

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
"ХАРЬКОВСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ"

Е.И. БАЙДА

**РАСЧЕТ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ И ТЕПЛОВЫХ ПОЛЕЙ  
С ПОМОЩЬЮ ПРОГРАММЫ FEMM**  
Учебно - методическое пособие

Харьков 2015

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ, НАУКИ,  
МОЛОДЁЖИ И СПОРТА УКРАИНЫ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
"ХАРЬКОВСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ"

Е.И.БАЙДА

**РАСЧЕТ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ И ТЕПЛОВЫХ ПОЛЕЙ  
С ПОМОЩЬЮ ПРОГРАММЫ FEMM**

Для студентов и аспирантов электротехнических специальностей  
Учебно - методическое пособие

Утверждено  
редакционно-издательским  
советом университета,  
протокол № 1 от 20.03 2015 р.

Харьков  
НТУ «ХПИ»  
2015

УДК\_517

ББК Б 20 22.311

**Рецензенты:** *А.Г.Сосков*, д-р техн. наук, профессор, Харьковский  
национальный университет городского  
хозяйства им. А.Н. Бекетова

*Б.В.Клименко*, д-р техн. наук, профессор, Харьковский  
национальный технический университет  
НТУ «ХПИ»

**Е.И.Байда**

**Б 20 РАСЧЕТ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ И ТЕПЛОВЫХ ПОЛЕЙ**

**С ПОМОЩЬЮ ПРОГРАММЫ FEMM: Учебно - методическое пособ. – Х. :**  
2015. – 147 с.

ISBN

Учебное пособие содержит ряд теоретических и практических положений по работе с программным продуктом, предназначенных для расчета магнитных, электрических и тепловых полей. Предназначено для студентов и аспирантов электротехнических специальностей.

Ил. 91. Табл. 1. Библиогр.: 2 назв.

УДК\_517

**ББК 22.311**

ISBN

© С.И. Байда, 2015 р.

© НТУ "ХПИ", 2015 р.

## ВВЕДЕНИЕ

В последние годы электронно-вычислительные машины стали неотъемлемой частью учебных и научных программ, опытно-конструкторских разработок. Это позволяет не только сократить время математических расчетов, но и глубже понять физические процессы, моделирование которых осуществляется при помощи ЭВМ. Широкое применение ЭВМ в учебном процессе связано с тем значительным объемом расчетных заданий и лабораторных работ, которые необходимо выполнить студентам в процессе обучения.

Однако необходимо отметить, что существуют определенные сложности, препятствующие более широкой компьютеризации учебного процесса, так как применение ЭВМ подразумевает:

глубокое понимание физики моделируемого процесса;

знание на достаточно высоком уровне определенного языка программирования;

опыт в написании, отладке и тестировании программ.

Если первым двум условиям можно научить, то последнее условие приходит со временем, которого у студентов и аспирантов, как правило, не хватает.

В этой связи, необходимо отметить появление в последние годы все большего количества программных продуктов, коренным образом изменивших сам процесс постановки и решения задачи. Такие программные комплексы состоят из нескольких программных модулей, осуществляющих процесс:

описания геометрии решаемой задачи;

задания свойств расчетных областей и граничных условий;

дискретизации области решения задачи сеточной функцией;

решения задачи при помощи встроенных в программу так называемых «решателей»;

вывода результата в той или иной наглядной форме.

Одним из достоинств таких систем является достоверность результатов получаемых в ходе решения задачи (при правильной ее постановке), тогда как достоверность результатов «домашних» программ проверить очень сложно (требуется проделать ту же работу), а экспериментальная проверка не всегда возможна.

В качестве примера одного из таких программных комплексов является система COMSOL, состоящая из целого ряда отдельных программных модулей, которые пользователь может объединять в одно целое для решения сложной мультифизической задачи.

Другим, более простым но, тем не менее, чрезвычайно полезным и мощным, является пакет программ FEMM, позволяющий решать достаточно широкий круг задач. Настоящее учебное пособие является своего рода инструкцией пользователя программой FEMM, целью которого является краткое описание физики электромагнитных, электростатических и тепловых процессов применительно к их расчетам с помощью современных программных комплексов. В пособие включены многочисленные примеры решения конкретных задач, изучение которых позволит глубже понять физику происходящих процессов и алгоритм решения конкретных задач.

Настоящее учебное пособие рассчитано на широкий круг пользователей, интересующихся решением казанных выше задач.

## РАЗДЕЛ 1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О СИСТЕМЕ

FEMM представляет собой набор программ для решения низкочастотных электромагнитных, токовых и тепловых задач в двумерной плоской и осесимметричной областях.

Программа используется для решения:

- линейных и нелинейных магнитостатических задач;
- гармонических линейных и нелинейных квазистатических магнитных задач;
- линейных электростатических задач;
- тепловых задач в установившемся тепловом состоянии;
- задач по исследованию протекания тока в проводнике.

### 1.1. Состав пакета

Пакет FEMM состоит из четырех частей.

1. Диалоговая оболочка (femm.exe). Это программа – оболочка предварительного процессора для решения задач различного типа. Оболочка содержит CAD – подобный интерфейс для прорисовки геометрии решаемой задачи, определения материальных свойств областей и задания граничных условий. Файлы AutoCad.DXF могут быть импортированы в программу для создания геометрии объекта.

2. Программа триангуляции (triangle.exe). Это программа разбиения области решения задачи на заданное пользователем или принятое по умолчанию число треугольных элементов для решения задачи методом конечных элементов.

3. Решающее устройство:

fkern.exe – для решения задач магнитного поля;

belasolv.exe – для решения задач электростатики;

hsolv.exe – для решения тепловых задач;

csolv.exe – для решения задач распределения тока в проводнике.

Каждое решающее устройство создает набор файлов, которые описывают проблему и показывают решения задачи.

4. Диалоговая оболочка (femmplol.exe). Это программа – оболочка окончатального процессора, в котором решение полевых задач могут быть показаны в форме эквипотенциалей и линий потока, а так же в виде изображения, цвет которого соответствует определенному значением расчетной величины.

Программа также позволяет: получать численные значения расчетного поля в произвольных точках; получить значения различных интегралов и размеров, представляющих интерес для пользователя.

Таким образом, интерактивная оболочка программы разделена на восемь главных секций:

1. Четыре предпроцессора: магнетизм; электростатика; тепло, распределение тока.

2. Четыре постпроцессора, аналогичные первым.

## **1.2. Ограничения в применении программы**

Пакет FEMM решает уравнения Максвелла не во всех случаях. Система решает задачи магнетизма, которые могут трактоваться как «низкочастотные задачи», т.е. задачи, в которых токами смещения можно пренебречь по сравнению с токами проводимости. Токи смещения обычно учитываются для решения задачи по распространению радиоволн и в данный пакет программ не входят.

Более подробно возможности каждого решателя описаны ниже.

## РАЗДЕЛ 2. УРАВНЕНИЯ МАГНИТНОГО, ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО, ТЕПЛОВОГО И ТОКОВОГО ПОЛЕЙ

### 2.1. Магнитостатическая проблема

Магнитостатической задачей называется задача, в которой магнитное поле не зависит от времени (поле создано постоянными токами или постоянными магнитами).

В этом случае напряженность (интенсивность) магнитного поля обозначается  $\vec{H}$  и является вектором, а плотность магнитного потока в материальной среде обозначается  $\vec{B}$  – вектор магнитной индукции.

Уравнения Максвелла в этом случае запишутся:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{H} &= \vec{J} \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

где  $\vec{H}$  – напряженность магнитного поля;  $\vec{B}$  – вектор магнитной индукции;  $\vec{J}$  – вектор плотности тока;  $\nabla$  – означает оператор  $\frac{d}{d\vec{r}}$ , именуемый «набла», причем  $\nabla \times \Rightarrow rot$  для вектора  $\vec{H}$ , а  $\nabla \cdot \Rightarrow div$  для вектора  $\vec{B}$ .

Для материальной среды связь между напряженностью поля и вектором магнитной индукции (при отсутствии остаточной намагниченности) определяется:

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \vec{H} \quad (2.2)$$

где  $\mu_0$  – абсолютная магнитная проницаемость среды;  $\mu_r$  – относительная магнитная проницаемость среды.

Для ферромагнитных материалов связь между напряженностью поля и магнитной индукцией нелинейная. В этом случае, напряженность поля и,

следовательно, магнитная проницаемость, являются функциями магнитной индукции:

$$\mu = \frac{B}{H(B)}. \quad (2.3)$$

Программа, решая уравнения Максвелла, решает их относительно векторного магнитного потенциала  $\vec{A}$ :

$$\nabla \times \left( \frac{1}{\mu(B)} \cdot \nabla \times \vec{A} \right) = \vec{J}. \quad (2.4)$$

В случае определения векторного потенциала, значения магнитной индукции рассчитываются по формуле:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}. \quad (2.5)$$

Для линейных изотропных материалов расчетные уравнения упрощаются и имеют следующий вид:

$$\frac{1}{\mu} \cdot \nabla^2 \vec{A} = \vec{J}. \quad (2.6)$$

Такая постановка позволяет существенно упростить решения магнитостатической задачи, так как для решаемых данной программой задач (двухмерной, в Декартовой системе координат и осесимметричной, в цилиндрической системе координат) значение векторного магнитного потенциала имеет всего одну компоненту ( $A_z$  и  $A_\phi$ ). В то время как векторы магнитной индукции и напряженности магнитного поля имеют в два раза большую размерность. Полученная форма дифференциального уравнения (2.5, 2.6) называется эллиптической и методы решения таких уравнений достаточно хорошо разработаны. Уравнения электростатики, распространения тепла и растекания тока так же относятся к данному типу уравнений.

## 2.2. Уравнения Максвелла для установившегося синусоидального тока

Если магнитное поле зависит от времени, то в материалах с ненулевой электрической проводимостью индуцируются вихревые токи. В этом случае уравнения Максвелла должны быть дополнены соотношением, связывающим электрическое поле с магнитным. Обозначим напряженность электрического поля как  $\vec{E}$ , а проводимость материала -  $\sigma$ , тогда уравнение связи между магнитным и электрическим полем запишется в виде:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (2.7)$$

Подставляя значение  $\vec{B}$  из (2.5) получим:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{A}) \Rightarrow \nabla \times \vec{E} = -\nabla \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \Rightarrow \vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \cdot V \quad (2.8)$$

где  $V$  – сторонняя электродвижущая сила;  $\nabla \cdot V$  – градиент сторонней ЭДС (напряженность внешнего электрического поля).

Учтя соотношение:

$$\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E}, \quad (2.9)$$

получим

$$\sigma \cdot \vec{E} = -\sigma \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \sigma \cdot \nabla \cdot V \Rightarrow \vec{J} = -\sigma \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{J}_{st}, \quad (2.10)$$

где  $\vec{J}_{st}$  – сторонняя плотность тока в проводнике.

В этом случае, расчетное уравнение для векторного магнитного потенциала изменится:

$$\nabla \times \left( \frac{1}{\mu(B)} \cdot \nabla \times \vec{A} \right) = -\sigma \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{J}_{st}. \quad (2.11)$$

Уравнение (2.11) не учитывает токи, наводимые в проводнике при его движении в магнитном поле, как не учитывает этот эффект и программа.

В случае если поле изменяется по гармоническому закону с определенной одной частотой, то для квазистатического состояния значения переменной можно представить в виде:

$$A = \text{Re}(\underline{A}_m \cdot (\cos(\omega \cdot t) + j \cdot \sin(\omega \cdot t))) = \text{Re}(\underline{A}_m \cdot e^{j \cdot \omega t}) .$$

В этом случае, уравнение (2.11) можно записать:

$$\nabla \times \left( \frac{1}{\mu(B_m)} \cdot \nabla \times \underline{\vec{A}}_m \right) = -\sigma \cdot j \cdot \omega \cdot \underline{\vec{A}}_m + \underline{\vec{J}}_{stm} . \quad (2.12)$$

### 2.3. Электростатическая задача

Электростатическая задача заключается в определении напряженности электрического поля  $\vec{E}$  и вектора плотности электрического потока  $\vec{D}$  (вектор электрического смещения). Имеются два условия, которые должны выполняться для статического электрического поля. Первое условие – поток вектора электрического смещения через замкнутую поверхность равен заряду, заключенному внутри нее (закон Гаусса в дифференциальной форме):

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho , \quad (2.13)$$

где  $\rho$  – объемная плотность электрических зарядов.

Второе условие – закон Ампера для статического электрического поля в дифференциальной форме:

$$\nabla \times \vec{E} = 0 . \quad (2.14)$$

Вектор электрического смещения и напряженность электрического поля связаны между собой соотношением:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \vec{E} , \quad (2.15)$$

где  $\epsilon_0$  и  $\epsilon_r$  – абсолютная и относительная диэлектрическая проницаемость вещества.

Данная программа рассматривает только линейные зависимости между вектором напряженности и вектором смещения.

Для упрощения вычисления поля и удовлетворения двух вышеуказанных условий (2.13,2.14), программа использует соотношение:

$$\vec{E} = -\nabla \cdot V. \quad (2.16)$$

где  $V$  – разность потенциалов.

