УДК 621.391: 517. 518:510.52

О. М. ЛИТВИН, д-р. фіз.-мат. наук, УІПА,
В.М.УДОВИЧЕНКО, канд. техн. наук, НТУ "ХПІ" (м. Харків)

ОПЕРАТОРИ ДВОВИМІРНОГО ФІНІТНОГО ДИСКРЕТНО–НЕПЕРЕРВНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є НА ОСНОВІ СПЛАЙНІВ ПЕРШОГО СТЕПЕНЯ, ТОЧНІ НА ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ПОЛІНОМАХ ЗАДАНОГО ПОРЯДКУ

Досліджуються оператори обчислення двовимірного фінітного дискретно-неперервного перетворення Фур'є на основі сплайнів першого степеня, точні на тригонометричних поліномах заданого порядку. Зокрема, досліджено їх інтерполяційні властивості. Наведена оцінка похибки апроксимації комплексних функцій двох дійсних змінних запропонованими операторами. Наведено приклад.

The operators of calculation of two-dimensional finite discretely-continuous Fourier Transform on the basis of splines of the first degree were investigated. These operators are precise on trigonometric polynomials of corresponding degree. Their interpolation properties are researched. The estimation of error approximating of complex functions of two real variables by the offered operators is given. The example is given.

Постановка проблеми. Проблема, яку ми розв'язуємо в даній статті, полягає: 1. В побудові ефективного методу відновлення коефіцієнтів Фур'є для функцій двох змінних на основі фіксованої кількості відліків наближуваної функції з використанням методу Файлона обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій і з заміною функції $f(x,y)$ сплайнами першого степеня по кожній змінній; 2. На основі отриманих операторів (при $N=M$) будуємо оператори, точні на тригонометричних поліномах порядку N

Аналіз літератури. В літературі, присвяченій перетворенню Фур'є основними напрямками досліджень є різноманітні варіанти реалізації швидких алгоритмів дискретного перетворення Фур'є [1], [2], порівняння швидких алгоритмів дискретного перетворення Фур'є та дискретного перетворення Хартлі [3], створення багатовимірних варіантів дискретного перетворення Фур'є [4]. Класичне двовимірне перетворення Фур'є [5 , с.17]

$$H(u,v)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\exp\left[-j2\pi(ux+vy)\right]dx\,dy,$$

$$f(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} H(u,v)\exp\left[\,j2\pi(ux+vy)\right]du\,dv$$

в прикладних задачах, орієнтованих на комп'ютерні технології, використовують у вигляді прямого та оберненого дискретного перетворення Фур'є [1, С.495]

$$H(\nu_1,\nu_2)=(N_1,N_2)^{-1}\sum_{\tau_1=0}^{N_1-1}\sum_{\tau_2=0}^{N_2-1} f(\tau_1,\tau_2)\exp\left[-j2\pi(\nu_1\tau_1/N_1+\nu_2\tau_2/N_2)\right],$$

$$\nu_1=\overline{0,N_1-1},\ \nu_2=\overline{0,N_2-1},$$

$$f(\tau_1,\tau_2)=\sum_{\nu_1=0}^{N_1-1}\sum_{\nu_2=0}^{N_2-1} H(\nu_1,\nu_2)\exp\left[j2\pi(\nu_1\tau_1/N_1+\nu_2\tau_2/N_2)\right],$$

$$\tau_1=\overline{0,N_1-1},\ \tau_2=\overline{0,N_2-1}. \qquad (1)$$

Двовимірне дискретне перетворення Фур'є (1) з точки зору характеристик точності має недоліки, які розглянуто в [6].

Метою роботи є: 1) побудова операторів обчислення двовимірного фінітного дискретно – неперервного перетворення Фур'є на основі сплайнів першого степеня по кожній змінній, з $(2M1+1)(2M2+1)$ вузлами (x_p,y_q), $p=\overline{-M1,M1}$, $q=\overline{-M2,M2}$, які мали б нову, порівняно з класичним дискретним двовимірним перетворенням Фур'є властивість – можливість формувати неперервне наближення функції по її дискретних відліках і при цьому забезпечувати більш високі характеристики точності, порівняно з класичним двовимірним дискретним перетворенням Фур'є (при однаковій кількості вузлів); 2) побудова на їх основі (при $N=M$ $N=(N1,\ N2),\ M=(M1,\ M2)$) операторів, точних на тригонометричних поліномах порядку N; 3) дослідження властивостей отриманих операторів; зокрема доведення, що ці оператори є операторами інтерполяційного типу: $L_{M,\ M}^{F,2\ d,\ Sp1} f(x_p,y_q)=f(x_p,y_q),\ p=\overline{-M1,M1},\ q=\overline{-M2,M2},\ M=(M1,M2)$.

