому кроці їх можна вважати лінійними функціями з відповідним граничним умовам), знаходимо невідомі  $u_{i,j}$  із системи Рітца  $\partial J(u)/\partial u_{i,j} = 0$ .

Будемо використовувати позначення  $h^{[k]}_{\mu,i,j}(x)$  для функції  $h_{\mu,i,j}(x)$ , знайденої на кроці  $k$  ітеративного процесу, аналогічно  $H^{[k]}_{\mu,i,j}(y)$  — це  $k$ -та ітерація функції  $H_{\mu,i,j}(y)$ . Таким чином, початкові функції  $h_{\mu,i,j}(x)$  і  $H_{\mu,i,j}(y)$  позначимо як  $h^{[0]}_{\mu,i,j}(x)$  та  $H^{[0]}_{\mu,i,j}(y)$ .

Позначимо  $u_{i,j}$ , знайдені на цьому кроці, через  $u^{[0,0]}_{i,j}$ , де верхній індекс відбиває номери ітерацій для базисних функцій ( $h^{[0]}_{\mu,i,j}(x)$  та  $H^{[0]}_{\mu,i,j}(y)$ ), що використовуються для знаходження  $u^{[0,0]}_{i,j}$ . Далі, використовуючи знайдені вузлові параметри  $u^{[0,0]}_{i,j}$  та вважаючи функції  $H^{[0]}_{\mu,i,j}(y)$  фіксованими, з умови  $\delta_{h_{\mu,i,j}(\cdot)} J(\tilde{u}) = 0$  ( $\mu = 0,1$ ) знаходимо систему функцій  $h_{\mu,i,j}(x)$ , яку позначимо  $h^{[1]}_{\mu,i,j}(x)$ .

Знову з системи Рітца, вважаючи  $h^{[1]}_{\mu,i,j}(x)$  та  $H^{[0]}_{\mu,i,j}(y)$  відомими, знаходимо вузлові параметри  $u_{i,j}$ , які позначимо  $u^{[1,0]}_{i,j}$ . Аналогічно, з умови  $\delta_{H_{\mu,i,j}(\cdot)} J(\tilde{u}) = 0$  ( $\mu = 0,1$ ) знаходимо систему функцій  $H^{[1]}_{\mu,i,j}(y)$ , після чого алгоритм повторюється зрозумілим чином.

Послідовність початкових ітерацій для знаходження вузлових параметрів та координатних функцій можна представити схемою

$$\begin{aligned} \{h^{[0]}_{\mu,i,j}, H^{[0]}_{\mu,i,j}\} &\mapsto u^{[0,0]}_{i,j}, & \{u^{[0,0]}_{i,j}, H^{[0]}_{\mu,i,j}\} &\mapsto h^{[1]}_{\mu,i,j}, \\ \{h^{[1]}_{\mu,i,j}, H^{[0]}_{\mu,i,j}\} &\mapsto u^{[1,0]}_{i,j}, & \{u^{[0,0]}_{i,j}, h^{[1]}_{\mu,i,j}\} &\mapsto H^{[1]}_{\mu,i,j}, \\ \{h^{[1]}_{\mu,i,j}, H^{[1]}_{\mu,i,j}\} &\mapsto u^{[1,1]}_{i,j}. \end{aligned}$$

Аналогічно, для кроку  $k$  ітеративний процес передається схемою

$$\begin{aligned} \{h^{[k]}_{\mu,i,j}, H^{[k]}_{\mu,i,j}\} &\mapsto u^{[k,k]}_{i,j}, & \{u^{[k,k]}_{i,j}, H^{[k]}_{\mu,i,j}\} &\mapsto h^{[k+1]}_{\mu,i,j}, \\ \{h^{[k+1]}_{\mu,i,j}, H^{[k]}_{\mu,i,j}\} &\mapsto u^{[k+1,k]}_{i,j}, & \{u^{[k,k]}_{i,j}, h^{[k+1]}_{\mu,i,j}\} &\mapsto H^{[k+1]}_{\mu,i,j}, \\ \{h^{[k+1]}_{\mu,i,j}, H^{[k+1]}_{\mu,i,j}\} &\mapsto u^{[k+1,k+1]}_{i,j}. \end{aligned}$$

Опишемо кожний тип ітерацій.

Знаходження чергової ітерації для вузлових параметрів (розв'язування

системи Рітця), як відомо, зводиться до розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь, оскільки поставлена задача мінімізації функціоналу по вузловим параметрам  $u_{i,j}$  є квадратичною.

