

**В.И. ГЛАДКИХ**, Укрзалізниця,  
**А.В. ТКАЧУК**, канд. техн. наук, НТУ “ХПИ”

## НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ОПОРНЫХ МАЧТ ИЗ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ: МОДЕЛИ И МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Запропоновано загальний підхід до моделювання напружено-деформованого стану опорних мачт із композиційного матеріалу з урахуванням початкових напружень, нелінійної поведінки матеріалів та динамічних складових. Основні співвідношення об'єднують метод скінченних елементів та узагальнений параметричний підхід. Це дає змогу розвивати математичний апарат досліджень, будувати числові алгоритми для аналізу напружено-деформованого стану та синтезу конструктивних параметрів опорних мачт.

General approach is offered to the modeling of stressed-deformed state of supporting masts from composition material taking into account initial tensions, nonlinear conduct of materials and dynamic constituents. Basic correlations unite the finite element method and parametrical approach. It enables to develop the mathematical model of researches, to build numerical algorithms for the analysis of stressed-deformed state and synthesis of structural parameters of supporting masts.

**Введение.** Опорные конструкции, в частности опорные железобетонные мачты, являются одним из наиболее распространенных и ответственных элементов обеспечения нормальных условий эксплуатации железных дорог. К ним предъявляется целый комплекс требований: долговечность; прочность; устойчивость к действию ударных нагрузок; технологичность изготовления.

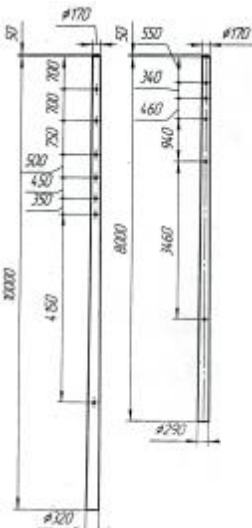


Рис.1. Основные конструктивные параметры мачт

В соответствии с этими требованиями производится выбор их конструкторских схем, параметров свойств материалов, технологии изготовления. В частности, широкое распространение получили железобетонные мачты светофоров МСЦ-8, МСЦ-10 разработки Гипротрансигнальсвязь, производимые методом центрифугования (рис.1).

Изменяющиеся условия эксплуатации, материалы, технология изготовления требуют разработки научно обоснованных методов выбора множества параметров, обеспечивающих удовлетворение изделиями комплекса сформулированных выше требований. Эта важная проблема, в свою очередь, порождает актуальную задачу разработки математической модели исследования напряженно-деформированного состояния (НДС) опорных мачт из композиционных материалов с учетом всего множества факторов: неоднородность материала

ла, конструктивная анизотропия свойств, большие перемещения и деформации, пластичность, нестационарные режимы нагружения. В настоящее время единая общая модель для достаточно адекватного описания напряженно-деформированного состояния такого класса конструкций при учете совокупности перечисленных факторов в литературе отсутствует. Теоретические разработки по отдельным направлениям представлены, в частности, в работах В.П. Агапова [1-5], А. В. Александрова [6-7]. Фундаментальные вопросы механики, примыкающие к отдельным сторонам проблемы, освещены в работах [8-26]. Численная реализация такого класса задач с использованием метода конечных элементов (МКЭ) описана во многих работах [27-30]. Схема расширенной параметризации в механике сложных механических конструкций предложена в работах [31, 32].

В упомянутых публикациях содержатся отдельные аспекты решения предлагаемой к исследованию задачи. Основными задачами при этом являются, как отмечалось ранее, разработка методологической основы исследований мачтовых опор, наполнение отдельных ветвей создаваемой комплексной математической модели, а также ее численная и программно-модельная реализация. В статье описаны первые два этапа исследований.

**Постановка задачи.** В целом задача исследования напряженно-деформированного состояния мачтовых опор из композиционного материала представляет собой сложную комплексную задачу. В настоящее время отсутствуют единые подходы и математический аппарат для решения этой задачи в целом. Задача еще более усложняется при переходе к синтезу структуры, параметров, технологии изготовления этих конструкций. В связи с этим первоочередными являются следующие этапы:

1. Выбор общего подхода к описанию исследуемых объектов, процессов и состояний.

2. Разработка общей структуры исследований.

3. Разработка математической модели для исследования напряженно-деформированного состояния исследуемых конструкций.

**Общий подход и структура исследований.** Поскольку для исследования широкого класса механических систем в течение длительного времени достаточно хорошо зарекомендовал себя обобщенный параметрический подход [31-34], то представляется целесообразным именно его использовать для решения задач анализа напряженно-деформированного состояния и синтеза конструкций опор. При этом вводится в рассмотрение пространство  $V$  обобщенных параметров  $p_i, i=1, \dots, n$ . Основными свойствами элементов этого пространства являются:

1. В качестве обобщенного параметра  $p_i$  может выступать структура конструкций, физико-механические свойства материалов для ее изготовления, конструктивные, технологические параметры и эксплуатационные режимы, а также свойства численных моделей, порождаемых в процессе дискретизации.

2. Задание “точки”  $p$  в обобщенном параметрическом пространстве  $V$  означает однозначное определение всей информации, необходимой для мате-

математического, геометрического, технологического и численного моделирования исследуемого состояния объекта:

$$L(p, u, r, t) = 0, \quad (1)$$

где  $L$  – оператор задачи;  $r$  – радиус-вектор точки геометрического пространства;  $u$  – переменные состояния;  $t$  – время.