В этом случае условие (2.14) выполняется всегда, так как  $\nabla \times \nabla \cdot V \equiv 0$ , а условие (2.13) – закон Гаусса – приводит к уравнению:

$$-\nabla \cdot (\epsilon \cdot \nabla \cdot V) = \rho. \quad (2.17)$$

Уравнение (2.17) должно быть дополнено соответствующими граничными условиями.

## 2.4. Тепловая задача

Задача по определению температуры и тепловых потоков в твердом теле решается системой только для установившегося (стационарного) теплового состояния.

Задачу стационарного распределения температуры в твердом теле можно, по аналогии с электростатическим полем, представить температурным градиентом (аналог напряженности электростатического поля  $\vec{E}$ )  $\vec{G}$  и интенсивностью теплового потока  $\vec{F}$  (подобно потоку вектора смещения  $\vec{D}$ ).

Плотность теплового потока должна удовлетворять закону Гаусса, который гласит: "Тепловой поток, выходящий из любой замкнутой поверхности, должен быть равен теплу, которое генерируется в данном объеме".

Аналогично задаче электростатики, этот закон в дифференциальной форме может быть записан:

$$\nabla \cdot \vec{F} = q, \quad (2.18)$$

где  $q$  – мощность объемных источников тепла.

Температурный градиент связан с тепловым потоком соотношением:

$$\vec{F} = k \cdot \vec{G}, \quad (2.19)$$

где  $k$  – коэффициент теплопроводности материала.

Теплопроводность, как правило, слабо зависит от температуры, но FEMM позволяет задавать любую произвольную температурную зависимость для коэффициента теплопроводности материала.

В конечном счете, нас интересует температура нагрева тела, а не его градиент. В этом случае, необходимо вспомнить, что:

$$\vec{G} = -\nabla \cdot T. \quad (2.20)$$

Подстановка (2.20) в (2.18) с учетом (2.19) приводит к уравнению, описывающему распространение тепла в твердом теле:

$$\nabla \cdot (k \cdot \nabla \cdot T) = -q. \quad (2.21)$$

Уравнение (2.21) FEMM решает методом конечных элементов с использованием определенных граничных условий.

## 2.5. Задача распределения тока в проводнике

Программа решает задачу распределения тока в проводнике исключительно в стационарной или квазистатической постановке. Причем, задача рассматривается только для уравнения Максвелла, описывающего связь между напряженностью магнитного поля и плотностью тока с учетом токов смещения.

Запишем уравнение Максвелла для плотности тока в квазистатическом режиме:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{d\vec{D}}{dt} \text{ или } \nabla \times \vec{H} = \vec{J} + j \cdot \omega \cdot \varepsilon \cdot \vec{E}. \quad (2.22)$$

Вычислим дивергенцию от уравнения (2.22). Так как  $\nabla \cdot \nabla \times \vec{H} \equiv 0$ , то с учетом того, что  $\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E}$  ( $\sigma$  – проводимость материала), можно записать:

$$\nabla \cdot (\sigma \cdot \vec{E}) + \nabla \cdot (j \cdot \omega \cdot \varepsilon \cdot \vec{E}) = 0; \nabla \cdot ((\sigma + j \cdot \omega \cdot \varepsilon) \cdot \vec{E}) = 0. \quad (2.23)$$

Записав значение напряженности поля через градиент потенциала, получим:

$$-\nabla \cdot ((\sigma + j \cdot \omega \cdot \varepsilon) \cdot \nabla \cdot V) = 0. \quad (2.24)$$

Для поля постоянных токов:

$$-\nabla \cdot (\sigma \cdot \nabla \cdot V) = 0. \quad (2.25)$$

## 2.6. Граничные условия (Boundary)

Необходимость введения граничных условий объясняется тем, что исходным уравнениям удовлетворяет бесконечное множество решений, отличающихся произвольной постоянной. Для того чтобы выбрать одно решение, удовлетворяющее условиям конкретной задачи, необходимо задать граничные условия.

### 2.6.1. Граничные условия для магнитных и электростатических полей

Граничные условия для магнитных и электростатических полей могут быть следующие.

1. Условие Дирихле. В этом типе граничных условий на границе задается величина потенциала  $\vec{A}$  или  $V$ , например нулевое значение. Наибо-

лее часто условие Дирихле используется для магнитных задач. Назначение  $\vec{A}=0$  вдоль границы означает, что магнитный поток эту границу не пересекает (не выходит за ее пределы). В электростатике это условие используется для задания нулевого потенциала по границе области.

2. Условие Неймана. Оно определяет производную по нормали к поверхности раздела сред. Условие  $\frac{\partial \vec{A}}{\partial \vec{n}}=0$  вынуждает поток идти под углом  $90^\circ$  к границе. Это условие выполняется, если имеется граница с материалами, значительно различающимися по величине магнитной проницаемости (как правило металл – воздух).

3. Условие Робина. Это условие смешанное между условиями Дирихле и Неймана, описывающее соотношение между величиной  $\vec{A}$  и его нормальной производной к границе:  $\frac{1}{\mu_r \cdot \mu_0} \frac{\partial \vec{A}}{\partial \vec{n}} + c_0 \cdot \vec{A} + c1 = 0$ . Это граничное условие позволяет приписывать ограниченному домену поведение бесконечной области, задавать значение напряженности поля на границе. Применительно к тепловым задачам, это условие может интерпретироваться как граница конвекции, задания теплового потока на границе или задание на границе тела радиационного потока.

4. Периодическое условие. Это условие соединяет две границы вместе. Значения точек одной границы соответствуют значениям точек другой границы. Условие используется для задания бесконечных границ.

5. Антипериодическое условие. Так же соединяет вместе две границы. Но на второй границе значения функции равны значениям первой по амплитуде, но обратные по знаку.

Для получения единственного решения граничные условия должны быть всегда однозначно определены. Для плоских задач по умолчанию на

границе задаются условия Неймана. Для осесимметричных задач значение  $\vec{A}=0$  предписано линии  $r=0$ . В этом случае задавать граничное условие не требуется. Для электростатических задач необходимо задавать граничное условие, чтобы задать потенциал на линии  $r=0$ .

### 2.6.2. Граничные условия для тепловых полей

Основные типы граничных условий для тепловых проблем.

1. Фиксированная температура. Это условие задаёт температуру вдоль границы расчетной области.

2. Задание удельного теплового потока. Это граничное условие задает удельный тепловой поток, пересекающий границу. Математически это условие описывается

$$k \frac{\partial T}{\partial n} + f = 0 ,$$

где  $k$  – коэффициент теплопроводности;  $f$  – значение удельного теплового потока (поток на единицу площади), нормального к границе.

3. Конвекция. Это граничное условие задается в случае обтекания границы воздухом или жидкостью и записывается в виде:

$$k \frac{\partial T}{\partial n} + h \cdot (T - T_0) = 0 ,$$

где  $h$  – коэффициент конвективной теплоотдачи с единицы площади поверхности, а  $T_0$  – температура окружающей среды.

4. Радиационный поток. Задается в случае излучения теплового потока с поверхности тела. Математически записывается в виде:

$$k \frac{\partial T}{\partial n} + \beta \cdot k_{SB} \cdot (T^4 - T_0^4) = 0 ,$$

где  $\beta$  – степень излучения (степень черноты);  $k_{SB}$  – константа Стефана – Больцмана.

5. Периодическое условие. Это условие соединяет две границы вместе. Граничные значения точек одной границы соответствуют значениям точек другой границы.

6. Антипериодическое условие. Так же соединяет вместе две границы. Но на второй границе значения функции равны значениям первой по амплитуде, но обратные по знаку.

Если граничное условие явно не задано, то граница принимается теплоизолированной, т.е. никакой тепловой поток не пересекает данную границу. Для получения однозначного решения, граничные условия должны быть всегда заданы.

### ***2.6.3. Граничные условия для токовых полей***

Основные типы граничных условий для тепловых проблем:

1. Фиксированный потенциал. Это условие задаёт потенциал вдоль границы расчетной области.

2. Задание плотности тока по границе.

3. Задание поверхностного тока.

4. Периодическое условие. Это условие соединяет две границы вместе. Граничные значения точек одной границы соответствуют значениям точек другой границы.

5. Антипериодическое условие. Так же соединяет вместе две границы. Но на второй границе значения функции равны значениям первой по амплитуде, но обратные по знаку.

### РАЗДЕЛ 3. КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫЙ АНАЛИЗ

Решение описанных выше задач базируется на дифференциальных уравнениях в частных производных, аналитические решения которых можно получить только в случае простейших форм уравнений, граничных условий и конфигураций границ. Поэтому, для решения большинства задач применяется численный метод, называемый методом конечных элементов. Идея этого метода заключается в том, что расчетная область разбивается на большое число отдельных простых областей, в которых искомая функция аппроксимируется простым выражением. Если области достаточно малы, то эти простые функции достаточно точно описывают искомую функцию. В результате, дифференциальные уравнения в частных производных преобразуются в систему линейных уравнений, число неизвестных в которых достигает десятков тысяч. Однако существуют алгоритмы, которые решают такие задачи за относительно небольшое время.

Данная программа разбивает область на треугольные элементы с линейной зависимостью потенциала внутри треугольника. В основе метода лежит минимизация функционала, определяющего энергию системы (система всегда стремится к положению, в котором энергия минимальна). Рассмотрим общий подход к решению на примере плоской задачи.

В этом случае принимается, что внутри каждого треугольного элемента искомая функция определяется простой формулой:

$$A = a + b \cdot x + c \cdot y . \quad (3.1)$$

Из (3.1) можно определить коэффициенты полинома через значения функции в вершинах треугольника:

$$A_1 = a + b \cdot x_1 + c \cdot y_1, \quad A_2 = a + b \cdot x_2 + c \cdot y_2, \quad A_3 = a + b \cdot x_3 + c \cdot y_3, \quad (3.2)$$

где  $A_i$  – значения функции в вершинах треугольника.

Тогда:

$$a = f_1(A_1, A_2, A_3); b = f_2(A_1, A_2, A_3); c = f_3(A_1, A_2, A_3). \quad (3.3)$$

Подставив в (3.1) значение (3.3), получим выражение для искомой функции в зависимости от координат вершин треугольника и значения искомой функции в вершинах треугольника:

$$A = f(a, b, c, x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, A_1, A_2, A_3, x, y). \quad (3.4)$$

Энергии поля для уравнения Лапласа:

$$F(A) = \frac{1}{2} \cdot \int |\nabla \cdot \vec{A}|^2 \cdot dS. \quad (3.5)$$

Энергии поля для уравнения Пуассона:

$$F(A) = \frac{1}{2} \cdot \int |\nabla \cdot \vec{A}|^2 \cdot dS - \mu \cdot \int \vec{A} \cdot \vec{J} \cdot dS. \quad (3.6)$$

Уравнения (3.5,3.6) являются функционалами энергии в случае линейной среды.

В случае нелинейной среды для плоской задачи:

$$F(A) = \int_S W(A) \cdot dS - \int_S \vec{A} \cdot \vec{J} \cdot dS, \quad (3.7)$$

где  $W(A) = \int \vec{H} \cdot d\vec{B}$  - плотность энергии.

Минимизируя функционал энергии для неизвестных значений потенциала во внутренних узлах сетки, получим систему алгебраических уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial A_i} \sum_{m=1}^n F^m = 0, \quad i = 1..I, \quad (3.8)$$

где  $I$  – число неизвестных вершин треугольников;  $n$  – число треугольников;  $F^m$  – вклад энергии каждого треугольника в функционал.

Система (3.8) должна быть дополнена граничными условиями.

## РАЗДЕЛ 4. РАБОТА С CAD СИСТЕМОЙ

Для облегчения работы в системе существует связь с *CAD* программами. Программа поддерживает экспорт и импорт файлов с расширением *dxf* программы *Auto CAD*. Система работает только с *2D* файлами. Чтобы импортировать файл в систему необходимо выбрать в меню *File/Import/dxf*. В результате откроется окно, в котором нужно выбрать файл, затем откроется окно с указанием допуска. Обычно, значений установленных по умолчанию бывает достаточно, но в некоторых случаях при близком расположении точек, допуск надо уменьшить. Система понимает не все признаки *CAD* файла и иногда рисунок нуждается в корректировке. «Втягивание» готового файла значительно ускоряет процесс создания расчетной модели. Время импортирования зависит от сложности *dxf*.

## РАЗДЕЛ 5. МАГНИТОСТАТИКА

### 5.1. Магнитный предпроцессор

Предпроцессор используется для создания расчетной геометрии задачи, определения материалов геометрии и задания граничных условий. Создание нового файла начинается с команды *File/New*, а затем из диалогового окна выбирают магнитную проблему (Magnetics Problem).

Рисунок расчетной геометрии состоит из четырех типов элементов:

1. Начальные и конечные точки линейных и дуговых сегментов.
2. Соединительных линий в виде прямых и дуговых сегментов.
3. Добавленных маркеров «ярлык блока» для определения материальных свойств и размера ячеек расчетной сетки.
4. Определение граничных условий на внешних границах геометрии.

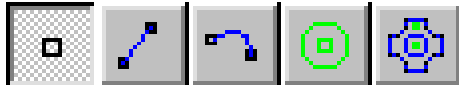
Приведенный выше порядок описывает постановку задачи.