Побудова операторів обчислення двовимірного фінітного дискретно–неперервного перетворення Фур'є на основі сплайнів першого степеня. Для наближеного обчислення коефіцієнтів Фур'є

$$b_{k1,k2}^{F,\ 2d}(f)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x,y)\exp\left[-j(k1x+k2y)\right]dxdy,\ k1=\overline{-N1,N1},\ k2=\overline{-N2,N2}, \qquad (2)$$

в двовимірній сумі Фур'є

$$S_N^{F,2d}(f)=\sum_{k1=-N1}^{N1}\sum_{k2=-N2}^{N2} b_{k1,\ k2}^{F,2d}(f)\exp\left[j(k1x+k2y)\right],\ N1\le M1,\ N2\le M2$$

комплексної функції дійсного аргумента $f(x,y)=\mathrm{Re}\,f(x,y)+j\,\mathrm{Im}\,f(x,y)$; $\mathrm{Re}\,f(x,y)$, $\mathrm{Im}\,f(x,y)\in C^k\left[-\pi,\pi\right]^2$, $k=1,2,3,...$ використаємо підхід запропонований в [7], модифікований в [8], [9], який полягає в тому що ми замінюємо $f(x, y)$ її сплайном першого степеня по кожній змінній. Введемо до розгляду двовимірний сплайн першого степеня по кожній змінній для $f(x,y)$

$$\mathrm{Sp}1_M(f;x,y)=\sum_{p1=-M1}^{M1}\ \sum_{p2=-M2}^{M2} h1(x,p1,\Delta_1)h1(y,p2,\Delta_2)f(x_{p1},y_{p2}),$$

$$h1(x,q,\Delta_k)=(|t-1|-2|t|+|t+1|)/2,t=x/\Delta_k-q,\ \Delta_k=2\pi/(2Mk+1),\ k=1,2,$$

$$(x,y)\in[-\pi,\pi]^2,\ x_{p1}=p1\Delta_1,\ y_{p2}=p2\Delta_2. \tag{3}$$

Підставляючи (3) в (2), отримуємо

$$b_{N,M,k1,k2}^{F,2d,\mathrm{Sp}1}(f)=\frac{1}{4\pi^2}\sum_{p1=-M1}^{M1}\ \sum_{p2=-M2}^{M2} f(x_{p1},y_{p2})\times$$

$$\int_{(p1-1)\Delta_1}^{(p1+1)\Delta_1}\int_{(p2-1)\Delta_2}^{(p2+1)\Delta_2} h1(x,p1,\Delta_1)h1(y,p2,\Delta_2)\exp[-j(k1x+k2y)]dxdy, \tag{4}$$

$$\Delta_1=2\pi e_1,\ e_1=1/(2M1+1),\ p1=\overline{-M1,M1},\ k1=\overline{-N1,N1},\ N1\le M1, \tag{5}$$

$$\Delta_2=2\pi e_2,\ e_2=1/(2M2+1),\ p2=\overline{-M2,M2},\ k2=\overline{-N2,N2},\ N2\le M2. \tag{6}$$

Виконавши обчислення в (4) із врахуванням (3), (5), (6) одержимо

$$b_{N,M,k1,k2}^{F,2d,\mathrm{Sp}1}(f)=\sum_{p1=-M1}^{M1}\ \sum_{p2=-M2}^{M2} f(x_{p1},y_{p2})\times$$

$$\times\left\{\left[\frac{[1-\cos(k1\,\Delta_1)][1-\cos(k2\,\Delta_2)]}{\pi^2\,k1^2\,k2^2\,\Delta_1\,\Delta_2}\times\right.\right.$$

$$\left.\times\exp[-j(k1\,p1\Delta_1+k2\,p2\Delta_2)],\ (k1\ne0\wedge k2\ne0)\right]\vee$$

$$\vee\left[\frac{[1-\cos(k1\Delta_1)]e_2}{\pi\,k1^2\,\Delta_1}\exp(-jk1\,p1\Delta_1),\ (k1\ne0\wedge k2=0)\right]\vee$$

$$\vee\left[\frac{[1-\cos(k2\Delta_2)]e_1}{\pi\,k2^2\,\Delta_2}\exp(-jk2\,p2\Delta_2),\ (k1=0\wedge k2\ne0)\right]\vee$$

$$\left.\vee[e_1\,e_2,\ (k1=0\wedge k2=0)]\right\},\quad k1=\overline{-N1,N1},\ k2=\overline{-N2,N2}. \tag{7}$$