3. Пространство  $V$  может быть пополняемым или сужаемым по результатам исследований, в том числе и по промежуточным результатам.

4. В пространстве  $V$  могут быть сформулированы ограничения  $G_j, j=1, \dots, m$ , описывающие некоторые множества  $K$  (зоны допустимых значений:  $p \in K$ ), причем в качестве ограничений  $G_j$  могут выступать прочностные характеристики материалов, массовые, геометрические или технологические параметры.

5. В процессе синтеза в качестве критериев могут быть сформулированы различные целевые функции  $J$ :

$$J(p) \rightarrow \min, p \in K. \quad (2)$$

При этом как в качестве варьируемых параметров  $p$ , так и в качестве оптимального их набора  $p^*$ , удовлетворяющего (2), выступают, в отличие от традиционной технологии параметрического синтеза (в которой  $p$  – некоторый набор чисел), массивы различных по типу, природе и формам описания элементов. Соответственно необходимо модифицировать и процедуру решения задачи (2), поскольку классические алгоритмы [35-38] напрямую не приспособлены к оперированию с множеством  $p$ , состоящим из разнородных элементов.

6. В процессе решения сформулированной задачи анализа (1) и синтеза (2) могут изменяться, кроме состава множества  $p$ , и операторы, и ограничения, и целевые функции, и разделение множества  $V$  на множества варьируемых  $V_{\text{var}}$  и неварьируемых  $V_{\text{const}}$  параметров:

$$V = V_{\text{var}} \cup V_{\text{const}}.$$

Отмеченные особенности позволяют заключить, что использование обобщенного параметрического подхода [31-34] в данном случае дает чрезвычайно широкие возможности математического, геометрического, технологического и численного моделирования.

Соответственно, имея в распоряжении такой мощный аппарат обобщенного параметрического описания исследуемых объектов, процессов, структур и состояний, можно достаточно свободно варьировать и структуру исследований. В то же время необходимо учесть и конкретные требования к характеристикам мачтовых опор, и предусмотреть сохранение сквозной параметричности на всех этапах исследований, и обеспечить минимальную трудоемкость перестройки как всего процесса исследований, так и отдельных его этапов. В

соответствии с этим предлагается следующая структура исследований напряженно-деформированного состояния и синтеза мачтовых опор из композиционного материала (рис.2).

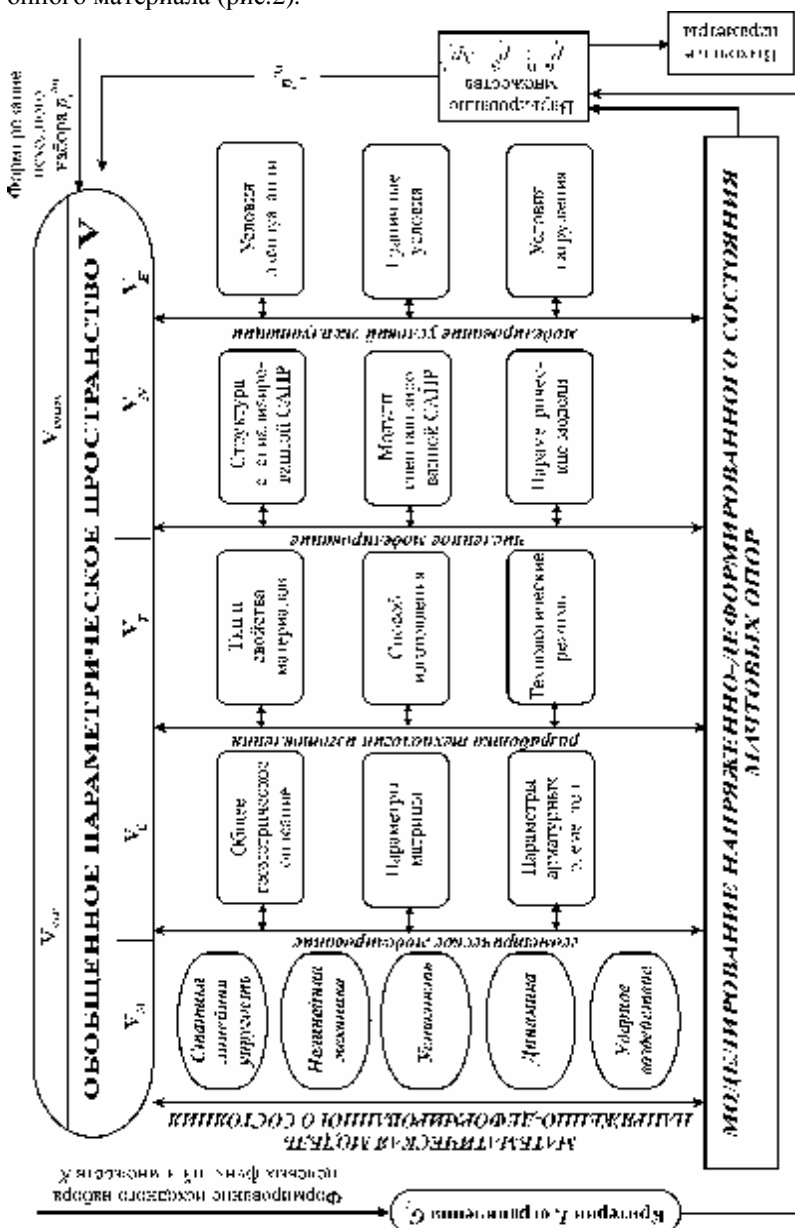


Рис. 2. Структура исследования НДС и синтеза мачтовых опор из композиционного материала на основе обобщенного параметрического подхода:  $V_M$  – подпространство параметров математической модели;  $V_C$  – подпространство конструктивных параметров;  $V_T$  – подпространство технологических параметров;  $V_N$  – подпространство параметров численной модели;  $V_E$  – подпространство эксплуатационных параметров