#### **5.1.1. Предпроцессор рисования**

Ключевыми элементами использования предпроцессора являются: точечный режим; сегментный режим; дуговой сегмент; метод блока; метод групп.

При работе в первых четырех режимах можно создавать геометрические объекты и задавать свойства областей, а так же редактировать выбранные. Пятый метод объединяет разные объекты вместе, облегчая работу с ними.

Переключение между режимами осуществляется выбором соответствующих кнопок панели рисования рис. 5.1.



где 1 – режим рисования точек; 2 – режим рисования линий; 3 – режим рисования дуговых сегментов; 4 – режим определения материальных свойств; 5 – режим блоков.

Рисунок 5.1 – Кнопки панели рисования

### 5.1.2. Клавиатура и команды

К особой группе команд относятся команды по изменению положения вида, которые сосредоточены на панели инструментов рис. 5.2.

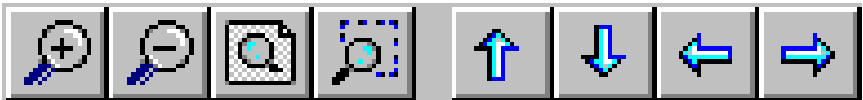
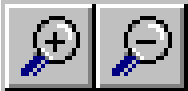





Рисунок 5.2 – Изменение положения вида

Назначение кнопок:

-  – увеличивают или уменьшают изображение;
-  – размещает все нарисованные объекты в пределах экрана дисплея;
-  – позволяет увеличить до размеров экрана выделенный рамкой объект;
-  – смещают объект в соответствующую сторону примерно на половину экрана.

Рисование и редактирование объектов выполняется при помощи специальной группы команд. Задачи по рисованию и редактированию объектов можно выполнять либо через панель инструментов, либо при помощи мыши, либо «горячих» клавиш, показанных в (табл. 5.1).

Таблица 5.1 – Команды

Режим точек	
Клавиша	Назначение
Пробел	Редактирование свойств выделенных точек.
Табуляция	Выводит диалоговое окно для числового ввода координат точки.
Escape	Отмена выделения точек
Delete	Удаление выделенных точек.
Линейный или дуговой сегмент	
Клавиша	Назначение
Пробел	Редактирование свойств выделенного (выделенных) сегмента.
Escape	Отмена выделения
Delete	Удаление выделенных сегментов.
Режим блока	
Клавиша	Назначение
Пробел	Редактирование свойств
Табуляция	Вывод диалогового окна для численного введения координаты метки блока.
Escape	Отмена выделения
Delete	Удаление выделенных блоков.

Продолжение табл. 5.1.

Режим групп	
Клавиша	Назначение
Пробел	Редактирование свойств группы выделенных объектов
Escape	Отмена выделения
Delete	Удаление группы
Функции клавиатуры	
Клавиша	Назначение
Влево	Сдвиг экрана влево
Вправо	Сдвиг экрана вправо
Вверх	Сдвиг экрана вверх
Вниз	Сдвиг экрана вниз
Page Up (Down)	Увеличение (уменьшение) объекта
Home	Установка области нарисованных объектов во весь экран
Режим точек	
Клавиша	Назначение
Щелчок левой клавишей	Создание новой точки с координатами, указанными курсором.
Щелчок правой клавишей	Выделение указанной точки
Двойной щелчок правой клавишей	Высвечивание координат указанной точки.

Продолжение табл. 5.1.

Линейный (дуговой) сегмент	
Клавиша	Назначение
Щелчок левой клавишей	Выделение стартовой (конечной) точки рисования нового сегмента.
Щелчок правой клавишей	Выделение указанного сегмента
Двойной щелчок правой клавишей	Показ длины сегмента (радиуса и опорного угла).
Метки блока	
Клавиша	Назначение
Щелчок левой клавишей	Создание новой метки блока в текущем положении курсора.
Щелчок правой клавишей	Выделение ближайшей метки блока
Двойной щелчок правой клавишей	Координаты расположения метки блока
Режим группа	
Клавиша	Назначение
Щелчок правой клавишей	Выделение группы, ближайшей к месту положения курсора.

### 5.1.3. Работа с сеткой (*Grid Property*)

Для облегчения работы в режиме рисования используется такой объект как сетка, представляющий собой точки, нанесенные на поверхности окна рисования. Интервал между пикселями сетки может быть приближен-

но определен по счетчику положения курсора (левый нижний угол окна), либо при помощи панели, показанной на рис. 5.3.



где 1 – показать (скрыть) сетку; 2 – привязать точки к сетке; 3 – размер сетки.

Рисунок 5.3 – Управление сеткой

Кнопка «размер сетки» открывает диалоговое окно рис. 5.4.

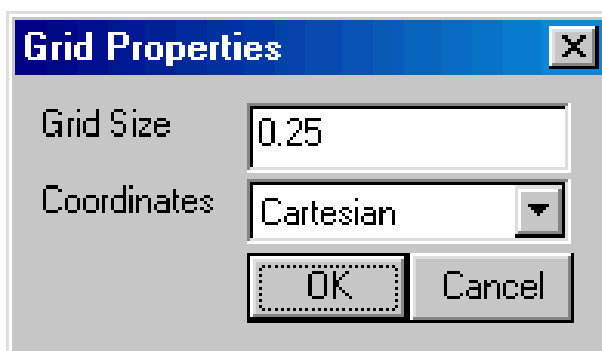


Рисунок 5.4 – Размер сетки

В окне можно указать размер и вид сетки (Декартова –  $x$ - $y$ , осесимметричная –  $r$ - $z$ ).

#### **5.1.4. Редактирование объектов**

В меню «редактирование» содержится много полезных команд. Наиболее часто используется команда «отменить». Выбор этого пункта позволяет отменить последнее действие. Для выбора нескольких объектов используется команда «выбор группы». Выбор объектов осуществляется выделением объектов прямоугольной рамкой или окружностью при нажатой левой клавишей мыши, причем, будут выделены те объекты, которые ак-

тивны в данный момент (точки, линии, дуги, блоки). С помощью команд этого меню любой объект может быть скопирован в буфер обмена, удален, сдвинут (повернут), масштабирован, отражен, скруглен, кнопками меню, показанными на рис. 5.5.

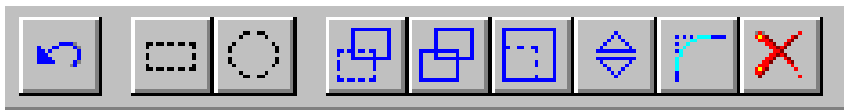
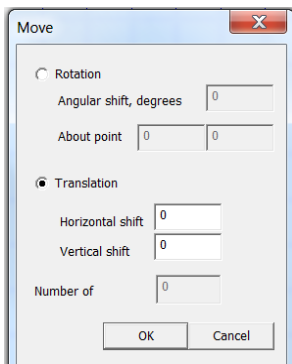


Рисунок 5.5 – Команды редактирования объектов

### ***Последовательность команд рисования объектов:***

1. Перейти в режим рисования точек.
2. Задать координаты точек либо с помощью указания щелчком левой клавишей при включенной привязке к узлам сетки, либо с помощью клавиши *Tab*, задав декартовые либо цилиндрические координаты в диалоговом окне.
3. Для рисования прямых необходимо перейти в режим "*Рисование линий*", щелчком левой клавиши мыши выделив соответствующие точки.
4. Для рисования сегментов необходимо перейти в режим "*Рисование сегментов*", щелчком левой клавиши мыши выделив соответствующие точки. В диалоговом окне задать дуговой угол, максимальный угол дискретизации и граничные условия, если таковые имеются или нужны. Направление выпуклости дуги зависит от направления указания точек (положительное направление обхода контура).
5. Для редактирования элементов необходимо их выделить:
  - а) щелчком правой клавиши мыши в соответствующем режиме рисования;

б) прямоугольной либо круговой рамкой панели редактирования рис.



5.5.

Выделенные объекты можно удалить, скопировать и перенести, указав параметры копирования/переноса в диалоговом окне в котором надо указать: вращение или смещение; угол, ось вращения или смещение по координатам; число новых объектов (только для копирования).

### 5.1.5. Формулировка задачи (Problem Definition)

Изначальная постановка задачи определяется в окне «формулировка задачи», показанном на рис. 5.6.

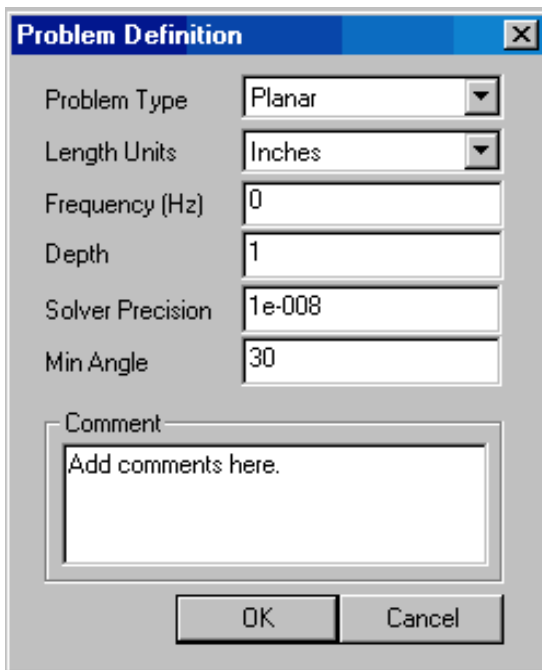


Рисунок 5.6 – Окно формулировки задачи

Назначение меню:

- Первая кнопка – позволяет выбрать тип задачи *2D* или осесимметричная (цилиндрическая система координат).
- Единицы, которые устанавливаются в окне рисования (*м, см, мм, дюймы*).
- Частота процесса. При  $H_z=0$ , поле постоянно.
- Глубина модели для задачи типа *2D*.
- Точность итерационного решателя (до  $1 \cdot 10^{-16}$ ).
- Минимальный угол элементарной треугольной области (уменьшение угла снижает точность решения в области сложной конфигурации).
- Комментарии (заполняются пользователем для напоминания о задаче в дальнейшем).

#### **5.1.6. Определение свойств (Property Definition)**

Для решения задачи пользователь должен однозначно определить граничные условия, материалы, свойства блока. Для задания или изменения свойств необходимо выбрать пункты меню «Материалы, Границы, Точки и т. д.». В этом случае появляется диалоговое окно, показанное на рис.5.7.

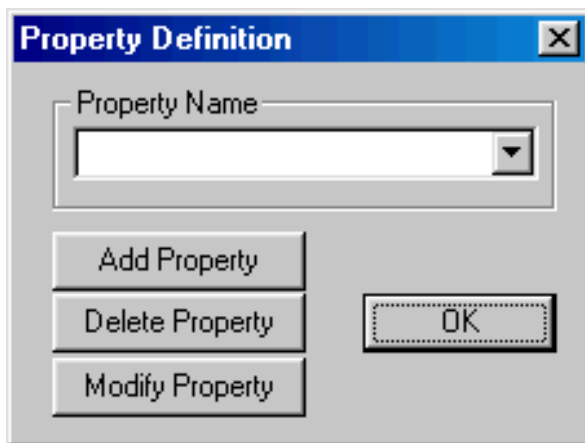


Рисунок 5.7 - Диалоговое окно задания свойств

Назначение кнопок:

- Добавить свойство.
- Удалить.
- Модифицировать.

В свойства можно вводить как действительные, так и мнимые значения в зависимости от типа решаемой задачи. Задав нулевую частоту, пользователь будет вводить величины, у которых комплексная часть равна нулю:  $\vec{A} = A_{re} \cdot \cos(\omega \cdot t) + I \cdot A_{im} \cdot \sin(\omega \cdot t)$ .

### 5.1.7. Свойства точки (Nodal Property)

При нажатии первой кнопки появляется диалоговое окно, позволяющее задать имя пункта и его свойства – векторный потенциал или ток. Причем, одновременно эти величины задать нельзя. Остальные кнопки либо удаляют заданное свойство, либо позволяют его модернизировать. Величины могут быть заданы как действительными, так и комплексными числами.

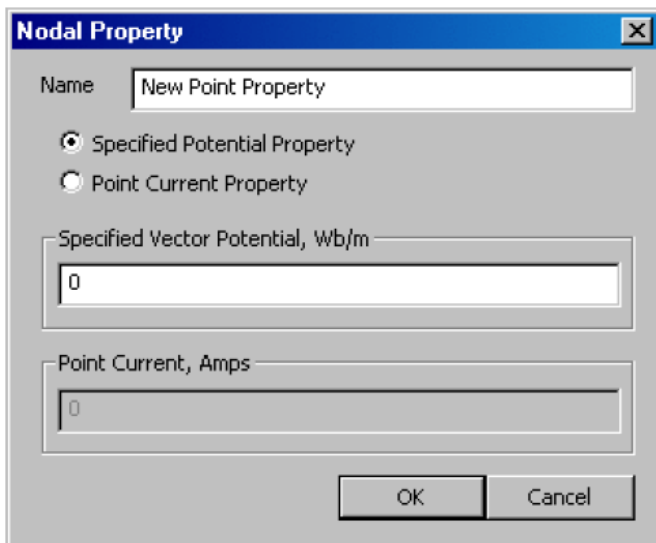


Рисунок 5.8 – Окно свойств точки

### 5.1.8. Свойства границ (Boundary Property)

Граничные условия необходимы для получения однозначного решения задачи. При добавлении или изменении существующего граничного условия открывается диалоговое окно. Каждая граница должна иметь своё имя.

