

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

Т. А. Немченко, М. С. Софронова, Н. В. Черемська

**ВИЩА МАТЕМАТИКА.**  
**ТФКЗ. Операційне числення. Векторні поля**

Навчально-методичний посібник  
для студентів заочного відділення ННІ ЕЕЕ та ННІ МІТ

Затверджено  
редакційно-видавничою  
радою університету,  
протокол № 2 від 26.06.2025 р.

Харків  
НТУ «ХП»  
2025

Рецензенти:

*Ю. І. Першина*, д-р фіз.-мат. наук, проф.,  
Національний технічний університет «ХПІ»;

*Д. О. Торяник*, канд. фіз.-мат. наук, доц.,  
Державний біотехнологічний університет

**Немченко Т. А.**

Вища математика. ТФКЗ. Операційне числення. Векторні поля : навчально-  
В 55 методичний посібник для студентів заочного відділення ННІ ЕЕЕ та ННІ МІТ  
/ Т. А. Немченко, М. С. Софронова, Н. В Черемська. – Харків: НТУ «ХПІ»,  
2025. – 106 с.

Навчально-методичний посібник охоплює три розділи вищої математики: «Теорія функцій комплексного змінного», «Операційне числення», «Векторні поля», містить необхідний теоретичний матеріал з детальним розбором типових задач, завдання контрольної роботи (10 варіантів) та зразок розв'язання типового варіанта.

Призначено для студентів заочного відділення ННІ ЕЕЕ та ННІ МІТ. Також може стати у нагоді студентам денного відділення в умовах скороченої кількості аудиторних занять, студентам, які навчаються дистанційно за особистим навчальним планом, та викладачам.

Іл. 33. Табл. 1. Бібліогр. 12 назв.

УДК 517.53

© Немченко Т. А.,  
Софронова М. С.,  
Черемська Н. В., 2025  
© НТУ «ХПІ», 2025

## ПЕРЕДМОВА

Навчально-методичний посібник призначено для самостійного вивчення курсу вищої математики студентами заочного відділення ННІ ЕЕЕ та ННІ МІТ, повністю відповідає робочим програмам з навчальної дисципліни «Вища математика».

До посібника увійшли теми розділів вищої математики, які вивчаються в IV семестрі: «Теорія функцій комплексного змінного», «Операційне числення», «Векторні поля». Цей матеріал широко використовується в різноманітних галузях сучасної науки і техніки, тому ці теми розділів курсу вищої математики мають важливе значення в математичній освіті інженерів усіх спеціальностей. Навчально-методичний посібник має за мету допомогти студентам у формуванні їх математичного мислення, а також формування у студентів системи знань, які дозволяють аналізувати та моделювати закономірності перебігу процесів та явищ різної природи, що виникають при проектуванні, виробництві та експлуатації електронних приладів і пристроїв.

Навчально-методичний посібник складається з трьох частин, що містять необхідний теоретичний матеріал з детальним розбором типових задач, завдання контрольної роботи IV семестру (10 варіантів) та зразок розв'язання типового варіанта.

Для полегшення самостійної роботи подано список рекомендованої літератури, в якій читачі можуть знайти відповіді на свої запитання. До цього списку увійшли як традиційні класичні підручники, так і навчально-методичні видання кафедри. Головне призначення посібника – допомогти студентам в самостійному вивченні даних тем розділів курсу вищої математики.

Посібник може стати у нагоді також студентам денного відділення в умовах скороченої кількості аудиторних занять, студентам, які навчаються дистанційно за особистим навчальним планом, та для молодих викладачів без достатнього досвіду роботи.

# РОЗДІЛ 1. ТЕОРІЯ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОГО ЗМІННОГО

## Комплексні числа та дії над комплексними числами

Комплексним числом  $z$  називається вираз вигляду  $z = x + jy$  (алгебраїчна форма комплексного числа), де  $x$  і  $y$  – будь-які дійсні числа, а  $j$  – уявна одиниця, яка задовольняє умові  $j^2 = -1$ . Існують підручники, в яких уявна одиниця позначається  $i$ . Числа  $x$  і  $y$  називаються відповідно *дійсною* і *уявною* частинами комплексного числа  $z$ . Позначення:  $x = \operatorname{Re} z$  – дійсна частина  $z$ ,  $y = \operatorname{Im} z$  – уявна частина  $z$ .

Якщо  $y = 0$ , отримуємо дійсне число  $z = x$ , а при  $x = 0$  – уявне число.

Комплексні числа  $z_1 = x_1 + jy_1$  і  $z_2 = x_2 + jy_2$  вважаються рівними тоді і тільки тоді, коли  $x_1 = x_2$ ,  $y_1 = y_2$ .

Два комплексних числа, що відрізняються тільки знаком при уявній частині, називаються спряженими і позначаються наступним чином:

$$z = x + jy, \quad \bar{z} = x - jy.$$

Наприклад, комплексні числа  $z = 5 + 8j$  і  $\bar{z} = 5 - 8j$  є спряженими.

## Дії над комплексними числами в алгебраїчній формі

Сумою двох комплексних чисел  $z_1 = x_1 + jy_1$  і  $z_2 = x_2 + jy_2$  називається комплексне число  $z$ , що визначається формулою:

$$z = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2).$$

Для того, щоб додати два комплексних числа, слід окремо додати їх дійсні та уявні частини.

Наприклад,

$$(2 + 3j) + (3 - 5j) = (2 + 3) + j(3 - 5) = 5 - 2j.$$

Різницею  $z_1 - z_2$  чисел  $z_1, z_2$  називається комплексне число

Наприклад,

$$(2 + 3j) - (3 - 5j) = (2 - 3) + j(3 - (-5)) = -1 + 8j.$$

Добутком  $z_1 \cdot z_2$  чисел  $z_1, z_2$  називається комплексне число

$$(x_1 + jy_1) \cdot (x_2 + jy_2) = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) + j(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

Наприклад,

$$(2 + 3j) \cdot (3 - 5j) = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + j(2 \cdot (-5) + 3 \cdot 3) = 21 - j.$$

Цей результат можна отримати, перемноживши двочлени, враховуючи, що  $j^2 = -1$ . Дійсно,

$$(2 + 3j) \cdot (3 - 5j) = 2 \cdot 3 - 2 \cdot 5j + 3 \cdot 3j + 3j \cdot (-5j) = 6 - 10j + 9j + 15 = 21 - j.$$

Якщо  $z_1 = x_1 + jy_1$  і  $z_2 = x_2 + jy_2$  то часткою  $\frac{z_1}{z_2}$  від ділення комплексного

числа  $z_1$  на комплексне число  $z_2 \neq 0$  називається комплексне число.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + jy_1}{x_2 + jy_2} = \frac{(x_1 + jy_1)(x_2 - jy_2)}{(x_2 + jy_2)(x_2 - jy_2)} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + j(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2},$$

Отже, отримуємо:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + j \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

**Приклад 1.** Знайти частку комплексних чисел

$$z_1 = 2 + 3j, \quad z_2 = 3 - 5j.$$

*Розв'язання.*

Сформуємо дріб  $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2 + 3j}{3 - 5j}$ .

Чисельник і знаменник цього дробу помножимо на число, яке спряжене знаменнику:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(2 + 3j)(3 + 5j)}{(3 - 5j)(3 + 5j)} = \frac{6 + 10j + 9j + 15j^2}{3^2 + 5^2} = \frac{6 - 15 + 19j}{34} = -\frac{9}{34} + \frac{19}{34}j.$$

Відповідь:  $-\frac{9}{34} + \frac{19}{34}j$ .

## Геометричне зображення, модуль і аргумент комплексного числа

Комплексне число  $z = x + jy$  зображується на площині  $xOy$  точкою  $M$  з координатами  $(x, y)$  або вектором, початок якого міститься в точці  $O(0,0)$ , а кінець – в точці  $M(x, y)$  (рис. 1.1). Неважко помітити, що дійсні числа зображуються точками осі абсцис, а уявні числа – точками осі ординат. Тому вісь абсцис називається дійсною віссю, а вісь ординат – уявною віссю.

Довжина  $\rho$  вектору  $\overline{OM}$  називається *модулем комплексного числа* і позначається  $|z|$ . Таким чином,

$$\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (1.1)$$

Кут  $\varphi$ , утворений вектором  $\overline{OM}$  з додатним напрямком дійсної осі  $Ox$ , називають *аргументом комплексного числа*  $z$  і позначають  $\varphi = \text{Arg } z$ .

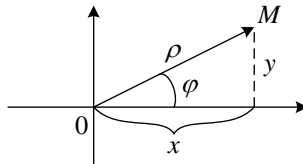


Рисунок 1.1

Для кожної точки  $M$  аргумент визначається не однозначно, а з точністю до доданка, кратного  $2\pi$ , тобто

$$\text{Arg } z = \arg z + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

де  $\arg z$  є головне значення  $\text{Arg } z$ . При цьому  $\arg z$  додатній, якщо він узятий від осі  $Ox$  проти годинникової стрілки і від'ємний в іншому випадку.

$$-\pi < \arg z \leq \pi.$$

При визначенні головного значення аргументу комплексного числа потрібно визначити, в якій чверті комплексної площини знаходиться точка  $z$ . З рисунку 1.1

видно, що  $\text{tg } \varphi = \frac{y}{x}$ . Отримуємо:

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & \text{якщо } z \text{ належить I, IV чвертям,} \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & \text{якщо } z \text{ належить II чверті,} \\ -\pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & \text{якщо } z \text{ належить III чверті.} \end{cases} \quad (1.2)$$

**Приклад 2.** Знайти модуль и аргумент комплексних чисел:

1)  $z = -2 + 2\sqrt{3}j$ , 2)  $z = -2 - 2j$ , 3)  $z = 1 - \sqrt{3}j$ , 4)  $z = 2 + 7j$ .

*Розв'язання.*

1)  $z = -2 + 2\sqrt{3}j$ ,  $x = -2$ ,  $y = 2\sqrt{3}$ ,  $|z| = \sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4+12} = 4$ .

Точка  $z$  знаходиться в другій чверті, отже

$$\arg z = \pi + \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{3}}{-2} = \pi + \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = \pi - \operatorname{arctg} \sqrt{3} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}.$$

2)  $z = -2 - 2j$ ,  $x = -2$ ,  $y = -2$ ,  $|z| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$ .

Точка  $z$  знаходиться в третій чверті, тому

$$\arg z = -\pi + \operatorname{arctg} \frac{-2}{-2} = -\pi + \operatorname{arctg} 1 = -\pi + \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4}.$$

3)  $z = 1 - \sqrt{3}j$ ,  $x = 1$ ,  $y = -\sqrt{3}$ ,  $|z| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$ .

Точка  $z$  знаходиться в четвертій чверті, тому

$$\arg z = \operatorname{arctg} \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\operatorname{arctg} \sqrt{3} = -\frac{\pi}{3}.$$

4)  $z = 2 + 7j$ ,  $x = 2$ ,  $y = 7$ ,  $|z| = \sqrt{2^2 + 7^2} = \sqrt{4+49} = \sqrt{53}$ .

Точка  $z$  знаходиться в першій чверті, отже:

$$\arg z = \operatorname{arctg} \frac{7}{2}.$$

*Відповідь:*

$$1) |z| = 4, \operatorname{Arg} z = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

$$2) |z| = 2\sqrt{2}, \operatorname{Arg} z = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

$$3) |z| = 2, \operatorname{Arg} z = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

$$4) |z| = \sqrt{53}, \operatorname{Arg} z = \operatorname{arctg} \frac{7}{2} + 2\pi k, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

**Приклад 3.** Знайти модуль і аргумент комплексних чисел:

$$1) z = 2, 2) z = 2j, 3) z = -2, 4) z = -\sqrt{3}j.$$

*Розв'язання.*

Зобразимо числа  $z = 2, z = 2j, z = -2, z = -\sqrt{3}j.$  на комплексній площині (рис. 1.2.)

$$1) z = 2, x = 2, y = 0, |z| = \sqrt{2^2 + 0^2} = \sqrt{4} = 2,$$

$$\arg z = 0, \operatorname{Arg} z = 2\pi k, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

$$2) z = 2j, x = 0, y = 2, |z| = \sqrt{0^2 + 2^2} = \sqrt{4} = 2,$$

$$\arg z = \frac{\pi}{2}, \operatorname{Arg} z = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

$$3) z = -2, x = -2, y = 0, |z| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2} = \sqrt{4} = 2,$$

$$\arg z = \pi, \operatorname{Arg} z = \pi + 2\pi k, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

$$4) z = -\sqrt{3}j, x = 0, y = -\sqrt{3}, |z| = \sqrt{0^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{3},$$

$$\arg z = -\frac{\pi}{2}, \operatorname{Arg} z = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

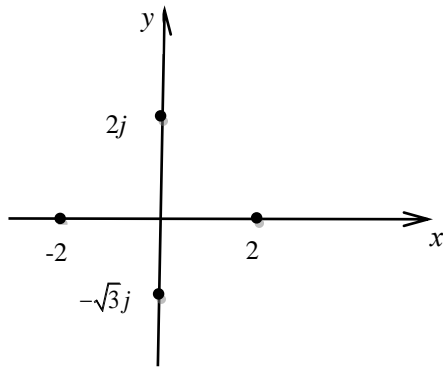


Рисунок 1.2

Відповідь:

- 1)  $|z| = 2, \text{ Arg } z = 2\pi k, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$
- 2)  $|z| = 2, \text{ Arg } z = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$
- 3)  $|z| = 2, \text{ Arg } z = \pi + 2\pi k, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$
- 4)  $|z| = \sqrt{3}, \text{ Arg } z = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$

### Тригонометрична форма комплексного числа

Якщо в алгебраїчній формі комплексного числа  $z = x + jy$  виразити  $x$  і  $y$  за формулами  $x = |z| \cdot \cos \varphi$ ,  $y = |z| \cdot \sin \varphi$  (рис. 1.1), то можна записати комплексне число  $z$  в тригонометричній формі:

$$z = |z|(\cos \varphi + j \sin \varphi).$$

**Приклад 4.** Зобразити комплексне число  $z = 2 + 2\sqrt{3}j$ , в тригонометричній формі.

*Розв'язання.*

За формулами (1.1) і (1.2) знайдемо модуль і аргумент  $z$

$$|z| = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4+12} = 4,$$

$x = 2 > 0$ ,  $y = 2\sqrt{3} > 0$ , точка  $z$  міститься в I чверті комплексної площини,

$$\varphi = \arg z = \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{3}}{2} = \operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}.$$

Остаточно отримуємо  $z = 4 \left( \cos \frac{\pi}{3} + j \sin \frac{\pi}{3} \right)$ .

*Відповідь:*  $z = 4 \left( \cos \frac{\pi}{3} + j \sin \frac{\pi}{3} \right)$ .

**Приклад 5.** Зобразити комплексне число  $z = -3 - 2j$  в тригонометричній формі.

*Розв'язання.*

За формулою (1.1) знаходимо  $|z|$ :

$$|z| = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}.$$

Через те, що  $x = -3 < 0$ ,  $y = -2 < 0$ , то число  $z$  зображується точкою III чверті комплексної площини.

За формулою (1.2) знайдемо аргумент  $z$ :

$$\varphi = \arg z = -\pi + \operatorname{arctg} \frac{-2}{-3} = -\pi + \operatorname{arctg} \frac{2}{3}.$$

Остаточно отримуємо  $z = \sqrt{13} \left( \cos \left( -\pi + \operatorname{arctg} \frac{2}{3} \right) + j \sin \left( -\pi + \operatorname{arctg} \frac{2}{3} \right) \right)$ .

*Відповідь:*  $z = \sqrt{13} \left( \cos \left( -\pi + \operatorname{arctg} \frac{2}{3} \right) + j \sin \left( -\pi + \operatorname{arctg} \frac{2}{3} \right) \right)$ .

## Дії над комплексними числами в тригонометричній формі

Нехай  $z_1 = |z_1|(\cos \varphi_1 + j \sin \varphi_1)$ ,  $z_2 = |z_2|(\cos \varphi_2 + j \sin \varphi_2)$ .

Дії над комплексними числами в тригонометричній формі здійснюються за такими правилами: нехай, тоді

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + j \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \quad (1.3)$$

Таким чином, при множенні комплексних чисел, представлених в тригонометричній формі, їх модулі перемножуються, а аргументи додаються.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + j \sin(\varphi_1 - \varphi_2)). \quad (1.4)$$

Таким чином, модуль дійсної частини дорівнює частці модулів діленого і дільника, а аргумент частки дорівнює різниці аргументів діленого і дільника

**Приклад 6.** Знайти добуток і частку двох комплексних чисел

$$z_1 = 3 \left( \cos \frac{\pi}{3} + j \sin \frac{\pi}{3} \right), \quad z_2 = 5 \left( \cos \left( -\frac{\pi}{4} \right) + j \sin \left( -\frac{\pi}{4} \right) \right).$$

*Розв'язання.*

Скориставшись формулою (1.3), знаходимо:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= 15 \left( \cos \left( \frac{\pi}{3} + \left( -\frac{\pi}{4} \right) \right) + j \sin \left( \frac{\pi}{3} + \left( -\frac{\pi}{4} \right) \right) \right) = \\ &= 15 \left( \cos \left( \frac{\pi}{3} + \left( -\frac{\pi}{4} \right) \right) + j \sin \left( \frac{\pi}{3} + \left( -\frac{\pi}{4} \right) \right) \right) = 15 \left( \cos \frac{\pi}{12} + j \sin \frac{\pi}{12} \right). \end{aligned}$$

Частку від ділення  $z_1$  на  $z_2$  визначаємо за формулою (1.4):

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{3}{5} \left( \cos \left( \frac{\pi}{3} - \left( -\frac{\pi}{4} \right) \right) + j \sin \left( \frac{\pi}{3} - \left( -\frac{\pi}{4} \right) \right) \right) = \\ &= \frac{3}{5} \left( \cos \frac{7\pi}{12} + j \sin \frac{7\pi}{12} \right). \end{aligned}$$

*Відповідь:*

$$z_1 \cdot z_2 = 15 \left( \cos \frac{\pi}{12} + j \sin \frac{\pi}{12} \right), \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{3}{5} \left( \cos \frac{7\pi}{12} + j \sin \frac{7\pi}{12} \right).$$

Піднесення комплексного числа  $z = |z|(\cos \varphi + j \sin \varphi)$  до натурального степеня  $n$  здійснюється за формулою:

$$z^n = |z|^n (\cos n\varphi + j \sin n\varphi) \quad (1.5)$$

тобто

$$|z^n| = |z|^n, \text{ Arg } z^n = n \text{ Arg } z + 2\pi k \quad (k = 0, \pm 1, \dots).$$

Звідси виходить *формула Муавра*:

$$(\cos \varphi + j \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + j \sin n\varphi.$$

**Приклад 7.** Знайти  $(-1 - j)^{12}$ .

*Розв'язання.*

Знайдемо модуль і аргумент комплексного числа  $z = -1 - j$ .

Число  $z$  зображується точкою III четверті комплексної площини.

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}, \quad \varphi = \arg z = -\pi + \arctg 1 = -\pi + \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4}.$$

Зобразимо  $z = -1 - j$  в тригонометричній формі:

$$-1 - j = \sqrt{2} \left( \cos \left( -\frac{3\pi}{4} \right) + j \sin \left( -\frac{3\pi}{4} \right) \right)$$

За формулою (1.5) маємо:

$$\begin{aligned} z^{12} &= (\sqrt{2})^{12} \left( \cos \left( -\frac{3\pi \cdot 12}{4} \right) + j \sin \left( -\frac{3\pi \cdot 12}{4} \right) \right) = \\ &= 2^6 (\cos(-9\pi) + j \sin(-9\pi)) = 2^6 (-1 + j \cdot 0) = -64. \end{aligned}$$

*Відповідь:*  $(-1 - j)^{12} = -64$ .

Корінь  $n$ -го степеня ( $n$  – ціле додатне число) з комплексного числа  $z$  має  $n$  різних значень, які знаходяться за формулою

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \left( \cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + j \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), \quad (1.6)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, (n-1), \quad \varphi = \arg z.$$

**Приклад 8.** Знайти  $\sqrt[5]{-\sqrt{3} - j}$ .

*Розв'язання.*

Знайдемо модуль і аргумент комплексного числа  $z = -\sqrt{3} - j$ . Через те, що  $x = -\sqrt{3} < 0$ ,  $y = -1 < 0$ , то число  $z$  зображується точкою III чверті комплексної площини.

$$|z| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = 2,$$

$$\varphi = \arg z = -\pi + \operatorname{arctg} \frac{-1}{-\sqrt{3}} = -\pi + \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} = -\pi + \frac{\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6}.$$

Підставляючи значення модуля і аргументу комплексного числа в формулу (1.6), отримаємо:

$$\sqrt[5]{-\sqrt{3} - j} = \sqrt[5]{2} \left( \cos \frac{-\frac{5\pi}{6} + 2\pi k}{5} + j \sin \frac{-\frac{5\pi}{6} + 2\pi k}{5} \right),$$

де  $k = 0, 1, 2, 3, 4$ .

Підставляючи послідовно вказані значення  $k$ , отримаємо:

$$k = 0 \quad z_1 = \sqrt[5]{2} \left( \cos \frac{-\frac{5\pi}{6}}{5} + j \sin \frac{-\frac{5\pi}{6}}{5} \right) = \sqrt[5]{2} \left( \cos \left( -\frac{\pi}{6} \right) + j \sin \left( -\frac{\pi}{6} \right) \right),$$

$$k = 1 \quad z_2 = \sqrt[5]{2} \left( \cos \frac{-\frac{5\pi}{6} + 2\pi}{5} + j \sin \frac{-\frac{5\pi}{6} + 2\pi}{5} \right) = \sqrt[5]{2} \left( \cos \frac{7\pi}{30} + j \sin \frac{7\pi}{30} \right),$$

$$k = 2 \quad z_3 = \sqrt[5]{2} \left( \cos \frac{-\frac{5\pi}{6} + 4\pi}{5} + j \sin \frac{-\frac{5\pi}{6} + 4\pi}{5} \right) = \sqrt[5]{2} \left( \cos \left( \frac{19\pi}{30} \right) + j \sin \left( \frac{19\pi}{30} \right) \right),$$

$$k = 3 \quad z_4 = \sqrt[5]{2} \left( \cos \frac{-\frac{5\pi}{6} + 6\pi}{5} + j \sin \frac{-\frac{5\pi}{6} + 6\pi}{5} \right) = \sqrt[5]{2} \left( \cos \left( \frac{31\pi}{30} \right) + j \sin \left( \frac{31\pi}{30} \right) \right),$$

$$k = 4 \quad z_5 = \sqrt[5]{2} \left( \cos \frac{-\frac{5\pi}{6} + 8\pi}{5} + j \sin \frac{-\frac{5\pi}{6} + 8\pi}{5} \right) = \sqrt[5]{2} \left( \cos \left( \frac{43\pi}{30} \right) + j \sin \left( \frac{43\pi}{30} \right) \right).$$

Корінь  $\sqrt[5]{-\sqrt{3} - j}$  має п'ять різних значень. Усі вони мають один і той самий модуль  $\sqrt[5]{2}$ , а аргументи двох значень, що відповідають числам  $k=0$  і  $1$ ,  $1$  і  $2$ ,  $2$  і  $3$ ,  $3$  і  $4$  відрізняються один від одного на  $\frac{2\pi}{5}$ , тому точки, що зображують комплексні числа  $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5$  є вершинами правильного п'ятикутника, вписаного в коло радіуса  $\sqrt[5]{2}$  з центром у початку координат (рис. 1.3).