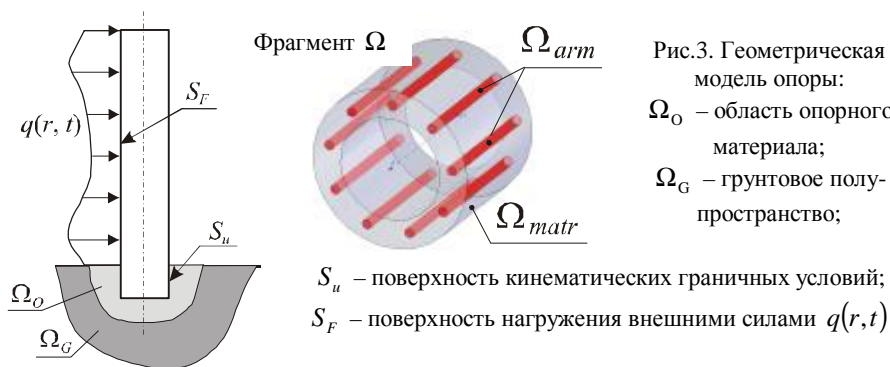
**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-**

## ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ МАЧТОВЫХ ОПОР

**1. Описание исследуемой области пространства.** Анализ напряженно-деформированного состояния мачтовых опор приводит к необходимости решения в общем случае трехмерной задачи механики сплошной среды для тел сложной формы с учетом сложного характера нагружения, поведения материала и описания критериев разрушения материалов. В общем виде система уравнений (1) представляет собой нестационарную начально-краевую задачу с геометрической и физической нелинейностью, сформулированную для области  $\Omega$  (рис.3):

$$\Omega = \Omega_{\text{matr}} \cup \Omega_{\text{arm}}, \quad (3)$$

где  $\Omega_{\text{matr}}, \Omega_{\text{arm}}$  – подобласти основного материала (бетонная матрица) и арматуры (стальной каркас) соответственно.



**2. Система уравнений линейной теории упругости.** В качестве исходной системы уравнений в цепи исследований принимаются обычно соотношения линейной теории упругости. Если в качестве основных переменных состояния для исследуемой задачи принять перемещения  $u$  точек области  $\Omega$  с компонентами  $u_i (i=1,2,3)$ , отнесенными к системе координат  $x_i (i=1,2,3)$ , то полную систему уравнений можно представить в виде [10, 39]:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad i, j = 1,2,3, \quad (4)$$

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl}, \quad i, j, k, l = 1,2,3, \quad (5)$$

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0, \quad i, j = 1,2,3, \quad (6)$$

$$\sigma_{ij} \cdot \nu_j \Big|_{S_F} = q(r, t), \quad i, j = 1,2,3, \quad (7)$$

$$u^{(\Omega)} \Big|_{S_u} = u^{(\Omega_O)} \Big|_{S_u}, \quad (8)$$

где  $\varepsilon_{ij}$ ,  $\sigma_{ij}$  – компоненты тензоров деформации и напряжений;  $c_{ijkl}$  – тензор упругих постоянных материала;  $f_i$  – объемная нагрузка,  $v_j$  – компоненты вектора нормали  $\nu$  к поверхности  $S_F$ ;  $u^{(\Omega)}$ ,  $u^{(\Omega_0)}$  – компоненты вектора перемещений точек областей  $\Omega$ ,  $\Omega_0$ .

Уравнения (4)–(6) представляют собой линейную систему уравнений в частных производных, дополненную для однозначности решения граничными условиями (7), (8). Обычно для ее решения в настоящее время используется метод конечных элементов [27, 29].

**3. Учет геометрической нелинейности.** Нелинейный тензор деформаций Грина [1] может быть выражен через перемещения с помощью одной компактной формулы:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{m,i}u_{m,j}), \quad i, j, m = 1, 2, 3. \quad (9)$$

В формулах (4), (6) и (9) принято, что операция дифференцирования  $i$ -ой компоненты тензора по  $j$ -ой координате записывается сокращенно в виде:

$$\frac{\partial \bullet_i}{\partial x_j} = \bullet_{i,j}. \quad (10)$$

Кроме того, используется правило суммирования по повторяющемуся индексу, причем любой повторяющийся индекс изменяется от 1 до 3.

Система уравнений (9), (5) – (8) описывает геометрически нелинейную задачу теории упругости, для решения которой необходимо привлекать более сложные методы, чем для аналогичной линейной системы уравнений (4) – (8).