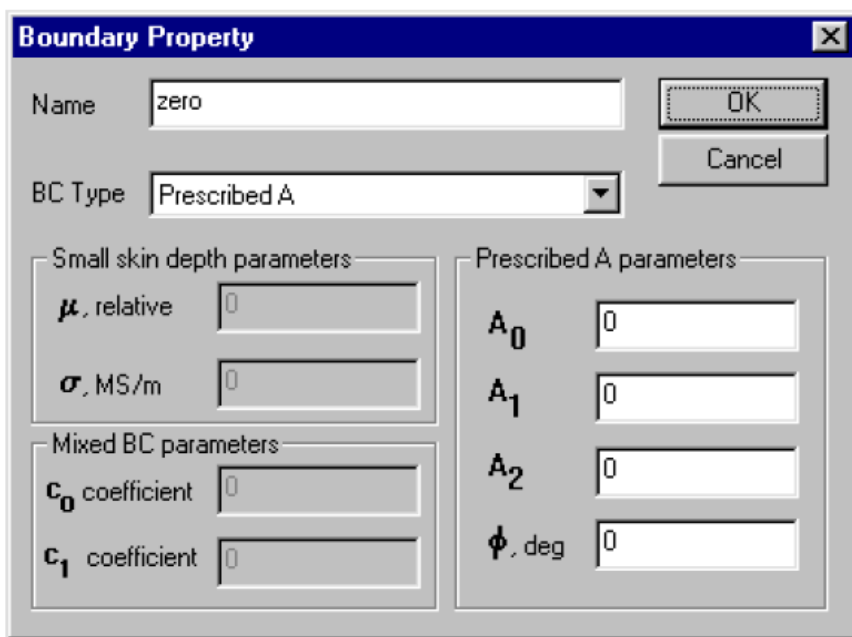


Рисунок 5.9 - Диалоговое окно «свойства границы»

Типы поддерживаемых граничных условий (BC type):

- Задание значения векторного магнитного потенциала вдоль границы (Prescribed A). Это граничное условие, установленное по умолчанию, может использоваться для задания потока параллельного границе объекта (в частном случае - магнитная изоляция  $A=0$ ). Задания распределения по-

тенциала вдоль границы указывается параметрами  $A_0, A_1, A_2$  и фазой  $\phi$ . В этом случае для плоской или осесимметричной задачи:

$$A = (A_0 + A_1 * x + A_2 * y) * e^{i \cdot \phi};$$

$$A = (A_0 + A_1 * r + A_2 * z) * e^{i \cdot \phi}$$

- Тонкий слой (Small skin dept). Это условие используется при сильно выраженном поверхностном эффекте, когда вихревые токи сосредоточены в очень тонком поверхностном слое. В этом случае хороший результат при решении такой задачи дают условия Робина с комплексными коэффициентами

$\frac{\partial A}{\partial n} + \frac{1+i}{\delta} \cdot A = 0$ , где  $n$  – направление внешней нормали;

$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \cdot \sigma \cdot \mu_0 \cdot \mu_r}}$ , в которых участвуют проводимость и проницаемость

слоя с вихревыми токами. При нулевой частоте условие вырождается в

$\frac{\partial A}{\partial n} = 0$ . Т.к. при нулевой частоте глубина проникновения волны равна бес-

конечности.

- Смешанное граничное условие формы  $\frac{1}{\mu_0 \cdot \mu_r} \cdot \frac{\partial A}{\partial n} + c_0 \cdot A + c_1 = 0$

(Mixed). Имеется два главных момента в использовании этого условия:

1. Определенный выбор коэффициента  $c_0$  при коэффициенте  $c_1=0$ , на внешней границе, позволяют имитировать бесконечное пространство (открытая граница). Смотри пример в приложении А.

2. Это условие может использоваться для задания определенного значения поля вдоль выбранной границы. Условие устанавливается выбором  $c_0=0$ , а  $c_1=H$  (A/м) – значение напряженности поля на границе. Поле будет направлено параллельно границе в направлении, определяемом знаком  $H$

(См. пример в приложении Б.). Для задания потока перпендикулярного к границе может использоваться задаваемое по умолчанию условие  $\frac{\partial A}{\partial n} = 0$ .

- Стратегическое двойное изображение (Strategic Dual Image). Используется для имитации внешних границ для плоской (2 D) задачи и прикладывается только к внешним границам. Результат правилен только для среды с относительной магнитной проницаемостью равной 1 и при отсутствии токов (*задание бесконечной границы поля постоянных магнитов*).

- Периодическая граница (Periodic). Вид условия, является прикладным к двум границам (сегментам или дугам), и задаёт одинаковое значение магнитного потенциала вдоль каждой из границ. Часто применяется для описания открытых границ с целью уменьшения области моделирования.

- Антипериодическое условие (Anti-htriodic). Прикладывается к границам, как и предыдущее, но значение векторного потенциала одной границы является противоположным по отношению к другой. Применяется для уменьшения области моделирования, (рассматривается часть электрической машины).

### ***5.1.9. Библиотека материалов (Materials Library)***

Программа имеет встроенную библиотеку, вызов которой осуществляется через меню Свойства – Библиотека материалов. Вид библиотеки показан на рис. 5.10.

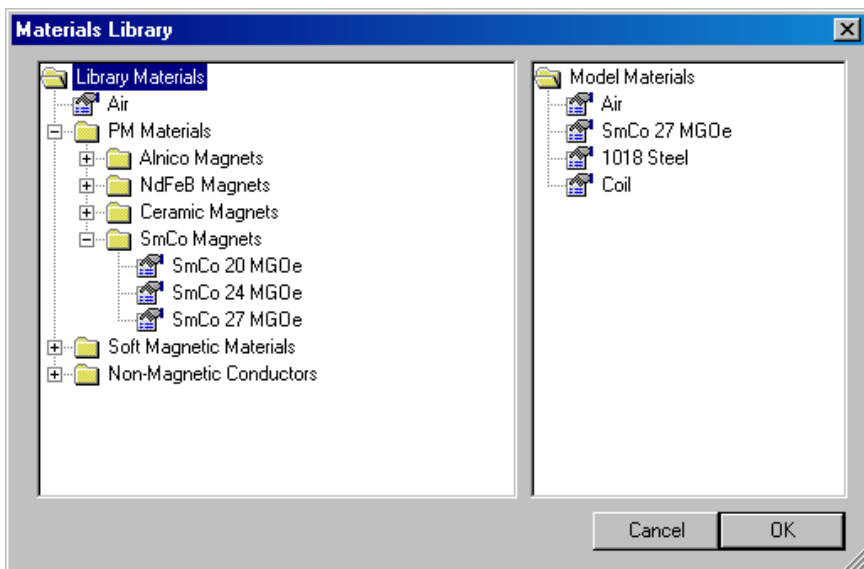


Рисунок 5.10 – Вид библиотеки материалов

На рис. 5.10 слева указаны материалы библиотеки – справа – материалы модели, которые помещены в нее путем «перетаскивания» материалов библиотеки. В библиотеку можно добавлять материалы и редактировать находящиеся в ней материалы, но редактировать материалы лучше в модели.

#### **5.1.10. Свойства материалов (Materials)**

Блок «свойства материалов» необходим для задания материальных свойств объекта, связанных с меткой блока. Задание свойств происходит в диалоговом окне (*Меню/Свойства/Материал*). Изменение свойств выбранных ранее материалов осуществляется кнопкой (*Модификация*) или задание новых материалов кнопкой (*Добавить*) в окне, показанном на рис.5.11.

**Block Property** ✕

Name

B-H Curve

Linear Material Properties

Relative $\mu_x$	<input type="text" value="1"/>	Relative $\mu_y$	<input type="text" value="1"/>
$\phi_{hx}$ , deg	<input type="text" value="0"/>	$\phi_{hy}$ , deg	<input type="text" value="0"/>

Nonlinear Material Properties

$\phi_{hmax}$ , deg

Coercivity  $H_c$ , A/m

Electrical Conductivity  $\sigma$ , MS/m

Source Current Density  $J$ , MA/m<sup>2</sup>

Special Attributes: Lamination & Wire Type

Lam thickness, mm	<input type="text" value="0"/>	Lam fill factor	<input type="text" value="1"/>
Number of strands	<input type="text" value="0"/>	Strand dia, mm	<input type="text" value="0"/>

Рисунок 5.11 – Окно создания и изменения свойств материалов

При создании материала вначале необходимо выполнить ряд действий: задать его имя; определить, будет ли линейной зависимость  $B - H$ ; для

материала с линейной зависимостью  $B - H$  можно задать анизотропные значения  $\mu_r$ , а также задать угол запаздывания кривой гистерезиса для некоторых случаев. Например для гармонической проблемы, когда гистерезис создает постоянный угол запаздывания между  $B$  и  $H$ , независящий от частоты. Это является эффективным методом в предположении, что петля гистерезиса имеет эллиптическую форму. Так как петля не точно эллиптическая, то угол необходимо изменять в зависимости от амплитуды входного сигнала. Угол является одним из параметров шихтованной стали и лежит в пределах  $(0 \dots 20)^0$ . В случае нелинейной зависимости  $B-H$  нажатие клавиши *Edit B - H* открывает окно, в котором необходимо ввести соответствующие данные, либо взять их из соответствующего файла. Затем, можно посмотреть на графике получившуюся кривую. Программа сглаживает данные сплайном и в некоторых случаях, для получения гладкой кривой, необходимо либо увеличивать число вводимых точек, либо корректировать данные. Если расчетные значения вышли за интервал данных (большое насыщение), то программа экстраполирует данные, продолжая ваш ряд. Имеется окно для учета угла запаздывания при гистерезисе для нелинейных задач, где предполагается, что угол пропорционален эффективной магнитной проницаемости. Наивысшая магнитная проницаемость принята за максимальную проницаемость

$$\phi_h(B) = \left( \frac{\mu_{eff}(B)}{\mu_{eff,max}} \right) \phi_{hmax} .$$

Следующее окно позволяет задать материал для постоянного магнита путем заполнения окон  $\mu_r$  и  $H_c$ . Окно позволяет так же задать плотность токов стороннего источника в блоке при *постоянном токе*. В случае переменного тока, индуктированные токи изменяют общее значение плотности

тока. Лучше пользоваться окном «свойства тока» для задания полного тока в объекте.

В следующем окне можно задать проводимость материала в  $MS/m$ . Необходимо учесть, что проводимость зависит от температуры. Для кремниевой пластинчатой стали можно принять проводимость равной  $2 MS/m$ , для трансформаторной стали –  $9 MS/m$ .

Последнее окно позволяет задать шихтовку материала и тип провода. Поток неразрывен, если он идет вдоль шихтовки и претерпевает разрывы, если поперек. На рис.5.12 Показаны случаи прохождения потока через шихтованный материал.

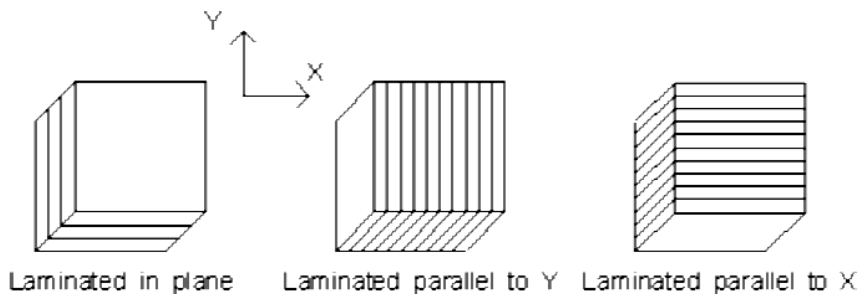


Рисунок 5.12 – Случаи прохождения потока через шихтовку

В окне редактирования материала «специальные атрибуты» выбирается направление потока, толщина расслоения и коэффициент заполнения. Эти значения помогают учесть гистерезис и вихревые токи для гармонических задач. Для магнитостатики можно получить эффект нелинейного расслоения, не прибегая к моделированию индивидуальных расслоений отдельно. Если материал однороден, то в окне «толщина расслоения» оставляют 0. Иначе необходимо ввести толщину железного листа в миллиметрах. Следующее окно – коэффициент заполнения – фракция ядра, заполненного железом в долях единицы.

При выборе типа провода становятся доступны окна диаметра. Для многожильного и спирального провода задается значение диаметра и число витков. Для квадратного и магнитного провода подразумевается только единственный проводник. Причем, начиная с опции "магнитный провод" (magnet wire), зависимость между  $B-H$  может быть анизотропной, но только линейной.

Если тип провода указан, то материальное свойство может быть применено ко всему пространству, заполненному проводом, а индивидуальные свойства отдельных проводников можно не моделировать.

Для постоянного тока результат будет автоматически скорректирован в соответствии с коэффициентом заполнения. Для переменного тока, коэффициент заполнения так же учитывается, учитывается комплексное значение магнитной проницаемости и вихревые токи для региона.