Оператор

$$U_{N,M}^{F,2d,\mathrm{Sp}1}f(x,y)=\sum_{k1=-N1}^{N1}\ \sum_{k2=-N2}^{N2} b_{N,M,k1,k2}^{F,2d,\mathrm{Sp}1}(f)\exp[j(k1x+k2y)], \tag{8}$$

де $(x,y)\in[-\pi,\pi]^2$, дозволяє обчислювати неперервне наближення функції $f(x,y)\in C^r[-\pi,\pi]^2$; $r=1,2,3,...$ по її дискретних відліках $f(x_{p1},y_{p2})$, $(x_{p1},y_{p2})\in(-\pi,\pi)^2$ При застосуванні (8) враховуємо вимоги двовимірної теореми дискретизації [10, С.13], [11] для вибору необхідних $M1$, $M2$ для даної функції $f(x,y)$

Теорема 1. Нехай вузли і коефіцієнти кубатурної формули (4), які використовуються для наближеного обчислення коефіцієнтів Фур'є $b^{F,2d}_{k1,k2}(f)$, задовольняють умову:

$$b^{F,2d,Sp1}_{N,M,k1,k2}\{\exp[j(k1x+k2y)]\}=\delta_{k1,p1}\delta_{k2,p2}\gamma_{k1,k2};$$

$k1=\overline{-N1,N1}$; $k2=\overline{-N2,N2}$, $p1=\overline{-M1,M1}$, $p2=\overline{-M2,M2}$; де $\delta_{t,s}$ є символ Кронекера, $\gamma_{k1,k2}\neq 0$ є деякі числа. Тоді оператор (див. також [8])

$$L^{F,2d,Sp1}_{N,M}f(v1,v2)=\sum_{k1=-N1}^{N1}\sum_{k2=-N2}^{N2}g^{F,2d,Sp1}_{N,M,k1,k2}(f)\times$$

$$\times\exp[j(k1v1+k2v2)],\ (v1,v2)\in\Re^2,\ \Re=(-\infty,\infty), \tag{9}$$

де:
$$g^{F,2d,Sp1}_{N,M,k1,k2}(f)=\frac{b^{F,2d,Sp1}_{N,M,k1,k2}(f)}{b^{F,2d,Sp1}_{N,M,k1,k2}\left[\exp[j(k1x+k2y)]\right]},$$

$$k1=\overline{-N1,N1},\ k2=\overline{-N2,N2}; \tag{10}$$

$$b^{F,2d,Sp1}_{N,M,k1,k2}\left[\exp[j(k1x+k2y)]\right]=\frac{1}{4\pi^2}\sum_{p1=-M1}^{M1}\sum_{p2=-M2}^{M2}\exp\left[j(k1x_{p1}+k2y_{p2})\right]\times$$

$$\times\int_{(p1-1)\Delta_1}^{(p1+1)\Delta_1}\int_{(p2-1)\Delta_2}^{(p2+1)\Delta_2}h1(x,p1,\Delta_1)h1(y,p2,\Delta_2)\exp[-j(k1x+k2y)]dx\,dy=$$

$$=\left\{\left[\frac{[1-\cos(k1\,\Delta_1)][1-\cos(k2\,\Delta_2)]}{\pi^2\,k1^2\,k2^2\,\Delta_1\,\Delta_2},(k1\neq 0\wedge k2\neq 0)\right]\vee\right.$$

$$\vee\left[\frac{[1-\cos(k1\Delta_1)]}{\pi\,k1^2\,\Delta_1},(k1\neq 0\wedge k2=0)\right]\vee\left[\frac{[1-\cos(k2\Delta_2)]}{\pi\,k2^2\,\Delta_2},(k1=0\wedge k2\neq 0)\right]\vee$$

$$\left.\vee[1,(k1=0\wedge k2=0)]\right\},\quad k1=\overline{-M1,M1},k2=\overline{-N2,N2}; \tag{11}$$