**4. Учет анизотропии свойств материала.** Рассмотрим методику учета анизотропии свойств материала, следуя работе [1].

Изотропный линейно-деформируемый материал характеризуется двумя константами – модулем упругости  $E$  и коэффициентом Пуассона  $\nu$ . В зависимости от этих двух величин находятся упругие постоянные, связывающие компоненты напряжений и деформаций. Например, при плоском напряженном состоянии эта связь записывается следующим образом:

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\}, \quad (11)$$

где

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}; \quad [C] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}; \quad \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ 0,5\gamma_{xy} \end{Bmatrix}. \quad (12)$$

Линейный материал при плоском напряженном состоянии характеризуется четырьмя техническими константами – модулями упругости  $E_1$  и  $E_2$ , мо-

дулем сдвига  $G_{12}$  и коэффициентом Пуассона  $\nu_{12}$ . Зависимость между компонентами деформаций и напряжений имеет вид [1]:

$$\sigma_x = \frac{E_1 \varepsilon_x + \nu_{12} E_2 \varepsilon_y}{1 - (E_1 / E_2) \nu_{12}^2}; \quad \sigma_y = \frac{E_2 \varepsilon_y + \nu_{12} E_1 \varepsilon_x}{1 - (E_2 / E_1) \nu_{12}^2}; \quad \tau_{xy} = G_{12} \gamma_{xy}, \quad (13)$$

где  $\nu_{12}$  – коэффициент поперечной деформации в направлении 1 при растяжении (сжатии) в направлении 2.

В матричной форме закон Гука для ортотропного материала записывается так:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 / (1 - (E_1 / E_2) \nu_{12}^2) & \nu_{12} E_1 / (1 - (E_1 / E_2) \nu_{12}^2) & 0 \\ \nu_{12} E_1 / (1 - (E_1 / E_2) \nu_{12}^2) & E_2 / (1 - (E_1 / E_2) \nu_{12}^2) & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}. \quad (14)$$

Линейный анизотропный материал характеризуется шестью упругими постоянными –  $c_{11}$ ,  $c_{12}$ ,  $c_{13}$ ,  $c_{22}$ ,  $c_{23}$ ,  $c_{33}$ , причем

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}. \quad (15)$$

Значения упругих постоянных задаются для каждого материала в числовом виде.

**5. Нелинейно-упругий материал.** Зависимость между напряжениями и деформациями для нелинейно-деформируемого материала в случае плоского напряженного состояния имеет вид [1]:

$$\begin{aligned} \sigma_x - \sigma_{cp} &= \frac{\sigma_i}{(1 + \nu) e_i} (\varepsilon_x - \varepsilon_{cp}); \\ \sigma_y - \sigma_{cp} &= \frac{\sigma_i}{(1 + \nu) e_i} (\varepsilon_y - \varepsilon_{cp}); \\ \tau_{xy} &= \frac{\sigma_i}{2(1 + \nu) e_i} \gamma_{xy}, \end{aligned} \quad (16)$$

где  $\sigma_i$  и  $e_i$  – интенсивности напряжений и деформаций соответственно,  $\nu$  – коэффициент поперечной деформации,  $\sigma_{cp}$  и  $\varepsilon_{cp}$  – средние значения напряжений и деформаций.

Коэффициент  $\nu$  определяется по формуле:

$$v = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{E_c}{E} (1 - v_0), \quad (17)$$

где  $E$  и  $v_0$  – модуль упругости и коэффициент Пуассона при  $e_i = 0$  соответственно,  $E_c$  – секущий модуль.

При  $v_0 = 0.5$  из формулы (17) получаем  $v = 0.5$ , и уравнения (16) переходят в уравнения теории малых упруго-пластических деформаций.

Уравнения (14) при использовании шагового метода следует записать для приращений деформаций и напряжений. Сделаем это, следуя работе [40].

В общем случае напряжения и деформации в твердом теле являются функциями координат точек тела и некоторого параметра  $\lambda$ , характеризующего процесс нагружения. В работе [40] показано, что для двух деформированных состояний тела, соответствующих двум разным значениям параметра  $\lambda$ , а именно  $\lambda^{(1)} = \lambda$  и  $\lambda^{(2)} = \lambda + \Delta\lambda$ , справедливо следующее соотношение:

$$\frac{D_e^{(2)} - D_e^{(1)}}{e_i^{(2)} - e_i^{(1)}} = \frac{3}{2} \Pi, \quad (18)$$

где  $D_e^{(2)}$  и  $D_e^{(1)}$  – девиаторы деформаций для состояний  $\lambda^{(2)}$  и  $\lambda^{(1)}$  соответственно,  $\Pi$  – тензор подобия.

Тензор подобия определяется формулой

$$\Pi = \frac{D_s}{\sigma_i}, \quad (19)$$

где  $D_s$  – девиатор напряжений.

В работе [40] показано также, что тензор  $\Pi$  не зависит от  $\lambda$ , т.е. не изменяется по мере изменения нагрузки. Следовательно, соотношение (18) можно записать в виде:

$$\frac{D_e^{(2)} - D_e^{(1)}}{e_i^{(2)} - e_i^{(1)}} = \frac{3}{2} \frac{D_s^{(2)}}{\sigma_i^{(2)}} = \frac{3}{2} \frac{D_s^{(1)}}{\sigma_i^{(1)}}. \quad (20)$$

Используя свойство пропорций, получаем

$$\frac{D_e^{(2)} - D_e^{(1)}}{e_i^{(2)} - e_i^{(1)}} = \frac{3}{2} \frac{D_s^{(2)} - D_s^{(1)}}{\sigma_i^{(2)} - \sigma_i^{(1)}}. \quad (21)$$