*Магнитный провод* – доступен при линейной зависимости  $B-H$  для постоянной магнитной проницаемости, выбирается диаметр провода.

Скрученная проволока - доступна при линейной зависимости  $B-H$  для постоянной магнитной проницаемости, выбирается диаметр провода и число жил.

Многожильный провод – диаметр провода общий и число жил.

Квадратный провод – размер стороны.

#### **5.1.11. Свойства тока (Circuit Property)**

Окно позволяет задать значение тока, протекающего в некоторой области. Первое окно общее – требует задания имени тока. При выборе опций добавления или редактирования тока открывается окно, показанное на рис. 5.13.

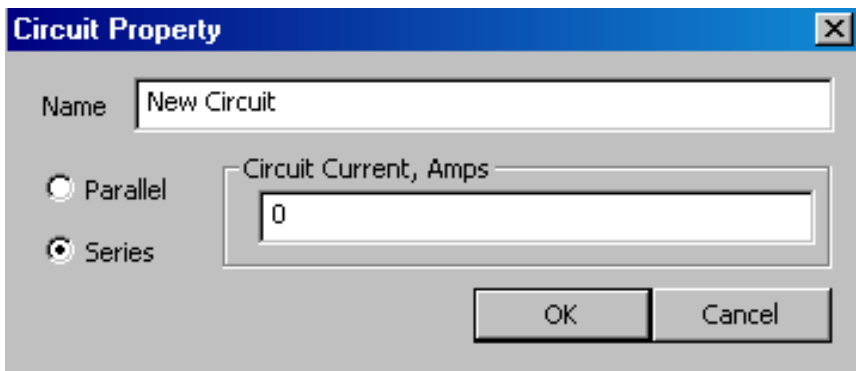


Рисунок 5.13 – Свойства тока

Выбор опции «последовательно» (series) означает, что один ток обтекает все витки катушки, а диалоговое окно «свойства выбранного блока» предложит ввести общее число последовательных витков. Такое задание позволяет моделировать катушки, намотанные тонким проводом. Окно «параллельно» (parallel) подразумевает наличие одного витка с суммарным током. Комплексное значение тока вводится в окно в виде  $Re(\text{значение}) + I*Im(\text{значение})$ .

#### 5.1.12. *Свойства выбранного блока или границы*

Для начала расчета необходимо:

1. Прорисовать или импортировать геометрию объекта.
2. Внести в модель материальные свойства сред и откорректировать их если необходимо;
3. Задать граничные условия и свойства тока, точки.
4. Приложить заданные свойства к областям, границам, точкам в последовательности: выбрать соответствующий значок на панели кнопок,



щелкнуть по объекту правой клавишей мыши – нажать пробел. В окне из

выпадающего списка выбрать нужное свойство.

На рис.5.14 показан пример окна задания свойств блока.

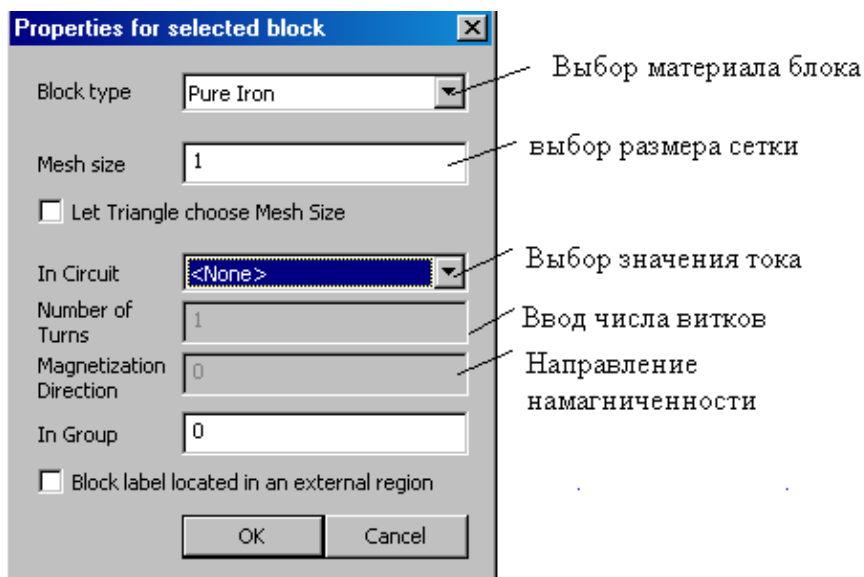


Рисунок 5.14 – Свойства блока.

Свойства выбираются из раскрывающегося списка, если они были заданы заранее. Некоторые свойства будут активны при выборе соответствующих параметров: число витков – при выборе "последовательно" при задании тока, а направление намагниченности – если в качестве материала области задан постоянный магнит.

## 5.2. Анализ поставленной задачи (Analyze)

Построение расчетной сетки и расчетный анализ модели легче всего выполнить при помощи кнопок, показанных на рис. 5.15.



Рисунок 5.15 – Кнопки построения сетки, решения и анализа полученного решения

Первая кнопка – обращение к генератору построения сетки, которая строится в зависимости от заданного в свойствах области размера ячейки или по умолчанию. Сетка показана на модели в виде желтых линий. Удалить изображение сетки можно при помощи меню «Сетка», убрав метку на строке «Показать сетку». Необходимо отметить, что необоснованное сгущение сетки существенно увеличивает объемы памяти и замедляет решение задачи.

Вторая кнопка обеспечивает решение проблемы. За процессом решения можно наблюдать в появляющемся окне просмотра. Время решения зависит от густоты сетки и сложности проблемы. Так, решения гармонических задач фактически удваивает число неизвестных. Самый медленный анализ происходит при решении нелинейных гармонических проблем.

Последняя кнопка открывает окно с результатами решения задачи.

### 5.3. Магнитный постпроцессор (View Results)

После окончания работы решателя результаты расчета можно посмотреть в окне постпроцессора, которое открывается либо через меню *Анализ/Просмотр результатов*, либо кнопкой - *Просмотр результатов* рис. 5.16.

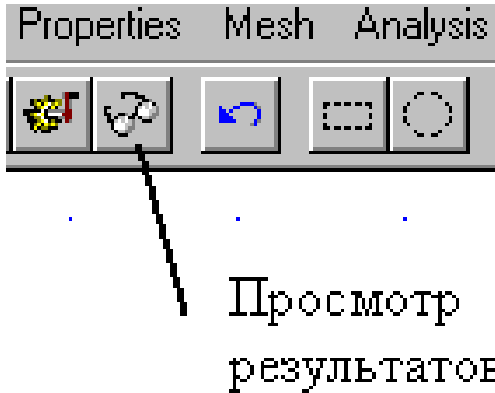


Рисунок 5.16 – Просмотр результатов

Подобно предпроцессору, постпроцессор оперирует так же с тремя модами: точка; линия; область рис. 5.17.

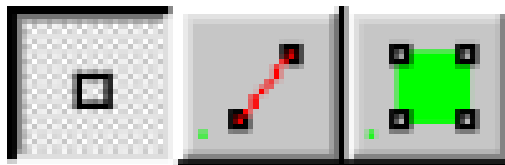


Рисунок 5.17 – Постпроцессорные моды

1. Режим указания точки. В этом режиме щелчок левой клавишей мыши в точке расчетной области вызывает появление окна с указанием данных в этой точке рис. 5.18.

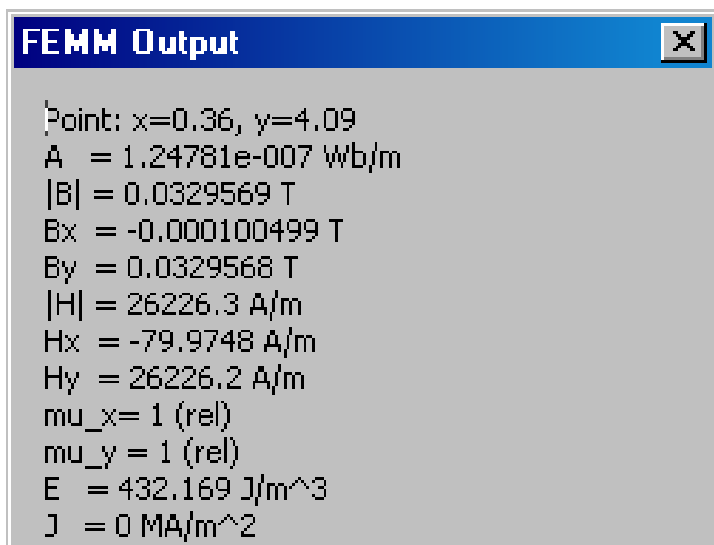


Рисунок 5.18 – Мода точка

2. Линия. Метод позволяет путем двух щелчков левой клавишей мыши выделить по имеющимся точкам уже имеющуюся линию, либо путем двух щелчков правой клавиши создать свою линию или контур. После определения контура, можно вычислять различные характеристики и линейные интегралы.

3. Область. После выделения соответствующей области (выбор опции и указание области клавишей мыши) можно вычислить различные объемные интегралы и интегралы по площади: энергию, суммарный ток, суммарные потери.

### ***5.3.1. Манипуляции с изображением***

Для увеличения, уменьшения, показа всего изображения или его части, а так же перемещения расчетных областей используются кнопки панели, показанные на рис. 5.19.



Рисунок 5.19 – Кнопки работы с изображением

Визуализация сетки, привязка курсора к узлам сетки и размер сетки устанавливаются кнопками, показанными на рис. 5.20.

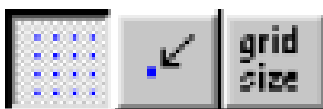


Рисунок 5.20 – Кнопки отображения, привязки и размера сетки

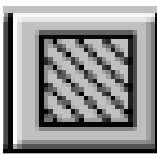
### 5.3.2. Использование клавиатуры

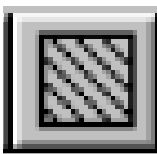
В режиме постпроцессора клавиатура используется редко. В основном это клавиша ESC для отмены выделенного фрагмента. В моде "точка" и "линия", клавиша *Tab* может использоваться для задания координат точки или построения линии.

### 5.3.3. Контурные построения (*View/Contour plot option*)

Наиболее эффективное изучение картины магнитного поля – это построение линий потока (магнитных силовых линий) для построения которых используется либо значение векторного магнитного потенциала  $\vec{A}$  для плоской задачи либо  $2*\pi*r*\vec{A}$  для осесимметричной задачи. Для гармонической проблемы строятся линии либо  $\text{Re}(\vec{A})$ , либо  $\text{Im}(\vec{A})$ . Густота линий свидетельствует об интенсивности поля.

По умолчанию, количество линий равно 19. Изменить их количество



от 4 до 999 можно кнопкой , которая открывает диалоговое окно рис. 5.21 определения числа линий и уровней значений линий.

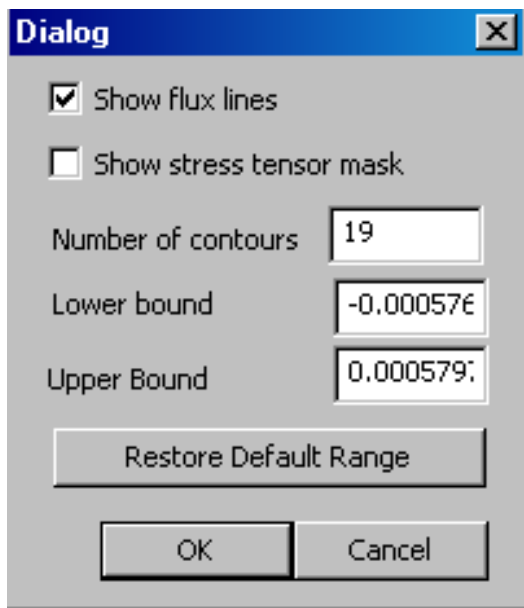
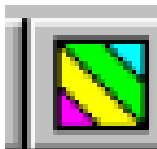


Рисунок 5.21 – Окно установки числа и уровней линий потока

#### 5.3.4. Плотность потока (*View/Density plot*)

Для определения интенсивности поля используется кнопка «Плот-



ность потока» . Диалоговое окно команды показано на рис.

5.22.

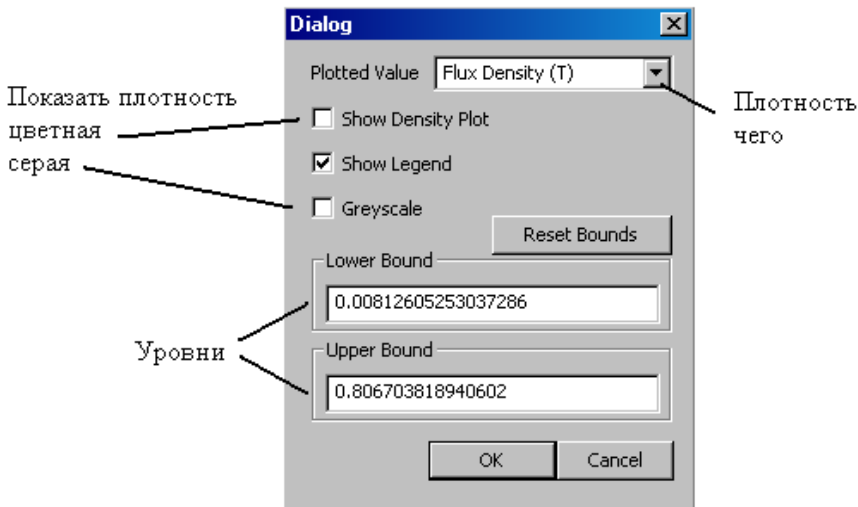


Рисунок 5.22 – Окно построения плотности

### 5.3.5. Векторное поле (View/Vector plot)

Указывает направление поля при помощи масштабируемых стрелок

кнопкой  в раскрывающемся диалоговом окне.