З квадратичності випливає єдиність розв'язку системи Рітця при довільних координатних функціях  $h_{\mu,i,j}(x)$ ,  $H_{\mu,i,j}(y)$ , на які накладено приведені вище умови.

**Обчислювальний експеримент.** Обчислювальний експеримент був проведений з модельною задачею — двовимірною граничною задачею Діріхле для рівняння Пуассона зі сталою правою частиною

$$\begin{aligned} \Delta u(x, y) &= -2, & (x, y) \in G, \\ u(x, y) &= 0, & (x, y) \in \bar{\partial}G. \end{aligned} \tag{6}$$

Експеримент проводився для трьох областей різної форми. На рис. 1 представлені контури цих області з сіткою, на якій реалізувалася схема МСЕ з вибором оптимальних координатних функцій.

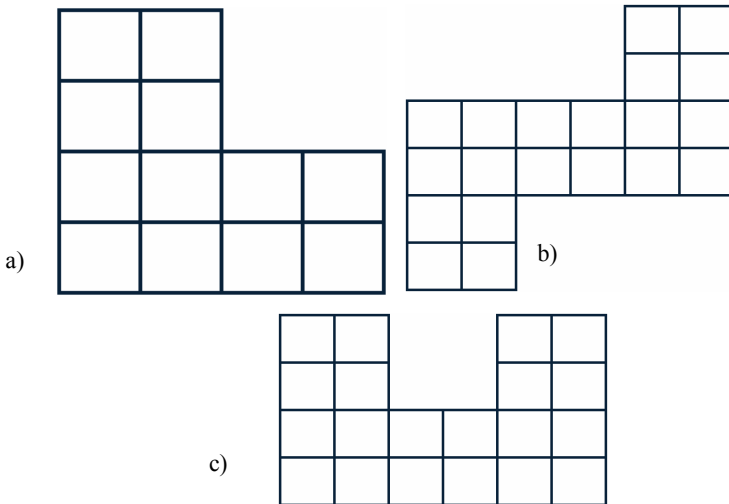


Рисунок 1 – Області **a**, **b**, **c** з сіткою, на якій реалізувалася схема МСЕ з вибором оптимальних координатних функцій.

Для кожної області проводилися ітерації до обчислення сукупності вузлових параметрів та функцій  $u^{[1,1]}_{i,j}$ ,  $h^{[1]}_{\mu,i,j}(\cdot)$ ,  $H^{[1]}_{\mu,i,j}(\cdot)$  включно. При цьому порівнювалися точності двох наближених розв'язків — отриманого за допомогою схеми МСЕ з вибором координатних функцій та отриманого з використанням кусково-лінійних координатних функцій

$$(h_{\mu,i,j}(t) = \mu + (1 - 2\mu)t, H_{\mu,i,j}(t) = \mu + (1 - 2\mu)t, \mu = 1,2).$$

Остання схема є класичною для задачі (6) [14]. Критерієм порівняння виступало значення функціоналу енергії наближеного розв'язку, яке для еліптичних задач співвідноситься з похибкою наступним чином

$$J(u) = \|u - u_0\|_A^2 - \|u_0\|_A^2,$$

де  $\| \cdot \|_A$  — енергетична норма, пов'язана з оператором  $A$  крайової задачі (в нашому випадку це оператор Лапласа). У якості початкових на-

ближень координатних функцій  $h_{\mu,i,j}^{[0]}(\cdot), H_{\mu,i,j}^{[0]}(\cdot)$  використовувалися згадані вище кусково-лінійні координатні функції.

Обчислювальний експеримент полягав у проведенні ітераційного процесу МСЕ з вибором координатних функцій, обчисленні функціоналу енергії для наближеного

розв'язку цієї схеми (на кожному кроці) та знаходженні кількості вузлових параметрів наближеного розв'язку за класичною схемою МСЕ, який дає таке ж значення функціоналу енергії. Тобто, знаходилася та кількість вузлових параметрів, при якій наближений розв'язок класичної схеми має таку ж похибку у енергетичній нормі, що і наближений розв'язок МСЕ з вибором координатних функцій. Для класичної схеми МСЕ використовувалася рівномірна сітка з однаковим кроком розбиття по обом координатам.

Кількість вузлових параметрів класичної схеми, що відповідає значенню функціоналу  $J(\tilde{u})$  від наближеного розв'язку, побудованого МСЕ з вибором координатних функцій, обчислювалася наступним чином.