має такі властивості: 1^o. $L^{F,2d,Sp1}_{M,M}f\equiv f$, (12) якщо $f=\sum_{r1=-M1}^{M1}\sum_{r2=-M2}^{M2} C'_{r1,r2}\exp[j(r1x+r2y)],\ \forall\, C_{r1,r2}\in\Re$.

$$2^0\ L_{M,M}^{F,2d,\,Sp1} f(x_{p1},y_{p2})=f(x_{p1},y_{p2}),\ p1=\overline{-M1,M1},\ p2=\overline{-M2,M2}. \qquad (13)$$

Доведення. Виконавши обчислення (10) з урахуванням (7), (11) одержимо

$$g_{N,M,k1,k2}^{F,2d,\,Sp1}(f)=e_1 e_2\sum_{p1=-M1}^{M1}\sum_{p2=-M2}^{M2} f(x_{p1},y_{p2})\times$$
$$\times\Big\{\big[\exp[-j(k1\,p1\Delta_1+k2\,p2\Delta_2)],\ (k1\neq0\wedge k2\neq0)\big]\vee$$
$$\vee\big[\exp(-jk1\,p1\Delta_1),\ (k1\neq0\wedge k2=0)\big]\vee\big[\exp(-jk2\,p2\Delta_2),\ (k1=0\wedge k2\neq0)\big]\vee$$
$$\vee\big[1,\ (k1=0\wedge k2=0)\big]\Big\},\ \ k1=\overline{-N1,N1},\ k2=\overline{-N2,N2}. \qquad (14)$$

Тобто (9) в цьому випадку має вигляд:

$$L_{N,M}^{F,2d,\,Sp1} f(v1,v2)=e_1 e_2\sum_{p1=-M1}^{M1}\sum_{p2=-M2}^{M2} f(x_{p1},y_{p2})\times$$
$$\times\sum_{k1=-N1}^{N1}\sum_{k2=-N2}^{N2}\left\{\begin{matrix}\big[\exp[-j(k1\,p1\Delta_1+k2\,p2\Delta_2)],(k1\neq0\wedge k2\neq0)\big]\vee\\ \vee\big[\exp(-jk1\,p1\Delta_1),\ (k1\neq0\wedge k2=0)\big]\vee\\ \vee\big[\exp(-jk2\,p2\Delta_2),\ (k1=0\wedge k2\neq0)\big]\vee\\ \vee\big[1,\ (k1=0\wedge k2=0)\big]\end{matrix}\right\}\times$$
$$\times\exp[j(k1v1+k2v2)],\quad (v1,v2)\in[-\pi,\pi]^2 \qquad (15)$$

Перейдемо від неперервних $(v1,v2)\in[-\pi,\pi]^2$ до дискретних змінних $(u1_m,u2_n)\in(-\pi,\pi)^2$:

$$u1_m=m\Delta_Q,\ u1_m\in(-\pi,\pi),\ m=\overline{-Q,Q},\ \Delta_Q=2\pi\lambda,\ \lambda=1/(2Q+1),$$
$$u2_n=n\Delta_W,\ u2_n\in(-\pi,\pi),\ n=\overline{-W,W},\ \Delta_W=2\pi\eta;\ \eta=1/(2W+1).$$

Нехай виконуються умови:

$$Q=M1,\ N1=M1,\ m=\overline{-M1,M1},\ \Delta_Q=\Delta_1,$$
$$W=M2,\ N2=M2,\ n=\overline{-M2,M2},\ \Delta_W=\Delta_2.$$

Тоді $u1_m=x_m$; $u2_n=y_n$ і для (15) одержимо (при $N=M$):

$$L_{M,M}^{F,2d,\,Sp1} f(x_m,y_n)=e_1 e_2\sum_{p1=-M1}^{M1}\sum_{p2=-M2}^{M2} f(x_{p1},y_{p2})\times$$

