УДК 514.8

САМОПОДІБНІСТЬ ЯК ХАРАКТЕРИСТИЧНА ВЛАСТИВІСТЬ ФРАКТАЛУ. ФРАКТАЛЬНА (ДРОБОВА) РОЗМІРНІСТЬ ХАУСДОРФА

Адашевська Ірина Юріївна

к.т.н., доцент

Краєвська Олена Олександрівна

доцент

Национальный технічний університет «ХПІ»

м. Харків, Украина

Аннотация: В роботі розглянуто питання інваріантної самоподібності геометричних фракталів на прикладі побудови кривої Коха та спосіб визначення розмірності множини в метричному просторі - розмірність Хаусдорфа.

Ключевые слова: Фрактальна геометрія, нерегулярні множини, самоподібність, крива Коха, фракальна розмірнісь.

Фрактальна геометрія належить до небагатьох розділів математики, для яких можна вказати як дату їхньої появи, так і ім'я творця. У 1975 р. вийшла книжка франко-американського математика Бенуа Мандельброта "Фрактальна геометрія природи", яка стала поштовхом для виникнення нової науки. Робота Мандельброта продовжила дослідження таких математиків як Пуанкаре, Жюліа, Гільберт, Кантор, Хаусдорф. За визначенням самого Б.Мандельброта, фрактальна геометрія розташовується між теорією Евкліда, що досліджує "лише впорядковані і гладкі фігури (елементи кривих у Евкліда завжди самоподібні, але тривіально: всі криві є локально прямими, а пряма завжди самоподібна)" і фігурами довільної складності і невпорядкованості. "Сьогодні ці фігури заслуговують назви «геометрично хаотичних» [1].

У минулому, так в основному і зараз, основна увага математики концентрується на досить гладких функціях і множинах. З іншого боку, негладкі функції (нерегулярні множини) забезпечують значно краще представлення багатьох природних явищ (турбулентність, протікання рідини в ґрунті, хмари і багато іншого).

Фрактальна геометрія пов'язана з вивченням саме нерегулярних множин. Основний об'єкт фрактальної геометрії - фрактал - застосовується в комп'ютерному дизайні, алгоритмах стиснення інформації, радіосистемах і т.п. Фрактальность проявляється в мистецтві і архітектурі, урбаністиці, в т.зв. математичній історії, синергетичних концепціях культури, мистецтвометрії Європи, Африки, Індії. Говорячи про фрактали, часто використовують терміни "комп'ютерне мистецтво", "художній дизайн", "естетичний хаос".

Головним результатом своїх наукових праць Б. Мандельброт вважав «повернення дієслову «бачити» його споконвічного сенсу, досить підзабутого як в загальноприйнятому вживанні, так і в лексиці «твердої» (кількісної) науки: бачити - значить, сприймати *очима*». Фрактальна оптика бачення витягує зі старого хаосу форм новий порядок, створюючи і нову образність, і нові правила змістоутворення.

Інтуїтивне поняття про фрактали

Рис. 1. Фрактальні утворення у природі

На наведених вище фотографіях (рис. 1) зображені приклади фрактальних утворень у природі [2]. Криві, розглянуті в наведених прикладах, мають досить важливі та не тривіальні властивості. Різні ділянки кривої можуть бути поєднані між собою, вони самоподібні. Інтуїтивно це поняття означає, що ці форми виглядають «однаково» за будь-якого масштабування: не має значення, наскільки було збільшено зображення такої кривої - вона має один і той же ступінь складності. Одні криві абсолютно самоподібні: яке б сильне збільшення ви не робили, збільшене зображення виглядає так само, як оригінал (за винятком повороту і зсуву). Інші криві є тільки статистично самоподібними: в цьому випадку неправильності і вигини кривої за будь-якого збільшення картинки не змінюються тільки «в середньому». Найкращий приклад – берегова лінія (рис. 2). Якщо дивитися з супутника, у неї є певний ступінь порізаності, утвореної затоками, бухтами, півостровами. Якщо пролетіти над нею нижче, побачимо більше подробиць. Залив набуває власної нерівності, невидимої раніше. Цей процес можна продовжувати аж до розглядання окремих піщинок в мікроскоп (а може бути і далі?). Інші приклади: гілки дерева, поверхня губки.

Рис. 2. Берегова лінія

Визначимо довжину берегової лінії. Результат вимірювання залежить від довжини ланки вимірювання l. Зі зменшенням величини l довжина берегової лінії L не прагне до кінцевого межі, а збільшується за степеневим законом $L \approx l\left(\frac{R}{l}\right)^{D}$.

