

**С. А. ЦЫБУЛЬНИК**, канд. техн. наук, вед. науч. сотр.,  
НИУ «УКРНИИЭП», Харьков

## **АЛГОРИТМ ОПТИМИЗАЦИИ ОДНОРОДНОГО ПОТОКА НА ВЗВЕШЕННОМ ГРАФЕ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ПРОПУСКНУЮ СПОСОБНОСТЬ ВЕРШИН**

Предложен итеративный алгоритм выбора оптимальных интенсивностей источников однородного потока на слабо-связном взвешенном графе, любая пара вершин которого соединена не более чем одним путем, при ограничениях на пропускную способность вершин и фиксированных коэффициентах передачи (трансформации) потока по дугам. Алгоритм разработан для решения задач оптимизации водоохранных мероприятий для речной сети.

**Ключевые слова:** водный объект, водоохранные мероприятия, математическая модель, взвешенный граф, однородный поток, оптимизация.

**Введение.** Задачи о потоках на ориентированных графах (сетях) занимают важное место в теории исследования операций. Как правило, в них указывается пропускная способность ребер взвешенного графа, и при фиксированных весах вершин определяются оптимальные веса на ребрах графа, реализующие или максимизирующие поток между истоком и стоком графа [1–3]. Такой подход к взвешиванию пути на графе широко используется при решении разнообразных транспортных задач. Однако он не позволяет учесть структурные свойства таких естественных транспортных потоков, как водные системы, используемые для транспортировки удаляемых с возвратными водами отходов производства и жизнедеятельности человека.

В отличие от обычных транспортных задач, у графа речной сети пропускная способность устанавливается не для ребер, а для вершин. При этом оптимизируемыми переменными являются интенсивности источников потока в вершинах, а в качестве веса ребер фиксируются коэффициенты передачи (трансформации) потока между вершинами.

Оптимизация потока вещества через речную сеть заключается в нахождении таких коэффициентов уменьшения исходных интенсивностей источников потока в вершинах графа, при которых удовлетворяются ограничения на пропускную способность вершин (створов контроля качества воды), и достигается экстремум выбранного критерия оптимальности, например, суммарных затрат на необходимое снижение исходных интенсивностей источников потока. В общем случае такая задача может быть решена только с использованием достаточно сложных методов нелинейного математического программирования. В связи с этим актуальна разработка более простых и эффективных частных алгоритмов решения, учитывающих специфические особенности конкретной задачи.

**Цель исследования:** разработка алгоритма выбора оптимальных значений коэффициентов регулирования интенсивностей источников однородного потока в вершинах ориентированного слабо-связного взвешенного графа, любая пара вершин которого соединена не более, чем одним путем, при ограничениях на пропускную способность вершин и фиксированном весе направленных ребер (дуг) графа.

**Постановка задачи.** Пусть  $G=(V,A)$  – ориентированный слабо-связный взвешенный граф, где  $V=\{v_k\}$ ,  $k \in K$  – множество вершин графа,  $A=\{a_r\}$ ,  $r \in R$  – множество дуг графа и пусть каждой вершине графа смежно не более одной его вершины.

Зададим на графе  $G$  однородный поток  $C$ , с источниками  $c_k$  в вершинах  $v_k$ . Без ограничения общности будем полагать, что граф содержит только один сток  $v_m$  со степенью выхода равной нулю. В противном случае добавим к графу новую вершину в качестве единственного стока, соединенного со старыми стоками дугами с нулевой пропускной способностью.

Определим интенсивности источников потока в вершинах как

$$\bar{c}_k = \sum_{i \in I_k} \bar{a}_{ki} \bar{c}_{ki} (1 - u_i), \quad (1)$$

где  $\bar{c}_{ki}$  – исходная интенсивность источника потока  $i$  в вершине  $k$ ;

$I_k$  – множество индексов источников потока в вершине  $k$ ;

$\bar{a}_{ki}$  – коэффициент передачи потока от источника  $i$  к вершине  $k$  ( $0 \leq \bar{a}_{ki} \leq 1$ );

$u_i$  – коэффициент регулирования интенсивности источника  $i$  ( $0 \leq u_i \leq 1$ ).