Обозначая  $\Delta\sigma$  и  $\Delta\varepsilon$  соответственно приращения напряжений и деформаций при переходе из состояния  $\lambda^{(1)}$  в состояние  $\lambda^{(2)}$ , для плоского напряженного состояния упруго-пластического тела на основании (21) находим:

$$\Delta\sigma_x - \Delta\sigma_{cp} = \frac{2}{3} \frac{\sigma_i^{(2)} - \sigma_i^{(1)}}{e_i^{(2)} - e_i^{(1)}} (\Delta\varepsilon_x - \Delta\varepsilon_{cp});$$

$$\Delta\sigma_y - \Delta\sigma_{cp} = \frac{2}{3} \frac{\sigma_i^{(2)} - \sigma_i^{(1)}}{e_i^{(2)} - e_i^{(1)}} (\Delta\varepsilon_y - \Delta\varepsilon_{cp}); \quad (22)$$

$$\Delta\tau_{xy} = \frac{1}{3} \frac{\sigma_i^{(2)} - \sigma_i^{(1)}}{e_i^{(2)} - e_i^{(1)}} \Delta\gamma_{xy}.$$

Используя известную теорему [16], согласно которой законы деформирования нелинейно-упругих и упругопластических тел при активной деформации совпадают, физические соотношения в приращениях для нелинейно-упругих тел на основании (22) и (15) записываем в виде:

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_x - \Delta\sigma_{cp} &= \frac{1}{1+\nu} \frac{\sigma_i^{(2)} - \sigma_i^{(1)}}{e_i^{(2)} - e_i^{(1)}} (\Delta\varepsilon_x - \Delta\varepsilon_{cp}); \\ \Delta\sigma_y - \Delta\sigma_{cp} &= \frac{1}{1+\nu} \frac{\sigma_i^{(2)} - \sigma_i^{(1)}}{e_i^{(2)} - e_i^{(1)}} (\Delta\varepsilon_y - \Delta\varepsilon_{cp}); \\ \Delta\tau_{xy} &= \frac{1}{2(1+\nu)} \frac{\sigma_i^{(2)} - \sigma_i^{(1)}}{e_i^{(2)} - e_i^{(1)}} \Delta\gamma_{xy}. \end{aligned} \quad (23)$$

**6. Учет пластических деформаций.** В теории течения зависимость между приращениями напряжений и деформаций описывается уравнениями Прандтля-Рейсса [1]:

$$\left. \begin{aligned} d\varepsilon_x &= \frac{1}{E} (d\sigma_x - \nu(d\sigma_y)) + \frac{3}{2} \frac{\sigma_x - \sigma_0}{\sigma_i} d\bar{\varepsilon}_{ip}; \\ d\varepsilon_y &= \frac{1}{E} (d\sigma_y - \nu(d\sigma_x)) + \frac{3}{2} \frac{\sigma_y - \sigma_0}{\sigma_i} d\bar{\varepsilon}_{ip}; \\ d\gamma_{xy} &= \frac{1}{G} d\tau_{xy} + 3 \frac{d\bar{\varepsilon}_{ip}}{\sigma_i} \tau_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

В формулах (24)  $d\bar{\varepsilon}_{ip}$  – интенсивность приращений пластических деформаций.

Для реализации МКЭ в форме метода перемещений необходимо иметь зависимости напряжений от деформаций. Однако уравнения (24) не решаются относительно приращений напряжений  $d\sigma_x$ ,  $d\sigma_y$ ,  $d\sigma_z$ . Запишем выражение для интенсивности напряжений при плоском напряженном состоянии [1]:

$$\sigma_i^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x\sigma_y + 3\tau_{xy}^2. \quad (25)$$

В выражении (25) переходим к дифференциалам:

$$2\sigma_i d\sigma_i = (2\sigma_x - \sigma_y) d\sigma_x + (2\sigma_y - \sigma_x) d\sigma_y + 6\tau_{xy} d\tau_{xy},$$

или

$$d\sigma_i = \frac{3}{2\sigma_i} (\sigma_x - \sigma_0) d\sigma_x + \frac{3}{2\sigma_i} (2\sigma_y - \sigma_0) d\sigma_y + \frac{3}{\sigma_i} \tau_{xy} d\tau_{xy}. \quad (26)$$

Предположим, что зависимость между приращением интенсивности напряжений  $d\sigma_i$  и интенсивностью приращений пластических деформаций  $d\bar{\epsilon}_{ip}$  имеет вид:

$$d\sigma_i = H' d\bar{\epsilon}_{ip}. \quad (27)$$

С учетом (27) уравнение (26) приводится к виду:

$$-H' d\bar{\epsilon}_{ip} = \frac{3}{2\sigma_i} (\sigma_x - \sigma_0) d\sigma_x + \frac{3}{2\sigma_i} (2\sigma_y - \sigma_0) d\sigma_y + \frac{3}{\sigma_i} \tau_{xy} d\tau_{xy}. \quad (28)$$

Запишем уравнения (24) и (28) совместно в матричном виде:

$$\begin{Bmatrix} d\epsilon_x \\ d\epsilon_y \\ d\gamma_{xy} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & 0 & \frac{3}{2} \frac{\sigma_x - \sigma_0}{\sigma_i} \\ -\nu/E & 1/E & 0 & \frac{3}{2} \frac{\sigma_y - \sigma_0}{\sigma_i} \\ 0 & 0 & 1/G & \frac{3\tau_{xy}}{\sigma_i} \\ \frac{3}{2} \frac{\sigma_x - \sigma_0}{\sigma_i} & \frac{3}{2} \frac{\sigma_y - \sigma_0}{\sigma_i} & \frac{3\tau_{xy}}{\sigma_i} & -H' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \bar{\epsilon}_{ip} \end{Bmatrix}. \quad (29)$$