Фундаментальним предикатом опису категорії фрактала є самоподібність. Самоподібність означає, що підсистеми нижніх рівнів фрактальної системи повторюють конфігурацію цілої системи і в межах загальної форми укладено точно або з деякими змінами «тиражований» (в граничному випадку - нескінченно тиражований) патерн. Інакше кажучи, фрагмент фракталу, ідентичний цілісній формі, відтворюється на кожному наступному рівні меншого масштабу, утворюючи свого роду «вкладену» структуру. Природними фракталами є, наприклад, берегові лінії, гори, дерева з їхніми гіллястими кронами і листям, сніжинки, кровоносна система людини та ін. [2].

Подоба може бути жорсткою (інваріантною), тобто абсолютно точним рекурсивним відтворенням патерна (як у т.зв. геометричних фракталах: сніжинка Коха (рис. 3), трикутник Серпінського (рис. 4) та ін. або нежорсткою (ко-варіантною), тобто відносною, коли елементи фракталу під час збільшення масштабу розгляду не повторюють систему в цілому, але відбувається майже повне повторення базової форми в усе більш і більш зменшеному вигляді послідовно через кожні кілька ступенів масштабного перетворення (наприклад, знаменитий алгебраїчний фрактал - множина Мандельброта (рис. 5)). Нарешті, випадкові, або стохастичні, фрактали, у яких на різних етапах ітерації параметри змінюються випадково, мають статистичну подобу (наприклад, Броунівське дерево).

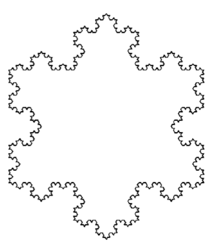

Рис. 3. Сніжинка Коха

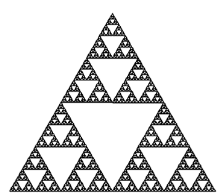

Рис. 4. Трикутник Серпинського

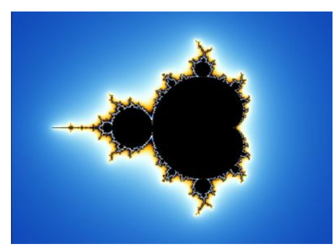

Рис. 5.Множина Мандельброда

При цьому будь-який фрактал являє собою візуалізацію деякого алгоритму, набору математичних процедур, що мають характер послідовних ітерацій. Загальним для всіх фрактальних структур є наявність рекурсивної процедури їхньої генерації, що означає нескінченний ланцюжок автопоезіса, в якому кожен результат попередньої ітерації є початковим значенням нового циклу відтворення: $z_{n+1} = f(z_n)$.

У підсумку за допомогою досить нескладних математичних формул, що включають комплексні числа, «можна описати форму хмари так само чітко і просто, як архітектор описує будівлю за допомогою креслень, в яких застосовується мова традиційної геометрії».

Розглянемо кілька прикладів побудови фрактальних кривих.

Крива Коха [3]. Ця крива цікава тим, що вона утворює нескінченно довгу лінію всередині області кінцевої площі. Крива Коха є типовим детермінованим фракталом. Процес її побудови (рис. 6) виглядає так.

Крок 0. Беремо одиничний відрізок (рис. 6), це **аксіома**.

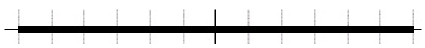

Рис. 6. Крок 0

Крок 1. Поділяємо цей відрізок на три рівні частини і замінюємо середній інтервал рівностороннім трикутником без цього сегмента. (рис. 7) В результаті утворюється ламана, що складається з чотирьох ланок завдовжки 1/3. Довжина отриманої кривої 4/3. Це **- генератор**.

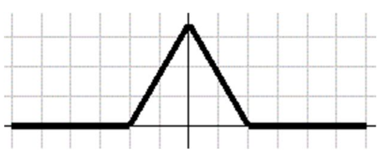

Рис. 7. Крок 1

Крок 2. Повторюємо операцію для кожної з чотирьох одержаних ланок. (рис. 8) Отримана ламана складається з $(4)^2$ ланок завдовжки $(1/3)^2$. Загальна довжина отриманої лінії дорівнює $(4/3)^2$.

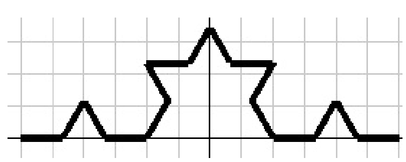

Рис. 8. Крок 2

На n-ному кроці отримуємо ламану, що складається з $(4)^n$ ланок завдовжки $(1/3)^n$ кожна, при цьому довжина всієї лінії буде $l = (4/3)^n$. Гранична крива і буде фракталом-кривої Коха при цьому її довжина при $n \to \infty$ буде прагнути до нескінченності.