Тогда задача оптимизации интенсивности потока может быть записана в виде задачи математического программирования с критерием вида

$$\left\{ F(u) = \sum_{k \in K} \sum_{i \in I_k} f_i(u_i) \right\} \rightarrow \min_u. \quad (2)$$

и системой ограничений вида

$$c_k \leq b_k, \quad k \in K, \quad (3)$$

где  $f_i(u_i)$  – затраты на регулирование интенсивности источника потока  $i \in I_k$  в вершине  $k$ ;

$c_k$  – суммарный поток через вершину  $k$

$$c_k = \bar{c}_k + \sum_{j \in J_k} a_{kj} c_j, \quad k \in K; \quad (4)$$

$a_{kj}$  – коэффициент передачи потока от вершины  $j$  к вершине  $k$  ( $0 \leq a_{kj} \leq 1$ );

$J_k$  – множество индексов вершин, которым смежна вершина  $k$ ;

$b_k$  – ограничение на суммарный поток через вершину  $k$ .

**Результаты исследования.** Пронумеруем вершины покрывающего дерева графа начиная от конца каждой ветви к ее корню, нумеруя вершины ветвления после нумерации всех вышележащих вершин. Соответственно порядку вершин, последовательно пронумеруем источники потока в них.

Преобразуем (4) к не рекуррентной форме, развернем относительно  $u_i$  и подставим в (3). Умножим обе части каждого ограничения  $k$  на общий коэффициент передачи потока от вершины  $k$  к стоку графа. Тогда в каждом ограничении перед каждой переменной  $u_i$  будет стоять один и тот же коэффициент  $\alpha_i$  ( $0 \leq \alpha_i \leq 1$ ) и ограничения задачи примут вид

$$\sum_{i \in \Theta_k} \alpha_i u_i \geq \beta_k, \quad k \in [1, m], \quad (5)$$

$$u_i^{\min} \leq u_i \leq u_i^{\max}, \quad i \in [1, n], \quad (6)$$

где  $m$  – мощность множества  $K$ ;

$n$  – мощность множества источников потока по всем вершинам графа;

$\Theta_k$  – множество индексов источников, влияющих на поток в вершине  $k$ ;

$u_i^{\min}$  и  $u_i^{\max}$  – ограничения на допустимые значения переменной  $u_i$ .

Ограничения (5) назовем вложенными, т.к. при выбранном способе нумерации вершин графа для любой пары вершин  $(k, p)$  справедливо условие

$$(\Theta_k \cap \Theta_p \neq \emptyset) \Rightarrow (k < p) \wedge (\Theta_k \subset \Theta_p) \vee (p < k) \wedge (\Theta_p \subset \Theta_k). \quad (7)$$

Будем далее полагать, что  $f_i(u_i)$  – выпуклые (вниз) монотонно возрастающие функции на  $R^n$ . Теоретически это сужает область возможного применения алгоритма, но на практике в транспортных задачах рассматриваемого вида критерияльные функции именно таковы.

Монотонность и выпуклость функций  $f_i(u_i)$ , неотрицательность коэффициентов  $\alpha_i$  и вложенность ограничений (5) позволяют построить итеративную пошаговую процедуру решения задачи (2), (5), (6), основанную на идеях методов максимального элемента и последовательных приращений и кусочно-линейной аппроксимации функций  $f_i(u_i)$  [4]. Необходимые и достаточные условия оптимальности решения задачи имеют вид:

$$\begin{aligned} \text{I. } \forall i \in I_k, \quad k \in K^{\text{н}} : u_i &= u_i^{\min}, \\ \text{II. } \forall (i, p) \in \Theta_k, \quad k \in K^{\text{а}} : \frac{c_i^+}{\alpha_i} &\geq \frac{c_p^-}{\alpha_p}, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $c_i^-$  и  $c_i^+$  – угловые коэффициенты кусочно-линейной аппроксимации функций  $f_i(u_i)$  с шагом  $h_i$  влево и вправо от текущего значения переменной  $u_i$ ;