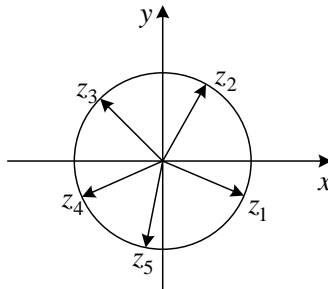


Рисунок 1.3

### Показникова форма комплексного числа

Використовуючи формулу Ейлера

$$e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi,$$

отримуємо показникову форму комплексного числа

$$z = |z|e^{j\varphi}.$$

Дії над комплексними числами в показниковій формі здійснюються за такими правилами

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}, \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

## Основні поняття теорії функцій комплексного змінного

*Означення.* Множина точок  $z$ , які задовольняють нерівності  $|z - z_0| < \varepsilon$  називаються  $\varepsilon$ -околом точки  $z_0$ .

*Означення.* Точка  $z_0$  називається внутрішньою, якщо вона належить множині  $D$  разом з певним околом.

*Означення.* Точка  $z_0$  називається межевою, якщо в будь-якому її околі є точки, що належать множині  $D$ , і ті, що їй не належать.

*Означення.* Множина  $D$  на площині називається областю, якщо задовольняє наступним умовам:

- 1) усі точки множини  $D$  внутрішні;
- 2) будь-які дві точки  $z_1$  і  $z_2$ , які належать множині  $D$ , можна з'єднати неперервною лінією, що цілком належить множині  $D$ .

*Означення.* Множина, яка складається з області  $D$  та її межі, називається замкненою областю.

*Означення.* Область  $D$  називається однозв'язною, якщо вона задовольняє наступній умові: яку б замкнену неперервну лінію ми б не провели в цій області, її внутрішня частина також належить даній області. В протилежному випадку область називається багатозв'язною.

*Означення.* Область, межа якої складається з  $n$  замкнених ліній називається  $n$ -зв'язною.

Вокремому випадку межа може бути лінією (розрізом) або точкою (проколотою)

**Приклад 9.** Зобразити на комплексній площині множину точок, які задовольняють наступним умовам:

$$1) |z - (2 + j)| \leq 3, 2) |z - 2| > |z - j|, 3) \begin{cases} z \cdot \bar{z} \leq 4, \\ |\arg z| \leq \frac{\pi}{3}. \end{cases}$$

*Розв'язання.*

При розв'язанні завдання, якщо є необхідність, треба скористатись відомими рівняннями прямих та кривих другого порядку.

1) Підставляючи в задану нерівність  $z = x + jy$ , отримуємо  $|x + jy - (2 + j)| \leq 3$ . Проведемо перетворення лівої частини нерівності (згрупуємо дійсну та уявну частини) та скористаємось формулою для обчислення модуля комплексного числа:  $|x - 2 + j(y - 1)| = \sqrt{(x - 2)^2 + (y - 1)^2}$ . Отже, нерівність набуває вигляду:  $\sqrt{(x - 2)^2 + (y - 1)^2} \leq 3$ . Звідки  $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 \leq 9$ . Остання нерівність визначає круг з радіусом  $R = 3$  і центром в точці  $(2, 1)$ .

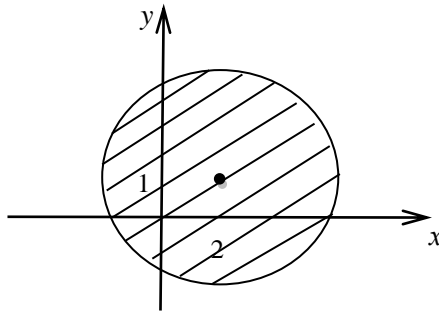


Рисунок 1.4

Слід звернути увагу на те, що коло зображується суцільною лінією через те, що нерівність нестрога (рис. 1.4).

2) Підставляючи в задану нерівність  $z = x + jy$ , отримуємо  $|x + jy - 2| > |x + jy - j|$ . Проведемо перетворення частин нерівності (згрупуємо

дійсну та уявну частини) та скористаємось формулою для обчислення модуля комплексного числа:  $|(x-2) + jy| > |x + j(y-1)|$ ,  $\sqrt{(x-2)^2 + y^2} > \sqrt{x^2 + (y-1)^2}$ .

Перетворимо останню нерівність:

$$(x-2)^2 + y^2 > x^2 + (y-1)^2,$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 > x^2 + y^2 - 2y + 1, \quad -4x + 2y + 3 > 0,$$

тобто  $y > 2x - 1,5$ .

Ця нерівність визначає множину точок комплексної площини, що лежить вище прямої  $y = 2x - 1,5$ .

Слід звернути увагу на те, що пряма зображується пунктирною лінією, через те, що нерівність строга (рис. 1.5).

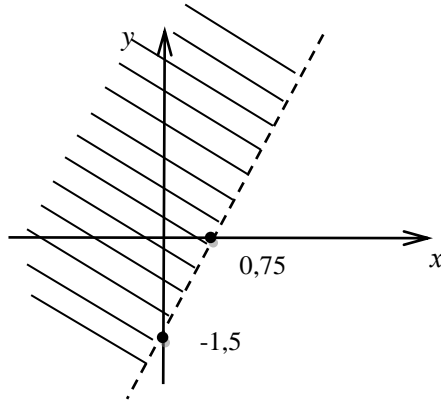


Рисунок 1.5

3) Підставляючи в задану рівність  $z = x + jy$ ,  $\bar{z} = x - jy$ , обчислюємо  $z\bar{z} = (x + jy)(x - jy) = x^2 + y^2$ . Отримуємо  $x^2 + y^2 \leq 2^2$ .

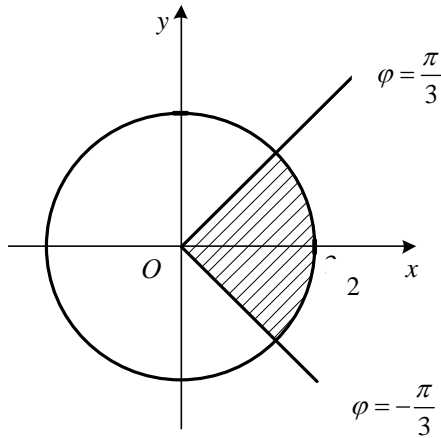


Рисунок 1.6

Ця умова визначає круг з центром в точці  $z_0 = 0$  ( $x_0 = 0, y_0 = 0$ ) і радіусом  $R = 2$ .

Нерівність  $|\arg z| \leq \frac{\pi}{3}$  або  $-\frac{\pi}{3} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{3}$  визначає частину комплексної площини між  $\varphi = -\frac{\pi}{3}$  і  $\varphi = \frac{\pi}{3}$ . Сукупність цих умов визначає множину точок комплексної площини, що відображена на рис. 1.6. Це точки круга  $x^2 + y^2 \leq 2^2$  для яких  $-\frac{\pi}{3} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{3}$ .

### Функції комплексного змінного

Нехай задано дві множини  $D$  і  $E$ , елементами яких є комплексні числа. Числа  $z = x + jy$  множини  $D$  зображуються точками комплексної площини  $z$ , а числа  $w = u + jv$  множини  $E$  – точками комплексної площини  $w$ .

*Означення.* Якщо будь-якому числу (точці)  $z \in D$  за певним правилом ставиться у відповідність певне число (точка)  $w \in E$ , то кажуть, що на множині  $D$  визначена функція комплексного змінного  $w = f(z)$ , яка відображає множину  $D$  у множину  $E$ .

*Означення.* Якщо кожному  $z \in D$  відповідає декілька значень  $w$ , то функція  $w = f(z)$  називається багатозначною.

Множина  $D$  називається областю визначення функції  $w = f(z)$ , множина усіх значень  $E$  називається областю значень цієї функції.

Функцію  $w = f(z)$  можна записати у вигляді  $u + jv = f(x + jy)$ , тобто  $f(x + jy) = u(x, y) + jv(x, y)$ , де  $v = v(x, y) = \text{Im } f(z)$ ,  $u = u(x, y) = \text{Re } f(z)$ .

Функцію  $u(x, y)$  називають дійсною частиною функції  $w = f(z)$ , а  $v(x, y)$  — уявною частиною функції  $w = f(z)$ .

### Границя і неперервність функції комплексного змінного

Нехай однозначна функція  $w = f(z)$  визначена в певній точці  $z_0$ , за винятком, можливо самої точки  $z_0$ . Під  $\delta$  — околom точки  $z_0$  комплексної площини розуміють внутрішність круга з центром в точці  $z_0$  та радіусом  $\delta$ .

*Означення.* Число  $w_0$  називається границею функції  $w = f(z)$  в точці  $z_0$  якщо для будь-якого  $\varepsilon > 0$  існує  $\delta > 0$  таке, що для будь-якого  $z \neq z_0$ , що задовольняють нерівності  $|z - z_0| < \delta$ , виконується нерівність  $|f(z) - w_0| < \varepsilon$ .

Позначають  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$ .

З означення витікає, якщо існує границя  $w_0$ , то існують і границі

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x, y) = u_0 \quad \text{і} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x, y) = v_0.$$

Справедливо й обернене твердження.

Теореми про арифметичні властивості границь однієї або декількох дійсних змінних залишаються справедливими і для функцій комплексного змінного.

*Означення.* Нехай функція  $w = f(z)$  визначена в точці  $z = z_0$  і в її певному околі. Функція  $w = f(z)$  називається неперервною в точці  $z_0$ , якщо  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$ .

## Основні елементарні функції комплексного змінного

1. Функції  $w = z^n$  і  $w = \sqrt[n]{z}$ , де  $n$  — ціле додатне число були визначені вище при піднесенні комплексного числа до степеня та при добуванні кореня з комплексного числа.

2. Показникова функція  $w = e^z$  визначається формулою:

$$e^z = e^x (\cos y + j \sin y). \quad (1.7)$$

При  $y = 0$  отримуємо  $z = x \Rightarrow e^z = e^x$ . Очевидно, що

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}, \quad \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2}, \quad (e^z)^n = e^{nz} \quad (n \in N).$$

Враховуючи, що  $|e^z| = e^x$ , а  $e^x \neq 0$  отримуємо  $e^z \neq 0$ . Виходячи з означення (1.7) легко переконатися, що  $\lim_{\operatorname{Re} z \rightarrow -\infty} e^z = 0$ ,  $\lim_{\operatorname{Re} z \rightarrow +\infty} e^z = \infty$ .

Показникова функція  $w = e^z$  є періодичною з періодом  $T = 2\pi j$ . Дійсно,  $e^{z+2\pi j} = e^z (\cos 2\pi + j \sin 2\pi) = e^z$ .

**Приклад 10.** Обчислити 1)  $e^{-\pi j}$ , 2)  $e^{\frac{\pi}{6} j}$ .

*Розв'язання.*

$$1) e^{-\pi j} = (\cos(-\pi) + j \sin(-\pi)) = (\cos \pi - j \sin \pi) = -1,$$

$$2) e^{\frac{\pi}{6} j} = \left( \cos \frac{\pi}{6} + j \sin \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + j \frac{1}{2}.$$

3. Логарифмічна функція визначається як обернена до показникової. Якщо  $e^w = z$ ,  $z \neq 0 \Rightarrow w = \text{Ln } z$ . Очевидно,  $e^w \neq 0$  для будь-яких  $z$ , отже логарифмічна функція визначена на всій комплексній площині, окрім  $z = 0$ .

Розглянемо  $e^w = e^{u+iv} = e^u (\cos v + j \sin v) \Rightarrow |e^w| = e^u$ , отже

$$\text{Arg } e^w = \text{Arg } z = v + 2\pi k, \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Отримуємо

$$e^w = z \Rightarrow e^u = |z| \Rightarrow u = \ln |z|, \quad v = \text{Arg } z = \arg z + 2\pi k.$$

$$\text{Ln } z = \ln |z| + j(\arg z + 2\pi k) \quad (1.8)$$

Формула (1.8) показує, що логарифмічна функція комплексного змінного має нескінченну множину значень, тобто  $w = \text{Ln } z$  — багатозначна функція. Однозначну гілку цієї функції, можна виділити, підставляючи  $k = 0$  в формулу (1.8). Отримаємо однозначну функцію, яку називають головним значенням логарифма  $\text{Ln } z$  та позначають символом  $\ln z$ .

$$\ln z = \ln |z| + j \arg z, \quad -\pi < \arg z \leq \pi \quad (1.9)$$

**Приклад 11.** Обчислити 1)  $\text{Ln}(-2)$ , 2)  $\text{Ln } 3j$ .

*Розв'язання.*

$$1) \text{Ln}(-2) \Rightarrow z = -2 \Rightarrow |z| = 2, \arg z = \pi,$$

$$\ln(-2) = \ln 2 + \pi j \Rightarrow \text{Ln}(-2) = \ln 2 + \pi j + 2\pi jk = \ln 2 + \pi j(1 + 2k);$$

$$2) \text{Ln } 3j \Rightarrow z = 3j \Rightarrow |z| = 3, \arg z = \frac{\pi}{2},$$

$$\ln 3j = \ln 3 + \frac{\pi}{2} j \Rightarrow \text{Ln } 3j = \ln 3 + \frac{\pi}{2} j + 2\pi jk = \ln 3 + \pi j \left( \frac{1}{2} + 2k \right).$$

З формули (1.9) витікає, що для логарифмічної функції комплексного змінного є справедливими властивості, аналогічні властивостям для логарифмічної функції дійсного змінного:

$$\text{Ln}(z_1 \cdot z_2) = \text{Ln } z_1 + \text{Ln } z_2,$$

$$\text{Ln} \frac{z_1}{z_2} = \text{Ln } z_1 - \text{Ln } z_2,$$

$$\operatorname{Ln}(z)^n = n \operatorname{Ln} z + 2\pi k j, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

$$\operatorname{Ln} \sqrt[n]{z} = \frac{1}{n} \operatorname{Ln} z.$$

**Приклад 12.** Обчислити 1)  $j^{3j}$ , 2)  $2^{1+j}$ .

*Розв'язання.*

Для обчислення скористаємось формулою:

$$e^{\operatorname{Ln} a} = a \Rightarrow a^z = e^{z \operatorname{Ln} a}.$$

$$1) j^{3j} = e^{j \operatorname{Ln} 3j} = e^{j \left( \ln 3 + \pi j \left( \frac{1}{2} + 2k \right) \right)} = e^{j \ln 3 - \pi \left( \frac{1}{2} + 2k \right)},$$

$$2) 3^{1+j} = e^{(1+j) \operatorname{Ln} 3}.$$

Розглянемо  $\operatorname{Ln} 3$ :  $z = 3 \Rightarrow |z| = 3, \operatorname{arg} z = 0$ .

Отримаємо  $\operatorname{Ln} 3 = \ln 3 + 2\pi j k$ .

Остаточно маємо:

$$3^{1+j} = e^{\ln 3 + 2\pi j k} \cdot e^{j(\ln 3 + 2\pi j k)} = e^{\ln 3 - 2\pi k + j(\ln 3 + 2\pi k)} = e^{\ln 3 - 2\pi k} (\cos \ln 3 + j \sin \ln 3).$$

**4.** Тригонометричні функції комплексного аргументу  $z = x + jy$  визначаються рівностями:

$$\sin z = \frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j}, \quad \cos z = \frac{e^{jz} + e^{-jz}}{2}, \quad \operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

Тригонометричні функції комплексного аргументу зберігають багато властивостей тригонометричних функцій дійсного аргументу. Зокрема:

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1, \quad \sin 2z = 2 \sin z \cos z,$$

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2,$$

$$\cos(-z) = \cos z, \quad \sin(-z) = -\sin z.$$

Відзначимо, що тригонометричні функції  $\sin z$ ,  $\cos z$  в комплексній площині необмежені:  $\lim_{\operatorname{Im} z \rightarrow \pm\infty} \sin z = \infty$ ,  $\lim_{\operatorname{Im} z \rightarrow \pm\infty} \cos z = \infty$ .

**5. Гіперболічні функції визначаються рівностями:**

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \quad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$

Легко помітити зв'язок між гіперболічними та тригонометричними функціями. Заміняючи  $z$  на  $jz$ , отримуємо:

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} jz &= j \sin z, & \sin jz &= j \operatorname{sh} z, \\ \operatorname{ch} jz &= \cos z, & \cos jz &= \operatorname{ch} z, \\ \operatorname{th} jz &= j \operatorname{tg} z, & \operatorname{tg} jz &= j \operatorname{th} z, \\ \operatorname{cth} jz &= -j \operatorname{ctg} z, & \operatorname{ctg} jz &= -j \operatorname{cth} z. \end{aligned}$$

Наведемо ще кілька формул:

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z &= 1, & \operatorname{sh} 2z &= 2 \operatorname{sh} z \operatorname{ch} z, \\ \operatorname{ch} 2z &= \operatorname{ch}^2 z + \operatorname{sh}^2 z, & \operatorname{sh} z + \operatorname{ch} z &= e^z \\ \operatorname{ch}(z_1 + z_2) &= \operatorname{ch} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{sh} z_1 \operatorname{sh} z_2, \\ \operatorname{ch}(-z) &= \operatorname{ch} z, & \operatorname{sh}(-z) &= -\operatorname{sh} z. \end{aligned}$$

**6. Обернені тригонометричні та гіперболічні функції.**

Число  $w$  називається арксинусом числа  $z$ , якщо  $\sin w = z$  та позначається  $w = \operatorname{Arc} \sin z$ . Використовуючи означення синуса, маємо:  $z = \sin w = \frac{e^{jw} - e^{-jw}}{2j}$  або  $e^{2jw} - 2jze^{jw} - 1 = 0$ . Звідки  $e^{jw} = jz + \sqrt{(jz)^2 + 1}$ , тобто  $e^{jw} = jz + \sqrt{1 - z^2}$  (перед коренем можна не писати знак  $\pm$  через те, що  $\sqrt{1 - z^2}$  має два значення).

$$\text{Тоді } jw = \operatorname{Ln} \left( jz + \sqrt{1 - z^2} \right) \text{ або } w = \frac{1}{j} \operatorname{Ln} \left( jz + \sqrt{1 - z^2} \right).$$

Таким чином,

$$w = \operatorname{Arc} \sin z = -j \operatorname{Ln} \left( jz + \sqrt{1 - z^2} \right).$$

Функція  $w = \operatorname{Arc} \sin z$  багатозначна (нескінченнозначна). Аналогічно визначаються інші обернені тригонометричні функції. Можна показати, що

$$\text{Arc cos } z = -j \text{Ln} \left( z + \sqrt{z^2 - 1} \right),$$

$$\text{Arc tg } z = -\frac{j}{2} \text{Ln} \frac{j-z}{j+z} \quad (z \neq \pm j),$$

$$\text{Arc ctg } z = \frac{j}{2} \text{Ln} \frac{z-j}{z+j} \quad (z \neq \pm j).$$

Функції, обернені гіперболічним, позначаються відповідно  $w = \text{Arsh } z$  (ареасинус),  $w = \text{Arch } z$  (ареакосинус),  $w = \text{Arth } z$  (ареатангенс),  $w = \text{Arcth } z$  (ареакотангенс)

$$\text{Arcsh } z = \text{Ln} \left( z + \sqrt{z^2 + 1} \right),$$

$$\text{Arcch } z = \text{Ln} \left( z + \sqrt{z^2 - 1} \right),$$

$$\text{Arth } z = \frac{1}{2} \text{Ln} \frac{1+z}{1-z},$$

$$\text{Arcth } z = \frac{1}{2} \text{Ln} \frac{z+1}{z-1}.$$

Усі ці функції нескінченнозначні.

### Диференціювання функцій комплексного змінного

Означення похідної та диференціалу функцій комплексного змінного збігаються з відповідними означеннями функцій дійсного змінного. Тому майже усі основні теореми і формули диференційного числення функцій дійсного змінного розповсюджуються і на функції комплексного змінного.

Нехай  $w = f(z)$  – однозначна функція, яка визначена в певній області  $D$  комплексної площини. Нехай точки  $z$  і  $z + \Delta z$  належать області  $D$ , тоді приріст функції  $\Delta w = f(z + \Delta z) - f(z)$ , де  $\Delta z = \Delta x + j\Delta y$  – приріст аргументу.

*Означення.* Похідною функції  $w = f(z)$  в точці  $z$  називається границя (якщо вона існує) відношення приросту функції до приросту аргументу, за умови, що  $\Delta z \rightarrow 0$  довільним чином:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}.$$

*Означення.* Функція, яка має похідну в точці  $z$ , називається диференційовною в цій точці.

### Умови диференційовності функції комплексного змінного

**Теорема.** (умови Коши-Рімана)

Якщо функція  $w = u(x, y) + jv(x, y)$  визначена в певному околі точки  $z = z + jy$ , до того ж в цій точці дійсні функції  $u(x, y)$  та  $v(x, y)$  диференційовні, то для диференційовності функції  $w = f(z)$  в точці  $z$  необхідно та достатньо, щоб в цій точці виконувались рівності:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \end{cases}$$

*Означення.* Якщо функція диференційовна не тільки в точці  $z$ , а й в певному околі цієї точки, то функція називається аналітичною в даній точці.

*Означення.* Функція, яка аналітична в усіх точках певної області, називається аналітичною в цій області.

*Означення.* Точка  $z_0$  називається особливою точкою функції  $w = f(z)$ , якщо в ній порушується аналітичність.

Для будь-якої аналітичної в області  $D$  функції  $w = f(z)$  маємо:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + j \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - j \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - j \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + j \frac{\partial v}{\partial x}.$$

**Приклад 13.** Перевірити, чи є функція аналітичною

$$1) w = (\bar{z})^2, 2) w = z^2 + 8j, 3) w = 3|z| + j.$$

Розв'язання.

$$1) w = (\bar{z})^2 = (x - jy)^2 = x^2 - 2xyj - y^2 = x^2 - y^2 - 2xyj,$$

отже  $u(x, y) = x^2 - y^2, v(x, y) = -2xy$ . Перевіримо умови Коши-Рімана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -2y.$$

Умови Коши-Рімана виконуються тільки в точці  $(0, 0)$ , отже функція  $w = z \operatorname{Re} z$  є аналітичною тільки в точці  $(0, 0)$ .

$$2) w = z^2 + 8j = (x + jy)^2 + 8j = x^2 + 2xyj - y^2 + 8j = x^2 - y^2 + j(2xy + 8),$$

отже  $u(x, y) = x^2 - y^2, v(x, y) = 2xy + 8$ .

Перевіримо умови Коши-Рімана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2y.$$

Умови Коши-Рімана виконуються, отже функція  $w = z^2 + 8j$  є аналітичною.

$$3) w = 3|z| + j = 3\sqrt{x^2 + y^2} + j, \text{ отже } u(x, y) = 3\sqrt{x^2 + y^2}, v(x, y) = 1.$$

Перевіримо умови Коши-Рімана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{3 \cdot 2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{3x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{3 \cdot 2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{3y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Умови Коши-Рімана не виконуються, отже функція  $w = 3|z| + j$  не є аналітичною.