Обозначим  $\{de\} = [d\epsilon_x \quad d\epsilon_y \quad d\gamma_{xy} \quad 0]^T$ ;  $\{d\sigma\} = [d\sigma_x \quad d\sigma_y \quad d\tau_{xy} \quad \bar{\epsilon}_{ip}]^T$ ;

$$[\bar{A}] = \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & 0 & \frac{3}{2} \frac{\sigma_x - \sigma_0}{\sigma_i} \\ -\nu/E & 1/E & 0 & \frac{3}{2} \frac{\sigma_y - \sigma_0}{\sigma_i} \\ 0 & 0 & 1/G & \frac{3\tau_{xy}}{\sigma_i} \\ \frac{3}{2} \frac{\sigma_x - \sigma_0}{\sigma_i} & \frac{3}{2} \frac{\sigma_y - \sigma_0}{\sigma_i} & \frac{3\tau_{xy}}{\sigma_i} & -H' \end{bmatrix}. \quad (30)$$

Система уравнений (29) с учетом (30) может быть записана так:

$$\{de\} = [\bar{A}]\{d\sigma\}. \quad (31)$$

Обращая (31), находим  $\{d\sigma\} = [\bar{A}^{-1}]\{de\}$ . Отбрасывая в матрице  $[\bar{A}^{-1}]$  последний столбец и последнюю строку и сокращая векторы  $\{d\sigma\}$  и  $\{de\}$ , получаем соотношения, выражающие приращения напряжений через приращения деформаций:

$$\{d\sigma\} = [\bar{A}^{-1}]\{d\varepsilon\}, \quad (32)$$

где  $\{d\sigma\} = [d\sigma_x \quad d\sigma_y \quad d\tau_{xy}]^T$ ;  $\{d\varepsilon\} = [d\varepsilon_x \quad d\varepsilon_y \quad d\gamma_{xy}]^T$ ,

а через  $[\bar{A}^{-1}]$  условно обозначена сокращенная матрица  $[\bar{A}^{-1}]$ .

Для получения зависимости (28) используется экспериментальная кривая “напряжение-деформация” при одноосном напряженном состоянии. В этом случае  $d\bar{\varepsilon}_{ip} = d\varepsilon_p$ , т.е. интенсивность приращения пластической деформации равна приращению пластической деформации. Поэтому если построить диаграмму  $\sigma - \varepsilon_p$ , где  $\varepsilon_p$  – пластическая деформация, то параметр  $H'$  представит собой касательный модуль этой диаграммы. Матрица  $[A]$  может быть обращена в общем виде. Для этого представим соотношения (29) в виде:

$$\begin{Bmatrix} d\varepsilon_x \\ d\varepsilon_y \\ d\gamma_{xy} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & a_1 \\ & C^{-1} & & a_2 \\ & & & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & -H' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \lambda \end{Bmatrix}, \quad (33)$$

где

$$\begin{aligned} \{d\varepsilon\} &= [C^{-1}]\{d\sigma\} + \{a\}\lambda; \\ 0 &= \{a\}^T \{d\sigma\} - H'\lambda. \end{aligned} \quad (34)$$

Отсюда получим:

$$\{a\}^T [C]\{d\varepsilon\} = \{a\}^T \{d\sigma\} + \{a\}^T [C]\{a\}\lambda, \quad (35)$$

а также

$$\{a\}^T \{d\sigma\} = H'\lambda. \quad (36)$$

Подставим (36) в соотношение (35):

$$\{a\}^T [C]\{d\varepsilon\} = H'\lambda + \{a\}^T [C]\{a\}\lambda. \quad (37)$$

Отсюда

$$\lambda = \frac{\{a\}^T [C]\{d\varepsilon\}}{H' + \{a\}^T [C]\{a\}}. \quad (38)$$

Подставим  $\lambda$  в (34):

$$\{d\epsilon\} = [C^{-1}]\{d\sigma\} + \{a\} \frac{\{a\}^T [C] \{d\epsilon\}}{H' + \{a\}^T [C] \{a\}}. \quad (39)$$

Умножая (39) на  $[C]$ , получаем:

$$\{d\sigma\} = \left[ [C] - [C]\{a\} \frac{\{a\}^T [C]}{H' + \{a\}^T [C]\{a\}} \right] \{d\epsilon\}. \quad (40)$$

Обозначим

$$[C_{ep}] = \left[ [C] - [C]\{a\} \frac{\{a\}^T [C]}{H' + \{a\}^T [C]\{a\}} \right] \quad (41)$$

и назовем  $[C_{ep}]$  упругопластической матрицей. Коэффициенты вектора  $\{a\}$  находятся следующим образом:

$$a_1 = \frac{3}{2} \frac{\sigma_x - \sigma_0}{\sigma_i}; \quad a_2 = \frac{3}{2} \frac{\sigma_y - \sigma_0}{\sigma_i}; \quad a_3 = 3 \frac{\tau_{xy}}{\sigma_i}, \quad (42)$$

где  $\sigma_0$  – среднее напряжение.

**7. Уравнения динамики.** При рассмотрении нестационарных задач для исследуемых конструкций можно сразу же заметить, что, как и все ранее рассмотренные системы уравнений, данная система уравнений в настоящее время для областей сложной формы решается численно. При дискретизации задачи деформируемая среда описывается некоторой псевдосредой с конечным числом степеней свободы  $q_i$  (например, в методе конечных элементов это узловые перемещения). Для такой дискретизированной системы удобно использовать для вывода основных уравнений движения уравнения Лагранжа второго рода. Следуя [1], для конечно-элементной модели (КЭМ) объекта можно записать:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad (43)$$

где  $T$  – кинетическая энергия системы;  $q_j$  –  $j$ -ая обобщенная координата;  $Q_j$  –  $j$ -ая обобщенная сила, которая может быть представлена в виде:

$$Q_j = Q_j^a + Q_j^d,$$

где  $Q_j^a$  – активная обобщенная сила;  $Q_j^d$  – диссипативная обобщенная сила.