$K^{\text{а}}$  – множество активных ограничений системы (5);

$K^{\text{н}}$  – множество пассивных ограничений системы (5), не вложенных ни в одно из активных ограничений (если множество не пусто, оно по определению включает последнее ограничение задачи для вершины  $m$ ).

Первое условие означает, что переменные, не входящие в активные ограничения, принимают минимальные значения. Второе – что решение нельзя улучшить ни по какой паре входящих в активные ограничения переменных при противоположном приращении последних.

Пусть  $M$  – достаточно большое число. Определим границы интервалов и угловые коэффициенты кусочно-линейной аппроксимации  $f_i(u_i)$ ,  $i \in [1, n]$  как

$$\begin{aligned} u_i^- &= \max(u_i^{\min}, u_i - h_i), \\ u_i^+ &= \min(u_i^{\max}, u_i + h_i), \\ c_i^- &= \begin{cases} (f_i(u_i) - f_i(u_i^-)) / (u_i - u_i^-), & \text{если } u_i > u_i^{\min}, \\ 0, & \text{если } u_i = u_i^{\min}, \end{cases} \\ c_i^+ &= \begin{cases} (f_i(u_i^+) - f_i(u_i)) / (u_i^+ - u_i), & \text{если } u_i < u_i^{\max}, \\ M, & \text{если } u_i = u_i^{\max}. \end{cases} \end{aligned} \quad (9)$$

Определим для переменной  $u_p$  минимальную невязку пассивных ограничений задачи, вложенных в ограничение с номером  $s$  как

$$\gamma_p(s) = \min_{k \in K^a} \left( \sum_{j \in \Theta_k} \alpha_j u_j - \beta_k / p \in \Theta_k, k < s \right). \quad (10)$$

Пусть  $K_\gamma$  – множество  $k$ , доставляющих минимум  $\gamma_p(s)$ ,  $\omega(i) = \min \{ j / j \in K^a, p \in \Theta_j \}$  – номер первого активного ограничения, содержащего  $u_i$  и  $\varepsilon$  – достаточно малая величина. Тогда алгоритм определения оптимальных значений коэффициентов регулирования интенсивностей источников потока  $u_i$  можно представить в следующем виде:

1. Положить  $h_i = 0,5 \cdot (u_i^{\max} - u_i^{\min})$  для  $i \in [1, n]$ .
2. Положить  $u_i = u_i^{\max}$  для  $i \in [1, n]$ ; если система (5) несовместна, остановиться, так как задача не имеет решения.
3. Определить множества  $K^a, K^H$ .
4. Определить  $u_i^-, u_i^+, c_i^-$  и  $c_i^+$  для  $i \in [1, n]$ .
5. Если выполняется условие оптимальности I, то если  $K^a = \emptyset$  перейти к шагу 21, иначе перейти к шагу 10.
6. Определить  $p = \arg \max_{j \in I_m} (c_j^- / \alpha_j)$ .
7. Вычислить  $\gamma_p(m+1)$  и  $\delta_p = \min(\gamma_p(m+1) / \alpha_p, u_p - u_p^-)$ .
8. Если  $\delta_p = \gamma_p(m+1) / \alpha_p$ , то переместить из множества  $K^H$  в множество  $K^a$  все ограничения с номером  $k \in K_\gamma$ .
9. Положить  $u_p = u_p - \delta_p$ , определить  $u_p^-, u_p^+, c_p^-, c_p^+$  и перейти к шагу 5.