**Приклад 14.** Відновити аналітичну функцію  $w = u(x, y) + jv(x, y)$ :

1) якщо відома її уявна частина  $v(x, y) = 4x^2 - 2y^2 + x$ ,

2) якщо відома її дійсна частина  $u(x, y) = x^2 - y^2 + 5x$ .

Розв'язання.

1) За умовою функція аналітична, отже виконуються умови Коши-Рімана.

Перша умова:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -4y = \frac{\partial u}{\partial x} \Rightarrow du = -4y dx \Rightarrow u = -4 \int y dx = -4yx + \varphi(y).$$

Знайдемо  $\varphi(y)$ , користуючись другою умовою Коши-Рімана:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} &= (-4yx + \varphi(y))'_y = -4x + \varphi'(y) = -\frac{\partial v}{\partial x} = -(8x+1), \\ -4x + \varphi'(y) &= -(8x+1) \Rightarrow \varphi'(y) = -4x-1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \varphi(y) &= -\int (4x+1) dy = -(4x+1)y + C = -4xy - y + C. \end{aligned}$$

Отримаємо  $u(x, y) = -8xy - y + C$ .

*Відповідь:*  $w = (-8xy - y + C) + j(2x^2 - 2y^2 + x)$ .

2) За умовою функція аналітична, отже виконуються умови Коши-Рімана.

Перша умова:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x+5 = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow dv = (2x+5) dy \Rightarrow v = \int (2x+5) dy = 2xy + 5y + \varphi(x).$$

Знайдемо  $\varphi(x)$ , користуючись другою умовою Коши-Рімана:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial v}{\partial x} &= -(2xy + 5y + \varphi(x))'_x = -2y - \varphi'(x) = \frac{\partial u}{\partial y} = -2y, \\ -2y - \varphi'(x) &= -2y \Rightarrow \varphi'(x) = 0 \Rightarrow \varphi(x) = \text{const} = C. \end{aligned}$$

Отримаємо  $v(x, y) = 2xy + 5y + C$ .

*Відповідь:*  $w = (x^2 - y^2 + 5x) + j(2xy + 5y + C)$ .

### Інтегрування функції комплексного змінного

Нехай  $w = f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$  неперервна функція комплексного змінного, яка визначена в області  $D$ , а  $L$  — гладка крива, яка лежить в області  $D$  с початком в точці  $A$  і кінцем в точці  $B$ , задана рівнянням  $z = z(t) = x(t) + jy(t)$  ( $\alpha \leq t \leq \beta$ ).

Розіб'ємо дугу  $AB$  довільним чином на  $n$  елементарних дуг (рис. 1.7). Введемо позначення  $\Delta z_1 = z_1 - z_0, \Delta z_2 = z_2 - z_1, \dots, \Delta z_n = z_n - z_{n-1}$ . Число  $\Delta z_k$

зображується вектором, який спрямований від точки  $z_{k-1}$  до точки  $z_k$ , а  $|\Delta z_k|$  – довжина цього вектору, тобто довжина хорди, яка стягує елементарну дугу. Всередині кожної елементарної дуги виберемо довільним чином точку і позначимо  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ . Точка  $\xi_k$  міститься на елементарній дузі з кінцями в точках  $z_{k-1}$  і  $z_k$ . Складемо інтегральну суму:

$$f(\xi_1)\Delta z_1 + f(\xi_2)\Delta z_2 + \dots + f(\xi_n)\Delta z_n = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta z_k.$$

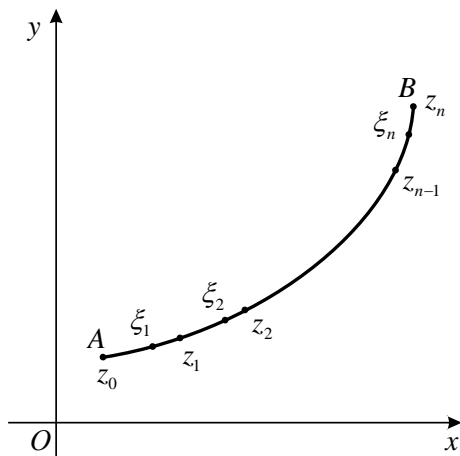


Рисунок 1.7

*Означення.* Границя інтегральної суми при прямуванні до нуля найбільшої з елементарних дуг (якщо вона існує) називається інтегралом від функції  $w = f(z)$  по кривій  $L$  і позначається:

$$\lim_{\max|\Delta z_k| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta z_k = \int_{AB} f(z) dz.$$

Властивості цього інтеграла аналогічні властивостям криволінійного інтегралу 2-го роду.

**Теорема.**

Нехай  $w = f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$  – однозначна функція комплексного змінного, яка неперервна та визначена в області  $D$ , тоді

$$\int_L f(z) dz = \int_L (u(x, y) + jv(x, y))(dx + jdy).$$

При цьому підінтегральний вираз перетворюється до вигляду:

$$\int_L f(z) dz = \int_L u(x, y) dx - v(x, y) dy + j \int_L v(x, y) dx + u(x, y) dy. \quad (1.10)$$

Формула (1.10) показує, що обчислення інтеграла від функції комплексного змінного зводиться до обчислення звичайних криволінійних інтегралів. Для цього підінтегральну функцію треба представити у вигляді  $f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$  та помножити її на  $dz = dx + jdy$ .

Нехай крива  $L$  задана параметричними рівняннями  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ , до того ж початкова і кінцева точки дуги  $L$  відповідають значенням параметра  $t = t_0, t = t_1$ , тоді

$$\int_L f(z) dz = \int_{t_0}^{t_1} f[z(t)] \cdot z'(t) dt,$$

де  $z(t) = x(t) + jy(t)$ .

**Приклад 15.** Обчислити  $\int_L \operatorname{Im} z dz$ , якщо шляхом інтегрування є прямолінійний відрізок, що з'єднує точку  $0$  з точкою  $3 + j$ .

*Розв'язання.*

Комплексні числа  $z_1 = 0$  та  $z_2 = 3 + j$  на комплексній площині зображуються точками  $M_1(0;0)$  та  $M_2(3;1)$  відповідно. Використовуючи рівняння прямої, яка проходить через дві точки:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1},$$

отримаємо рівняння відрізка, що з'єднує ці точки:  $y = \frac{1}{3}x$ .

Отже,

$$\int_L \operatorname{Im} z \, dz = \int_L y (dx + j \, dy) = \left| \begin{array}{l} y = \frac{1}{3}x \\ dy = \frac{1}{3}dx \end{array} \right| = \int_0^3 \frac{1}{3}x \left(1 + \frac{j}{3}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{3} \left(1 + \frac{j}{3}\right) \frac{x^2}{2} \Big|_0^3 = \frac{3+j}{9} \cdot \frac{9}{2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}j.$$

Відповідь:  $\frac{3}{2} + \frac{1}{2}j$ .

**Приклад 16.** Обчислити  $\int_L e^z \, dz$  вздовж ламаної  $0, j, 1+j$ .

*Розв'язання.*

Зробимо креслення лінії інтегрування (рис. 1.8).

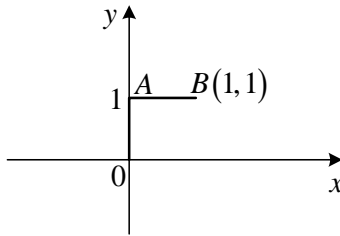


Рисунок 1.8

$$\int_L e^z \, dz = \int_{OA} e^{x+jy} (dx + j \, dy) + \int_{AB} e^{x+jy} (dx + j \, dy).$$

Контур  $OA$ :  $x = 0, dx = 0$ .

$$\int_{OA} e^{x+jy} (dx + j dy) = \int_0^1 e^{jy} \cdot j dy = e^{jy} \Big|_0^1 = e^j - 1.$$

Контур  $AB$ :  $y=1, dy=0$ .

$$\int_{AB} e^{x+jy} (dx + jdy) = \int_0^1 e^{x+j} dx = e^{x+j} \Big|_0^1 = e^{1+j} - e^j.$$

$$\int_L e^z dz = e^j - 1 + e^{1+j} - e^j = e \cdot e^j - 1 = e \cdot (\cos 1 + j \sin 1) - 1.$$

Відповідь:  $e \cdot (\cos 1 + j \sin 1) - 1$ .

**Приклад 17.** Обчислити  $\int_L \text{Im } z dz$ , де  $L$  – верхня половина еліпсу

$x = a \cdot \cos t$ ,  $y = b \cdot \sin t$ , обхід проти годинникової стрілки.

*Розв'язання.*

Рівняння лінії інтегрування в комплексній формі  $z = a \cdot \cos t + jb \cdot \sin t$ , де

змінна  $t$  змінюється від 0 до  $\frac{\pi}{2}$ .

Знайдемо  $dz = (-a \cdot \sin t + jb \cdot \cos t) dt$ . Звідки

$$\begin{aligned} \int_L \text{Im } z dz &= \int_L y dz = \int_0^{\pi/2} b \cdot \sin t (-a \cdot \sin t + jb \cdot \cos t) dt = \\ &= - \int_0^{\pi/2} ab \cdot \sin^2 t dt + jb^2 \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \sin 2t dt = -ab \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt + jb^2 \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \sin 2t dt = \\ &= -\frac{ab}{2} \left( t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\pi/2} - jb^2 \frac{1}{4} \cos 2t \Big|_0^{\pi/2} = -\frac{ab}{2} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \sin \pi \right) - jb^2 \frac{1}{4} (\cos \pi - \cos 0) = \\ &= -\frac{ab}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + j \frac{b^2}{2}. \end{aligned}$$

Відповідь:  $-\frac{ab}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + j \frac{b^2}{2}$ .

Нехай функція  $f(z)$  аналітична в однозв'язній області  $D$ , яка містить  $L$ , тоді інтеграл за контуром  $L$  не залежить від форми кривої (шляху інтегрування), а залежить тільки від початкової та кінцевої точок інтегрування.

В цьому випадку можна скористатися формулою Ньютона-Лейбніца:

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z) dz = F(z_2) - F(z_1),$$

де  $F(z)$  – довільна первісна функції  $f(z)$ .

**Приклад 18.** Обчислити інтеграл  $\int_0^{\pi+j} \sin z dz$ .

*Розв'язання.*

Через те, що підінтегральна функція  $\sin z$  аналітична всюди, інтеграл обчислимо за формулою Ньютона-Лейбніца:

$$\int_0^{\pi+j} \sin z dz = -\cos z \Big|_0^{\pi+j} = -\cos(\pi+j) + 1 = \cos j + 1 = \operatorname{ch} 1 + 1.$$

*Відповідь:*  $\operatorname{ch} 1 + 1$ .

**Приклад 19.** Обчислити інтеграл  $\int_0^{\ln 3} z e^z dz$ .

*Розв'язання.*

Через те, що підінтегральна функція  $z \cdot e^z$  аналітична всюди, інтеграл обчислимо за формулою Ньютона-Лейбніца методом інтегрування частинами:

$$\begin{aligned} \int_0^{\ln 3} z e^z dz &= \left| \begin{array}{l} u = z, \quad du = dz \\ dv = e^z dz, \quad v = e^z. \end{array} \right| = z e^z \Big|_0^{\ln 3} - \int_0^{\ln 3} e^z dz = (z e^z - e^z) \Big|_0^{\ln 3} = \\ &= e^z (z - 1) \Big|_0^{\ln 3} = 3 \ln 3 - 2. \end{aligned}$$

*Відповідь:*  $3 \ln 3 - 2$ .

## Інтегрування функцій комплексного змінного за замкненим контуром

**Теорема Коши** для однозв'язної області.

Нехай функція  $f(z)$  аналітична в однозв'язній області  $D$ , тоді інтеграл від  $f(z)$  за будь-яким кусково-гладким замкненим контуром  $L$ , який належить  $D$ , дорівнює 0, тобто

$$\oint_L f(z) dz = 0.$$

**Приклад 20.** Обчислити  $\int_L \frac{dz}{z-6}$ , де  $L$  – еліпс  $x = 3 \cos t$ ,  $y = 2 \sin t$ .

*Розв'язання.*

Підінтегральна функція  $\frac{1}{z-6}$  має розрив в точці  $z=6$ , але точка  $z=6$  міститься зовні даного еліпсу. Отже, функція  $\frac{1}{z-6}$  є аналітичною в області, обмеженою цим еліпсом, тому  $\int_L \frac{dz}{z-6} = 0$ .

*Відповідь:* 0.

Якщо шлях інтегрування є колом з центром в точці  $z_0$ , то зручно записати рівняння такого кола в наступному вигляді:

$$z - z_0 = Re^{j\varphi},$$

де  $R$  – радіус кола,  $\varphi = \arg(z - z_0)$ .

**Приклад 21.** Обчислити  $\int_L |z| dz$ , де  $L$  – дуга кола  $|z| = 5$   $\left(-\frac{\pi}{2} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2}\right)$ .

*Розв'язання.* Запишемо рівняння кола у вигляді  $z = Re^{j\varphi} = 5e^{j\varphi}$ , тоді  $dz = 5je^{j\varphi} d\varphi$ .

Таким чином,

$$\int_L |z| dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 5 \cdot 5 j e^{j\varphi} d\varphi = 25 e^{j\varphi} \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 25 \left( e^{j\frac{\pi}{2}} - e^{-j\frac{\pi}{2}} \right) =$$

$$= 25 \cdot 2j \frac{e^{j\frac{\pi}{2}} - e^{-j\frac{\pi}{2}}}{2j} = 50j \sin \frac{\pi}{2} = 50j.$$

Відповідь:  $50j$ .

### Інтегральна формула Коши

Нехай функція  $f(z)$  є аналітичною в однозв'язній замкнутій області  $\bar{D}$ , яка обмежена кусочно-гладким контуром  $L$ . Для будь-якої внутрішньої точки  $z_0 \in D$  справедлива інтегральна формула Коши:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi j} \oint_L \frac{f(z) dz}{z - z_0},$$

де напрям обходу контуру  $L$  такий, що область  $D$  залишається ліворуч.

Аналогічна формула справедлива для багатозв'язної області.

Інтегральна формула Коші дозволяє обчислювати деякі інтеграли за наступною формулою:

$$\oint_L \frac{f(z) dz}{z - z_0} = 2\pi j \cdot f(z_0).$$

**Приклад 22.** Обчислити інтеграл  $\oint_L \frac{\sin z dz}{z(z-2j)}$ , де  $L: |z-3j|=2$ .

*Розв'язання.*

Контур  $L$  – коло з центром в точці  $z_0 = 3j$  і радіусом  $R=2$  (рис. 1.9).

Знаменник підінтегральної функції обертається на нуль в точках  $z_1 = 0$  і  $z_2 = 2j$ .

$$\oint_L \frac{\sin z dz}{z(z-2j)} = \oint_{\gamma_1} \frac{\sin z}{z} dz + \oint_{\gamma_2} \frac{\sin z}{z-2j} dz.$$

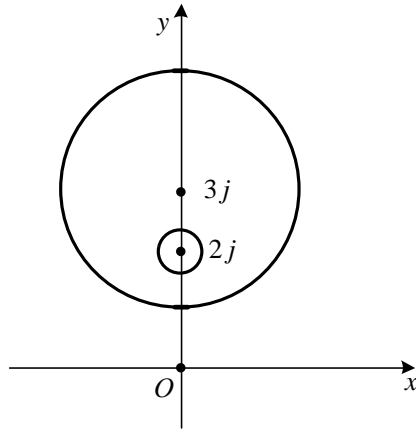


Рисунок 1.9

Точка  $z_1 = 0$  не входить до області, яка обмежена колом  $|z - 3j| = 2$ . Тому за теоремою Коши:

$$\oint_{\gamma_1} \frac{\sin z}{z} dz = 0.$$

Всередині області, яка обмежена колом  $|z - 3j| = 2$ , міститься точка  $z_2 = 2j$ .

Функція  $f(z) = \frac{\sin z}{z}$  є аналітичною в заданій області. Перепишемо вихідний інтеграл у вигляді:

$$\oint_L \frac{\sin z dz}{z(z-2j)} = \oint_L \frac{\frac{\sin z}{z}}{z-2j} dz.$$

Застосовуючи інтегральну формулу Коши ( $z_2 = 2j$ ), отримуємо:

$$\oint_{\gamma_2} \frac{\sin z dz}{z(z-2j)} = 2\pi j \cdot \frac{\sin z}{z} \Big|_{z=2j} = 2\pi j \frac{\sin 2j}{2j} = \pi j \operatorname{sh} 2.$$

Відповідь:  $\pi j \operatorname{sh} 2$ .

**Приклад 23.** Обчислити  $\oint_L \frac{e^z}{z^2+4} dz$ , де  $L: |z|=3$ .

*Розв'язання.*

Контур  $L$  – коло з центром в точці  $z_0=0$  і радіусом  $R=3$ . Знаменник підінтегральної функції  $z^2+4=(z-2j)(z+2j)$  обертається на нуль в точках  $z_1=2j$  і  $z_2=-2j$ .

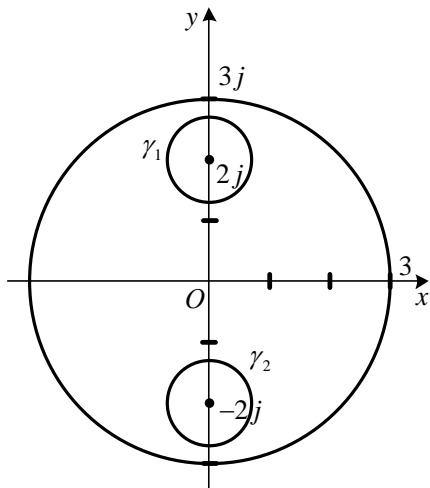


Рисунок 1.10

Обидві точки містяться всередині області, яка обмежена колом  $|z|=3$ . Побудуємо кола  $\gamma_1$  і  $\gamma_2$  з центрами в точках  $z_1=2j$  і  $z_2=-2j$  достатньо малих радіусів так, щоб кола не перетинались і цілком лежали в крузі  $|z|\leq 3$  (рис. 1.10).

У трьохзв'язній області, яка обмежена колами  $|z|=3$ ,  $\gamma_1$  і  $\gamma_2$ , підінтегральна

функція скрізь аналітична.

За теоремою Коші для багатозв'язної області маємо:

$$\oint_L \frac{e^z}{z^2 + 4} dz = \oint_{\gamma_1} \frac{e^z}{z^2 + 4} dz + \oint_{\gamma_2} \frac{e^z}{z^2 + 4} dz.$$

До кожного інтегралу в правій частині застосуємо інтегральну формулу Коші.

В результаті отримуємо:

$$\begin{aligned} \oint_{|z|=3} \frac{e^z}{z^2 + 4} dz &= \oint_{\gamma_1} \frac{e^z}{(z-2j)(z+2j)} dz + \oint_{\gamma_2} \frac{e^z}{(z-2j)(z+2j)} dz = \\ &= \oint_{\gamma_1} \frac{e^z}{(z+2j)} dz + \oint_{\gamma_2} \frac{e^z}{(z+2j)} dz = 2\pi j \frac{e^z}{z+2j} \Big|_{z=2j} + 2\pi j \frac{e^z}{z-2j} \Big|_{z=-2j} = \\ &= 2\pi j \frac{e^{2j}}{4j} + 2\pi j \frac{e^{-2j}}{-4j} = \pi j \frac{e^{2j} - e^{-2j}}{2j} = \pi j \sin 2j = -\pi \operatorname{sh} 2. \end{aligned}$$

*Відповідь:*  $-\pi \operatorname{sh} 2$ .

Однозначна функція  $f(z)$ , яка аналітична в однозв'язній замкненій області  $\bar{D}$ , має похідну будь-якого порядку, до того ж

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi j} \oint_L \frac{f(z) dz}{(z-z_0)^{n+1}}, \text{ де } z_0 \in D, z \in L. \quad (1.11)$$

Формулою (1.11) можна користуватися для обчислення деяких інтегралів.

**Приклад 24.** Обчислити інтеграл  $\int_{|z-j|=1} \frac{\sin z}{(z-j)^3} dz$ .

*Розв'язання.*

Знаменник підінтегральної функції обертається на нуль в точці  $z = j$ , яка міститься всередині області, обмеженої контуром  $|z - j| = 1$ . Застосовуючи формулу (1.11) до функції  $f(z) = \sin z$ , отримаємо:

$$\int_{|z-j|=1} \frac{\sin z}{(z-j)^3} dz = \frac{2\pi j}{2!} \cdot \left. \frac{d^2(\sin z)}{dz^2} \right|_{z=j} = \pi j(-\sin j) = -\pi j^2 \operatorname{sh} 1 = \pi \operatorname{sh} 1.$$

*Відповідь:*  $\pi \operatorname{sh} 1$ .

**Приклад 25.** Обчислити інтеграл  $\oint_L \frac{e^{2z\pi}}{(z^2+1)^2} dz$ ,

де  $L$  – еліпс  $4x^2 + y^2 - 2y = 0$ .

*Розв'язання.*

Побудуємо еліпс. Для цього приведемо рівняння  $4x^2 + y^2 - 2y = 0$  до канонічного виду (рис. 1.11):

$$4x^2 + y^2 - 2y + 1 = 1,$$

$$4x^2 + (y-1)^2 = 1,$$

$$\frac{x^2}{\frac{1}{4}} + \frac{(y-1)^2}{1} = 1.$$

Знаменник підінтегральної функції обертається на нуль в точках  $z_1 = j$  і  $z_2 = -j$  ( $z^2 + 1 = 0$ ,  $z^2 = -1$ ,  $z = \pm\sqrt{-1}$ ). Всередині області, яка обмежена заданим контуром, міститься точка  $z = j$ .

Виділимо під знаком інтеграла функцію  $f(z)$ , яка є аналітичною в області, обмеженою еліпсом. Для цього перепишемо інтеграл у вигляді:

$$\oint_L \frac{e^{2\pi z}}{(z^2+1)^2} dz = \oint_L \frac{e^{2\pi z}}{(z+j)^2(z-j)^2} dz = \oint_{\gamma_1} \frac{e^{2\pi z}}{(z-j)^2} dz + \oint_{\gamma_2} \frac{e^{2\pi z}}{(z+j)^2} dz.$$

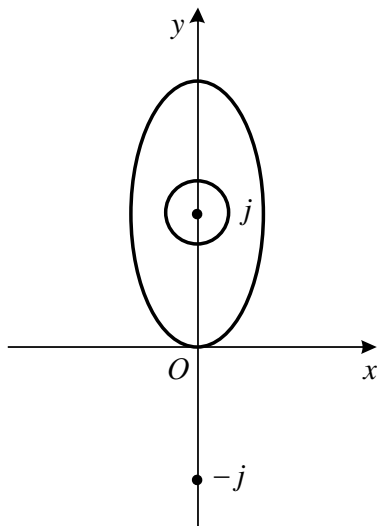


Рисунок 1.11

Оскільки всередині області, яка обмежена заданим контуром, не міститься точка  $z_2 = -j$ , то за інтегральною формулою Коши

$$\oint_{\gamma_2} \frac{e^{2\pi z}}{(z+j)^2} dz = 0.$$

Обчислимо  $\oint_{\gamma_1} \frac{e^{2\pi z}}{(z-j)^2} dz$ . Як функцію  $f(z)$  візьмемо  $\frac{e^{2\pi z}}{(z+j)^2}$ . Вважаючи в формулі (1.11)  $n = 1$ , отримаємо:

$$\oint_L \frac{e^{2\pi z} dz}{(z+j)^2(z-j)^2} = 2\pi j \cdot f'(j).$$

Знаходимо похідну

$$\begin{aligned} f'(z) &= \left( \frac{e^{2\pi z}}{(z+j)^2} \right)' = \frac{e^{2\pi z} \cdot 2\pi \cdot (z+j)^2 - 2(z+j) \cdot e^{2\pi z}}{(z+j)^4} = \\ &= \frac{e^{2\pi z} \cdot 2\pi \cdot (z+j) - 2 \cdot e^{2\pi z}}{(z+j)^3} = \frac{2e^{2\pi z} \cdot (\pi \cdot (z+j) - 1)}{(z+j)^3}. \end{aligned}$$

Звідси

$$\begin{aligned} f'(j) &= \frac{2e^{2\pi j} \cdot (\pi \cdot 2j - 1)}{(2j)^3} = \frac{2(\cos 2\pi + j \sin 2\pi) \cdot (\pi \cdot 2j - 1)}{-8j} = \\ &= \frac{(1+0)(2\pi j - 1)}{-4j} = \frac{-2\pi - j}{4} = -\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{4}j. \end{aligned}$$

Отже,

$$\int_L \frac{e^{2\pi z} dz}{(z+j)^2(z-j)^2} = 2\pi j \left( -\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{4}j \right) = \frac{\pi}{2} - j\pi^2.$$

Відповідь:  $\frac{\pi}{2} - j\pi^2$ .