$$\times\sum_{k1=-M1}^{M1}\sum_{k2=-M2}^{M2}\left\{\begin{array}{l}\left[\exp\left[-j(k1\,p1\Delta_1+k2\,p2\Delta_2)\right]\times\right.\\ \left.\times\exp\left[j(k1\,m\Delta_1+k2\,n\Delta_2)\right],(k1\neq0\wedge k2\neq0)\right]\vee\\ \vee\left[\exp\left[-j(k1\,p1\Delta_1)\right]\exp\left[j(k1\,m\Delta_1)\right],(k1\neq0\wedge k2=0)\right]\vee\\ \vee\left[\exp\left[-j(k2\,p2\Delta_2)\right]\exp\left[j(k2\,n\Delta_2)\right],(k1=0\wedge k2\neq0)\right]\vee\\ \qquad\vee\left[1,\ (k1=0\wedge k2=0)\right]\end{array}\right\}\times$$

$$\times\exp\left[j(k1\,x_m+k2\,y_n)\right],(x1_m,y2_n)\in(-\pi,\pi)^2,m=\overline{-M1,M1},n=\overline{-M2,M2}\,.\ (16)$$

Маючи на увазі, що

$$\sum_{m=-M}^{M}\exp(-im\,p\Delta)\exp(imk\Delta)=0,\Delta=2\pi/(2M+1),\ m\neq k\,,$$

а також враховуючи, що

$$\sum_{m=-M}^{M}\left\{\begin{array}{l}\exp(-im\,p\Delta)\exp(imk\Delta),\ p=m,\ m\neq0,\\ 1\ ,\quad m=0,\end{array}\right\}=2M+1\,,\text{ одержимо з (16)}$$

$$L_{M,M}^{F,2d,\,Sp1}f(x_{p1},y_{p2})=f(k1\,p1\Delta_1,k2\,p2\Delta_2)=f(x_{p1},y_{p2}),$$

$$p1=\overline{-M1,M1},\ p2=\overline{-M2,M2}\,.$$

Твердження (13) доведене. Враховуючи однозначне зображення тригонометричного полінома степеня М за допомогою його значень в точках $(x_{p1},y_{p2}),p1=\overline{-M1,M1},p2=\overline{-M2,M2}$, див. (13), можна стверджувати, що $\forall C_{p1,\,p2}\in\Re$

$$L_{M,M}^{F,2d,Sp1}S_N^{F,\,2d}\equiv S_N^{F,\,2d}\ \forall S_N^{F,\,2d}=\sum_{p1=-M1}^{M1}\sum_{p2=-M2}^{M2}C_{p1,p2}\exp\left[j(p1\,x+p2\,y)\right].$$

Теорема 1 доведена. В наступній теоремі доведена оцінка похибки апроксимації дійсних функцій двох змінних за допомогою оператора $L_{M,M}^{F,2d,Sp1}f$

Теорема 2. Хай $R_{M,\,M}f(x,y)=f(x,y)-L_{M,M}^{F,2d,Sp1}f$ -похибка апроксимації функції $f(x,y)$ за допомогою оператора $L_{M,M}^{F,2d,Sp1}f$; $r_Nf(x,y)=$ $=f(x,y)-S_N^{F,\,2d}f(x,y)$ - похибка наближення функції $f(x,y)$ сумою Фур'є $S_N^{F,\,2d}f(x,y)$ порядку $N=(N1,N2)$; I-тотожній оператор. Тоді виконується співвідношення при $N=M$: $R_{M,\,M}f(x,y)=$

$$=r_M f(x,y)-L_{M,M}^{F,2d,\,Sp1}\left[r_M f(x,y)\right]=(I-L_{M,M}^{F,2d,\,Sp1})r_M f(x,y)\,.\qquad(17)$$

Доведення. Враховуючи властивісті (12), (13), можна написати

$$L_{M,M}^{F,2d,\,Spl}[S_M^{F,2d} f(x,y)] = S_M^{F,2d} f(x,y).\ \text{Тому:}$$

$$f(x,y) = S_M^{F,2d} f(x,y) + r_M f(x,y) \Rightarrow R_{M,M} f(x,y) = S_M^{F,2d} f(x,y) + r_M f(x,y) -$$

$$-L_{M,M}^{F,2d,\,Spl}[S_M^{F,2d} f(x,y) + r_M f(x,y)] = S_M^{F,2d} f(x,y) + r_M f(x,y) -$$

$$-L_{M,M}^{F,2d,\,Spl} S_M^{F,2d} f(x,y) - L_{M,M}^{F,2d,\,Spl}[r_M f(x,y)] =$$

$$= r_M f(x,y) - L_{M,M}^{F,2d,Spl} r_M f(x,y) = (I - L_{M,M}^{F,2d,Spl}) r_M f(x,y).$$

Тобто отримали доведення теореми 2.