На рис. 9 наведено четверті ітерації цієї кривої Коха

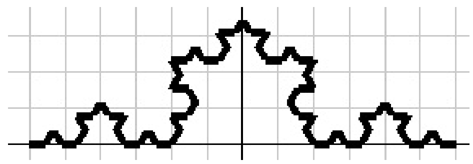

Рис. 9. Крива Коха

Задамо довільну ламану з кінцевою кількістю ланок, звану генератором. Далі замінимо в ній кожен відрізок генератором (точніше, ламаною, подібною до генератора, але зменшеною вдвічі). В отриманій ламаній знову замінимо кожен відрізок генератором, зменшеним вже в чотири рази. Продовжуючи до нескінченності. На кожному кроці ми отримуємо предфрактал, а в межі отримаємо фрактальну криву. Механізм, що породжує такі структури, Б. Мандельброд назвав каскадом.

З кожним кроком довжина кривої Коха $L(e)$ збільшується на третину і при нескінченній кількості кроків довжина лінії прямує до нескінченності. На першому кроці алгоритму довжина відрізка становить $e = 1/3$ від початкової. Тоді довжина кривої Коха обчислюється просто:

$$L = 4 \cdot 1/3 = 4/3 = 1{,}33$$

На другому кроці алгоритму довжина елементарного відрізка $e = 1/9$, відповідно, довжина кривої:

$$L = 16 \cdot 1/9 = 16/9 = 1{,}777$$

На третьому кроці алгоритму $e = 1/27$. І довжина кривої:

$$L = 64 \cdot 1/27 = 64/27 = 2{,}370370$$

Процес цей можна продовжити до безкінечності, помітивши, що зі збільшенням кількості кроків *n* довжина елементарного відрізка *e* прагне до 0, а довжина кривої L на кожному кроці змінюється (збільшується) і в межі прагне до нескінченності:

$$L = (4/3)^n$$
$$e = (1/3)^n$$

де $n = 1,2,3...$ і з цих виразів отримуємо:

$n = (1/\ln 3)\ln(1/e)$.

Підставляючи n, отримаємо:

$$L = exp[n \cdot \ln(4/3)] = exp[\ln(4/3)/\ln 3] \cdot \ln(1/e)$$

Позначивши $D = \ln 4/\ln 3$, отримаємо:

$$L(e) = e^{(1-D)}$$

З останнього співвідношення видно, що постійним показником під час будь-якого кроку залишається тільки величина D, оскільки вона не залежить від масштабу виміру і є характеристикою лінії "крива Коха". Вона називається фрактальною розмірністю.

З геометричної точки зору фрактальна розмірність є показником того, наскільки щільно ця лінія заповнює площину або простір.

Б. Мандельброт узагальнив і популяризував дослідження природи самоподібності. Він назвав різні форми самоподібних кривих фракталами. Слово «фрактал» не є математичним терміном і не має загальноприйнятого суворого математичного визначення. Воно може вживатися, коли розглянута фігура володіє якими-небудь з перерахованих нижче властивостями:

■ має нетривіальну структуру на всіх масштабних шкалах, в цьому відмінність від регулярних фігур (таких, як коло, еліпс, графік гладкої функції): якщо ми розглянемо невеликий фрагмент регулярної фігури в дуже великому масштабі, він буде схожий на фрагмент прямої. Для фракталу збільшення масштабу не веде до спрощення структури, на всіх шкалах ми побачимо однаково складну картину.

■ є самоподібною або наближено самоподібною.

■ має дробову метричну або фрактальну розмірність, яка перевершує топологічну.

Розглянемо більш докладно поняття самоподібності і фрактальної розмірності.

Самоподібність.

Самоподібний об'єкт (в математиці) - об'єкт, що абсолютно або приблизно збігається з частиною себе самого (тобто ціле має ту ж форму, що і одна або більше частин). Багато об'єктів реального світу, наприклад, берегові лінії, мають властивість статистичної самоподібності: їхні частини статистично однорідні в різних шкалах вимірювання. Самоподібність є характеристичною властивістю фракталу [2].

Інваріантність щодо зміни масштабної шкали є однією з форм самоподібності, коли за будь-якого наближення буде принаймні одна частина основної фігури, подібна до цілої фігури.