При інтегруванні функцій комплексного змінного за замкненим контуром (багатозв'язній області) корисно користуватися наступним алгоритмом:

- Зробити рисунок області інтегрування,
- перевірити, чи має підінтегральна функція точки розриву та зобразити їх на рисунку,
- якщо точка розриву не входить до області, яка обмежена контуром, то використати теорему Коши:

$$\oint_L f(z) dz = 0,$$

– якщо точка розриву  $z_0$  входить до області, яка обмежена контуром, то використати інтегральну формулу Коши:

$$\oint_L \frac{f(z)dz}{z - z_0} = 2\pi j \cdot f(z_0),$$

– якщо точка розриву входить до області, яка обмежена контуром та має кратність  $n+1$ , то використати формулу:

$$\oint_L \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{n+1}} = \frac{2\pi j}{n!} f^{(n)}(z_0),$$

– якщо підінтегральна функція має декілька точок розриву  $z_1, z_2, \dots, z_k$ , то потрібно побудувати кола  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$  з центрами в точках  $z_1, z_2, \dots, z_k$  достатньо малих радіусів так, щоб вони не перетинались ні з контуром  $L$ , ні між собою. За теоремою Коши для багатозв'язної області

$$\oint_L f(z)dz = \oint_{\gamma_1} \frac{f_1(z)dz}{z - z_1} + \oint_{\gamma_2} \frac{f_2(z)dz}{z - z_2} + \dots + \oint_{\gamma_k} \frac{f_k(z)dz}{z - z_k}.$$

## РОЗДІЛ 2. ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

### Перетворення Лапласа. Основні поняття

Нехай функція  $f(t)$  задовільняє наступним умовам:

1)  $f(t) \equiv 0$  при  $t < 0$ ;

2)  $|f(t)| < M \cdot e^{s_0 t}$  при  $\forall t > 0$ , де  $M > 0$ ,  $s_0 \geq 0$  – деякі дійсні сталі;

3) на будь-якому скінченному відрізку  $[a, b]$  додатної піввісі  $Ot$  функція  $f(t)$  задовільняє умовам Дирихле, тобто: а) обмежена; б) або неперервна, або має лише скінченне число точок розриву першого роду; в) має скінченне число екстремумів.

Довільна функція, що задовільняє цим умовам, називається функцією-оригіналом або просто оригіналом. Число  $s_0$  називається показником росту оригінала.

Нехай функція  $f(t)$  є оригіналом. Розглянемо інтеграл  $F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$ ,

де  $p = s + j\omega$ .

Функція комплексного аргументу  $F(p)$  називається зображенням Лапласа (або інтегральним перетворенням Лапласа) для функції-оригінала  $f(t)$  та позначається  $L\{f\}$ . Таким чином,

$$F(p) = L\{f\} = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt \quad (2.1)$$

Позначимо відповідність між функцією-оригіналом  $f(t)$  та зображенням Лапласа  $F(p)$  символами:

$$f(t) \xrightarrow{\cdot} F(p) \quad \text{або} \quad F(p) \xleftarrow{\cdot} f(t).$$

**Приклад 1.** Знайти зображення одиничної функції Хевісайда (рис. 2.1):

$$\sigma(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \geq 0, \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases}$$

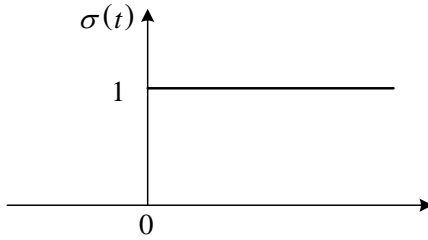


Рисунок 2.1

*Розв'язання.*

Використовуючи формулу (2.1), знаходимо при  $s = \text{Re } p > 0$

$$L\{\sigma(t)\} = \int_0^{\infty} \sigma(t) \cdot e^{-pt} dt = -\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{p} \cdot e^{-pt} \Big|_0^T = \lim_{T \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{p} \cdot e^{-pT} \right).$$

Оцінимо другий доданок:

$$\left| \frac{1}{p} e^{-pT} \right| = \left| \frac{1}{p} e^{-(s+j\omega)T} \right| = \frac{e^{-sT} \cdot |e^{-j\omega T}|}{\sqrt{s^2 + \omega^2}} = \frac{e^{-sT}}{\sqrt{s^2 + \omega^2}},$$

де  $|e^{-j\omega T}| = \sqrt{(\cos \omega T)^2 + (\sin \omega T)^2} = 1$ . Таким чином, другий доданок прямує до нуля, коли  $T \rightarrow \infty$ ,  $\text{Re } p > 0$ .

Тобто, зображення Лапласа для одиничної функції Хевісайда має вигляд:

$$L\{\sigma(t)\} = F(p) = \frac{1}{p}.$$

Таким чином,

$$\sigma(t) \xrightarrow{\cdot} \frac{1}{p}.$$

**Приклад 2.** Знайти зображення функції

$$f(t) = \begin{cases} e^{at} & \text{при } t \geq 0, \\ 0 & \text{при } t < 0, \end{cases}$$

де  $a$  – стала величина.

*Розв'язання.*

Маємо

$$L\{e^{at}\} = F(p) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-(p-a)t} dt = \frac{1}{p-a},$$

якщо  $\operatorname{Re}(p-a) > 0$  або  $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} a = s_0$ .

Отже,

$$\sigma(t)e^{at} \xrightarrow{\bullet} \frac{1}{p-a}. \quad (\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} a).$$

Роль множника  $\sigma(t)$  в лівій частині полягає в тому, що він обертає в нуль функцію при  $t < 0$ .

У подальшому будемо вважати, що всі функції, що розглядаються, забезпечені множником  $\sigma(t)$ , хоча сам множник часто писати не будемо. Так, наприклад, пишемо  $t^n$ ,  $e^{at}$ ,  $\sin \omega t$  тощо, маючи на увазі при цьому відповідно  $\sigma(t) \cdot t^n$ ,  $\sigma(t) \cdot e^{at}$ ,  $\sigma(t) \cdot \sin \omega t$  тощо.

**Теорема існування зображення Лапласа.**

Для будь-якого оригіналу  $f(t)$  зображення Лапласа  $F(p)$  визначено у півплощині  $\operatorname{Re} p = s > s_0$ , де  $s_0$  –показник росту функції  $f(t)$ , причому функція  $F(p)$  аналітична у вказаній півплощині.

*Наслідок.* Якщо  $\operatorname{Re} p = s \rightarrow \infty$ , то  $F(p) \rightarrow 0$ .

### **Властивості перетворення Лапласа**

Властивості перетворення Лапласа полегшують задачу знаходження зображень для великої кількості функцій, а також задачу відшукування оригіналів за їх зображеннями.

### Властивість лінійності.

Якщо  $f_1(t) \xrightarrow{\bullet} F_1(t)$ ,  $f_2(t) \xrightarrow{\bullet} F_2(t)$ ,  $C_1, C_2$  – сталі, то

$$C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t) \xrightarrow{\bullet} C_1 F_1(t) + C_2 F_2(t)$$

або

$$L\{C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t)\} = C_1 L\{f_1(t)\} + C_2 L\{f_2(t)\}. \quad (2.2)$$

**Приклад 3.** Знайти зображення сталої функції  $f(t) = C$ .

*Розв'язання.*

За формулою (2.2), враховуючи результат прикладу 1, одержимо

$$C \xrightarrow{\bullet} \frac{C}{p}.$$

**Приклад 4.** Знайти зображення функції: 1)  $f(t) = \cos \omega t$ ; 2)  $f(t) = \sin \omega t$ .

*Розв'язання.*

За формулою (2.2), враховуючи результат прикладу 2, одержимо

$$\begin{aligned} 1) \quad L\{\cos \omega t\} &= L\left\{\frac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})\right\} = L\left\{\frac{1}{2}e^{j\omega t} + \frac{1}{2}e^{-j\omega t}\right\} = \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p - j\omega} - \frac{1}{p + j\omega}\right) = \frac{p}{p^2 + \omega^2}, \end{aligned}$$

де  $j$  – уявна одиниця,  $j^2 = -1$ .

2) Аналогічно:

$$\begin{aligned} L\{\sin \omega t\} &= L\left\{\frac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})\right\} = L\left\{\frac{1}{2j}e^{j\omega t} - \frac{1}{2j}e^{-j\omega t}\right\} = \\ &= \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{p - j\omega} - \frac{1}{p + j\omega}\right) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}. \end{aligned}$$

Отже,

$$\cos \omega t \xrightarrow{\bullet} \frac{p}{p^2 + \omega^2}; \quad \sin \omega t \xrightarrow{\bullet} \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}.$$

**Приклад 5.** Знайти зображення функції  $f(t) = \text{sh} at$ .

*Розв'язання.*

Застосуємо формулу (2.2) та врахуємо результат прикладу 2.

$$L\{\text{sh} at\} = L\left\{\frac{1}{2}(e^{at} - e^{-at})\right\} = L\left\{\frac{1}{2}e^{at} - \frac{1}{2}e^{-at}\right\} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-a} - \frac{1}{p+a}\right) = \frac{a}{p^2 - a^2}.$$

Таким чином, якщо  $\text{Re } p > \text{Re } \alpha$ , то

$$\text{sh } \alpha t \xrightarrow{\bullet} \frac{\alpha}{p^2 - \alpha^2}.$$

Аналогічно,

$$\text{ch } \alpha t \xrightarrow{\bullet} \frac{p}{p^2 - \alpha^2}.$$

Надамо таблицю, де наведено формули відповідності оригіналів зображенням.

**ТАБЛИЦЯ "ОРИГІНАЛ-ЗОБРАЖЕННЯ"**

	$f(t)$	$F(p)$
<b>1.</b>	1	$\frac{1}{p}$
<b>2.</b>	$t$	$\frac{1}{p^2}$
<b>3.</b>	$t^n,$ $n = 1, 2, 3, \dots$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
<b>4.</b>	$e^{at}$	$\frac{1}{p - \alpha}$
<b>5.</b>	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$

<b>6.</b>	$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
<b>7.</b>	$\operatorname{sh} \alpha t = \frac{e^{\alpha t} - e^{-\alpha t}}{2}$	$\frac{\alpha}{p^2 - \alpha^2}$
<b>8.</b>	$\operatorname{ch} \alpha t = \frac{e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}}{2}$	$\frac{p}{p^2 - \alpha^2}$

Існують приклади, в яких перш ніж знаходити зображення, доцільно провести перетворення функції-оригіналу. Нагадаємо декілька тригонометричних формул, які можуть стати у нагоді.

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)),$$

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)),$$

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)).$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha). \quad \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha).$$

**Приклад 6.** За поданим оригіналом  $f(t)$  знайти зображення  $F(p)$  :

1)  $f(t) = t^3 + 3t^2 + 7,$

2)  $f(t) = \sin 3t + 11 \operatorname{ch} 5t,$

3)  $f(t) = 6e^{-7t} + \cos 8t,$

4)  $f(t) = \cos^2 t,$

5)  $f(t) = \sin^3 t.$

*Розв'язання.*

Зобразимо кожен доданок окремо, а потім використаємо властивість лінійності.

$$1) t^3 \xrightarrow{\cdot} \frac{3!}{p^4}, \quad 3t^2 \xrightarrow{\cdot} 3 \cdot \frac{2!}{p^3}, \quad 7 = 7 \cdot 1 \xrightarrow{\cdot} 7 \cdot \frac{1}{p}.$$

Остаточно отримаємо:  $F(p) = \frac{3!}{p^4} + 3 \cdot \frac{2!}{p^3} + 7 \cdot \frac{1}{p}$ .

$$2) \sin 3t \xrightarrow{\cdot} \frac{3}{p^2 + 9}, \quad \operatorname{ch} 5t \xrightarrow{\cdot} \frac{p}{p^2 - 25}.$$

Остаточно отримаємо:  $F(p) = \frac{3}{p^2 + 9} + \frac{p}{p^2 - 25}$ .

$$3) 3e^{-7t} \xrightarrow{\cdot} 3 \cdot \frac{1}{p+7}, \quad \cos 8t \xrightarrow{\cdot} \frac{p}{p^2 + 64}.$$

Отже,  $F(p) = 3 \cdot \frac{1}{p+7} + \frac{p}{p^2 + 64}$ .

4) Перш, ніж знаходити зображення, перетворимо функцію-оригінал. Для цього використаємо формулу зниження степеня

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha).$$

$$\cos^2 t = \frac{1}{2}(1 + \cos 2t) \xrightarrow{\cdot} \frac{1}{2} \left( \frac{1}{p} + \frac{p}{p^2 + 4} \right).$$

Отримуємо,  $F(p) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{p} + \frac{p}{p^2 + 4} \right)$ .

5) Перш, ніж знаходити зображення, перетворимо функцію-оригінал. Для цього використаємо формулу зниження степеня

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$$

та формулу

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)).$$

$$\begin{aligned} \sin^3 \alpha &= \sin \alpha \cdot \sin^2 \alpha = \sin \alpha \cdot \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha) = \frac{1}{2}(\sin \alpha - \sin \alpha \cdot \cos 2\alpha) = \\ &= \frac{1}{2} \left( \sin \alpha - \frac{1}{2}(\sin(\alpha - 2\alpha) + \sin(\alpha + 2\alpha)) \right) = \frac{1}{2} \sin \alpha + \frac{1}{4} \sin \alpha - \frac{1}{4} \sin 3\alpha = \end{aligned}$$

$$= \frac{3}{4} \sin \alpha - \frac{1}{4} \sin 3\alpha \xrightarrow{\bullet} \frac{3}{4} \frac{1}{p^2+1} - \frac{1}{4} \frac{1}{p^2+9}.$$

Отже,  $F(p) = \frac{3}{4} \frac{1}{p^2+1} - \frac{1}{4} \frac{1}{p^2+9}.$

Відповідь: 1)  $F(p) = \frac{3!}{p^4} + 3 \cdot \frac{2!}{p^3} + 7 \cdot \frac{1}{p},$     2)  $F(p) = \frac{3}{p^2+9} + \frac{p}{p^2-25},$

3)  $F(p) = 3 \cdot \frac{1}{p+7} + \frac{p}{p^2+64},$     4)  $F(p) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{p} + \frac{p}{p^2+4} \right),$

5)  $F(p) = \frac{3}{4} \frac{1}{p^2+1} - \frac{1}{4} \frac{1}{p^2+9}.$

**Теорема подібності.**

Якщо  $\lambda$  – додатне число та  $f(t) \xrightarrow{\bullet} F(p),$  то

$$f(\lambda t) \xrightarrow{\bullet} \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{p}{\lambda}\right).$$

Тобто множення аргумента оригіналу на додатне число  $\lambda$  приводить до ділення зображення та його аргумента на це число.

**Приклад 7.** Знайти зображення Лапласа для функції  $f(t) = (\lambda t)^n,$  де  $\lambda > 0.$

*Розв'язання.*

Оскільки  $t^n \xrightarrow{\bullet} \frac{n!}{p^{n+1}}$  (див. таблицю «Оригінал-зображення»), то за теоремою подібності

$$(\lambda t)^n \xrightarrow{\bullet} \frac{1}{\lambda} \frac{n!}{\left(\frac{p}{\lambda}\right)^{n+1}} = \frac{\lambda^n n!}{p^{n+1}}.$$

**Теорема зсуву.**

Якщо  $f(t) \xrightarrow{\bullet} F(p),$  то для будь-якого  $p_0$  має місце відповідність

$$F(p - p_0) \xrightarrow{\bullet} e^{p_0 t} \cdot f(t).$$

**Приклад 8.** Знайти зображення Лапласа для функції:

$$1) f(t) = e^{2t} \cdot \cos 5t; \quad 2) f(t) = e^{-5t} \cdot t^7.$$

*Розв'язання.*

1) Оскільки  $\cos 5t \xrightarrow{\cdot} \frac{p}{p^2 + 25}$ , то, застосувавши теорему зсуву,

отримаємо:

$$e^{2t} \cdot \cos 5t \xrightarrow{\cdot} \frac{p-2}{(p-2)^2 + 25}.$$

2) Користуючись таблицею «Оригінал-зображення», отримаємо:

$$t^7 \xrightarrow{\cdot} \frac{7!}{p^8}.$$

Отже, за теоремою зсуву зображення маємо:

$$e^{-5t} \cdot t^7 \xrightarrow{\cdot} \frac{7!}{(p+5)^8}.$$

*Відповідь:* 1)  $F(p) = \frac{p-2}{(p-2)^2 + 25}$ , 2)  $F(p) = \frac{7!}{(p+5)^8}$ .

**Теорема запізнення.**

Якщо  $\tau$  – додатне число та  $f(t) \xrightarrow{\cdot} F(p)$ , то

$$f(t-\tau) \cdot \sigma(t-\tau) \xrightarrow{\cdot} e^{-\tau p} \cdot F(p). \quad (2.3)$$

Тобто запізнення аргумента оригіналу на додатну величину  $\tau$  призводить до множення зображення оригінала без запізнення на  $e^{-\tau p}$ .

**Приклад 9.** Користуючись результатом прикладу 1:  $\sigma(t) \xrightarrow{\cdot} \frac{1}{p}$ , та формулою (2.3) маємо

$$\sigma(t-\tau) \xrightarrow{\cdot} \frac{e^{-\tau p}}{p}.$$

**Приклад 10.** Знайти зображення оригінала  $f(t) = (t-1)^2 \cdot \sigma(t-1)$ .

*Розв'язання.*

У прикладі  $f(t)$  – це функція  $t^2$ , але входить з запізненням  $\tau = 1$ . Оскільки

$$t^2 \xrightarrow{\cdot} \frac{2}{p^3},$$

то за теоремою запізнення маємо

$$(t-1)^2 \sigma(t-1) \xrightarrow{\cdot} \frac{2}{p^3} e^{-p}.$$

### Диференціювання та інтегрування оригіналів та зображень

#### *Теорема диференціювання оригіналу.*

Нехай функції  $f(t), f'(t), f''(t), \dots, f^{(n-1)}(t), f^{(n)}(t)$  неперервні для всіх  $t \geq 0$ , причому всі вказані функції є оригіналами з однаковим показником росту  $s_0$  та  $f(t) \xrightarrow{\cdot} F(p)$ . Тоді для всіх  $\text{Re } p > s_0$  справедлива формула:

$$L\{f^{(n)}(t)\} = p^n L\{f\} - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

або

$$f^{(n)}(t) \xrightarrow{\cdot} p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0),$$

Зокрема,

$$f'(t) \xrightarrow{\cdot} pF(p) - f(0),$$

$$f''(t) \xrightarrow{\cdot} p^2 F(p) - pf(0) - f'(0),$$

$$f'''(t) \xrightarrow{\cdot} p^3 F(p) - p^2 f(0) - pf'(0) - f''(0)$$

.....

*Зауваження.* При  $f(0) = 0$  маємо

$$f'(t) \xrightarrow{\cdot} pF(p).$$

Тобто, якщо початкове значення оригіналу  $f(t)$  дорівнює нулю, то диференціювання оригіналу призводить до множення його зображення на  $p$ .

**Приклад 11.** Знайти зображення функції  $f(t) = \cos^2 t$ .

*Розв'язання.*

Нехай  $f(t) \xrightarrow{\bullet} F(p)$ . Тоді

$$f'(t) \xrightarrow{\bullet} pF(p) - f(0).$$

Але  $f(0) = \cos^2 0 = 1$ , а

$$f'(t) = 2 \cos t (-\sin t) = -\sin 2t \xrightarrow{\bullet} -\frac{2}{p^2 + 4}.$$

Звідки

$$-\frac{2}{p^2 + 4} = pF(p) - 1,$$

Отже,  $F(p) = \frac{p^2 + 2}{(p^2 + 4)p}$ .

**Теорема інтегрування оригіналу.**

Якщо  $f(t) \xrightarrow{\bullet} F(p)$ , то

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \xrightarrow{\bullet} \frac{F(p)}{p}, \quad (\operatorname{Re} p > s_0).$$

З теорем диференціювання та інтегрування оригіналу випливає, що діям аналізу – диференціюванню та інтегруванню оригіналів відповідають алгебраїчні дії відповідно множення та ділення зображень на  $p$ . Величину  $p$  можна, таким чином, розглядати як оператор диференціювання, а величину  $\frac{1}{p}$  – як оператор інтегрування за інтервалом  $[0, t]$ .

**Приклад 12.** Знайти зображення функції  $\int_0^t e^\tau d\tau$ .

*Розв'язання.*

За таблицею «Оригінал-зображення»,  $e^t \xrightarrow{\bullet} \frac{1}{p-1}$ .

За теоремою інтегрування оригіналу, маємо

$$\int_0^t e^{\tau} d\tau \xrightarrow{\bullet} \frac{1}{p} = \frac{1}{p(p-1)}.$$

$$\text{Відповідь: } F(p) = \frac{1}{p(p-1)}.$$

**Теорема диференціювання зображення.**

Якщо  $f(t) \xrightarrow{\bullet} F(p)$ , то

$$-t \cdot f(t) \xrightarrow{\bullet} F'(p).$$

**Приклад 13.** Знайти зображення Лапласа для функції

$$1) t \cdot \sin 2t, 2) t^2 \cdot \cos 2t.$$

*Розв'язання.*

1) Користуючись таблицею оригінал-зображення, отримаємо:

$$\sin 2t \xrightarrow{\bullet} \frac{2}{p^2 + 4},$$

а далі використаємо теорему про диференціювання зображення:

$$t \cdot \sin 2t \xrightarrow{\bullet} \left( \frac{2}{p^2 + 4} \right)' = - \left( - \left( \frac{2 \cdot 2p}{(p^2 + 4)^2} \right) \right) = \frac{4p}{(p^2 + 4)^2}.$$

2) Розв'язання цього прикладу аналогічне розв'язанню прикладу 1).