Теорема 3. Якщо $\lambda_{M1,M2} = \left\| L_{M,M}^{F,2d,\,Spl} \right\|_{C(D)}$,

$\rho_{M1,M2}(f) = \inf\limits_{v \in T_{M1,M2}} \|v - f\|_{L\infty(D)}$ є найкраще наближення функції $f(x,y)$

тригонометричними поліномами $T_{M1,M2}$, то для оцінка похибки

$R_{M,M} f(x,y) = f(x,y) - L_{M,M}^{F,2d,\,Spl} f(x,y)$ виконується співвідношення

$$\| R_{M,M} f \|_{C(D)} \le (1 + \lambda_{M1,M2}) \rho_{M1,M2}(f),\ D = (-\pi,\pi)^2 \tag{18}$$

Доведення. Враховуючи (17) отримаємо:

$$\| R_{M,M} f \|_{C(D)} = \| f - L_{M,M}^{F,2d,Spl} f \|_{C(D)} = \left\| r_M f - L_{M,M}^{F,2d,Spl} r_M f \right\|_{C(D)} =$$

$$= \left\| (I - L_{M,M}^{F,2d,Spl}) r_M f \right\|_{C(D)} \le (I + \left\| L_{M,M}^{F,2d,Spl} \right\|_{C(D)}) \| r_M f \|_{C(D)} =$$

$= (1 + \lambda_{M1,M2}) \| r_M f \|_{C(D)}$. Теорема 3 доведена.

Теорема 4. Хай $f(x,y) \in W^r(D)$, $r = 1,2,\ldots$. Тоді виконується співвідношення:

$$\| R_{M,M} f \|_{C(D)} \le O((1 + \lambda_{M1,M2}) \frac{\ln \overline{M}}{\overline{M}^r}),\ \overline{M} = \min\{M1, M2\}. \tag{19}$$

Доведення. Зауважимо, що $S_M^{F,2d} f(x,y) = S_{x,M1}^F S_{y,M2}^F f(x,y)$. Тому для похибки наближення $f(x,y)$ сумами Фур'є отримаємо:

$$r_M f(x,y) = f(x,y) - S_M^{F,2d} f(x,y) = (I - S_{x,M1}^F S_{y,M2}^F) f(x,y) = \Big[(I - S_{x,M1}^F) + (I - S_{y,M2}^F) -$$

$$- (I - S_{x,M1}^F)(I - S_{y,M2}^F) \Big] f(x,y) = R_1 f(x,y) + R_2 f(x,y) - (R_1 R_2) f(x,y);$$

$$\| r_M f \|_{C(D)} = \| (R_1 + R_2 - R_1 R_2) f \|_{C(D)} \le \| R_1 f \|_{C(D)} + \| R_2 f \|_{C(D)} +$$

$$+\left\| R_1 R_2 f \right\|_{C(D)} \le \max_{-\pi\le y\le\pi} E_{x,M1}(f;y) + \max_{-\pi\le x\le\pi} E_{y,M2}(f;x) + E_{M1,M2}(f), \quad (20)$$

де

$$S^F_{x,M1} f(x,y) = \sum_{k=-M1}^{M1} C1_k f(y) \exp(jkx)\ , S^F_{y,M2} f(x,y) = \sum_{p=-M2}^{M2} C2_p f(x) \exp(jpy),$$

$$C1_k[f(y)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x,y)\exp(-jk\,x)\,dx\ , C2_p[f(x)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x,y)\exp(-jp\,y)\,dy,$$

$$E_{x,M1}(f;y) = \max_{-\pi\le x\le\pi}\left| f(x,y) - S^F_{x,M1} f(x,y)\right|;$$

$$E_{y,M2}(f;x) = \max_{-\pi\le y\le\pi}\left| f(x,y) - S^F_{y,M2} f(x,y)\right|;$$

$E_{M1,M2}(f) = \max\limits_{-\pi\le x\le\pi}\left| g_{M2}(x) - S^F_{x,M1} g_{M2}(x)\right|; g_{M2}(x) = E_{y,M2}(f;x)$. Звідси, враховуючи (20) і відому оцінку наближення для функцій $f(x,y)\in W^r$, $r = 1,2,3,\ldots$ тригонометричними поліномами степення M, отримаємо

$$\left\| r_M f \right\|_{C(D)} = O\left(\frac{\ln M1}{M1^r}\right) + O\left(\frac{\ln M2}{M2^r}\right) + O\left(\frac{\ln M1 \ln M2}{M1^r\, M2^r}\right) = O\left(\frac{\ln \overline{M}}{\overline{M}^r}\right),\ M\to\infty.$$

Врахуємо, що $\rho_{M1,M2}(f) \le \left\| r_M f \right\|_{C(D)}$. Підставляючи це співвідношення у формулу (18) отримаємо доведення теореми 4.