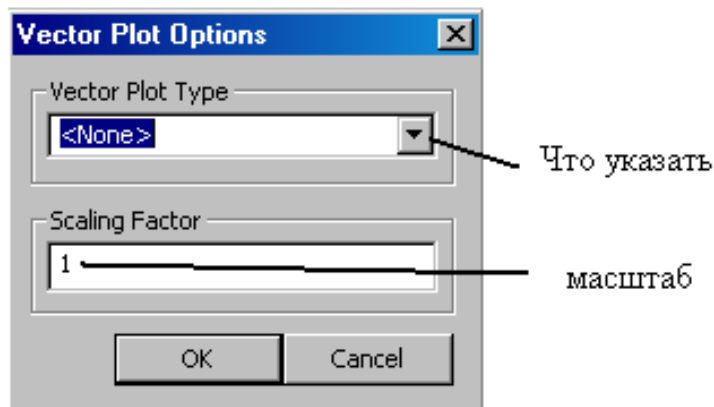
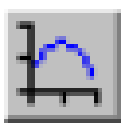


Рисунок 5.23 – Векторное поле

### 5.3.6. Линейное построение (Plot X-Y)

В том случае, когда указана некоторая линия (щелчки правой клавишей мыши) или контур (щелчки левой клавишей по имеющимся точкам с использованием клавиши привязки), клавиша «Построение графика»



может построить график выбранной в диалоговом окне функции (см. рис. 5.24).

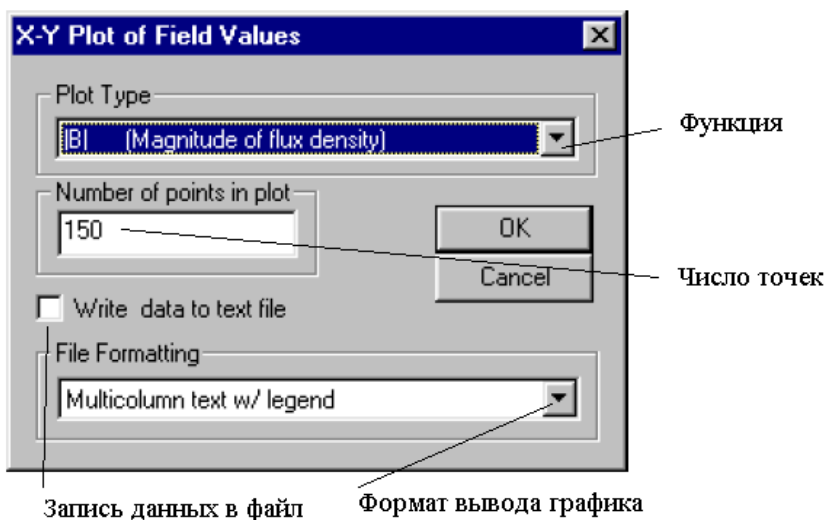


Рисунок 5.24 – Построение графика функции

Возможные функции показаны на рис. 5.25.

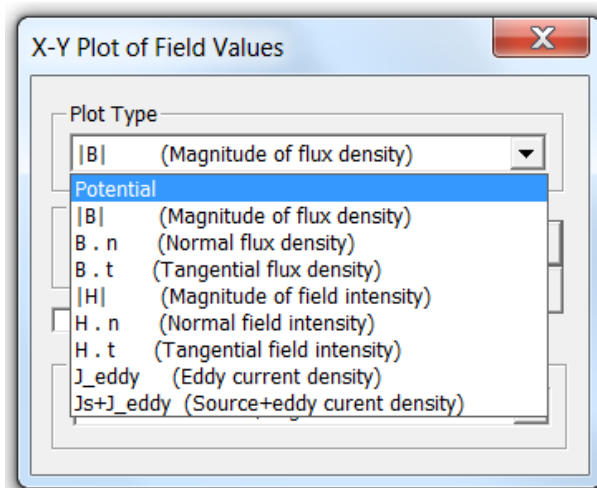


Рисунок 5.25 – Возможные функции

В том случае, если функция по контуру разрывная, то качество графика может ухудшиться. Так построение поля по обе стороны границы материалов ферромагнетик – воздух дает разные графики для разрывных функций.

Значения графика (знак) зависят от последовательности указания направления точек контура (см. рис. 5.26).

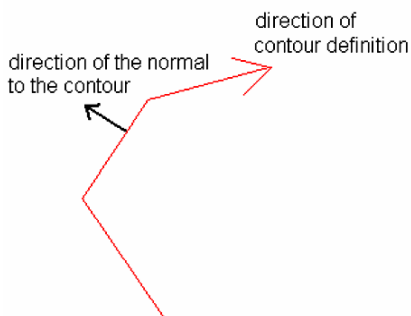
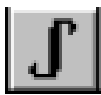


Рисунок 5.26 – Положительное направление обхода и вектора нормали принятое в программе

### 5.3.7. Линейные интегралы (*Integrate*)

В случае если контур выбран, то может быть вычислен линейный ин-



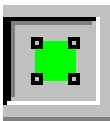
теграл по контуру. В случае гармонической проблемы, интеграл вычисляется в виде комплексного числа. Значение интеграла (знак) зависит от направления обхода (выбора точек) контура. Вид интеграла определяется выбором подынтегральной функции в диалоговом окне.

Виды интеграла:

- $Vn$  – возвращает поток нормальный к контуру и среднее значение плотности потока.
- $H\tau$  - возвращает напряженность поля между конечными точками контура.
- Длина контура – вычисляется длина контура в м.
- *Force tensor* – вычисляет силу, действующую на контур по тензору Максвелла. Если контур охватывает ферромагнетик в воздухе, то контур должен быть создан вне ферромагнетика по окружающему пространству.
- *Torque tensor* – вычисляет момент относительно оси (0, 0), действующий на контур. Требования к контуру такие же, как и для предыдущего случая.
- $Vn^2$  – интеграл от квадрата индукции.

### 5.3.8. Интегралы по выделенной области

Если в окне просмотра результатов щелкнуть мышью на кнопке



«блок» (зеленая кнопка), а потом указать щелчком мыши замкнутую область, то по этой окрашенной области можно вычислить следующие интегралы:

1.  $A \cdot J$  – этот интеграл определяется выражением  $\int_V A \cdot J \cdot dV$  [Гн\*А<sup>2</sup>],

что позволяет при известном токе ( $i$ ) области вычислить собственную ин-

дуктивность как  $L = \frac{\int_V A \cdot J \cdot dV}{i^2}$  для линейных задач.

2.  $A$  – этот интеграл вычисляет выражение  $\int_V A \cdot dV$  [Гн\*А\*м<sup>2</sup>] и мо-

жет быть использован для вычисления взаимной индуктивности, которая

определяется:  $M = \frac{\int A_1 \cdot J_2 \cdot dV_2}{i_1 \cdot i_2}$  в котором  $A_1$  – магнитный потенциал от

первого контура, пронизывающий второй контур,  $J_2$  – плотность тока вто-  
рого контура,  $V_2$  – объем второго контура. Если учесть соотношение  
 $w_2 \cdot i_2 = J_2 \cdot S_2$ , т.е. записать плотность тока через значения тока, витков и  
площадь, то можно получить выражение

$M = \frac{w_2}{i_1 \cdot S_2} \cdot \left[ \int_{J_{2+}} A_1 \cdot dV_2 - \int_{J_{2-}} A_1 \cdot dV_2 \right]$ . Вычисление  $M$  проще проводить при

одинаковом токе первого и второго контуров равных единице, т.к. индук-  
тивность линейных систем не зависит от тока. Действия: 1. Задаем одина-  
ковые направления токов (желательно положительные значения). 2. Вы-  
числяем первый интеграл во втором проводнике. 3. Меняем направление  
тока во втором проводнике и опять вычисляем интеграл во втором провод-  
нике. 4. Определяем разность.

Необходимо отметить, что для гармонической задачи значения  $M$  бу-  
дут комплексные и несколько изменяются с изменением частоты. Вторая  
строка интеграла  $A$  (Гн\*А) дает значения потока, приведенного по пото-

косцеплению. Для получения полного потокоцепления, данную величину необходимо умножить на число витков контура.

3. *Magnetic field energy*. Эта опция может использоваться как альтернативная для расчета индуктивности линейных, либо ненасыщенных систем. Индуктивность определяется на основании формулы  $E = \frac{L \cdot i^2}{2}$ . Для

нелинейных материалов энергия рассчитывается по формуле:  $E = \int_V \left[ \int_B H(b) \cdot db \right] \cdot dV$ .

4. *Magnetic field co energy*. Вычисляется ко – энергия по формуле

$W = \int_V \left[ \int_H B(h) \cdot dh \right] \cdot dV$  для нелинейных задач. Применяется как альтернативный способ вычисления силы или момента. Вычисление силы или момента проводится по формуле:  $F_q(M_q) = \frac{W(q + dq) - W(q)}{dq}$ . В формуле  $q$  –

координата, по которой вычисляется сила,  $dq$  – приращение координаты. Следовательно, если тело может перемещаться в двух направлениях, то и приращения координаты должно проводиться в одном, а затем в другом направлении. При этом определяется сила, соответствующая каждому из направлений. Для вычисления момента в качестве координаты выступает угол поворота.

5. *Hyst. and (or) laminated eddy current losses*. Используется для определения потерь в листовых железных пакетах в гармонических проблемах.

6. *Resistive losses*. Интеграл вычисляет значение  $i^2 \cdot R$  в направлении перпендикулярном плоскости сечения ( $z$  или  $\varphi$ ), если задана проводимость материала.

7. *Block cross-section area*. Вычисляется площадь поперечного сечения.

8. *Total losses*. Подсчитываются общие потери в выделенной области. Если задан угол потерь для стали, то помимо Омических потерь рассчитываются и потери на гистерезис.

9. *Lorentz force ( $J \times B$ )*. Данный интеграл определяет силу Лоренца по формуле  $\vec{F} = \int_V [\vec{J} \times \vec{B}] \cdot dV$ .

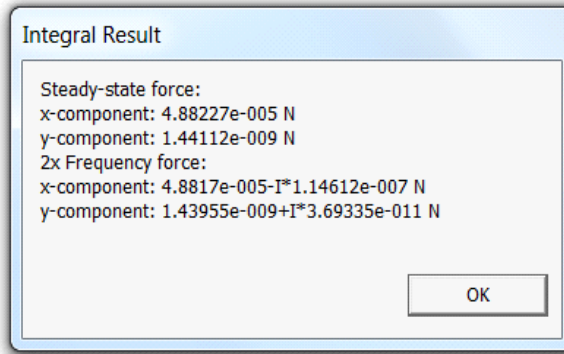
10. *Lorentz torque ( $r \times J \times B$ )*. Определение момента от силы Лоренца.

11. *Integral of  $B$  over bloc*. Может использоваться для вычисления сил Лоренца или средней индукции по объёму.

12. *Total current*. Вычисляется ток через выделенное сечение.

13. *Block volume*. Объем блока.

14. *Force via Weighted Stress Tensor*. Определяет силы, действующие на объект в соответствии с тензором Максвелла. Причем, путь интегрирования программа выбирает сама для получения наилучшего результата. Программа вычисляет интеграл по контуру, охватывающему объект со стороны окружающего воздуха, решая дополнительно уравнение Лапласа. Если окружающая среда не воздух, интеграл не будет вычислен. Как альтернативный вариант в этом случае можно использовать контурный интеграл с учетом положительного направления обхода. В случае решения гармонической проблемы окно будет иметь вид, показанный ниже,



где будут указаны постоянные значения силы и гармонические составляющие двойной частоты.

15. Torque via Weighted Stress Tensor. Рассчитывается момент на основании тензора Максвелла относительно оси с координатами (0, 0).

16.  $R^2$  (i.e. Moment of Inertia/density). Подсчитывает момент инерции относительно  $Z$  оси ( $x=0, y=0$ ), для осесимметричной задачи – относительно оси  $r=0$ . Для окончательного результата, данный интеграл необходимо умножить на плотность материала.

### **5.3.9. Вычисление сил и моментов**

Часто вычисление сил и моментов является конечной целью электромагнитного расчета, поэтому, необходимо обратить внимание на способы их вычисления.

#### Силы Лоренца.

Если вычислять силу на основании токов в области с относительной магнитной проницаемостью равной единице, то вычисление сил и моментов по этой методике дает наилучший результат.

#### Интеграл тензора Максвелла.

Вычисление по этой формуле существенно упрощает расчеты. Необходимо просто выбрать нужный блок и выбрать соответствующую коман-

ду. Результат зависит от размеров расчетной сетки вокруг выбранного объекта. При этом выделенную область должен окружать *только область, свойство которой заданы как "воздух"*. В противном случае интеграл вычисляться не будет.