Теорему про диференціювання зображення використовуємо двічі.

$$\cos 2t \xrightarrow{\bullet} \frac{p}{p^2 + 4},$$

$$t \cdot \cos 2t \xrightarrow{\bullet} - \left( \frac{p}{p^2 + 4} \right)' = - \left( \frac{p'(p^2 + 4) - p(p^2 + 4)'}{p^2 + 4} \right) = - \left( \frac{p^2 + 4 - p \cdot 2p}{(p^2 + 4)^2} \right) =$$

$$= -\frac{4-p^2}{(p^2+4)^2},$$

$$t^2 \cdot \cos 2t = t \cdot t \cdot \cos 2t \xrightarrow{\bullet} -\left(-\frac{4-p^2}{(p^2+4)^2}\right)' = \frac{(4-p^2)'(p^2+4)^2 - (4-p^2)\left((p^2+4)^2\right)'}{(p^2+4)^4} =$$

$$= \frac{-2p(p^2+4)^2 - (4-p^2)2(p^2+4) \cdot 2p}{(p^2+4)^4} = \frac{2p(p^2+4)\left(-(p^2+4) - 2(4-p^2)\right)}{(p^2+4)^4} =$$

$$= \frac{2p(p^2-12)}{(p^2+4)^3}.$$

Відповідь: 1)  $F(p) = -\frac{4-p^2}{(p^2+4)^2}$ , 2)  $F(p) = \frac{2p(p^2-12)}{(p^2+4)^3}$ .

**Теорема інтегрування зображення.**

Якщо  $f(t)$  і  $\frac{f(t)}{t}$  – функції-оригінали,  $s_1$  – показник росту функції  $\frac{f(t)}{t}$ , то

$$\frac{f(t)}{t} \xrightarrow{\bullet} \int_p^{\infty} F(w) dw, \quad (\operatorname{Re} p > s_1).$$

У багатьох прикладах при використанні теореми інтегрування зображення використовують властивості логарифмів. Нагадаємо їх:

$$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b, \quad \ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b, \quad \ln a^k = k \ln a.$$

**Приклад 14.** Дано: 1)  $f(t) = \frac{2(1 - \cos \omega t)}{t}$ , 2)  $f(t) = \frac{\sin 3t - \sin 5t}{t}$ .

Знайти  $F(p)$ .

*Розв'язання.*

1) Використовуючи таблицю «Оригінал-зображення» та формулу (2.2), маємо:

$$2(1 - \cos \omega t) \xrightarrow{\bullet} \frac{2}{p} - \frac{2p}{p^2 + \omega^2}.$$

За теоремою інтегрування зображення:

$$\begin{aligned} \frac{2(1 - \cos \omega t)}{t} &\xrightarrow{\bullet} \int_p^\infty \left( \frac{2}{w} - \frac{2w}{w^2 + \omega^2} \right) dw = \left[ \ln w^2 - \ln(w^2 + \omega^2) \right]_p^\infty = \\ &= \lim_{B \rightarrow \infty} \ln \frac{w^2}{w^2 + \omega^2} \Big|_p^B = \lim_{B \rightarrow \infty} \ln \frac{B^2}{B^2 + \omega^2} - \ln \frac{p^2}{p^2 + \omega^2} = \ln 1 - \ln \frac{p^2}{p^2 + \omega^2} = \\ &= \ln \frac{p^2 + \omega^2}{p^2} = \ln \left( 1 + \frac{\omega^2}{p^2} \right), \end{aligned}$$

де

$$\lim_{B \rightarrow \infty} \ln \frac{B^2}{B^2 + \omega^2} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\| = \left\| \text{за правилом} \right\| = \left\| k = 2, a_0 = 1 \right\| = 1.$$

2) Використовуючи таблицю «Оригінал-зображення» та формулу (2.2), маємо:

$$\sin 3t - \sin 5t \xrightarrow{\bullet} \frac{3}{p^2 + 9} - \frac{5}{p^2 + 25}.$$

За теоремою інтегрування зображення:

$$\begin{aligned} \frac{\sin 3t - \sin 5t}{t} &\xrightarrow{\bullet} \int_p^\infty \frac{3}{w^2 + 9} dw - \int_p^\infty \frac{5}{w^2 + 25} dw = \left( 3 \cdot \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{w}{3} - 5 \cdot \frac{1}{5} \operatorname{arctg} \frac{w}{5} \right) \Big|_p^\infty = \\ &= \lim_{B \rightarrow \infty} \left( \operatorname{arctg} \frac{w}{3} - \operatorname{arctg} \frac{w}{5} \right) \Big|_p^B = \lim_{B \rightarrow \infty} \left( \operatorname{arctg} \frac{B}{3} - \operatorname{arctg} \frac{B}{5} - \left( \operatorname{arctg} \frac{p}{3} - \operatorname{arctg} \frac{p}{5} \right) \right) = \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{p}{3} + \operatorname{arctg} \frac{p}{5} = \operatorname{arctg} \frac{p}{5} - \operatorname{arctg} \frac{p}{3}. \end{aligned}$$

$$\text{Відповідь: 1) } F(p) = \ln \left( 1 + \frac{\omega^2}{p^2} \right), \quad 2) \quad F(p) = \operatorname{arctg} \frac{p}{5} - \operatorname{arctg} \frac{p}{3}.$$

### Знаходження оригіналу за поданим зображенням

Існує велика кількість задач, де за поданим зображенням потрібно відновити оригінал. На практиці знаходження функції-оригіналу зазвичай проводять за

наступним планом: спочатку в таблиці оригінал-зображення намагаються відшукати для заданого зображення  $F(p)$  відповідний йому оригінал  $f(t)$ . Для отримання відповідності використовують додавання та віднімання однієї та тієї ж величини, множення та ділення на одну і ту саму величину, а також теореми лінійності та зсуву. В більш складних випадках функцію  $F(p)$  намагаються зобразити у вигляді суми найпростіших дробів та використовуючи теореми лінійності та зсуву знаходять оригінал.

У більшості прикладів, пов'язаних із знаходженням оригіналів за заданим зображенням Лапласа, задане зображення – правильний раціональний дріб вигляду

$$Y(p) = \frac{F(p)}{G(p)}, \text{ де } F(p), G(p) - \text{поліноми змінної } p. \text{ Такий дріб можна представити}$$

у вигляді суми найпростіших раціональних дробів методом невизначених коефіцієнтів, а потім, застосувавши один з вищенаведених підходів, визначити шукану оригінал-функцію.

Розглянемо цей метод на прикладах.

Якщо в знаменнику квадратний тричлен  $ax^2 + bx + c$ , розрізняють два випадки: а)  $D < 0$ , б)  $D \geq 0$ .

а) Коефіцієнт  $a$  ( $a \neq 0$ ) слід винести за дужки:

$$ax^2 + bx + c = a \left( x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a(x^2 + px + q).$$

Далі слід виділити повний квадрат з квадратного тричлена:

$$x^2 + px + q = \left( x + \frac{p}{2} \right)^2 - \frac{p^2}{4} + q,$$

б) У цьому випадку квадратний тричлен розкладають на множники  $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ , де  $x_1, x_2$  – корені відповідного квадратного рівняння.

**Приклад 15.** За заданим зображенням  $F(p)$  знайти оригінал  $f(t)$ :

$$1) F(p) = \frac{1}{p^2 + 6p + 13}, \quad 2) F(p) = \frac{1}{p^2 + 6p + 10},$$

$$3) F(p) = \frac{p}{p^2 - 5p + 6}, 4) F(p) = \frac{p^2 - 8p - 4}{p^2(p^2 + 4)}.$$

Розв'язання.

1) Розглянемо знаменник дробу:

$$p^2 + 6p + 13 = \|D < 0\| = (p+3)^2 + 4.$$

Отримаємо  $F(p) = \frac{1}{(p+3)^2 + 4}$ . Цей вираз схожий на формулу

$$\sin \omega t \xrightarrow{\cdot} \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

з таблиці «Оригінал-зображення» ( $\omega = 2$ ), але в нашому прикладі  $p+3$  замість  $p$  і в чисельнику бракує множника 2. Помножимо чисельник та знаменник дробу на 2 та використаємо теорему зсуву:

$$F(p) = \frac{1}{(p+3)^2 + 4} = \frac{1}{2} \frac{2}{(p+3)^2 + 4} \xrightarrow{\cdot} \frac{1}{2} e^{-3t} \cdot \sin 2t.$$

2) Розглянемо знаменник дробу:  $p^2 + 6p + 10 = \|D < 0\| = (p+3)^2 + 1$ .

Отримаємо  $F(p) = \frac{p}{(p+3)^2 + 1}$ . Цей вираз схожий на формулу

$$\cos \omega t \xrightarrow{\cdot} \frac{p}{p^2 + \omega^2}$$

з таблиці «Оригінал-зображення» ( $\omega = 1$ ), але в нашому прикладі  $p+3$  замість  $p$  і в чисельнику бракує доданка 3. В чисельнику додамо та віднімемо число 3 та розділимо дріб почленно. Отримаємо:

$$F(p) = \frac{p+3-3}{(p+3)^2 + 1} = \frac{p+3}{(p+3)^2 + 1} - \frac{3}{(p+3)^2 + 1}$$

та використаємо теореми лінійності та зсуву:

$$F(p) = \frac{p+3}{(p+3)^2 + 1} - \frac{3}{(p+3)^2 + 1} \xrightarrow{\cdot} e^{-3t} \cdot \cos t - 3e^{-3t} \cdot \sin t.$$

3) Розглянемо знаменник дробу:

$$p^2 - 5p + 6 = \|D > 0\| = \left\| \begin{array}{l} \text{за теоремою Вієта :} \\ p_1 = 3, \quad p_2 = 2 \end{array} \right\| = (p-3)(p-2).$$

Отримаємо:

$$F(p) = \frac{p}{(p-3)(p-2)} = \frac{A}{p-3} + \frac{B}{p-2} = \frac{A(p-2) + B(p-3)}{(p-3)(p-2)},$$

$$p = A(p-2) + B(p-3),$$

$$p = 2: \quad 2 = -B, \quad B = -2,$$

$$p = 3: \quad 3 = A.$$

Невизначені коефіцієнти  $A$  та  $B$  знайдено методом частинних значень. Використовуючи таблицю «Оригінал-зображення» та теорему лінійності, отримаємо:

$$F(p) = \frac{3}{p-3} + \frac{-2}{p-2} \xrightarrow{\bullet} 3e^{3t} - 2e^{2t}.$$

4) Це правильний раціональний дріб і його можна зобразити у вигляді суми трьох найпростіших дробів:

$$\frac{p^2 - 8p - 4}{p^2(p^2 + 4)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{Cp + D}{p^2 + 4} = \frac{Ap(p^2 + 4) + B(p^2 + 4) + (Cp + D)p^2}{p^2(p^2 + 4)}.$$

$$p^2 - 8p - 4 = Ap(p^2 + 4) + B(p^2 + 4) + (Cp + D)p^2.$$

Невизначені коефіцієнти  $A, B, C, D$  знайдемо методом порівняння коефіцієнтів при однакових степенях  $p$ .

$$\text{При } p^3: \quad 0 = A + C,$$

$$\text{При } p^2: \quad 1 = B + D,$$

$$\text{При } p: \quad -8 = 4A \Rightarrow A = -2,$$

$$\text{При } p^0: \quad -4 = 4B \Rightarrow B = -1.$$

З першого та другого рівнянь отримаємо  $C = 2, D = 2$ .

Отже,

$$F(p) = \frac{p^2 - 8p - 4}{p^2(p^2 + 4)} = -\frac{2}{p} - \frac{1}{p^2} + \frac{2p + 2}{p^2 + 4} = -\frac{2}{p} - \frac{1}{p^2} + 2\frac{p}{p^2 + 4} + \frac{2}{p^2 + 4}.$$

Враховуючи таблицю «Оригінал-зображення» та теорему лінійності, отримаємо:

$$-\frac{2}{p} - \frac{1}{p^2} + 2\frac{p}{p^2+4} + \frac{2}{p^2+4} \xrightarrow{\cdot} -2-t + 2\cos 2t + \sin 2t.$$

*Відповідь:*

1)  $f(t) = \frac{1}{2}e^{-3t} \cdot \sin 2t$ , 2)  $f(t) = e^{-3t} \cdot \cos t - 3e^{-3t} \cdot \sin t$ ,

3)  $f(t) = 3e^{3t} - 2e^{2t}$ , 4)  $f(t) = -2 - t + 2\cos 2t + \sin 2t$ .

## РОЗДІЛ 3. ТЕОРІЯ ПОЛЯ

### Векторне поле. Основні поняття

*Означення.* Нехай в кожній точці  $M$  області  $D$  простору  $R$  задано вектор  $\vec{a}(M) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$  (рис. 3.1), де  $P(x, y, z)$ ,  $Q(x, y, z)$ ,  $R(x, y, z)$  – неперервні в  $D$  функції,  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  – ортонормований базис декартової прямокутної системи координат. Тоді говорять, що в  $D$  задане *векторне поле*  $\vec{a}(M) = \vec{a}(x, y, z)$ .

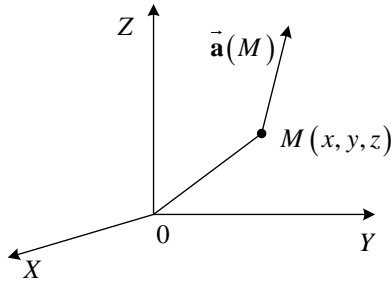


Рисунок 3.1

*Приклади:* силове (гравітаційне) поле Землі, поле швидкостей рідини або газу в каналах і апаратах, електричне поле напруженості, електромагнітне поле.

Геометричні характеристики векторного поля – векторні лінії.

*Означення.* Векторні лінії векторного поля  $\vec{a}(M)$  – криві, дотичні в кожній точці яких співпадають з  $\vec{a}(M)$  (рис. 3.2).

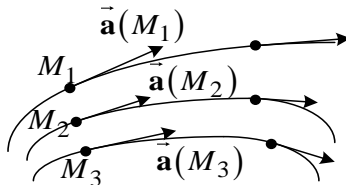


Рисунок 3.2

Через те, що будь-яку криву на нескінченно малій ділянці  $\vec{ds} = \{dx; dy; dz\}$  (вектор дотичної) можна замінити відрізком дотичної, а напрям цієї дотичної співпадає з напрямом  $\vec{a}(M)$ , то рівняння  $\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$  визначатиме векторну лінію.

В залежності від фізичної природи поля векторні лінії мають свої назви. В гідродинамічному полі – це лінії струму рідини, в силовому полі – силові лінії.

*Означення.* Нехай в векторному полі  $\vec{a}(M)$  міститься довільна площадинка  $\Sigma$ , обмежена замкненим контуром  $\Gamma$ . Через границю цієї площинки проведемо векторні лінії. Фігура, що утворилася при цьому, є *векторною трубкою* (рис. 3.3).

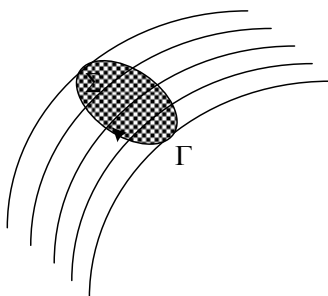


Рисунок 3.3

## Поняття про поверхневі інтеграли.

### Поверхня, її орієнтація. Площа поверхні

Розглянемо в області  $V$  простору  $R^3$  певну поверхню  $\Omega$  – гладку або кусково-гладку (рис. 3.4). Нагадаємо, що гладка поверхня – це така поверхня, в кожній точці якої існує дотична площина, що неперервно змінюється вздовж поверхні, а кусково-гладка – така, що складається зі скінченної кількості гладких «кусків» (гладких поверхонь).

На поверхні  $\Omega$  (замкненій або обмеженій гладким контуром) візьмемо точку  $M_0$ . В цій точці побудуємо нормаль до поверхні  $\Omega$ , обравши певний напрямок нормалі (один з двох можливих).

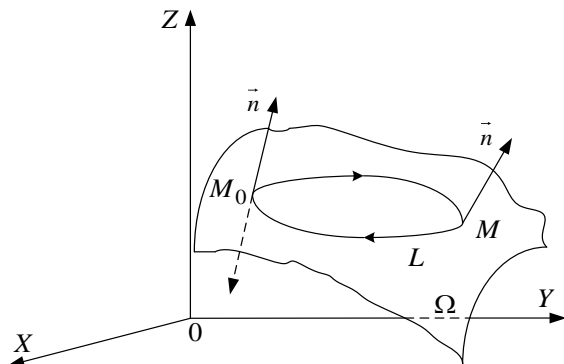


Рисунок 3.4

Проведемо на поверхні довільний контур  $L$ , який починається і закінчується в точці  $M_0$  та не перетинає межу поверхні. Розглянемо точку  $M$ , що рухається вздовж контуру, і в кожному з її положень проведемо нормаль того напрямку, в який неперервно переходить нормаль із попередньої точки. Якщо після обходу контуру нормаль повернеться в точці  $M_0$  до свого початкового положення при довільному виборі точки  $M_0$  на поверхні, то така поверхня називається *двобічною*. Якщо ж напрямок нормалі після обходу хоча б в одній точці зміниться на протилежний, поверхня – *однобічна*.

*Означення.* Сукупність усіх точок поверхні з однаковим напрямком нормалі називається *стороною поверхні*.

*Задати орієнтацію поверхні (обрати визначену сторону поверхні)* означає обрати в кожній точці поверхні один з двох можливих напрямів нормалі так, щоб він неперервно змінювався від точки до точки.

Розглянемо обмежену гладку (або кусково-гладку) поверхню  $\Omega$ , яка обмежена контуром  $L$ , і розіб'ємо її будь-якими кривими на «елементарні поверхні» (ділянки)  $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n$  (рис. 3.5). В кожній ділянці  $\Omega_k$  візьмемо довільну точку  $M_k$  і побудуємо проекцію цієї ділянки на дотичну площину до поверхні, що проходить через точку  $M_k$ . Проекцією буде плоска фігура з площею

$T_k$ . Позначимо через  $\rho$  найбільшу відстань між двома точками будь-якої ділянки поверхні  $\Omega$ .

*Означення.* Назвемо площею  $S$  поверхні  $\Omega$  границю суми площ  $T_k$  при  $\rho \rightarrow 0$ :

$$S = \lim_{\rho \rightarrow 0} \sum_k T_k.$$

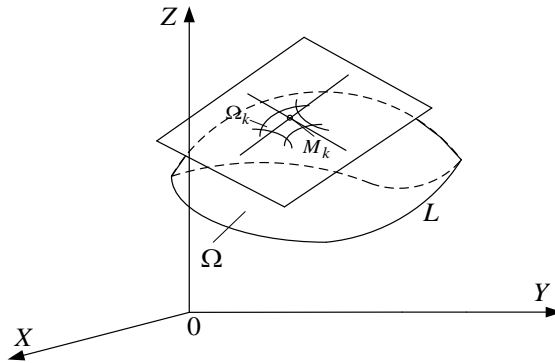


Рисунок 3.5

### Потік векторного поля

Нехай  $\Omega$  – орієнтована гладка поверхня (рис. 3.6), що знаходиться в області  $V \subset R^3$ , в якій задано векторне поле

$$\vec{a}(M) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}.$$

Розіб'ємо поверхню  $\Omega$  кривими на ділянки  $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n$  з площами  $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n$ . В кожній ділянці  $\Omega_i$  оберемо довільну точку  $M_i(x_i, y_i, z_i)$ . Зафіксуємо за допомогою нормалі  $\vec{n}(M)$  одну з двох сторін поверхні. В точці  $M_i$  побудуємо одиничний вектор нормалі  $\vec{n}^0(M_i)$ . Складемо вектор  $\vec{\Delta\sigma}_i = \Delta\sigma_i \cdot \vec{n}^0(M_i)$ , що міститься на  $\vec{n}^0(M_i)$  і має довжину  $\Delta\sigma_i$ .

Розглянемо скалярний добуток  $\vec{a}(M_i) \cdot \vec{\Delta\sigma}_i$  та побудуємо інтегральну суму

$$\sum_{i=1}^n \vec{a}(M_i) \cdot \vec{\Delta\sigma}_i. \quad (3.1)$$

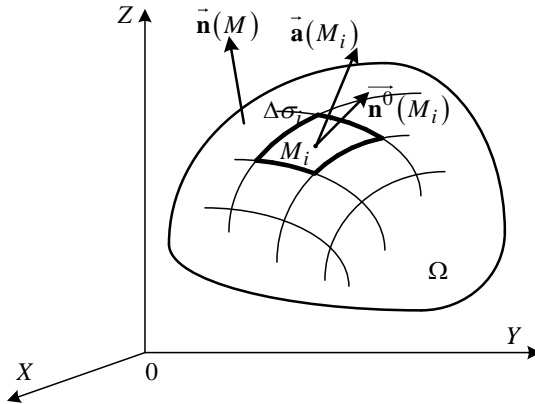


Рисунок 3.6

*Означення.* Якщо існує скінченна границя послідовності інтегральних сум (3.1), яка не залежить ані від способу розбиття поверхні  $\Omega$  на ділянки, ані від вибору точок  $M_i(x_i, y_i, z_i)$ , при  $n \rightarrow \infty, \rho \rightarrow 0$ , то вона називається *поверхневим інтегралом першого роду від скалярного добутку  $\vec{a}(M_i)$  на одиничний вектор нормалі  $\vec{n}^0(M_i)$  по поверхні  $\Omega$*  і позначається

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \vec{a}(M_i) \cdot \vec{\Delta\sigma}_i = \iint_{\Omega} \vec{a}(M_i) \cdot \vec{n}^0(M) d\sigma = \iint_{\Omega} \vec{a}(M_i) \cdot \vec{d\sigma}, \quad (3.2)$$

Інтеграл (3.2) – *потік*  $\Pi$  *векторного поля  $\vec{a}(M_i)$  через поверхню  $\Omega$*  – скалярна характеристика векторного поля.

### Властивості потоку:

1. Потік змінює знак на протилежний, якщо змінюється орієнтація поверхні  $\Omega$ :

$$\iint_{\Omega^+} \vec{a}(M_i) \cdot \vec{n}^0(M) d\sigma = - \iint_{\Omega^-} \vec{a}(M_i) \cdot \vec{n}^0(M) d\sigma.$$

2. *Аддитивність відносно поверхні інтегрування.* Якщо поверхню  $\Omega$  можна розбити на декілька частин  $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_k$ , то потік векторного поля  $\vec{a}(M)$  через поверхню  $\Omega$  дорівнює сумі потоків через поверхні  $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_k$ :

$$\Pi_{\Omega}(\vec{a}(M)) = \sum_{i=1}^k \Pi_i = \sum_{i=1}^k \iint_{\Omega_i} \vec{a}(M_i) \cdot \vec{n}^0(M) d\sigma.$$

3. *Лінійність.* Нехай  $\vec{a}_1(M)$ ,  $\vec{a}_2(M)$  – векторні поля,  $\alpha$ ,  $\beta$  – сталі, тоді

$$\iint_{\Omega} (\alpha \vec{a}_1(M) + \beta \vec{a}_2(M)) \cdot \vec{n}^0(M) d\sigma = \alpha \cdot \iint_{\Omega} \vec{a}_1(M) \cdot \vec{n}^0(M) d\sigma + \beta \cdot \iint_{\Omega} \vec{a}_2(M) \cdot \vec{n}^0(M) d\sigma.$$

### Обчислення потоку векторного поля

Нехай поверхня  $\Omega$  задана рівнянням  $z = f(x, y)$  і її можна спроекувати на координатну площину  $XOY$ ; область  $D$  – проекція  $\Omega$  на  $XOY$  (рис. 3.7). Тоді

вектор нормалі  $\vec{n} = \left( \frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial y}; -1 \right)$ , а одинична нормаль  $\vec{n}^0 = \pm \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} \Rightarrow$

$$\vec{n}^0 = \pm \left( \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}}; \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}}; \frac{-1}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}} \right).$$

Встановимо зв'язок між елементом  $d\sigma$  на поверхні  $\Omega$  і елементом  $dS$  (проекція  $d\sigma$  на  $XOY$ ) області  $D$ :  $d\sigma = \frac{dS}{|\cos \gamma|}$ , де  $\gamma$  – кут між нормаллю  $\vec{n}$  і віссю  $OZ$  (її визначає вектор  $\vec{k} = (0; 0; 1)$ ).