Таблиця 1

Порівняння точності МСЕ з вибором координатних функцій за класичною схемою МСЕ для області  $([0, 2] \times [0, 1]) \cup ([0, 1] \times [0, 2])$

Ітерації	$J(\tilde{u})$	$N$
$h_{\mu,i,j}^{[0]}, H_{\mu,i,j}^{[0]}, u_{i,j}^{[0,0]}$	-0.63502358	5
$h_{\mu,i,j}^{[1]}, H_{\mu,i,j}^{[0]}, u_{i,j}^{[0,0]}$	-0.738081695	13
$h_{\mu,i,j}^{[1]}, H_{\mu,i,j}^{[0]}, u_{i,j}^{[1,0]}$	-0.739004998	14
$h_{\mu,i,j}^{[1]}, H_{\mu,i,j}^{[1]}, u_{i,j}^{[1,0]}$	-0.852729837	1061
$h_{\mu,i,j}^{[1]}, H_{\mu,i,j}^{[1]}, u_{i,j}^{[1,1]}$	-0.85311464	1217

Таблиця 2

Порівняння точності МСЕ з вибором координатних функцій за класичною схемою МСЕ для області  $([0, 1] \times [0, 1]) \cup ([0, 3] \times [1, 2]) \cup ([2, 3] \times [2, 3])$

Ітерації	$J(\tilde{u})$	$N$
$h_{\mu,i,j}^{[0]}, H_{\mu,i,j}^{[0]}, u_{i,j}^{[0,0]}$	-1.18308396379	9
$h_{\mu,i,j}^{[1]}, H_{\mu,i,j}^{[0]}, u_{i,j}^{[0,0]}$	-1.37441579503	25
$h_{\mu,i,j}^{[1]}, H_{\mu,i,j}^{[0]}, u_{i,j}^{[1,0]}$	-1.37618989105	26
$h_{\mu,i,j}^{[1]}, H_{\mu,i,j}^{[1]}, u_{i,j}^{[1,0]}$	-1.54020382384	142
$h_{\mu,i,j}^{[1]}, H_{\mu,i,j}^{[1]}, u_{i,j}^{[1,1]}$	-1.54529312246	161

Для класичної схеми знаходилися значення функціоналу енергії для послідовності сіток (починаючи з мінімального кроку розбиття); для цієї послідовності будувався *лінійний інтерполянт*, що відбиває залежність значення функціоналу  $J(\tilde{u})$  класичного розв'язку від кількості вузлових параметрів, і цей інтерполянт використовувався для знаходження шуканої кількості вузлових параметрів класичної схеми, що відповідає значенню функціоналу енергії від розв'язку, отриманого МСЕ з вибором координатних функцій. Число  $N$  у наведених нижче таблицях є саме цією кількістю вузлових параметрів, отриманих за допомогою інтерполянта.

1. Область  $([0, 2] \times [0, 1]) \cup ([0, 1] \times [0, 2])$ , *рис. 1, а*. Для МСЕ з оптимальними координатними функціями використано рівномірну сітку з кроком  $1/2$  по обом координатам. Кількість степенів свободи для такої сітки дорівнює 5. В табл. 1 наведені значення функціоналу енергії на послідовних кроках ітераційного процесу для МСЕ з вибором оптимальних координатних функцій і кількість степенів свободи (вузлових параметрів)  $N$  класичної МСЕ, яка необхідна для досягнення того ж значення функціоналу енергії.

2. Область  $([0, 1] \times [0, 1]) \cup ([0, 3] \times [1, 2]) \cup ([2, 3] \times [2, 3])$ , *рис. 1, б*. Для МСЕ з оптимальними координатними функціями взята рівномірна сітка з кроком  $1/2$  по обом координатам, кількість степенів свободи для такої сітки дорівнює 9. В табл. 2 наведено порівняння точності двох схем МСЕ, аналогічне до табл. 1.

3. Область  $([0, 3] \times [0, 1]) \cup ([0, 1] \times [1, 2]) \cup ([2, 3] \times [1, 2])$ , *рис. 1, с*. Для МСЕ з оптимальними координатними функціями вибрана рівномірна сітка з кроком  $1/2$  по обом координатам, кількість степенів свободи для такої сітки дорівнює 9. В Табл. 3 наведено порівняння точності двох схем МСЕ, аналогічне до табл. 1.