Самоподібність має важливі додатки в побудові комп'ютерних мереж, оскільки типовий мережевий потік має аналогічні властивості. Наприклад, в телефонії потоки пакетних даних майже статистично самоподібні. Наявність цієї властивості означає, що прості моделі, що використовують пуасонівський розподіл, неточні, і мережі, побудовані без урахування самоподібності, можуть функціонувати в непередбачуваних режимах. Рух цін на фондовому ринку також демонструє самоподібність, оскільки видається цілком обґрунтованим вважати графіки такими, що приблизно повторюються під час зміни масштабу скважності.

Властивість точної самоподібності характерна тільки для регулярних, як правило побудованих фракталів. Якщо в алгоритм побудови включити елемент випадковості, то в результаті отримаємо випадкові фрактали. Їхня відмінність полягає в тому, що властивість самоподібності приблизно виконується тільки після усереднення за всіма статистично незалежними реалізаціями цього об'єкта. При цьому збільшена частина фракталу неточно ідентична до вихідного фрагменту, але їхні статистичні характеристики збігаються

Математичне визначення

Компактний топологічний простір X самоподібний, якщо існує кінцева множина *S,* що індексує набір не сур'єктивних гомеоморфізмів $\{f_s\}_{s\in S}$, для яких $X = V_{s\in S} f_s(X)$. Якщо $X \subset Y$, то X називається самоподібним, якщо воно є єдиною непустою підмножиною *Y,* для якого вищенаведене рівняння виконується при заданому сімействі $\{f_s\}_{s\in S}$.У такому випадку V=$(X,S,\{f_s\}_{s\in S})$ називається самоподібною структурою.

Фрактальна (подрібнена) розмірність.

Сімейство евклідових розмірностей 0, 1, 2, 3, 4, ... іноді називають топологічними розмірностями, оскільки простори з різними евклідовими розмірностями топологічно різні, тобто один такий простір не можна перевести в інший безперервною топологічною деформацією. Точка має топологічну розмірність 0. Гладкі, «хороші» криві - прямі, кола, параболи і т.д. мають евклідову розмірність 1. Поверхні мають розмірність 2, об'ємні тіла - розмірність 3 і гіпертіла - вищі розмірності [3].

Поняття фрактальної (дробової) розмірності з'явилося в 1919 р. в роботі Ф. Хаусдорфа. Розмірність Хаусдорфа - природний спосіб визначити розмірність множини в метричному просторі. Розмірність Хаусдорфа узгоджується з нашими звичайними уявленнями про розмірності в тих випадках, коли ці звичні уявлення є. Наприклад, в тривимірному евклідовому просторі Хаусдорфова розмірність кінцевої множини дорівнює нулю, розмірність гладкої кривої - одиниці, розмірність гладкої поверхні - двом і розмірність множини ненульового обсягу - трьом. Для фрактальних множин розмірність Хаусдорфа може приймати дробові значення. Визначення розмірності Хаусдорфа непросте і базується на функціональному аналізі, тому відзначимо лише основні властивості розмірності Хаусдорфа:

- з точністю до множення на коефіцієнт: 1-міра Хаусдорфа для гладких кривих збігається з їхньою довжиною;
- 2-міра Хаусдорфа для гладких поверхонь збігається з їхньою площиною;
- d-міра Хаусдорфа множини R^d збігається з їхнім d-мірним об'ємом.

Розмірність Хаусдорфа не більше ніж лічильного об'єднання множин дорівнює максимуму з їхніх розмірностей. Зокрема, додавання лічильної множини до будь-якої множини не змінює його розмірності [4].

Для самоподібних множин розмірність Хаусдорфа може бути обчислена явно. Неформально кажучи, якщо безліч розбивається на n частин, подібних до вихідної множини з коефіцієнтами $r_1^s, r_2^s, \ldots$ то його розмірність s є розв'язанням рівняння $r_1^s + r_2^s + \cdots + r_n^s = 1$. Цей підхід можна застосувати до сніжинки фон Коха.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мандельброт Б. Фрактальна геометрія природи / Бенуа Мандельброт. – Москва : Інститут комп'ютерних досліджень. – 2002. – 656 с.

2. Пайтген Х.-О., Рихтер П.Х. Красота фракталов. - М.: Мир, 1993.

3. Sur une courbe continue sans tangente, obtenue par une construction géométrique élémentaire. Stockholm: P.A. Norstedt & Soner, 1904.

4. Квєтний Р. Н., Богач І. В., Бойко О. Р., Софина О. Ю., Шушура О. М. Комп'ютерне моделювання систем та процесів. Методи обчислень. Частина 2 : навчальний посібник – Вінниця : ВНТУ, 2013. – 235 с.