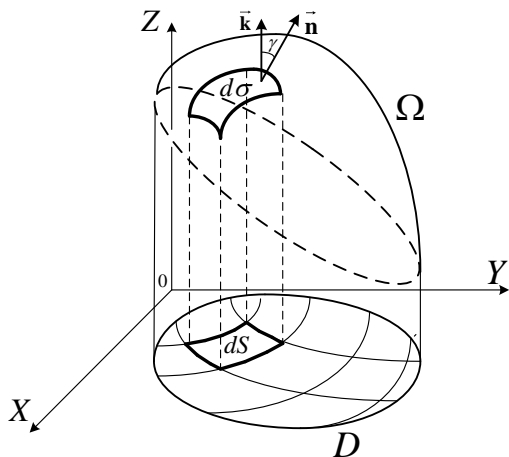


Рисунок 3.7

Маємо

$$|\cos \gamma| = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}},$$

$$d\sigma = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1} \cdot dS = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1} dx dy.$$

Потік через поверхню  $\Omega$  векторного поля  $\vec{a}(M)$ :

$$\begin{aligned} \Pi &= \iint_{\Omega} \vec{a}(M) \cdot \vec{n}^0(M) d\sigma = \iint_D \vec{a}(M) \cdot \vec{n}^0(M) \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1} dx dy = \\ &= \pm \iint_D \left( P(x, y, f(x, y)) \frac{\partial f}{\partial x} + Q(x, y, f(x, y)) \frac{\partial f}{\partial y} - R(x, y, f(x, y)) \right) \times \\ &\times \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1} dx dy. \end{aligned}$$

Тобто обчислення потоку приведено до обчислення подвійного інтеграла. Знак залежить від напряму нормалі до поверхні  $\Omega$ .

**Приклад 1.** Обчислити потік векторного поля  $\vec{a}(M) = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + 7z \cdot \vec{k}$  через повну поверхню циліндра висоти  $H$ , з основою радіуса  $R$ .

*Розв'язання.*

Циліндр  $\Omega$  розмістимо в системі координат таким чином, що його віссю є вісь  $OZ$ . Поверхня  $\Omega$  є об'єднанням трьох поверхонь:  $\Omega_1$  – верхня основа циліндра – круг, що міститься в площині  $z = H$  і має радіус  $R$ ,  $\Omega_2$  – бічна поверхня циліндра і  $\Omega_3$  – нижня основа циліндра – круг, що міститься в площині  $z = 0$  і має радіус  $R$  (рис. 3.8). Тобто  $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3$ .

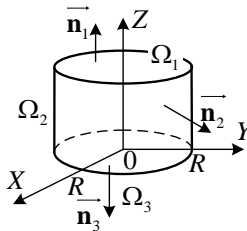


Рисунок 3.8

Визначимо нормалі до поверхонь. На поверхні  $\Omega_1$  нормаль, очевидно,  $\vec{n}_1 = \vec{k} = (0; 0; 1)$ , на  $\Omega_3$  нормаль має протилежний напрямок, тобто  $\vec{n}_3 = -\vec{k} = (0; 0; -1)$ . Вектор нормалі  $\vec{n}_2$  перпендикулярний осі  $OZ$  і, враховуючи те, що рівняння бічної поверхні циліндра  $\Omega_2$ :

$$x^2 + y^2 = R^2 \Leftrightarrow F(x, y, z) = x^2 + y^2 - R^2 = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

координати вектора

$$\vec{n}_2 = \pm \left( \frac{2x}{\sqrt{4x^2 + 4y^2}}; \frac{2y}{\sqrt{4x^2 + 4y^2}}; 0 \right) = \pm \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}; 0 \right).$$

Враховуючи, що нормаль повинна утворювати гострий кут з віссю  $OX$ , якщо  $x > 0$  і тупий кут з віссю  $OY$ , якщо  $x < 0$ , в формулі для обчислення  $\vec{n}_2$  обираємо «+».

Скалярні добутки:

$$\vec{a}(M) \cdot \vec{n}_1(M) = 7z, \quad \vec{a}(M) \cdot \vec{n}_2(M) = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \vec{a}(M) \cdot \vec{n}_3(M) = -7z.$$

Визначимо потік векторного поля  $\vec{a}(M)$  через поверхню  $\Omega_1$ :

$$\Pi_1 = \iint_{\Omega_1} \vec{a}(M) \cdot \vec{n}_1(M) d\sigma = 7 \iint_{\Omega_1} z d\sigma.$$

Обчислимо даний поверхневий інтеграл за допомогою переходу до подвійного інтеграла по проекції  $\Omega_1$  на координатну площину  $XOY$ .

Цією проекцією є круг  $D_1: x^2 + y^2 \leq R^2$ . Елемент

$$d\sigma = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy, \quad \text{де } z = H:$$

$$d\sigma = \sqrt{1 + 0 + 0} dx dy = dx dy,$$

$$\Pi_1 = 7 \iint_{D_1} H dx dy = 7H \cdot \pi R^2.$$

Потік векторного поля  $\vec{a}(M)$  через поверхню  $\Omega_3$ :

$$\Pi_3 = \iint_{\Omega_3} \vec{a}(M) \cdot \vec{n}_3(M) d\sigma = -7 \iint_{\Omega_3} z d\sigma = -7 \iint_{D_1} 0 d\sigma = 0.$$

I, наприкінці, потік через  $\Omega_2$ :

$$\Pi_2 = \iint_{\Omega_2} \vec{a}(M) \cdot \vec{n}_2(M) d\sigma = \iint_{\Omega_2} \sqrt{x^2 + y^2} d\sigma = R \iint_{\Omega_2} d\sigma.$$

Останній поверхневий інтеграл визначає площу поверхні  $\Omega_2$ , яка, очевидно, дорівнює  $2\pi R \cdot H$ . Тоді  $\Pi_2 = R \cdot 2\pi R \cdot H = 2\pi R^2 H$ .

Остаточно  $\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 = 9\pi R^2 H$ .

Звернімо увагу, що потік в нашому випадку  $\Pi = 9 \cdot V_{\text{циліндра}}$ .

Відповідь:  $\Pi = 9\pi R^2 H$ .

### Дивергенція векторного поля

*Означення.* Дивергенція (розбіжність) векторного поля  $\vec{a}(M)$  – скаляр, що визначається

$$\operatorname{div} \vec{a}(M) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Дивергенція – диференціальна та локальна (залежить від точки) кількісна характеристика векторного поля, визначає щільність потоку в точці  $M$ .

### Потік через замкнену поверхню

Розглянемо замкнену поверхню  $\Omega$ , яка обмежує об'єм  $V$  у векторному полі  $\vec{a}(M)$  швидкостей течії нестисливої рідини (рис. 3.9). Потік  $\Pi = \oiint \vec{a}(M) \cdot \vec{d\sigma}$  – кількість рідини, що протікає через замкнену поверхню  $\Omega$ . Векторні лінії входять та виходять з  $\Omega$ . В точці  $P_1$  кут між  $\vec{a}(M)$  і нормаллю  $\vec{n}_1$  – тупий, і це означає, що рідина втікає всередину поверхні:  $\Pi_1 < 0$ . В точці виходу  $P_2$  кут між  $\vec{a}(M)$  і нормаллю  $\vec{n}_2$  – гострий, рідина витікає:  $\Pi_2 > 0$ . Таким чином, потік через замкнену поверхню чисельно дорівнює різниці потоків рідини, що втікає і витікає за одиницю часу зі швидкістю  $\vec{a}(M)$  в область  $V$ , яка обмежена поверхнею  $\Omega$ .

*Висновки:*

1. Якщо  $\Pi > 0$ , то рідини більше витікає, ніж втікає. Тобто в області  $V$  є джерела поля.
2. Якщо  $\Pi < 0$ , то рідини більше втікає, ніж витікає. В області  $V$  є стоки поля.
3.  $\Pi = 0$  – немає ані джерел, ані стоків, або вони компенсують один одного.

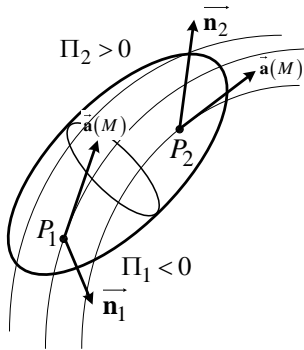


Рисунок 3.9

Точки поля, в яких  $\operatorname{div} \vec{a}(M) > 0 \Rightarrow \Pi > 0$  називають *джерелами поля*, а точки, в яких  $\operatorname{div} \vec{a}(M) < 0 \Rightarrow \Pi < 0$  – *стоками векторного поля*.

Векторні лінії векторного поля починаються в точках з додатною дивергенцією, а закінчуються в точках з від'ємною дивергенцією.

*Означення.* Величина  $|\operatorname{div} \vec{a}(M)|$  називається *потужністю джерела або стоку*.

### Формула Гаусса-Остроградського

Нехай в просторі  $R^3$  задано область  $V$ , обмежену замкненою поверхнею  $\Omega$ . Припустимо, що  $\Omega$  можна розбити на три поверхні:  $\Omega_1$  – рівняння  $z = f_1(x, y)$ ,  $\Omega_2$  – рівняння  $z = f_2(x, y)$ ,  $\Omega_3$  – циліндрична поверхня задана рівнянням  $\varphi(x, y) = 0$  (рис. 3.10).

Нехай в області  $V$  задано векторне поле

$$\vec{a}(M) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k},$$

причому функції

$$P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z), \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial x}, \frac{\partial Q(x, y, z)}{\partial y}, \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z}$$

неперервні в  $V$ .

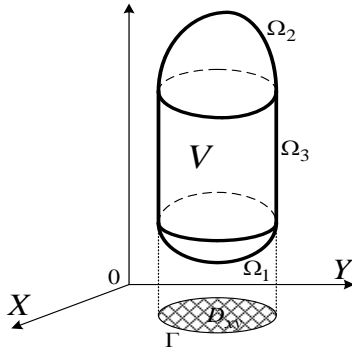


Рисунок 3.10

Тоді має місце формула Гаусса-Остроградського.

$$\begin{aligned} & \iiint_V \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \\ & = \iint_{\Omega} P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dx dz + R(x, y, z) dx dy. \end{aligned}$$

Векторна форма формули Гаусса-Остроградського.

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{a} dx dy dz = \iint_{\Omega} \left( \vec{a}(M) \cdot \vec{n}^0(M) \right) d\sigma.$$

### Теорема Гаусса-Остроградського

Потік векторного поля  $\vec{a}(M)$  через замкнену поверхню  $\Omega$  в напрямі зовнішньої нормалі дорівнює потрійному інтегралу від дивергенції даного векторного поля по області  $V$ , обмеженої поверхнею  $\Omega$ :

$$\iint_{\Omega} \left( \vec{a}(M) \cdot \vec{n}^0(M) \right) d\sigma = \iiint_V \operatorname{div} \vec{a} dx dy dz.$$

**Приклад 2.** Обчислити потік векторного поля  $\vec{a}(M) = (3x^2 y; xy^2; 7xyz)$  через повну поверхню тіла  $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$  в напрямі зовнішньої нормалі.

*Розв'язання.*

Скористаємося теоремою Гаусса-Остроградського. Обчислимо  $\operatorname{div} \vec{a} = 6xy + 2xy + 7xy = 15xy$ . Область  $V$ , яку обмежують задані поверхні – частина кулі радіуса  $R$ , що міститься в першому октанті (рис. 3.11).

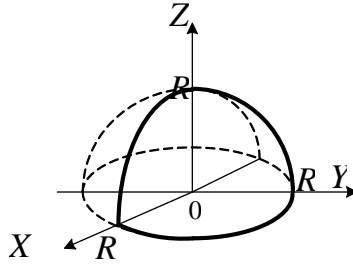


Рисунок 3.11

Відповідно потік дорівнює

$$\Pi = \iiint_V 15xy \, dx \, dy \, dz = \left. \begin{array}{l} \text{перехід в сферичні координати} \\ x = \rho \cos \varphi \sin \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \theta \end{array} \right|$$

$$= \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^R \rho^2 \sin \theta \cdot 15\rho^2 \cos \varphi \sin \varphi \sin^2 \theta d\rho =$$

$$= \frac{15}{2} \int_0^{\pi/2} \sin 2\varphi d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin \theta (1 - \cos^2 \theta) d\theta \int_0^R \rho^4 d\rho.$$

Обчислимо цей інтеграл крок за кроком.

$$1) \int_0^R \rho^4 d\rho = \frac{\rho^5}{5} \Big|_0^R = \frac{R^5}{5},$$

$$2) \int_0^{\pi/2} \sin \theta (1 - \cos^2 \theta) d\theta = \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 \theta) d \cos \theta = \left( -\cos \theta + \frac{\cos^3 \theta}{3} \right) \Big|_0^{\pi/2} =$$

$$= -(0-1) + 0 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3},$$

$$3) \frac{15}{2} \cdot \frac{R^5}{5} \cdot \frac{2}{3} \int_0^{\pi/2} \sin 2\varphi d\varphi = -\frac{15}{2} \cdot \frac{R^5}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cos 2\varphi \Big|_0^{\pi/2} = -\frac{R^5}{2} (\cos \pi - \cos 0) =$$

$$= -\frac{R^5}{2} \cdot (-2) = R^5.$$

Потік має додатне значення, це означає, що в  $V$  містяться стоки поля.

Відповідь:  $\Pi = R^5$ .

### Циркуляція векторного поля

Означення. Криволінійний інтеграл вздовж замкненого контуру

$$\oint_L \vec{a} \cdot \vec{\tau}_0 ds$$

називається *циркуляцією векторного поля*

$$\vec{a}(M) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$$

вздовж замкненого контуру  $L$ :

$$Ц_L(\vec{a}) = \oint_L \vec{a} \cdot \vec{\tau}_0 ds = \oint_L P dx + Q dy + R dz. \quad (3.3)$$

Обход контуру вважається додатним, тобто таким, що такий, що при русі вздовж контуру  $L$  область  $D$ , яка обмежена контуром, залишається ліворуч.

Циркуляція характеризує обертальну здібність поля. Якщо векторні лінії поля замкнені, то циркуляція вздовж цих ліній в напрямку поля додатна, при цьому в гідродинамічній інтерпретації частинки рідини течуть по цим замкненим лініям.

Нехай лінії течії довільні. Якщо в результаті руху рідини замкнений контур  $L$  в об'ємі  $V$  буде обертатися, то поле має обертальну здібність; абсолютна величина циркуляції буде визначати кутову швидкість обертання (чим більше  $|Ц|$ ,

тим більше швидкість); знак циркуляції покаже, чи співпадає напрямок обертання з напрямком інтегрування.

Циркуляція  $\Gamma_L(\vec{a})$  може бути використана для вимірювання потужності потоку рідини, що рухається вздовж кола  $L$  з лінійною швидкістю  $\vec{a}$ .

**Приклад 3.** Обчислити циркуляцію векторного поля  $\vec{a}(M) = (3y; x^2; -z)$  вздовж контуру  $L$ , який є перетином поверхонь  $x^2 + y^2 = 4$  і  $z = 3$ .

*Розв'язання.*

Контур  $L$  – коло радіуса  $R = 2$ , що міститься в площині  $z = 3$  (рис. 3.12). Запишемо параметричне рівняння цього кола:

$$\begin{cases} x = 2 \cos t, \\ y = 2 \sin t, \quad t \in [0; 2\pi]. \\ z = 3, \end{cases}$$

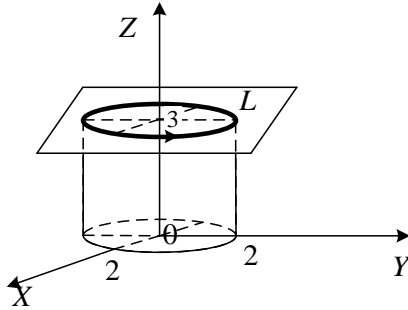


Рисунок 3.12

Обчислимо циркуляцію за формулою (3.3):

$$\Gamma_L(\vec{a}) = \oint_L Pdx + Qdy + Rdz = \oint_L 3ydx + x^2dy - zdz = \begin{vmatrix} dx = (2 \cos t)' dt = -2 \sin t dt \\ dy = (2 \sin t)' dt = 2 \cos t dt \\ dz = (3)' dt = 0 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} \left[ 6\sin t \cdot (-2\sin t) + (2\cos t)^2 \cdot 2\cos t \right] dt = -12 \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt + 8 \int_0^{2\pi} \cos^3 t dt = \\
&= -6 \int_0^{2\pi} (1 - \cos 2t) dt + 8 \int_0^{2\pi} (1 - \sin^2 t) d\sin t = \\
&= -6 \left( t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{2\pi} + 8 \left( \sin t - \frac{\sin^3 t}{3} \right) \Big|_0^{2\pi} = -12\pi.
\end{aligned}$$

Відповідь:  $\text{Ц}_L(\vec{a}) = -12\pi$ .

### Ротор векторного поля

*Означення.* Ротор (вихор) векторного поля

$$\vec{a}(M) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k} -$$

це вектор  $\text{rot } \vec{a}(M)$ , проекція якого на довільний вектор  $\vec{s}$  визначається як границя частки циркуляції поля  $\vec{a}(M)$  вздовж деякого контуру  $L$ , який містить точку  $M$  і знаходиться в площині, перпендикулярній вектору  $\vec{s}$ , до площі області, обмеженої даним контуром, за умови, що контур  $L$  стягується в точку  $M$ , та площа  $S$  прямує до нуля:

$$\text{пр}_{\vec{s}} \text{rot } \vec{a}(M) = \lim_{\substack{S \rightarrow 0 \\ L \rightarrow M}} \frac{\text{Ц}_L(\vec{a})}{S}.$$

У просторі через декартові координати ротор визначається формулою:

$$\begin{aligned}
\text{rot } \vec{a} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ Q & R \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & R \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = \\
&= \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} - \left( \frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}.
\end{aligned}$$

## Формула Стокса

Нехай  $\Omega$  – певна поверхня, а  $L$  – замкнений контур на даній поверхні. Оберемо на  $\Omega$  напрямком нормалі  $\vec{n}$  і, у відповідності з цим напрямком, встановимо додатний напрямком обходу контуру  $L$ .

Також припустимо, що в кожній точці  $\Omega$  задане векторне поле  $\vec{a}(M) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ .

Має місце твердження: циркуляція векторного поля  $\vec{a}(M)$  вздовж контуру  $L$  певної поверхні  $\Omega$  дорівнює потоку ротора векторного поля через цю поверхню

$$\oint_L \vec{a}(M) \cdot d\vec{s} = \iint_{\Omega} (\text{rot } \vec{a}(M) \cdot \vec{n}^0) d\sigma. \quad (3.4)$$

Формула (3.4) має назву *формула Стокса*.

*Наслідок.* Криволінійний інтеграл вздовж будь-якого кусково-гладкого замкненого контуру дорівнює нулю тоді і лише тоді, коли ротор векторного поля є нульовим.

**Приклад 4.** Обчислити циркуляцію векторного поля  $\vec{a}(M) = (2y; x^2; -z)$

вздовж контуру  $L$ , який є перетином поверхонь  $x^2 + y^2 = 4$  і  $z = 3$ .

*Розв'язання.*

Контур  $L$  є перетином кругового циліндра і площини, паралельної  $ХОУ$  (рис. 3.13). Очевидно, що  $L$  – коло.

Застосуємо формулу Стокса. Для зручності поверхнею  $\Omega$ , яка є областю інтегрування в поверхневому інтегралі, оберемо площину  $z = 3$ .

Одинична нормаль до  $\Omega$ :  $\vec{n}^0 = \vec{k} = (0; 0; 1)$ . Обчислимо ротор векторного поля:

$$\text{rot } \vec{a}(M) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2y & x^2 & -z \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot (0-0) - \vec{j} \cdot (0-0) + \vec{k} \cdot (2x-2) = \{0; 0; 2x-2\}.$$

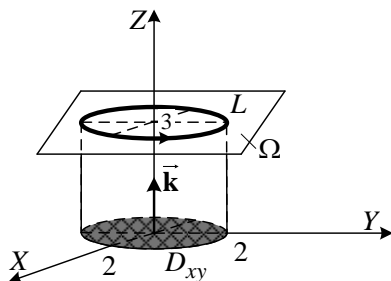


Рисунок 3.13

Проекція  $\Omega$  на координатну площину  $XOY$  (область  $D_{xy}$ ) – коло  $x^2 + y^2 = 4$ . В подвійному інтегралі по області  $D_{xy}$  перейдемо до полярних координат. Таким чином,

$$\iint_{\Omega} (\vec{a}) = \iint_{D_{xy}} (2x - 2) d\sigma = \iint_{D_{xy}} (2x - 2) dx dy = \left\| \begin{array}{l} \text{Перейдемо} \\ \text{до полярних} \\ \text{координат} \end{array} \right\| = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 (2\rho \cos\varphi - 2) \rho d\rho =$$

$$1) \int_0^2 (2\rho \cos\varphi - 2) \rho d\rho = 2\cos\varphi \int_0^2 \rho^2 d\rho - 2 \int_0^2 \rho d\rho = \left( 2\cos\varphi \frac{\rho^3}{3} - 2 \cdot \frac{\rho^2}{2} \right) \Big|_0^2$$

$$= \left( 2 \cdot \frac{8}{3} \cos\varphi - 4 \right) = \frac{16}{3} \cos\varphi - 4,$$

$$2) \int_0^{2\pi} \left( \frac{16}{3} \cos\varphi - 4 \right) d\varphi = \frac{16}{3} \sin\varphi \Big|_0^{2\pi} - 4\varphi \Big|_0^{2\pi} = -8\pi.$$

Відповідь:  $\iint_{\Omega} (\vec{a}) = -8\pi$ .

## Спеціальні векторні поля. Потенціал.

### Потенційні векторні поля

*Означення.* Векторне поле  $\vec{a}(M)$ , задане в області  $V \subset R^3$ , є *потенційним полем*, якщо воно є полем градієнта деякої скалярної функції, тобто якщо існує така скалярна функція  $u(M)$ :  $\forall M \in V$  виконується  $\vec{a}(M) = \text{grad} u(M)$ .

Функція  $u(M) = u(x, y, z)$  – *потенціал (силова функція)* векторного поля.

#### **Теорема. Критерій потенційності векторного поля.**

Векторне поле  $\vec{a}(M)$  в області  $V$  потенційне тоді і лише тоді, коли в усіх точках  $V$  виконується:  $\text{rot } \vec{a} = \vec{0}$ .