Як впливає з результатів, представ-

лених у табл. 1-3, для досягнення точності у енергетичній нормі, яку дає МСЕ з вибором координатних функцій на кроці ітераційного процесу, що відповідає сукупності  $u^{[1,1]}_{\mu,i,j}, h^{[1]}_{\mu,i,j}(\cdot), H^{[1]}_{\mu,i,j}(\cdot)$ , потрібна кількість елементів класичної схеми, яка для першої області у  $1217/5 \approx 243$  разів більша кількості елементів схеми МСЕ з вибором координатних функцій, та приблизно у

Таблиця 3

Порівняння точності МСЕ з вибором координатних функцій за класичною схемою МСЕ  $([0, 3] \times [0, 1]) \cup ([0, 1] \times [1, 2]) \cup ([2, 3] \times [1, 2])$

Ітерації	$J(\tilde{u})$	$N$
$h^{[0]}_{\mu,i,j}, H^{[0]}_{\mu,i,j}, u^{[0,0]}_{i,j}$	-1.18308396379	9
$h^{[0]}_{\mu,i,j}, H^{[1]}_{\mu,i,j}, u^{[0,0]}_{i,j}$	-1.26529114578	16
$h^{[0]}_{\mu,i,j}, H^{[1]}_{\mu,i,j}, u^{[0,1]}_{i,j}$	-1.26884552075	16
$h^{[1]}_{\mu,i,j}, H^{[1]}_{\mu,i,j}, u^{[0,1]}_{i,j}$	-1.46178685862	49
$h^{[1]}_{\mu,i,j}, H^{[1]}_{\mu,i,j}, u^{[1,1]}_{i,j}$	-1.46356362589	50

18 та 6 разів для другої та третьої відповідно.

**Висновки.** В даній роботі запропоноване подальше розширення обчислювальних схем МСЕ з вибором оптимальних координатних функцій для еліптичних крайових задач, що відрізняється від раніш запропонованих використанням локальної системи координатних функцій, пов'язаних з кожним вузлом, на відміну від загальної системи функцій, запропонованої у попередніх роботах. Можна сказати, що данна схема підвищує адаптивність обчислювальної схеми, що дає змогу значно підняти точність наближених розв'язків, отриманих за цією схемою.

Головні властивості запропонованої схеми полягають у тому, що координатні функції МСЕ не задаються наперед, як у відомих схемах, що використовують поліноміальні інтерполянти, а знаходяться з умови мінімуму функціоналу енергії, що відповідає заданій крайовій задачі. На відміну від адаптивних схем МСЕ, вид цих функцій не фіксується (у вигляді полінома чи функції іншого класу), а знаходиться як розв'язок варіаційної задачі, що визначається функціоналом енергії задачі та формою наближеного розв'язку.

Розв'язання модельної задачі, проведене у ході обчислювального експерименту, має наступні особливості:

1) наближений розв'язок знаходиться ітераційним методом, у якому на початку використовувались відомі координатні функції (наприклад, кусково-лінійні, як в данній роботі) і ітерації проводилися для кожної смуги розбиття області на елементи;

2) знаходження координатних функцій по смугам дозволяє використовувати алгоритми з розпаралелюванням, що може мати значення для великих, складних областей, а також, напевне, для задач високої розмірності;

3) обчислюваний експеримент продемонстрував набагато вищу точність пропонованої схеми порівняно з класичним МСЕ на основі кусково-лінійних інтерполянтів.

**Список літератури:** 1. *Литвин О.Н.* К вопросу о построении оптимальных схем МКЭ // Тезисы докл. 2-й респ. конференции "Вычислительная математика в современном научно-техническом прогрессе". — К. — 1978. — С. 21-22. 2. *Литвин О.Н.* Оптимальные координатные функции в методе конечных элементов // Дифференциальные уравнения. — 1984. — Т 20, № 4. — С.677-688. 3. *Литвин О.Н.* Методи обчислень. Додаткові глави. — Київ: Наукова думка, 2005. — 333 с. 4. *Баранова Т.А., Литвин О.М., Федько В.В.* Про чисельну реалізацію оптимального методу скінчених елементів (задача Діріхле для рівняння Пуассона, прямокутні елементи) // Вісник Львівської Політехніки. — 1998. — № 337, Т. 2. — С. 294-297. 5. *Литвин О.Н., Носов К.В.* Некоторые аспекты численной реализации оптимального метода конечных элементов на примере бигармонической задачи с краевыми условиями второго рода // Кибернетика и системный анализ. — 1999. — № 1. — С. 178-187. 6. *Литвин О.М., Носов К.В.* Деякі оцінки ітераційного процесу в методі оптимальних скінчених елементів // Матеріали X міжнародної наукової конференції імені академіка М. Кравчука. — К.: Задруга, 2004. — С. 436. 7. *Баранова Т. А.* Аналітичний вигляд базисних функцій в оптимальному методі скінчених елементів // Праці міжнародного симпозіуму „Питання оптимізації обчислень (ПОО-XXXIII)”, присвяченої 50-річчю створення Інститута кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України. — Київ: Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, 2007, — С. 34-35.

*Надійшла до редколегії 07.09.2011.*