10. Определить  $t = \max \{ j / j \in K^a \}$  и  $p = \arg \max_{j \in \Theta_t} (c_j^- / \alpha_j)$ .
11. Положить  $s = \omega(p)$  и определить  $i = \arg \min_{j \in \Theta_s} (c_j^+ / \alpha_j)$ .
12. Если  $i=p$ , условие оптимальности II выполнено, перейти к шагу 20.
13. Если  $\omega(i) \neq \omega(p)$ , исключить из множества  $K^a$  ограничения  $k$  такие, что  $i \in \Theta_k$  и  $p \notin \Theta_k$ .
14. Вычислить  $\mu_p = \min(\alpha_p(u_p - u_p^-), \alpha_i(u_i^+ - u_i))$ .
15. Определить  $s = \min \{ j / j \notin K, (i, p) \in \Theta_j \}$ .
16. Вычислить  $\gamma_p(s)$  и  $\delta_p = \min(\gamma_p(s), \mu_p)$ .
17. Положить  $u_p = u_p - \delta_p / \alpha_p$  и  $u_i = u_i + \delta_p / \alpha_i$ .
18. Если  $\delta_p = \gamma_p(s)$ , то включить в множество  $K^a$  все ограничения с номером  $k \in K_\gamma$ .
19. Определить  $u_p^-, u_p^+, c_p^-, c_p^+$  и  $u_i^-, u_i^+, c_i^-, c_i^+$  и перейти к шагу 10.
20. Если  $\max h_i > \varepsilon$ , положить  $h_i = h_i / 2, \forall h_i > \varepsilon$  и перейти к шагу 4.
21. Записать оптимальное решение.

Определенные с помощью данного алгоритма значения  $u_i$  определяют поток (3), удовлетворяющий наложенным ограничениям (4) и критерию оптимальности (2) и, следовательно, являются решением задачи (2)–(4).

**Выводы.** Разработанный алгоритм позволяет определить оптимальные водоохранные мероприятия, обеспечивающие нормативное качество поверхностных вод в бассейне реки по доминирующему либо интегральному показателю состава возвратных вод. Для расчета более сложных сетей, узлы которых соединены более чем одним путем, может быть использован разработанный автором универсальный алгоритм [5], позволяющий определить поток на графе произвольной конфигурации.

**Список литературы:** 1. Исследование операций : В 2-х т. Т. 1 / ред. Дж. Муудер, С. Элмаграби. – М. : Мир, 1981. – 712 с. 2. Басакер Р. Конечные графы и сети / Р. Басакер, Т. Саати. – М. : Наука, 1973. – 368 с. 3. Форд Л. Потoki в сетях / Л. Форд, Д. Фалкерсон. – М. : Мир, 1966. – 276 с. 4. Берзин Е. А. Оптимальное распределение ресурсов и элементы синтеза систем / Е. А. Берзин. – М. : Сов. радио, 1974. – 304 с. 5. Цыбульник С. А. Применение итеративных алгоритмов расчета качества вод при выборе водоохранных мероприятий / С. А. Цыбульник // В кн.: Комплексные водоохранные мероприятия. – Харьков : ВНИИВО. – 1981. – С. 118–124.

**Bibliography (transliterated):** 1. Moudier, Dzh., and S. Jelmagrabi, ed. *Issledovanie operacij*. Vol. 1. Moscow: Mir, 1981. 2 vols. 2. Basaker, R., and T. Saati. *Konechnye grafy i seti*. Moscow: Nauka, 1973. Print. 3. Ford L., and Falkerson D. *Potoki v setjah*. Moscow: Mir, 1966. Print. 4. Berzin, E. A. *Optimal'noe raspredelenie resursov i jelementy sinteza sistem*. Moscow: Sov. radio, 1974. Print. 5. Tsybulnik, S. A. "Primenenie iterativnyh algoritmov rascheta kachestva vod pri vybore vodoohrannyh meroprijatij." *Kompleksnyye vodoohrannyye meroprijatija*. Kharkiv: VNIIVO, 1981. 118–124. Print.

*Поступила (received) 11.12.2014*