Тензор Максвелла, вычисленный при помощи линейного интеграла.

Некорректное использование данного интеграла может приводить к неправильным результатам. Желательно, если возможно, избегать пользоваться этим методом. Далее, будет показано, как правильно использовать вычисление тензора этим методом.

Тензор Максвелла описывает давление на единицу поверхности тела по формуле:

$$d\vec{F} = \frac{1}{2} \cdot \left[ \vec{H} \cdot (\vec{B} \cdot \vec{n}) + (\vec{H} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{B} - (\vec{H} \cdot \vec{B}) \cdot \vec{n} \right], \quad (5.1)$$

где  $\vec{n}$  – вектор внешней нормали к поверхности в интересующей нас точке.

Полная сила вычисляется как  $F = \int_S dF$  над интересующей поверхностью.

Точность вычисления интеграла зависит от порядка аппроксимации векторного магнитного потенциала в методе конечных элементов. Ошибки могут быть в местах, в которых имеют место быстрые изменения поля при плохой кусочной аппроксимации. Однако наибольшие ошибки могут появляться в тангенциальных компонентах при интегрировании по границам материалов с различной магнитной проницаемостью. Поэтому, контур интегрирования никогда не должен проходить по границе материалов, а должен охватывать интересующую область на расстоянии нескольких (минимум 2) конечных элементов. Для правильного получения знака, направление построения контура выбирается по часовой стрелке, при этом вектор нормали будет направлен наружу к контуру.

На рис. 5.27 показан ферромагнитный цилиндр в поле постоянного магнита.

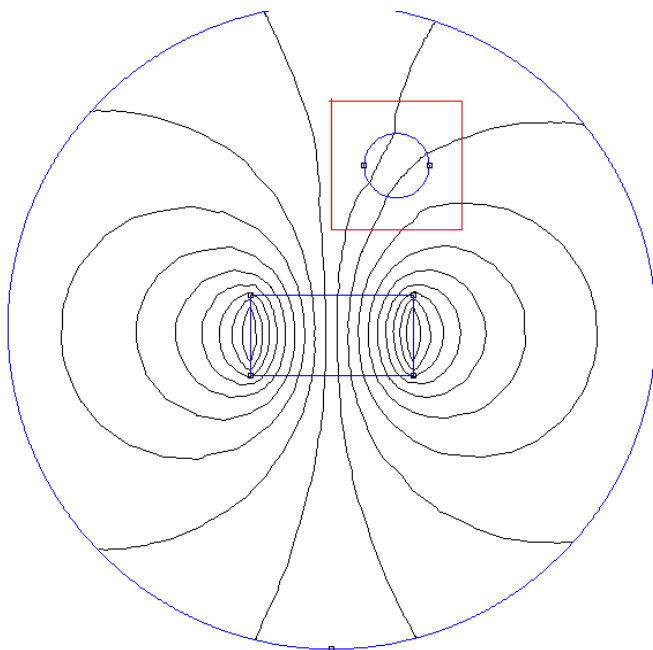


Рисунок 5.27 – Контур интегрирования

Для получения замкнутого контура, использовалась привязка начальных и конечных точек линии к сетке. Результаты вычисления силы по координатам различными методами приведены в табл. 5.1.

Таблица 5.1 - Сравнение результатов интегрирования.


Контурный интеграл	$F_x = -0.929142 \text{ N}$	$F_x = -0.395518 \text{ N}$
Интеграл по блоку	$F_y = -0.998712 \text{ N}$	$F_y = -0.410597 \text{ N}$

В заключении рассмотрим вычисление силы, действующей на параллельные проводники с током разными методами:

- 1) Контурный интеграл -  $F_x=9.91119e-005$  N,  $F_y=9.07763e-007$  N;
- 2) Тензор Максвелла -  $F_x=9.76816e-005$  N,  $F_y=2.86631e-009$  N;
- 3) Силы Лоренца -  $F_x=9.77103e-005$  N,  $F_y=-1.70516e-010$  N.

Как видно, наибольшее различие имеют вертикальные компоненты силы, которые должны быть равны нулю. Наиболее точное значение интеграла получено по формуле Лоренца.

### 5.3.10. Свойства тока (Circuit Properties)

Если в задаче заданы источники тока, то кнопка  позволяет определить ряд полезных свойств. На рис. 5.28 показано окно, появляющееся при активизации этой кнопки.

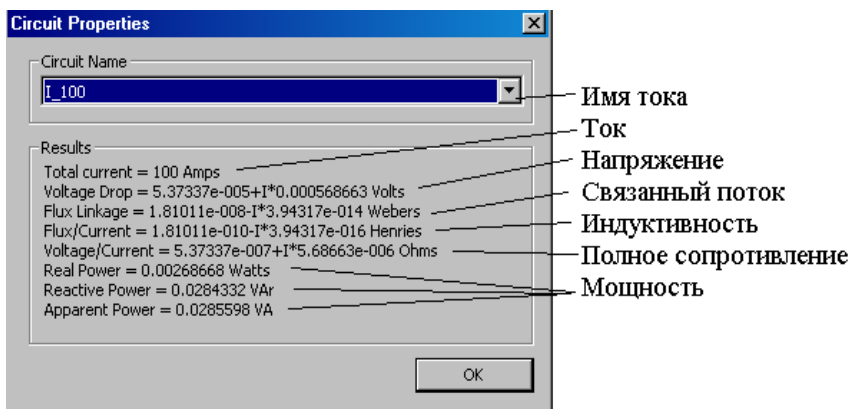


Рисунок 5.28 – Свойства тока

## РАЗДЕЛ 6. ЭЛЕКТРОСТАТИКА

### 6.1. Электростатический предпроцессор

Электростатический предпроцессор используется для прорисовки геометрии объекта, определения материалов и граничных условий в задаче электростатики. Этапы построения модели аналогичны тем, которые были описаны в магнитной проблеме.

#### 6.1.1. Формулировка задачи (*Problem Definition*)

Первоначальное определение параметров задачи показано в диалоговом окне (см. рис. 6.1).

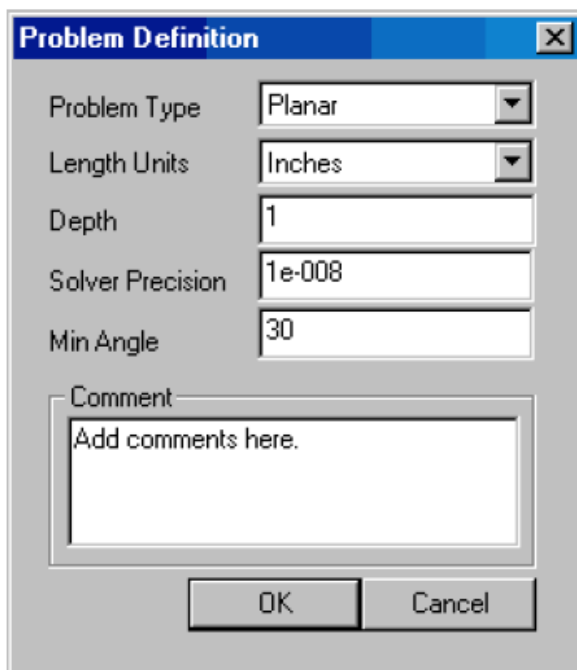


Рисунок 6.1 – Выбор параметров

В окне можно определить: тип проблемы – плоская или осесимметричная; единицы длины; глубину рисунка в плоской задаче; точность; минимальный угол треугольников разбиения пространства сеткой.

Необходимо отметить, что вычисляемые интегралы, такие как сила, энергия, емкость для плоской задачи зависят от параметра «глубина» (depth). Что касается минимального угла, то в большинстве случаев значение, установленное по умолчанию, дает удовлетворительную и наиболее равномерную сетку. В последнее окно блока можно вносить комментарии к решаемой задаче.

### **6.1.2. Определение свойств (Property Definition)**

Для решения электростатической проблемы, пользователь должен определить свойства задачи, такие как: материалы, граничные условия, значения потенциала и т.д. Когда выбрана опция - material; boundary; point; conductor – открывается диалоговое окно, в котором можно выбрать определенную опцию рис.6.2. При первом обращении окно будет пустым.

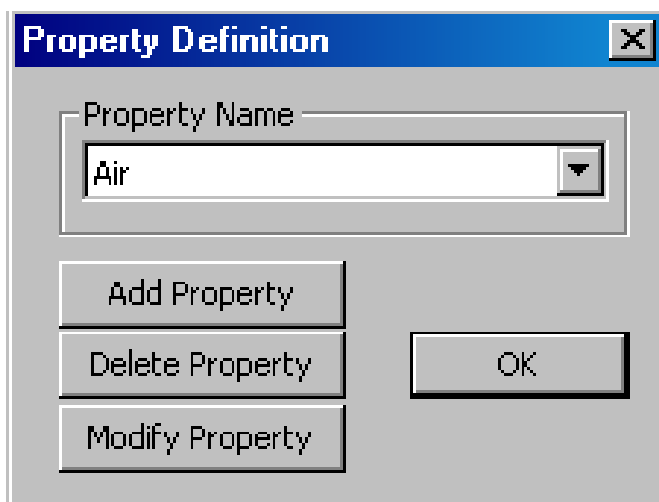


Рисунок 6.2 – Окно свойства

Кнопки окна свойств позволяют добавлять свойства, удалять их и редактировать.

### 6.1.3. Свойства точки (Nodal Property)

В случае добавления или редактирования свойств точки, диалоговое окно выглядит следующим образом (см. рис.6.3).

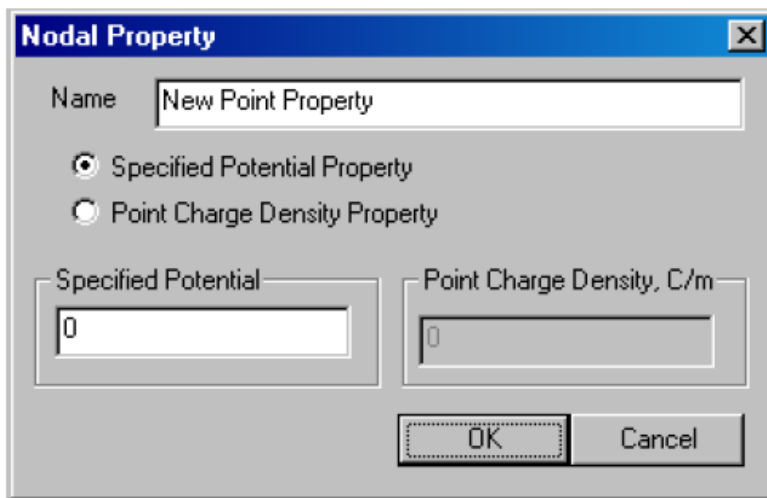


Рисунок 6.3 – Свойства точки

В окне можно выбрать либо заряд, либо потенциал точки, присвоив вначале соответствующее имя свойству.

### 6.1.4. Свойства границы (Boundary Property)

Окно граничных условий используется для задания свойств прямолинейных отрезков или сегментов дуг, которые находятся на границах расчетной области. Вид окна при первом к нему обращении, показан на рис. 6.4.

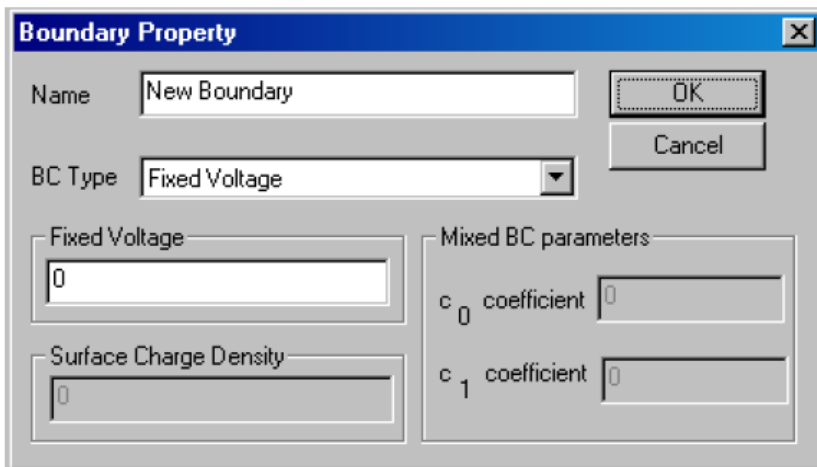


Рисунок 6.4 – Граничные условия

После задания имени, пользователь должен определить тип условия:

1. Фиксированное напряжение – задается потенциал вдоль границы;
2. Смешанное условие определяется выражением:

$$\varepsilon_r \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial V}{\partial n} + c_0 \cdot V + c_1 = 0 .$$

В зависимости от значения коэффициентов, это условие может быть либо условием Неймана, либо условием Робина. Выбирая соответствующим образом коэффициент  $c_0$  при  $c_1=0$ , можно задавать «открытую» границу области.

3. Поверхностная плотность заряда – задает поверхностную плотность заряда на линиях и сегментах. Свойство может быть использовано и на внутренних границах между материалами.