Активная сила  $Q_j^a$  в свою очередь может быть записана так:

$$Q_j^a = (Q_j^a)_e + (Q_j^a)_t,$$

где  $(Q_j^a)_e$  – внешняя сила,  $(Q_j^a)_i$  – внутренняя сила. При наличии как консервативных  $(Q_j^a)_e^p$ , так и неконсервативных  $(Q_j^a)_e^n$  внешних сил имеем:

$$(Q_j^a)_e = (Q_j^a)_e^p + (Q_j^a)_e^n.$$

С учетом приведенных выше выражений уравнения Лагранжа второго рода принимают вид:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = (Q_j^a)_i + (Q_j^a)_e^p + (Q_j^a)_e^n + (Q_j^d). \quad (44)$$

На основании (44) получаются уравнения движения конечного элемента (КЭ) в матричной форме. При этом в качестве обобщенных координат будем рассматривать перемещения узлов КЭ.

Кинетическая энергия конечного элемента может быть записана так [27]:

$$T = 0,5 \{ \dot{q} \}^T [M] \{ \dot{q} \}, \quad (45)$$

где  $[M]$  – матрица массы,  $\{q\}$  – вектор узловых перемещений.

Вектор узловых диссипативных сил  $\{Q^d\}$  может быть выражен с помощью матрицы демпфирования  $[D]$  [27]:

$$\{Q^d\} = -[D] \{ \dot{q} \}. \quad (46)$$

Подставляя (45) и (46) в (44), получаем:

$$[M] \{ \ddot{q} \} + [D] \{ \dot{q} \} = \{ Q^a \}_i + (Q_j^a)_e^p + (Q_j^a)_e^n. \quad (47)$$

Конкретный вид уравнений (43)–(47) обуславливается видом правой части этих уравнений, зависящим от специфики той или иной решаемой задачи.

**8. Формирование разрешающей системы уравнений.** Предложенная для описания поведения исследуемых объектов комплексная математическая модель в силу того, что отражает разные факторы, учитываемые в процессе исследований (см. рис. 2), содержит совокупность систем уравнений разных типов. Более того, они записаны в общем виде [1, 10, 39]. Таким образом, при формировании той или иной конкретной задачи необходимо дополнительно осуществить 2 этапа доработки:

1) выбор соответствующей модели (и разрешающей системы уравнений) из описанных выше или дополненных (например, для случая трехмерного напряженного состояния);

2) конкретизация получаемых уравнений с учетом специфики исследуемых конструкций, условий нагружения и закрепления.

Важно отметить, что полученная совокупность соотношений содержит в качестве обобщенных параметров все типы величин: свойства материалов, характеристики воздействий, форма и размеры областей и т. д. Это дает основание утверждать, что при варьировании этих обобщенных параметров можно фиксировать замкнутые системы уравнений, решение которых служит исходной информацией в параметрическом анализе и синтезе исследуемых объектов. Таким образом, можно сделать следующие выводы.

1. Предложенная модель дает возможность, в отличие от ранее предложенных, производить общее параметрическое описание, параметрический анализ и синтез конструкций на основе единой комплексной модели.

2. Предложенная комплексная модель, в отличие от других, дает возможность учитывать неоднородность, анизотропию, нелинейность, пластичность, динамику в рамках единого параметрического подхода.

3. Предложенные математические модели имеют встроенную возможность естественной алгоритмизации, программирования и реализации в виде численных моделей с использованием метода конечных элементов.

Основными направлениями дальнейших исследований является как раз создание системы конечно-элементного моделирования на основе предложенных в статье разработок и проведение необходимых для практики исследований напряженно-деформированного состояния опорных мачт из композиционных материалов.

**Заключение.** В статье на основе технологии обобщенного параметрического описания элементов механических систем предложена общая структура исследований мачтовых опор из композиционных материалов. Она обеспечивает проведение всего комплекса исследований свойств проектируемых опор и оптимизацию их параметров с учетом напряженно-деформированного состояния.

Описанная комплексная математическая модель отличается от предлагаемых другими исследователями моделей естественным учетом параметрического описания, учетом самых разнообразных явлений, свойств и состояний исследуемых объектов и, следовательно, может быть положена в основу дальнейших их численных исследований.

**Список литературы.** 1. *Агапов В.П.* Метод конечных элементов в статике, динамике и устойчивости пространственных тонкостенных подкрепленных конструкций. – М.: Изд-во Ассоц. строит. вузов, 2000. – 152 с. 2. *Агапов В.П., Коротков В.А., Стрелин А.В.* Nonlinear static and buckling analysis of sooling tower shells by finite clement method/ Proc. 7th cooling tower ami spraying pond symposium. – USSR. – Leningrad. – 1990. 3. *Агапов В.П.* Четырехугольный многослойный конечный элемент для расчета пластинок и оболочек. // Строительная механика и расчет сооружений. – 1986. – № 1. – С.74-76. 4. *Агапов В.П., Стрелин А.В., Коротков В.А.* Модальный анализ тонкостенных подкрепленных конструкций с учетом их напряженного состояния методом конечных элементов. // ИВУЗ. Строительство и архитектура. – Новосибирск: НИСИ, 1983. – № 10. – С.34-39. 5. *Агапов В.П.* Основные соотношения МКЭ в статических и динамических расчетах геометрически нелинейных конструкций // Строительная механика и расчет сооружений. –1984. – № 5. – С.43-47. 6. *Александров А.В.* Метод перемещений для расчета плитобалочных конструкций. – Труды МИИТ. – Вып. 174. – 1963. – С.4-18. 7. *Александров А.В., Лащеников Б.Я., Шапошников Н.Н., Смирнов В.Л.* Методы расчета стержневых систем, пластин и оболочек с использованием ЭВМ. – М.: Стройиздат, 1976. – Ч. 1. – 248 с. – Ч. 2. – 237 с. 8. *Кристиенсен Р.* Введение в механику композитов. – М.: Мир, 1982. – 334 с. 9. *Лукаш*