Сформулюємо твердження, які є еквівалентними:

1. Векторне поле  $\vec{a}(M)$  потенційне в області  $V$ , тобто в даній області існує скалярне поле  $u = u(M)$  таке, що  $\vec{a}(M) = \text{grad} u(M)$ .

2. Векторне поле  $\vec{a}(M)$  безвихрове, тобто в  $V$  справедливе  $\text{rot } \vec{a} = \vec{0}$ .

3. Циркуляція потенційного векторного поля  $\vec{a}(M)$  вздовж довільного замкненого контуру  $L \subset V$  завжди дорівнює нулю:

$$C_L(\vec{a}) = C_L(\text{grad} u) = 0.$$

4. Криволінійний інтеграл  $\int_{AB} \vec{a} \cdot \vec{ds}$  вздовж довільної кривої  $AB$ , взятої в цьому полі, дорівнює

$$\int_{AB} \vec{a} \cdot \vec{ds} = u(B) - u(A).$$

Для силового потенційного поля цей результат означає, що в такому полі робота вздовж будь-якої замкненої траєкторії дорівнює нулю; робота не залежить від форми кривої і дорівнює різниці значень силової функції  $u = u(M)$  в кінцевій і початковій точках.

### Обчислення потенціалу потенційного векторного поля

Візьмемо в області  $V$  дві точки: фіксовану точку  $M_0$  і поточну  $M$ :

$$u(M) = u(M_0) + \int_{M_0M} \vec{a} \cdot d\vec{s} \Leftrightarrow u(x, y, z) = C + \int_{M_0M} Pdx + Qdy + Rdz \quad (3.5)$$

( $C = u(M_0)$  – значення функції в довільній, але фіксованій точці – стала величина). Зазвичай в якості  $M_0$  обирають  $M_0(0, 0, 0)$ , за винятком функцій, для яких ця точка не належить області визначення. Наприклад, знаменник обертається на нуль в точці  $M_0(0, 0, 0)$ .

**Приклад 5.** Довести, що векторне поле

$$\vec{a}(M) = 2x\vec{i} + 6yz\vec{j} + 3y^2\vec{k}$$

потенційне і обчислити його потенціал.

*Розв'язання.*

Координати векторного поля

$$P(x, y, z) = 2x, Q(x, y, z) = 6yz, R(x, y, z) = 3y^2.$$

Обчислимо ротор даного поля:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{a}(M) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2x & 6yz & 3y^2 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 6yz & 3y^2 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2x & 3y^2 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ 2x & 6yz \end{vmatrix} = \\ &= \vec{i} \left( (3y^2)'_y - (6yz)'_z \right) - \vec{j} \left( (3y^2)'_x - (2x)'_z \right) + \\ &+ \vec{k} \left( (6yz)'_x - (2x)'_y \right) = \vec{i} (6y - 6y) - \vec{j} (0 - 0) + \vec{k} (0 - 0) = \vec{0}. \end{aligned}$$

Тобто, векторне поле  $\vec{a}(M)$  – потенційне.

Розглянемо ламану  $M_0M_1M_2M$ , де  $M_0(0, 0, 0)$  (рис. 3.14). Потенціал за формулою (3.5):

$$u(x, y, z) = C + \int_{M_0M_1M_2M} 2xdx + 6yzdy + 3y^2dz.$$

Розглянемо окремі ланки ламаної:

$$M_0M_1 : 0 \leq x \leq x, y = 0, z = 0;$$

$$M_1M_2 : x = \text{const}, 0 \leq y \leq y, z = 0;$$

$$M_2M : x = \text{const}, y = \text{const}, 0 \leq z \leq z.$$

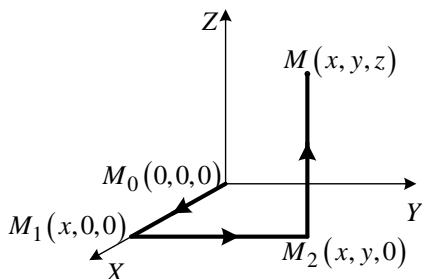


Рисунок 3.14

Продовжимо обчислення потенціалу

$$u(x, y, z) = C + \int_0^x 2x dx + \int_0^y 6y \cdot 0 dy + \int_0^z 3y^2 dz = C + 2 \frac{x^2}{2} + 3y^2 z = C + x^2 + 3y^2 z.$$

Можна перевірити результат за допомогою означення  $\vec{a}(M) = \text{grad } u(M)$ :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x = P(x, y, z), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 6yz = Q(x, y, z), \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 3y^2 = R(x, y, z).$$

Відповідь: векторне поле  $\vec{a}(M)$  – потенційне, потенціал

$$u(x, y, z) = C + x^2 + 3y^2 z.$$

### Соленоїдальні векторні поля

*Означення.* Векторне поле  $\vec{a}(M)$ , задане в області  $V \subset \mathbb{R}^3$ , називається соленоїдальним (або трубочатим), якщо в усіх точках даної області виконується:

$$\text{div } \vec{a}(M) = 0.$$

В гідродинамічній інтерпретації: соленоїдальне векторне поле – це поле без джерел, в електростатиці – поле без зарядів.

**Теорема.**

Векторне поле  $\vec{a}(M)$ , задане в області  $V \subset R^3$ , соленоїдальне тоді і лише тоді, коли векторне поле  $\vec{a}(M)$  є ротором деякого вектора  $\vec{b}(M)$ :

$$\vec{a}(M) = \text{rot } \vec{b}(M).$$

$\vec{b}(M)$  – векторний потенціал поля  $\vec{a}(M)$ .

**Властивості соленоїдальних полів:**

1. Соленоїдальні поля не мають ані джерел, ані стоків.
2. Потік  $\vec{a}(M)$  через будь-яку гладку замкнену поверхню  $\Omega$ , що міститься в полі, дорівнює нулю

$$\Pi = \oiint_{\Omega} \left( \vec{a}(M) \cdot \vec{n}^0(M) \right) d\sigma = \iiint_V \text{div } \vec{a} \, dx dy dz = 0.$$

3. В соленоїдальному полі векторні лінії ані розпочинаються, ані закінчуються; вони або замкнені, або мають кінці на межі поля.
4. Потік векторного поля через поперечний переріз векторної трубки (інтенсивність цієї трубки) в соленоїдальному полі залишається сталим вздовж усієї трубки.

Якщо векторне поле є швидкістю течії рідини, то кількість рідини, що витікає через поперечний переріз векторної трубки, завжди дорівнює кількості рідини, яка витікає.

**Гармонійні векторні поля**

*Означення.* Векторне поле  $\vec{a}(M)$ , задане в області  $V \subset R^3$ , гармонійне, якщо  $\text{div } \vec{a}(M) = 0$  і  $\text{rot } \vec{a}(M) = 0$  в усіх точках цього поля.

Або

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 0,$$

де  $\vec{a}(M) = \text{grad } F$ ; функція  $F$  – гармонійна.

Гармонійне векторне поле – потенційне поле, потенціал якого – гармонійна функція.

Довільне векторне поле можна розглядати як результат накладання потенційного і соленоїдального полів.

**Приклад 6.** Визначити тип векторного поля

$$\vec{a}(M) = (y+z)\vec{i} + (x+z)\vec{j} + (x+y)\vec{k}.$$

*Розв'язання.*

Обчислимо диференціальні характеристики заданого поля. Дивергенція  $\text{div } \vec{a}(M) = 0+0+0 \equiv 0$ . Отже, що поле є соленоїдальним. Перевіримо, чи виконується для поля критерій потенційності.

Ротор

$$\text{rot } \vec{a}(M) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y+z & x+z & x+y \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x+z & x+y \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y+z & x+y \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ y+z & x+z \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i} \left( (x+y)'_y - (x+z)'_z \right) - \vec{j} \left( (x+y)'_x - (y+z)'_z \right) + \vec{k} \left( (x+z)'_x - (y+z)'_y \right) = \\ = \vec{i}(1-1) - \vec{j}(1-1) + \vec{k}(1-1) \equiv \vec{0}.$$

Тобто поле  $\vec{a}(M)$  є потенційним полем.

Таким чином, і  $\text{div } \vec{a}(M) \equiv 0$ , і  $\text{rot } \vec{a}(M) \equiv \vec{0}$ , тому поле  $\vec{a}(M)$  – гармонійне поле.

## КОНТРОЛЬНІ ЗАВДАННЯ

Номер варіанта – остання цифра в номері залікової книжки. Якщо цей номер закінчується цифрою 0, то – десятий варіант.

### ВАРІАНТ 1

1. Виконати дії:

$$\text{а) } \sqrt[4]{1} ; \text{ б) } (1-i)^5 .$$

2. Зобразити область, яка задається нерівностями:  $\begin{cases} |z-2-i| \leq 2, \\ \operatorname{Re} z \geq 3. \end{cases}$

3. Обчислити інтеграл, користуючись інтегральними формулами Коші:

$$\oint_L \frac{(z^3+8)\sin z}{(z+i)^2} dz ; L: |z+i| = \frac{1}{2} .$$

4. За даним оригіналом знайти зображення:

$$\text{а) } \int_0^t \sin^2 \tau d\tau ; \text{ б) } \frac{\sin t - \sin 2t}{t} .$$

5. Знайти оригінал за даним зображенням:  $F(p) = \frac{6}{p^3-1}$ .

6. Визначити вигляд поля. Якщо поле є потенційним, то знайти його потенціал:

$$\vec{a} = 2xy\vec{i} + (x^2 - 2yz)\vec{j} - y^2\vec{k} .$$

7. Знайти потік поля  $\vec{a}(M)$  крізь замкнену поверхню, яка обмежена частиною площини  $P$ , розміщеної у першому октанті, і координатними площинами (нормаль зовнішня):  $\vec{a} = (x; y; z)$ ,  $P: x + y + z = 1$ , користуючись формулою Остроградського.

## ВАРІАНТ 2

1. Виконати дії:

$$\text{а) } \sqrt[3]{i}; \quad \text{б) } \frac{2+i}{3-i} + i^3.$$

2. Зобразити область, яка задається нерівностями:  $\begin{cases} |z-1-i| \geq 1, \\ 0 \leq \operatorname{Re} z < 2. \end{cases}$

3. Обчислити інтеграл, користуючись інтегральними формулами Коші:

$$\oint_L \frac{e^z - 1}{z^2(z+1)} dz; \quad L: |z| = \frac{1}{2}.$$

4. За даним оригіналом знайти зображення:

$$\text{а) } \int_0^t \cos 5\tau d\tau; \quad \text{б) } \frac{e^t - e^{2t}}{t}.$$

5. Знайти оригінал за даним зображенням:  $F(p) = \frac{p}{(p^2+1)(p^2+4)}.$

6. Визначити вигляд поля. Якщо поле є потенційним, то знайти його потенціал:

$$\vec{a} = (yz - xy)\vec{i} + \left(xz - \frac{1}{2}x^2 + yz^2\right)\vec{j} + (xy + y^2z)\vec{k}.$$

7. Знайти потік поля  $\vec{a}(M)$  крізь замкнену поверхню, яка обмежена частиною площини  $P$ , розміщеної у першому октанті, і координатними площинами (нормаль зовнішня):

$$\vec{a} = (2x; y; z), \quad P: x + y + z = 2, \quad \text{користуючись формулою Остроградського.}$$

## ВАРІАНТ 3

1. Виконати дії:

$$\text{a) } \sqrt[5]{\frac{1+i\sqrt{3}}{32}}; \quad \text{б) } (-1+i)^{10}.$$

2. Зобразити область, яка задається нерівностями:  $\begin{cases} |z-i| \leq 2, \\ \operatorname{Im} z < 1. \end{cases}$

3. Обчислити інтеграл, користуючись інтегральними формулами Коші:

$$\oint_L \frac{z^2+1}{z^3} dz; \quad L: |z|=1.$$

4. За даним оригіналом знайти зображення:

$$\text{a) } \int_0^t \operatorname{sh} 3\tau d\tau; \quad \text{б) } \frac{1-\cos 3t}{t}.$$

5. Знайти оригінал за даним зображенням:  $F(p) = \frac{1}{p(p^3+1)}$ .

6. Визначити вигляд поля. Якщо поле є потенційним, то знайти його потенціал:

$$\vec{a} = (3x^2y - y^3)\vec{i} + (x^3 - 3xy^2)\vec{j}.$$

7. Знайти потік поля  $\vec{a}(M)$  крізь замкнену поверхню, яка обмежена частиною площини  $P$ , розміщеної у першому октанті, і координатними площинами (нормаль зовнішня):  $\vec{a} = (3x; 0; 2z)$ ,  $P: 6x + 3y + 2z = 6$ , користуючись формулою Остроградського.

## ВАРІАНТ 4

1. Виконати дії:

$$\text{а) } \sqrt[3]{-1}; \quad \text{б) } \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^9.$$

2. Зобразити область, яка задається нерівностями:  $\begin{cases} |z+i| < 2, \\ 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1. \end{cases}$

3. Обчислити інтеграл, користуючись інтегральними формулами Коші:

$$\oint_L \frac{\sin^2 z}{z^2(z^3+1)} dz; \quad L: |z+1,5| = 1.$$

4. За даним оригіналом знайти зображення:

$$\text{а) } \int_0^t \cos^3 \tau d\tau; \quad \text{б) } \frac{e^t - t - 1}{t}.$$

5. Знайти оригінал за даним зображенням:  $F(p) = \frac{3p-2}{(p-1)(p^2-6p+10)}.$

6. Визначити вигляд поля. Якщо поле є потенційним, то знайти його потенціал:

$$\vec{a} = (4x^3z + y^4)\vec{i} + (4y^3x + z^4)\vec{j} + (x^4 + 4z^3y)\vec{k}.$$

7. Знайти потік поля  $\vec{a}(M)$  крізь замкнену поверхню, яка обмежена частиною площини

$P$ , розміщеної у першому октанті, і координатними площинами (нормаль зовнішня):

$\vec{a} = (2x; 3y; z)$ ,  $P: 2x + 6y + 3z = 6$ , користуючись формулою Остроградського.

## ВАРІАНТ 5

1. Виконати дії:

$$\text{а) } \sqrt[4]{16}; \quad \text{б) } (3-3i)^6.$$

2. Зобразити область, яка задається нерівностями:  $\begin{cases} |z-1+i| \geq 1, \\ -2 < \operatorname{Re} z < 1. \end{cases}$

3. Обчислити інтеграл, користуючись інтегральними формулами Коші:

$$\oint_L \frac{e^{\sin z}}{z^2} dz; \quad L: |z|=1.$$

4. За даним оригіналом знайти зображення:

$$\text{а) } \int_0^t \tau \sin 3\tau d\tau; \quad \text{б) } \frac{\sin^2 3t}{t}.$$

5. Знайти оригінал за даним зображенням:  $F(p) = \frac{p}{(p^2+1)(p^2-2)}.$

6. Визначити вигляд поля. Якщо поле є потенційним, то знайти його потенціал:

$$\vec{a} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}.$$

7. Знайти потік поля  $\vec{a}(M)$  крізь замкнену поверхню, яка обмежена частиною площини  $P$ , розміщеної у першому октанті, і координатними площинами (нормаль зовнішня):

$\vec{a} = (2x; y; z)$   $\vec{a} = \{2x, y, z\}$ ,  $P: 6x+2y+3z=6$ , користуючись формулою Остроградського.

## ВАРІАНТ 6

1. Виконати дії:

$$\text{a) } \sqrt[3]{-1-i}; \quad \text{б) } \frac{3+i}{1-i^5}.$$

2. Зобразити область, яка задається нерівностями:  $\begin{cases} |z+2i| \leq 2, \\ 0 < \operatorname{Im} z < 2. \end{cases}$

3. Обчислити інтеграл, користуючись інтегральними формулами Коші:

$$\oint_L \frac{\cos z}{z^2 + z - 2} dz; \quad L: |z+2| = 2.$$

4. За даним оригіналом знайти зображення:

$$\text{a) } \int_0^t \tau^2 \cos \tau d\tau; \quad \text{б) } \frac{-e^{3t} - 1 + 2 \cos t}{t}.$$

5. Знайти оригінал за даним зображенням:  $F(p) = \frac{1}{p^3(p^2 - 2)}$ .

6. Визначити вигляд поля. Якщо поле є потенційним, то знайти його потенціал:

$$\vec{a} = (y+x)\vec{i} + (x+z)\vec{j} + (x+y)^2\vec{k}.$$

7. Знайти потік поля  $\vec{a}(M)$  крізь замкнену поверхню, яка обмежена частиною площини  $P$ , розміщеної у першому октанті, і координатними площинами (нормаль зовнішня):  $\vec{a} = (2x; 5y; 5z)$ ,  $P: x + 2y + 3z = 6$ , користуючись формулою Остроградського.

## ВАРІАНТ 7

1. Виконати дії:

$$\text{a) } \sqrt[3]{-8i}; \quad \text{б) } \frac{(2+3i)(-1+4i)}{1+i}.$$

2. Зобразити область, яка задається нерівностями:  $\begin{cases} |z-1-i| \leq 1, \\ |\operatorname{Re} z| \geq 1. \end{cases}$

3. Обчислити інтеграл, користуючись інтегральними формулами Коші:

$$\oint_L \frac{3z^2 + 4z - 1}{z^2} dz; \quad L: |z| = 1.$$

4. За даним оригіналом знайти зображення:

$$\text{a) } \int_0^t (\tau+1) \sin 3\tau d\tau; \quad \text{б) } \frac{1-e^{-2t}}{t}.$$

5. Знайти оригінал за даним зображенням:  $F(p) = \frac{4}{p^3+8}$ .

6. Визначити вигляд поля. Якщо поле є потенційним, то знайти його потенціал:

$$\vec{a} = (2xy + y^2)\vec{i} + (x^2 + 2xy)\vec{j} + 2z\vec{k}.$$

7. Знайти потік поля  $\vec{a}(M)$  крізь замкнену поверхню, яка обмежена частиною площини

$P$ , розміщеної у першому октанті, і координатними площинами (нормаль зовнішня):

$\vec{a} = (2x; y; -2z)$ ,  $P: 4x + y + 2z = 4$ , користуючись формулою Остроградського.

## ВАРІАНТ 8

1. Виконати дії:

$$\text{а) } \sqrt[3]{-\frac{i}{8}}; \quad \text{б) } \frac{1-i}{(1+i)^2} - 2i^4.$$

2. Зобразити область, яка задається нерівностями:

$$|\arg z| \leq \frac{\pi}{4}, \quad |z+1-i| < 4.$$

3. Обчислити інтеграл, користуючись інтегральними формулами Коші:

$$\oint_L \frac{2z^2+1}{z^2-z-2} dz; \quad L: |z+1|=1.$$

4. За даним оригіналом знайти зображення:

$$\text{а) } \int_0^t \tau \operatorname{sh} 4\tau d\tau; \quad \text{б) } \frac{\sin t + e^{-t} - 1}{t}.$$

5. Знайти оригінал за даним зображенням:  $F(p) = \frac{1}{p^2(p^2+1)}$ .

6. Визначити вигляд поля. Якщо поле є потенційним, то знайти його потенціал:

$$\vec{a} = y^2 z \vec{i} + 2xyz \vec{j} + xy^2 \vec{k}.$$

7. Знайти потік поля  $\vec{a}(M)$  крізь замкнену поверхню, яка обмежена частиною площини  $P$ , розміщеної у першому октанті, і координатними площинами (нормаль зовнішня):

$$\vec{a} = (x; 3y; 8z), \quad P: 2x + 4y + z = 4, \quad \text{користуючись формулою Остроградського.}$$

## ВАРІАНТ 9

1. Виконати дії:

$$\text{a) } \sqrt[5]{-1+i}; \quad \text{б) } (4-4\sqrt{3}i)^3.$$

2. Зобразити область, яка задається нерівностями:  $\begin{cases} |z-i| < 2, \\ \operatorname{Re} z > 1. \end{cases}$

3. Обчислити інтеграл, користуючись інтегральними формулами Коші:

$$\oint_L \frac{z^2}{(z^2+1)^2} dz; \quad L: |z+i|=1.$$

4. За даним оригіналом знайти зображення:

$$\text{a) } \int_0^t (\tau+1)e^{-\tau} d\tau; \quad \text{б) } \frac{\cos 2t - \cos t}{t}.$$

5. Знайти оригінал за даним зображенням:  $F(p) = \frac{p}{(p+1)(p^2+1)}.$

6. Визначити вигляд поля. Якщо поле є потенційним, то знайти його потенціал:

$$\vec{a} = (2xy + z)\vec{i} + (x^2 + 1)\vec{j} + (x + 3z^2)\vec{k}.$$

7. Знайти потік поля  $\vec{a}(M)$  крізь замкнену поверхню, яка обмежена частиною площини  $P$ , розміщеної у першому октанті, і координатними площинами (нормаль зовнішня):  $\vec{a} = (2x; 3y; z)$ ,  $P: 2x + 3y + z = 12$ , користуючись формулою Остроградського.

## ВАРІАНТ 10

1. Виконати дії:

$$\text{а) } \sqrt[4]{1+i}; \quad \text{б) } (1-2i)^3 (i^5 - 3).$$

2. Зобразити область, яка задається нерівностями:  $|\arg z| \leq \frac{\pi}{6}$ ,  $|z| < 2$ .

3. Обчислити інтеграл, користуючись інтегральними формулами Коші:

$$\oint_L \frac{3z^4 + 4}{z^2(z^4 - 16)} dz; \quad L: |z| = 1.$$

4. За даним оригіналом знайти зображення:

$$\text{а) } \int_0^t e^{-\tau} \tau^2 d\tau; \quad \text{б) } \frac{e^{3t} - e^{-4t}}{t}.$$

5. Знайти оригінал за даним зображенням:  $F(p) = \frac{3p^2}{8p^3 - 1}$ .

6. Визначити вигляд поля. Якщо поле є потенційним, то знайти його потенціал:

$$\vec{a} = 2xy\vec{i} + (x^2 + z \cos(zy))\vec{j} + y \cos(zy)\vec{k}.$$

7. Знайти потік поля  $\vec{a}(M)$  крізь замкнену поверхню, яка обмежена частиною площини  $P$ , розміщеної у першому октанті, і координатними площинами (нормаль зовнішня):  $\vec{a} = (x; 9y; 8z)$ ,  $P: x + 2y + 3z = 12$ , користуючись формулою Остроградського.

## ЗРАЗОК РОЗВ'ЯЗАННЯ ПРИКЛАДІВ КОНТРОЛЬНОГО ЗАВДАННЯ

**Приклад 1.** Виконати дії: 1)  $\sqrt[3]{8}$ , 2)  $(1-j^2)^6 \cdot (\sqrt{3}+j)^5$ .

*Розв'язання.*

1) Знайдемо аргумент  $z$ . За рисунком 4.1  $\varphi = \arg z = 0$ .