Тестовий приклад. В таблиці наведені результати обчислення оцінки приведеної похибки наближення функції $f(x,y) = (1-x^2)[\cos(My/\sqrt{2})+1] + j(1+y^2)[\cos(Mx/\sqrt{3})-1]$ за допомогою оператора $U^{F,2d,Sp1}_{N,M} f(x,y)$ - $(\beta 1, \gamma 1)$ та оператора $L^{F,2d,Sp1}_{N,M} f(x,y)$ $(\beta 2, \gamma 2)$, де

$$\beta 1 = \max_{\substack{-M1\le r1\le M1 \\ -M2\le r2\le M2}} \left| f(x_{r1}, y_{r2}) - U^{F,2d,Sp1}_{M,M} f(x_{r1}, y_{r2})\right| / \max_{\substack{-R1\le r1\le R1 \\ -R2\le r2\le R2}} \left| f(x_{r1}, y_{r2})\right|$$

$$\gamma 1 = \max_{\substack{-M1\le r1\le M1 \\ -M2\le r2\le M2}} \left| f(x_{r1}, y_{r2}) - L^{F,2d,Sp1}_{M,M} f(x_{r1}, y_{r2})\right| / \max_{\substack{-R1\le r1\le R1 \\ -R2\le r2\le R2}} \left| f(x_{r1}, y_{r2})\right|,$$

$$\beta 2=\max_{\substack{-R1\le r1\le R1\\ -R2\le r2\le R2}}\left|f(x_{r1},y_{r2})-U_{M,M}^{F,2d,Sp1}f(x_{r1},y_{r2})\right|/\max_{\substack{-R1\le r1\le R1\\ -R2\le r2\le R2}}\left|f(x_{r1},y_{r2})\right|$$

$$\gamma 2=\max_{\substack{-R1\le r1\le R1\\ -R2\le r2\le R2}}\left|f(x_{r1},y_{r2})-L_{M,M}^{F,2d,Sp1}f(x_{r1},y_{r2})\right|/\max_{\substack{-R1\le r1\le R1\\ -R2\le r2\le R2}}\left|f(x_{r1},y_{r2})\right|$$

для $M=M1=M2$; $R=R1=R2$; $N=N1=N2$, де $N1, N2$ – порядок тригонометричного полінома; $(2M+1)^2$ –кількість значень функції $f(x_{r1},y_{r2})$, що використовується у формулі (7) та (13); $(2M+1)^2$ – - кількість точок (x_{r1},y_{r2}), $x_{r1}=2\pi r1/(2M+1)$, $r1=\overline{-M,M}$, $y_{r2}=2\pi r2/(2M+1)$, $r2=\overline{-M,M}$, у яких обчислюються числа $\alpha 1$, $\beta 1$, $\gamma 1$; $(2R+1)^2$ – - кількість точок (x_{r1},y_{r2}), $x_{r1}=2\pi r1/(2R+1)$, $r1=\overline{-R,R}$, $y_{r2}=2\pi r2/(2R+1)$, $r2=\overline{-R,R}$ у яких обчислюються числа $\beta 2, \gamma 2$;

$$\alpha 1=\max_{\substack{-M1\le r1\le M1\\ -M2\le r2\le M2}}\left|f(x_{r1},y_{r2})-S_M^{F,2d}f(x_{r1},y_{r2})\right|/\max_{\substack{-R1\le r1\le R1\\ -R2\le r2\le R2}}\left|f(x_{r1},y_{r2})\right|,$$

$$\alpha 2=\max_{\substack{-R1\le r1\le R1\\ -R2\le r2\le R2}}\left|f(x_{r1},y_{r2})-S_M^{F,2d}f(x_{r1},y_{r2})\right|/\max_{\substack{-R1\le r1\le R1\\ -R2\le r2\le R2}}\left|f(x_{r1},y_{r2})\right|,$$

$S_M^{F,2d}f(x_{r1},y_{r1})$ -сума двовимірного фінітного перетворення Фур'є, $U_{M,M}^{F,2d,Sp1}f(x_{r1},y_{r2})$ -оператор, що визначається (7), (8). $L_{M,M}^{F,2d,Sp1}f(x_{r1},y_{r2})$ -оператор, що визначається (9), (14). Для M та R наведених в таблиці значення $\alpha 1=\alpha 2$, $\beta 1=\beta 2$.