П.А. Основы нелинейной строительной механики. – М.: Стройиздат, 1978. – 208 с. **10.** Лурье А.И. Теория упругости. – М.: Наука, 1970. – 940 с. **11.** Новожилов В.В. Основы нелинейной теории упругости. – Л. – М.: ГИТГЛ, 1948. – 211 с. **12.** Писаренко Г.С. Можаровский Н.С. Уравнения и краевые задачи теории пластичности и ползучести. Справочное пособие. – Киев: Наукова Думка, 1981. – 493 с. **13.** Болотин В.В., Новичков Ю.Н. Механика многослойных конструкций. – М.: Машиностроение, 1980. – 375 с. **14.** Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. – М.: Наука, 1972. – 432 с. **15.** Ильюшин А.А. Пластичность. – М.: Гостехиздат. – 1948. – 376 с. **16.** Качанов Л.М. Основы теории пластичности. – М.: ГИТТЛ, 1956. – 324 с. **17.** Лейдерман Ю.Р. Устойчивость и колебания рамных конструкций. – Ташкент. АН УзССР. – 1955. – 220 с. **18.** Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в трех томах. – М.: Машиностроение. 1968. – Т.3. – 567 с. **19.** Смирнов А.Ф. Устойчивость и колебания сооружений. – М.: ГТЖИ, 1958. – 571 с. **20.** Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. – М.: Наука, 1988. – 712 с. **21.** Бидерман В.Л. Механика тонкостенных конструкций. Статика. – М.: Машиностроение, 1977. – 488 с. **22.** Ильюшин А. А. Механика сплошной среды. – М.: МГУ, 1978. – 287 с. **23.** Драгон А., Мруз З. Континуальная модель пластически хрупкого поведения скальных пород и бетона. – В кн.: Механика деформируемых твердых тел. Направления развития. / Под ред. Г. С. Шапиро. – М.: Мир, 1983. – С.163–188. **24.** Бажант Э. Эндохронная теория неупругости и инкрементальная теория пластичности. – М.: Мир, 1983, С.189–229. **25.** Хульт Я. Повреждаемость и распространение трещин. – М.: Мир, 1983, С.230–243. **26.** Белл Дж. Ф. Экспериментальные основы механики деформации твердых тел. Ч. I. Малые деформации. – М.: Наука, 1984. – 600 с. **27.** Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 541 с. **28.** Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. – М.: Мир, 1976. – 464 с. **29.** Стренг Э., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. – М.: Мир, 1977. – 349 с. **30.** Норри Д., де Фриз Ж. Введение в метод конечных элементов. – М.: Мир, 1981. – 304 с. **31.** Ткачук Н.А., Бруль С.Т., Малакей А.Н., Гриценко Г.Д., Орлов Е.А. Структура специализированных интегрированных систем автоматизированного анализа и синтеза элементов транспортных средств специального назначения // Механіка та машинобудування. – 2005. – № 1.– С.184-194. **32.** Ткачук Н.А, Орлов Е.А., Головченко В.И., Гоголь Н.А. Экспресс – модели и экспресс – системы для оперативного решения задач анализа и синтеза элементов сложных механических систем // Вісник Національного технічного університету “Харківський політехнічний інститут”. Тем. вип.: Машинознавство та САПР. – Харків: НТУ “ХПІ”. – 2005. – № 53. – С.116-138. **33.** Веретельник Ю.В., Миргородский Ю.Я., Пелешко Е.В., Ткачук Н.А. Параметрические модели элементов сложных систем как основа построения специализированных расчетных систем // Механіка та машинобудування. – 2003.– №1. – Том 2. – С.3-7. **34.** Гриценко Г.Д., Бруль С.Т., Ткачук А.В. Специализированная система автоматизированного анализа прочности и жесткости корпусов легкобронированных машин для выбора их рациональных конструктивных параметров при импульсном воздействии от усилия стрельбы // Вісник Національного технічного університету “Харківський політехнічний інститут”. Тем. вип.: Машинознавство та САПР. – Харків: НТУ “ХПІ”. – 2006. – № 3. – С.10-20. **35.** Сеа Ж. Оптимизация, теория и алгоритмы. – М.: Мир, 1973. – 324 с. **36.** Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. – М.: Наука, 1980. – 536 с. **37.** Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. – М.: Мир, 1975. – 349 с. **38.** Карманов В.Г. Математическое программирование. – М.: Наука, 1980. – 256 с. **39.** Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. – М.: Мир, 1987. – 542 с. **40.** Ильюшин А.А. Связь между теорией Сен-Венана-Леви-Мизеса и теорией малых упругопластических деформаций // Прикл. математика и механика. – 1945. – Т. 9. – Вып. 3. – С.207-218.

Поступила в редакцию 20.04.06