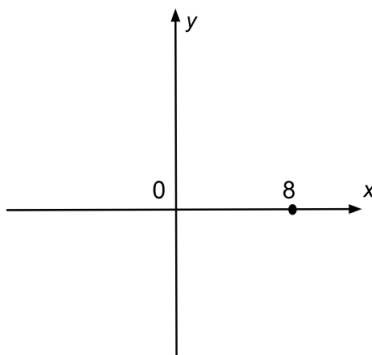


Рисунок 4.1

Отже число  $z = 8$  в тригонометричній формі набуває вигляду:  
 $z = |z|(\cos \varphi + j \sin \varphi) = 8(\cos 0 + j \sin 0)$ . Скористаємось формулою для обчислення кореня з комплексного числа:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \left( \cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + j \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right).$$

В нашому випадку:  $\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{8} \left( \cos \frac{2\pi k}{3} + j \sin \frac{2\pi k}{3} \right)$ ,  $k = 0, 1, 2$ .

$$k = 0: z_1 = 2(\cos 0 + j \sin 0) = 2,$$

$$k = 1: z_2 = 2 \left( \cos \frac{2\pi}{3} + j \sin \frac{2\pi}{3} \right) = 2 \left( -\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -1 + j\sqrt{3},$$

$$\begin{aligned}
 k=2: z_3 &= 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + j\sin\frac{4\pi}{3}\right) = 2\left(\cos\left(2\pi - \frac{2\pi}{3}\right) + j\sin\left(2\pi - \frac{2\pi}{3}\right)\right) = \\
 &= 2\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + j\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right) = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} - j\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 2\left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 - j\sqrt{3}.
 \end{aligned}$$

При обчисленні значень  $z_1, z_2, z_3$  використано відомі значення тригонометричних функцій та їх періодичність.

2) Розглянемо кожен множник окремо:

$$(1 - j^2)^6 = (1 - (-1))^6 = 2^6 = 64;$$

$(\sqrt{3} + j)^5$ . Зобразимо  $z = \sqrt{3} + j$  в тригонометричній формі:

$$x = \sqrt{3}, y = 1 \Rightarrow |z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2, \text{ та за рисунком 4.2 } \varphi = \arg z = \arctg \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$$

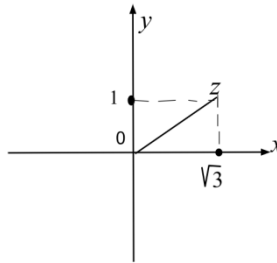


Рисунок 4.2

Отримаємо:  $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + j\sin\frac{\pi}{6}\right)$ . Скористаємось формулою:

$$z^n = |z|^n (\cos n\varphi + j\sin n\varphi).$$

У нашому прикладі

$$\begin{aligned}
 z^5 &= (\sqrt{3} + j)^5 = 2^5 \left(\cos\frac{5\pi}{6} + j\sin\frac{5\pi}{6}\right) = 2^5 \left(\cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + j\sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)\right) = \\
 &= 2^5 \left(-\cos\frac{\pi}{6} + j\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2^5 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2}\right) = 2^4 (-\sqrt{3} + j).
 \end{aligned}$$

Остаточно маємо:  $2^6 \cdot 2^4 (-\sqrt{3} + j) = 2^{10} (-\sqrt{3} + j) = 1024(-\sqrt{3} + j)$ .

При обчисленні значень використано відомі значення тригонометричних функцій та формули зведення до гострого кута.

Відповідь: 1)  $z_1 = 2, z_{2,3} = -1 \pm j\sqrt{3}$ , 2)  $1024(-\sqrt{3} + j)$ .

**Приклад 2.** Викреслити область, яка задається нерівностями

$$\begin{cases} |z + 3j| < 3, \\ \operatorname{Re} z > -4. \end{cases}$$

*Розв'язання.*

Оскільки  $z = x + jy$ , тоді  $z + 3j = x + jy + 3j = x + j(y + 3)$ .

Обчислимо  $|z + 3j| = \sqrt{x^2 + (y + 3)^2} = 3$ . Підводячи до квадрата ліву та праву частини, отримуємо рівняння кола  $x^2 + (y + 3)^2 = 3^2$  з центром в точці  $(0, -3)$  та радіусом  $R = 3$ . Область  $|z + 3j| < 3$  це круг, який обмежений даним колом.

Розглянемо  $\operatorname{Re} z = x$ . Тобто нерівність  $\operatorname{Re} z > -4$  перетворюється на  $x > -4$ . Це півплощина, яка розташована праворуч від прямої  $x = -4$ . Звернемо увагу на те, що коло і пряма  $x = -4$  на рисунку 4.3 зображуються пунктиром, бо за умовою обидві нерівності строгі.

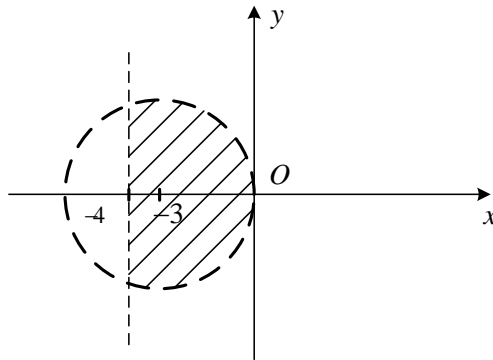


Рисунок 4.3

**Приклад 3.** Обчислити інтеграл, користуючись інтегральною формулою

Коши:

$$\oint_L \frac{e^{2z}}{(z-1)(z+1)^2} dz, \quad L: |z+2|=2.$$

*Розв'язання.*

Зробимо рисунок області інтегрування:

$$z = x + jy, \quad z + 2 = x + jy + 2 = (x+2) + jy,$$
$$|z+2| = \sqrt{(x+2)^2 + y^2} = 2 \Rightarrow (x+2)^2 + y^2 = 2^2.$$

Отримаємо коло з центром в точці  $(-2; 0)$  і радіусом  $R=2$  (рис. 4.4).

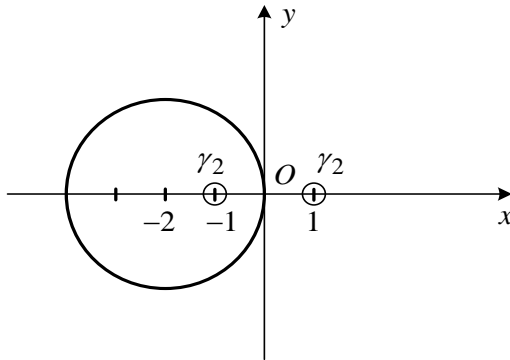


Рисунок 4.4

Перевіряємо, чи має підінтегральна функція точки розриву:

$$(z-1)(z+1)^2 \neq 0 \Rightarrow z-1 \neq 0, \quad z+1 \neq 0.$$

Отримаємо дві точки розриву  $z_1=1, z_2=-1$ . Точка  $z_1=1$  не входить до області, яка обмежена контуром  $L$ , точка  $z_2=-1$  входить до області  $L$ . Будуємо кола  $\gamma_1, \gamma_2$  з центрами в точках  $z_1, z_2$  достатньо малих радіусів так, щоб вони не перетинались ні з контуром  $L$ , ні між собою.

За теоремою Коши для багатозв'язної області маємо:

$$\oint_L f(z) dz = \oint_{\gamma_1} \frac{e^{2z}}{(z+1)^2} dz + \oint_{\gamma_2} \frac{e^{2z}}{(z+1)^2} dz.$$

Розглянемо кожен доданок окремо.

$$\oint_{\gamma_1} \frac{e^{2z}}{(z+1)^2} dz = 0 \text{ за теоремою Коши.}$$

При обчисленні другого інтеграла користуємось формулою

$$\oint_L \frac{f(z) dz}{(z-z_0)^{n+1}} = \frac{2\pi j}{n!} f^{(n)}(z_0),$$

оскільки точка  $z_2 = -1$  входить до області  $L$  та має кратність  $n+1=2$ .

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma_2} \frac{e^{2z}}{(z+1)^2} dz &= 2\pi j \left( \frac{e^{2z}}{(z-1)} \right)' \Big|_{z=-1} = 2\pi j \frac{(e^{2z})'(z-1) - e^{2z}(z-1)'}{(z-1)^2} \Big|_{z=-1} = \\ &= 2\pi j \frac{2e^{2z}(z-1) - e^{2z} \cdot 1}{(z-1)^2} \Big|_{z=-1} = 2\pi j \frac{e^{2z}(2z-2-1)}{(z-1)^2} \Big|_{z=-1} = 2\pi j \frac{e^{2z}(2z-3)}{(z-1)^2} \Big|_{z=-1} = \\ &= 2\pi j \frac{e^{2(-1)}(-2-3)}{(-1-1)^2} = -\frac{2,5\pi j}{e^2}. \end{aligned}$$

Відповідь:  $-\frac{2,5\pi j}{e^2}$ .

**Приклад 4.** За даним оригіналом знайти зображення:

$$1) \int_0^t e^{-\tau} \operatorname{sh} 5\tau d\tau, \quad 2) \frac{\operatorname{ch} 2t - e^t}{t}.$$

Розв'язання.

$$1) \int_0^t e^{-\tau} \operatorname{sh} 5\tau d\tau.$$

Розв'язуватимемо крок за кроком.

крок 1:  $\operatorname{sh} 5t \xrightarrow{\cdot} \frac{5}{p^2 - 25}$  (користуємось таблицею «оригінал-зображення»);

крок 2:  $e^{-t} \operatorname{sh} 5t \xrightarrow{\cdot} \frac{5}{(p+1)^2 - 25}$  (користуємось теоремою зсуву

$F(p-p_0) \xrightarrow{\cdot} e^{p_0 t} \cdot f(t)$ , враховуючи, що  $p_0 = -1$ );

крок 3: за теоремою інтегрування оригінала:

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \xrightarrow{\cdot} \frac{F(p)}{p}, \quad (\operatorname{Re} p > s_0),$$

остаточно отримуємо:

$$\int_0^t e^{-\tau} \operatorname{sh} 5\tau d\tau \xrightarrow{\cdot} \frac{1}{p} \cdot \frac{5}{(p+1)^2 - 25}.$$

Відповідь:  $F(p) = \frac{1}{p} \cdot \frac{5}{(p+1)^2 - 25}$ .

$$2) \frac{\operatorname{ch} 2t - e^t}{t}.$$

Розв'язуватимемо крок за кроком.

крок 1:  $\operatorname{ch} 2t - e^t \xrightarrow{\cdot} \frac{p}{p^2 - 4} - \frac{1}{p-1}$  (використовуємо теорему лінійності та

таблицю «оригінал-зображення»);

крок 2: використовуємо теорему інтегрування зображення:

$$\frac{f(t)}{t} \xrightarrow{\cdot} \int_p^\infty F(w) dw, \quad (\operatorname{Re} p > s_1).$$

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{ch} 5t - e^t}{t} &\stackrel{\cdot}{\rightarrow} \int_p^\infty \left( \frac{w}{w^2 - 4} - \frac{1}{w-1} \right) dw = \lim_{B \rightarrow \infty} \left( \int_p^B \left( \frac{w}{w^2 - 4} - \frac{1}{w-1} \right) dw \right) = \\ &= \lim_{B \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2} \ln |w^2 - 4| \Big|_p^B - \ln |w-1| \Big|_p^B \right) = \\ &= \lim_{B \rightarrow \infty} \ln \left| \frac{\sqrt{w^2 - 4}}{w-1} \right| \Big|_p^B = \lim_{B \rightarrow \infty} \left( \ln \left| \frac{\sqrt{B^2 - 4}}{B-1} \right| - \ln \left| \frac{\sqrt{p^2 - 4}}{p-1} \right| \right). \end{aligned}$$

При обчисленні використано означення невласного інтеграла першого роду.

Розглянемо окремо границю:

$$\lim_{B \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{B^2 - 4}}{B-1} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\| = \left\| \begin{array}{l} \text{за правилом} \\ \text{старших степенів} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{l} k = \frac{2}{2} = 1, a_0 = 1, \\ m = 1, b_0 = 1. \end{array} \right\| = 1.$$

Остаточно отримаємо:

$$\lim_{B \rightarrow \infty} \left( \ln \left| \frac{\sqrt{B^2 - 4}}{B-1} \right| - \ln \left| \frac{\sqrt{p^2 - 4}}{p-1} \right| \right) = \ln 1 - \ln \left| \frac{\sqrt{p^2 - 4}}{p-1} \right| = \ln \left| \frac{p-1}{\sqrt{p^2 - 4}} \right|.$$

Відповідь:  $F(p) = \ln \left| \frac{p-1}{\sqrt{p^2 - 4}} \right|.$

**Приклад 5.** Визначити вигляд поля

$$\vec{a}(M) = (y^3 + 2xy)\vec{i} + (3y^2x + x^2)\vec{j} + 2z\vec{k}.$$

Якщо поле потенційне, знайти його потенціал.

*Розв'язання.*

Обчислимо диференціальні характеристики заданого поля

$$\vec{a}(M) = (y^3 + 2xy)\vec{i} + (3y^2x + x^2)\vec{j} + 2z\vec{k}.$$

$$P(x, y, z) = (y^3 + 2xy), Q(x, y, z) = (3y^2x + x^2), R(x, y, z) = 2z.$$

Дивергенція  $\operatorname{div} \vec{a}(M) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 2y + 6yx + 2 \neq 0$ . Це дозволяє зробити

висновок, що поле не є соленоїдальним.

Перевіримо, чи виконується для поля критерій потенційності. Обчислимо ротор:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{a}(M) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^3 + 2xy & 3y^2x + x^2 & 2z \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3y^2x + x^2 & 2z \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^3 + 2xy & 2z \end{vmatrix} + \\ &+ \vec{k} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ y^3 + 2xy & 3y^2x + x^2 \end{vmatrix} = \vec{i} \left( (2z)'_y - (3y^2x + x^2)'_z \right) - \\ &- \vec{j} \left( (2z)'_x - (y^3 + 2xy)'_z \right) + \vec{k} \left( (3y^2x + x^2)'_x - (y^3 + 2xy)'_y \right) = \\ &= \vec{i}(0 - 0) - \vec{j}(0 - 0) + \vec{k}(3y^2 + 2x - (3y^2 + 2x)) = \vec{0}. \end{aligned}$$

Тобто поле  $\vec{a}(M)$  є потенційним полем. Знайдемо його потенціал. В якості  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  обираємо точку  $M_0(0, 0, 0)$ .

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= C + \int_{M_0M} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = \\ &= \int_0^x P(x, y_0, z_0)dx + \int_0^y Q(x, y, z_0)dy + \int_0^z P(x, y, z)dz + C = \\ &= \int_0^x 0dx + \int_0^y x^2dy + \int_0^z 2zdz + C = x^2 + 2\frac{z^2}{2} + C. \\ u(x, y, z) &= C + x^2 + z^2. \end{aligned}$$

Відповідь: поле потенційне, його потенціал  $u(x, y, z) = C + x^2 + z^2$ .

**Приклад 6.** Знайти потік поля  $\vec{a}(M)$  крізь замкнену поверхню, яка обмежена частиною площини  $P$ , розміщеної у першому октанті, і координатними площинами (нормаль зовнішня), користуючись формулою Гаусса-Остроградського:  $\vec{a}(M) = (2x; y - 3; z + 1)$ ,  $P: 3x + 2y + 6z = 6$ .

*Розв'язання.*

Зробимо рисунок поверхні. Для того, щоб зробити рисунок площини  $P$  потрібно від загального рівняння площини перейти до рівняння «у відрізках».

Нагадаємо, що рівняння площини «у відрізках» має вигляд  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$  (рис. 4.5).

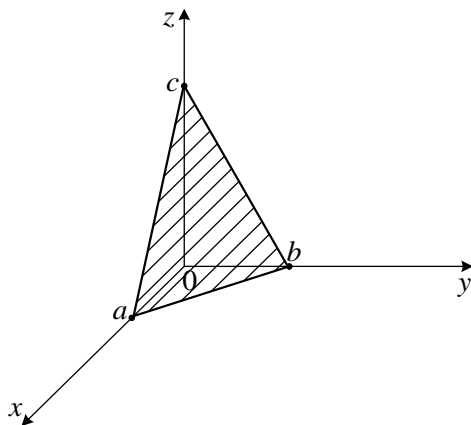


Рисунок 4.5

В нашому прикладі проведемо перетворення загального рівняння площини  $3x + 2y + 6z = 6$ , щоб отримати рівняння площини «у відрізках».

$$\begin{aligned} 3x + 2y + 6z = 6 & \quad | : 6 \\ \frac{3x}{6} + \frac{2y}{6} + \frac{6z}{6} = 1 & \Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{1} = 1. \end{aligned}$$

Маємо рисунок 4.6.

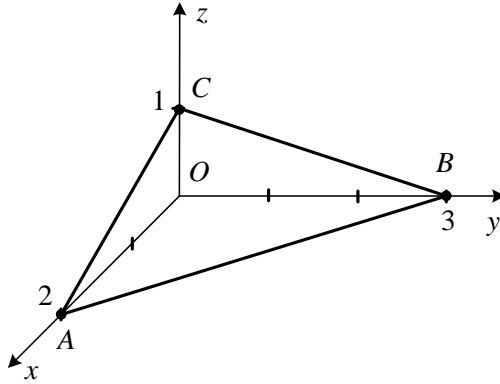


Рисунок 4.6

За формулою Гаусса-Остроградського:

$$\Pi = \iint_{\Omega} \left( \vec{a}(M) \cdot \vec{n}^0(M) \right) d\sigma = \iiint_V \operatorname{div} \vec{a}(M) dx dy dz.$$

Обчислимо дивергенцію векторного поля  $\vec{a}(M)$ :

$$P(x, y, z) = 2x, Q(x, y, z) = y - 3, R(x, y, z) = z + 1,$$

$$\operatorname{div} \vec{a}(M) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 2 + 1 + 1 = 4.$$

Отже,

$$\Pi = \iiint_V \operatorname{div} \vec{a}(M) dx dy dz = \iiint_V 4 dx dy dz = 4 \iiint_V dx dy dz.$$

Зауважимо, що  $\iiint_V dx dy dz$  – це об'єм піраміди  $ABCO$ .

Обчислимо

$$V_{ABCO} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB \cdot OC = \frac{1}{6} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 1.$$

Остаточно маємо:  $\Pi = 4 \cdot 1 = 4$ .

Відповідь:  $\Pi = 4$ .

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Чікіна Н. О., Антонова І.В. Функції декількох змінних. Скалярні поля : навчально-методичний посібник для студентів технічних спеціальностей усіх форм навчання. Харків: НТУ «ХПІ», 2023. 84 с.  
<https://repository.kpi.kharkov.ua/handle/KhPI-Press/73218>
2. Торяник Д. О., Софронова М. С. Вища математика. Деякі розділи математичного аналізу: навч. посібник. Харків: ХДУХТ, 2021. Електрон. дані, 280 с.  
URL:<https://repo.btu.kharkov.ua/handle/123456789/4468>
3. Полянська Т.С., Чорна О.С. Теорія поля: навч.-метод. посіб. Харків : НТУ ХПІ», 2019. 76 с.  
<https://web.kpi.kharkov.ua/vm/wp-content/uploads/sites/22/2020/02/Teoryya-polya-Polyanskaya.pdf>
4. Веретельник В. В., Тимченко Г.Н. Теорія функцій комплексної змінної. Харків: НТУ«ХПІ», 2012. 208 с.  
[http://library.kpi.kharkov.ua/files/TRUD\\_NTY/trud2012\\_TeorijaF.pdf](http://library.kpi.kharkov.ua/files/TRUD_NTY/trud2012_TeorijaF.pdf)
5. Курпа Л. В. Вища математика в прикладах і задачах. Т.2. Харків: НТУ«ХПІ», 2009. 432с.  
<https://repository.kpi.kharkov.ua/handle/KhPI-Press/4623>
6. Бізюк В. В., Якунін А. В. Спеціальні розділи вищої математики для електротехніків: навчальний посібник. Харків: ХНАМГ, 2008. 300 с.  
[https://vm.kname.edu.ua/images/Files/metod\\_literatura/Yakunin/Сп\\_р\\_ВМ\\_для\\_ел-ків\\_1частина.pdf](https://vm.kname.edu.ua/images/Files/metod_literatura/Yakunin/Сп_р_ВМ_для_ел-ків_1частина.pdf)
7. Збірник розрахунково-графічних завдань з вищої математики : у 2 ч. Ч. 1 / Н.О. Чікіна, І.В. Антонова, Л.О. Балака та ін. ; за ред. Н.О. Чікіної. – Харків : Підручник НТУ «ХПІ», 2014. – 224 с.  
<https://repository.kpi.kharkov.ua/handle/KhPI-Press/17448>

**8.** Чікіна, І.В. Антонова, Л.О. Балака та ін. ; за ред. Н.О. Чікіної. Збірник розрахунково-графічних завдань з вищої математики : у 2 ч. Ч. 2. Харків : Підручник НТУ «ХПІ», 2013. 216 с.

<https://repository.kpi.kharkov.ua/handle/KhPI-Press/17448>

**9.** Бізюк В. В., Якунін А. В. Вища математика для електротехніків. Модуль 3: Числові та функціональні ряди. Функції декількох змінних. Елементи теорії поля. Криволінійні та поверхневі інтеграли. Рівняння математичної фізики. Харків: ХНАМГ, 2011. 383 с.

[https://vm.kname.edu.ua/images/Files/metod\\_literatura/Yakunin/VM\\_dlya\\_elektr\\_otehnikiv\\_M3\\_1chastyna.pdf](https://vm.kname.edu.ua/images/Files/metod_literatura/Yakunin/VM_dlya_elektr_otehnikiv_M3_1chastyna.pdf)

**10.** Станішевський С. О., Якунін А. В., Володченко А. О. Вища математика для електротехніків. Модуль 2: Інтегральне числення функцій однієї змінної. Диференціальні рівняння. Операційне числення. Елементи варіаційного числення. Харків: ХНАМГ, 2010. 350 с.

[https://vm.kname.edu.ua/images/Files/metod\\_literatura/Yakunin/BM\\_dlya\\_el\\_kv\\_M2\\_1chastina.pdf](https://vm.kname.edu.ua/images/Files/metod_literatura/Yakunin/BM_dlya_el_kv_M2_1chastina.pdf)

**11.** Курпа Л. В. Вища математика. Розв'язання задач та варіанти типових розрахунків. Т.ІІ.: Навч. Посібник. Харків: НТУ «ХПІ», 2002. 312 с.

**12.** Потаніна Т.В. Вища математика: «Векторний аналіз і теорія поля». Теорія і практика: навч. Посібник. Харків.: НТУ «ХПІ», 2019. 151 с.

<https://web.kpi.kharkov.ua/vm/wp-content/uploads/sites/22/2020/03/vektorny-analiz-teoriya-polya.pdf>

## ЗМІСТ

Передмова	3
Розділ 1. Теорія функцій комплексного змінного	4
Розділ 2. Операційне числення	42
Розділ 3. Теорія поля	60
Контрольні завдання	83
Зразок розв'язання прикладів контрольного завдання	93
Список літератури	103

Навчальне видання

НЕМЧЕНКО Тетяна Адальбертівна  
СОФРОНОВА Марина Сергіївна  
ЧЕРЕМСЬКА Надія Валентинівна

ВИЩА МАТЕМАТИКА.  
ТФКЗ. Операційне числення. Векторні поля

Навчально-методичний посібник  
для студентів заочного відділення  
ННІ ЕЕЕ та ННІ МІТ

Відповідальна за випуск проф. Першина Ю. І.  
Роботу до видання рекомендувала проф. Чікіна Н. О.

В авторській редакції

План 2025 р., поз. 78

Підписано до друку 2025 р.  
Гарнітура TimesNewRoman.

---

Видавничий центр НТУ «ХП»  
Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 5478 від 21.08.2017 р.  
61002, Харків, вул. Кирпичова, 2

---

Електронне видання