Таблиця.

M	R	$\alpha 1$	$\beta 1$	$\beta 2$	$\gamma 1$	$\gamma 2$
4	12	2,7 E-2	6,2 E-2	6,6 E-2	0	2,0 E-2
6	18	3,2E-2	6,7 E-2	6,7 E-2	0	2,9 E-2
10	30	2,0 E-2	7,3 E-2	7,3 E-2	2,5 E-15	2,1 E-2
20	60	3,5 E-2	7,5 E-2	8,9 E-2	7,3 E-15	3,5 E-2

Висновки. 1.Запропоновано оператори (7), (8) обчислення двовимірного фінітного дискретно-неперервного перетворення Фур'є на основі кусково-сталих сплайнів. 2. Запропоновано оператори (9), (14) обчислення двовимірного фінітного дискретно-неперервного перетворення Фур'є з інтерполяційними властивостями. 3. Отримана оцінка (19) похибки апроксимації функції $f(x,y) \in C^r(D)$, $r=1,2,3,\ldots$ за допомогою оператора $L_{M,M}^{F,2d,\,Spl} f$ 4. З таблиці видно, що $\gamma 1=0$ при $N=M$. Тобто, у даному випадку оператор $L_{M,M}^{F,2d,\,Spl} f(x,y)$ інтерполює $f(x,y)$. 5. Наведений приклад підтверджує теоретичні твердження авторів. 6. Отримані результати узагальнюють твердження роботи [12].

Перспективи подальших досліджень. Подальші дослідження у даному напрямку автори вбачають у застосуванні запропонованих операторів обчислення фінітного дискретно - неперервного перетворення Фур'є з використанням кусково-сталих сплайнів при вирішенні деяких задач математичного моделювання, у деяких відомих непараметричних та параметричних методах спектрального оцінюваня двовимірних сигналів у цифровій обробці сигналів, у сучасних інформаційних технологіях і т.і.

Список літератури: 1.РабинерЛ., ГоулдБ. Теория и применение цифровой обработки сигналов.-М.: Мир, 1978. 848с. 2.Марпл-мл.С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения,-М.: Мир,1990. 684с. 3.БолдЭ.Дж. Сравнение времени вычисления БПХ и БПФ. -ТИИЭР, 1985, №12, с.184-185. 4.ДаджионД., МерсероР. Цифровая обработка многомерных сигналов.-М.: Мир. 1988. 488с. 5.Применение методов фурьє-оптики. Под ред. Г.Старка. Пер. С англ.-М.: Радио и связь.1988. 535с. 6.УдовиченкоВ.Н. Точностные характеристики прямоугольного двумерного дискретного преобразования Фурье. / Методы и микроэлектронные средства цифрового преобразования и обработки сигналов, SIAP-89, Рига, 1989, (С.204-206). 7.FilonL.N.G. On a quadrature formula for trigonometric integrals .// Proc. Roy.Soc. Edinburgh.-1928.-49.-p.38-47. 8.ЛитвинО.М., УдовиченкоВ.М. Наближений метод відновлення функцій за допомогою тригонометричних сум, точний на тригонометричних поліномах заданого степеня. / Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения. Киев., 1999. 9.Литвин О.М. Інтерлінація функцій та деякі її застосування. Харків.-Основа., 2002. 544с. 10.КаппелиниВ., КонстантинидисА.Дж., Эмилиани. Цифровые фильтры и их применение.-М.: Энергоатомиздат. 1983.-360с. 11.Жуков А.П. Метод Фурье в вычислительной математике.-М.: Наука. Глав. ред. физико-математ. лит. 1992. 176с. 12.Jiahong Yin, Alvaro R. De Pierro, and Musheng Wei. Reconstruction of Compactly Supported Function from the Discrete Sampling of its Fourier Transform. IEEE Transaction on Signal Processing, vol.47, №12, December 1999.

Поступила в редколегію 11. 04. 03