4. Периодические – чаще всего применяются к двум сегментам окружности. Этот вид граничного условия так же применяется в случае сим-

метрии системы относительно некоторой границы для уменьшения размеров расчетной области, а так же для задания открытой границы.

5. Антипериодическое – применяется для сокращения размеров расчетной области.

### 6.1.5. Свойства материала (*Materials Property*)

Как и в предыдущем разделе, электростатический блок имеет свою встроенную библиотеку, вызываемую из меню *Свойства/Материалы библиотеки* из которой материалы в модель добавляются путем «перетаскивания». В самой модели можно редактировать свойства выбранных материалов и изменять их имена. Вид окна показан на рис.6.5.

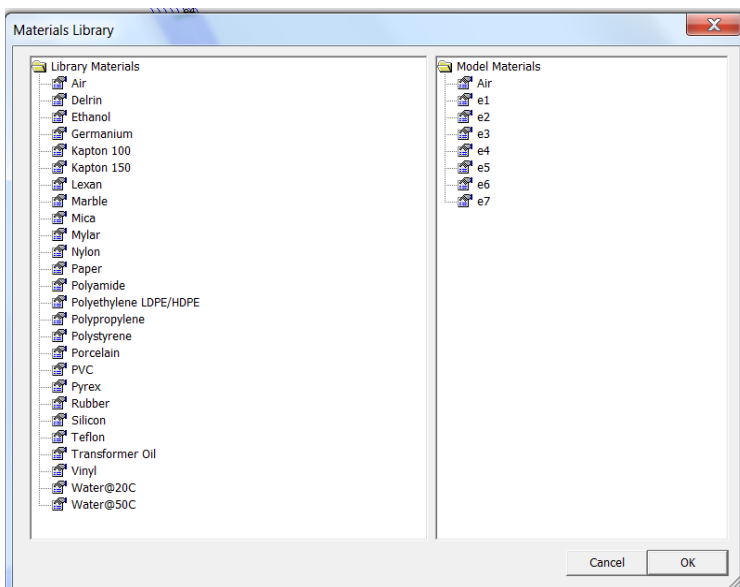


Рисунок 6.5 – Материалы библиотеки

Щелчок правой клавиши мыши на материалах библиотеки (левая часть окна), позволяет добавлять новые материалы в библиотеку или кор-

ректировать имеющиеся. Но лучше библиотеку не трогать, а корректировать свойства в модели.

### 6.1.6. Свойства проводника

Целью данного свойства является обеспечения одинаковости потенциала по границам и внутри некоторой области (например – проводник под потенциалом). В этом случае можно в постпроцессоре определить заряд и емкость проводника. Задание свойств определяется в соответствующем окне рис.6.6.

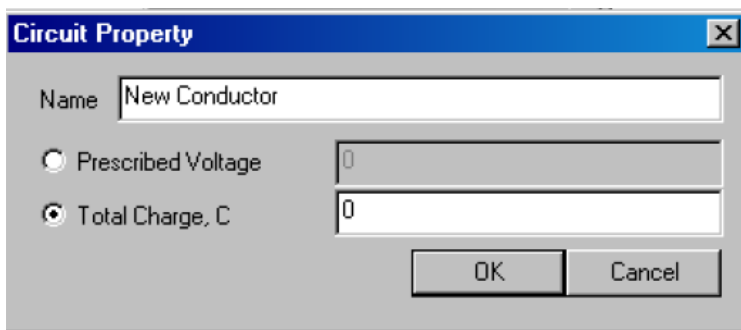


Рисунок 6.6 – Свойства проводника

Свойство – *проводник* – используется для того, чтобы задать на его границе конкретные значения напряжения и вычислять его емкость. Свойство «проводник» можно присвоить:

1. Замкнутой границе – напряжение внутри границы будет постоянным.
2. Незамкнутой границе – напряжение вдоль линии постоянно.
3. Точке – напряжение в точке постоянно.

## 6.2. Анализ и решение задачи

Анализ, решение и просмотр результатов осуществляются при помощи кнопок, показанных на рис. 6.7.

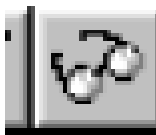


Рисунок 6.7 – Панель кнопок решения и просмотра решения задачи

Первая кнопка активизирует сеточный генератор разбиения пространства на элементарные области. Кроме того, если в какой либо области свойства неопределенны, либо определены неправильно, то возникнет соответствующее сообщение. В случае задания слишком мелкой сетки, процесс разбиения и решения задачи может затянуться. В меню с помощью команды *Mesh* можно создать, показать или удалить сетку, очистив память процессора. Вторая кнопка решает задачу, информируя пользователя о ходе решения. Третья – выводит на экран окно постпроцессора.

## 6.3. Электростатический постпроцессор

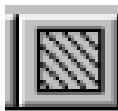
Постпроцессор предназначен для просмотра получаемого решения, а так же для вычисления контурных и объемных интегралов. Операции постпроцессора подробно рассмотрены в предыдущих разделах и не отличаются от них. Переход в режим просмотра осуществляется при помощи кнопки



или меню *Анализ/Просмотр результатов*.

### 6.3.1. *Контурное построение (View/Contour Plot)*

Это один из самых наглядных методов просмотра полученного реше-



ния. При помощи кнопки программа строит линии эквипотенциалей, в количестве, задаваемым пользователем.

### 6.3.2. *Построение графика плотности (View/Density Plot)*

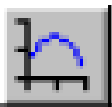
Эта опция дает полное представление о характере полученного реше-



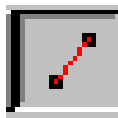
ния в различных частях модели. Кнопка позволяет открыть диалоговое окно, в котором можно выбрать отображение потенциала, напряженности электрического поля или вектора смещения. Цвет отображения можно поменять на оттенки серого, а так же установить свои пределы просматриваемой величины.

Для уяснения картины поля можно воспользоваться кнопкой построения векторного поля. В открывшемся окне необходимо выбрать тип поля и масштаб стрелок.

### 6.3.3. *Линейное построение (X-Y Plot)*



Кнопка позволяет построить график выбираемой в диалоговом окне величины вдоль нарисованной линии (режим рисования опре-



деляется кнопкой ). Щелчок левой клавишей мыши строит линии, привязанные к имеющимся точкам, правой – произвольно. Для успешной работы иногда необходимо откорректировать размеры сетки в режиме при-



вязки к узлам . Выбрать нужную величину построения можно в диалоговом окне из раскрывающегося списка рис.6.8.

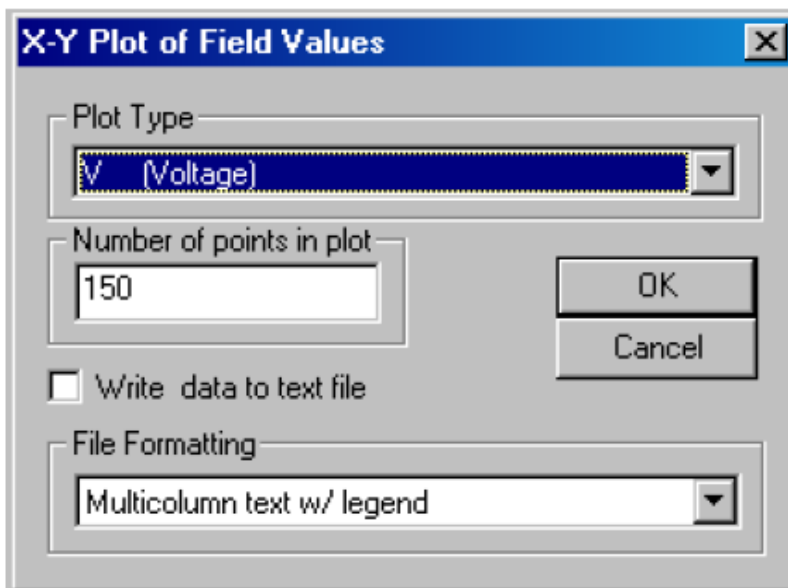


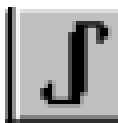
Рисунок 6.8 – Диалоговое окно линейного графика

В окне можно задать число точек построения; записать данные в файл – *Выбор/OK*. В окне кроме потенциала можно выбрать распределение модуля  $E$  и  $D$ , а так же их составляющих. В некоторых случаях построение может быть не корректным (график по линии, где компонента терпит разрыв).

Тесно связана с данной опцией, следующая опция – вычисление линейного интеграла.

### 6.3.4. Линейный интеграл (*Integrate*)

Если указан путь, то может быть вычислен контурный (линейный)



интеграл (кнопка на панели). Необходимо помнить, что знак интеграла зависит от направления внешней нормали к контуру (см. рис.6.9).

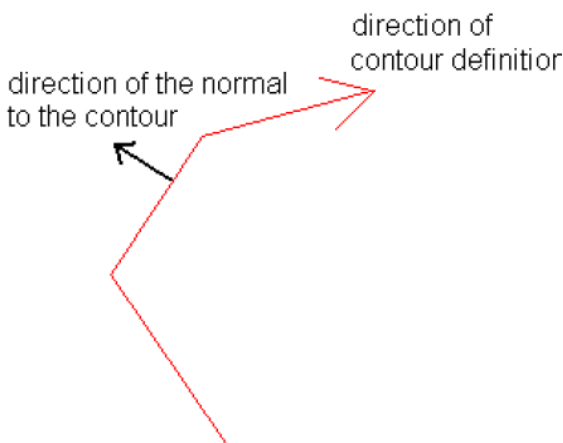


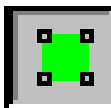
Рисунок 6.9 – Направление нормали к контуру

Значения интегралов:

1.  $E_t$  – возвращает падение потенциала вдоль контура;
2.  $D_n$  – возвращает полный электрический поток, если поверхность замкнутая – то результирующий заряд, находящийся внутри контура;
3.  $L\ S$  – возвращает значения длины и площади указанного контура, если контур замкнут, то площадь поверхности;
4.  $Force$  – вычисляет силу по тензору Максвелла в  $N$ ;
5.  $Torque$  – вычисляет вращающий момент относительно оси  $(0, 0)$  по тензору Максвелла в  $N*m$ .

### 6.3.5. Интегралы по блоку

Для вычисления интеграла необходимо нажать кнопку выделения



блока и выделив щелчком клавиши мыши блок (границы блока должны быть замкнуты). Для некоторых блоков интегралы сил и моментов не могут быть вычислены, если к ним примыкают области, отличные по свойствам от воздуха. В этом случае такие интегралы можно вычислить, обведя их контуром (щелчки правой клавишей мыши) и вычислив контурный интеграл (особенности построения контура описаны в магнитной задаче).

Далее, нажимая кнопку интегрирования и выбирая соответствующую опцию, можно получить объемные интегралы:

1. Запасенная энергия. Вычисляется энергия электрического поля

$$W = \frac{1}{2} \cdot E \cdot D ;$$

2. Поперечное сечение блока;

3. Объем блока;

4. Средняя величина потока вектора электрического смещения ( $D$ ) по осям, выходящая из объема с внешней стороны;

5. Средняя величина напряженности электрического поля ( $E$ ) по осям, выходящая из объема с внешней стороны.

6. Вычисление силы по тензору Максвелла:


$$dF = \frac{1}{2} \cdot (\vec{D} \cdot (\vec{E} \cdot \vec{n}) + \vec{E} \cdot (\vec{D} \cdot \vec{n}) - (\vec{D} \cdot \vec{E}) \cdot \vec{n}),$$

где  $\vec{n}$  – вектор внешней нормали.

7. Вычисление момента.

### 6.3.6. Вычисление свойств проводника (View/Conductor Property)

Для определения емкости и заряда на проводнике, достаточно активи-

зировать кнопку , при нажатии на которую появляется окно, показанное на рис. 6.10.

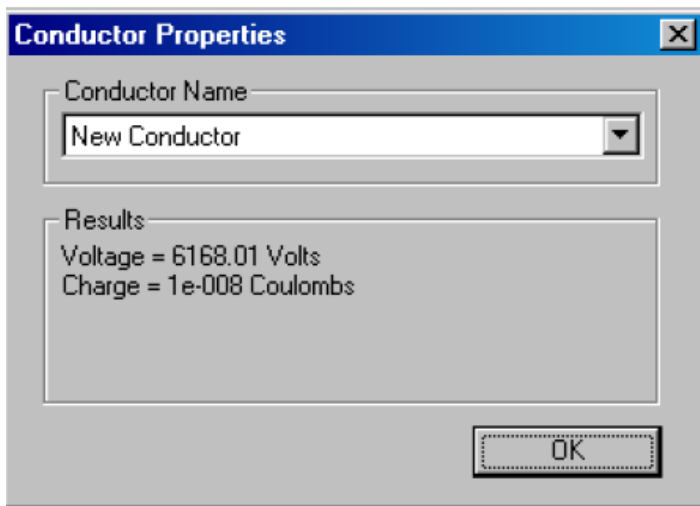


Рисунок 6.10 – Диалоговое окно – свойства проводника

В окне необходимо выбрать имя проводника. Напряжение на нем и его заряд будут указаны.

## РАЗДЕЛ 7. ТЕПЛОВАЯ ЗАДАЧА

### 7.1. Тепловой предпроцессор

Тепловой предпроцессор используется для задания:

- геометрии задачи;
- граничных условий;
- свойств материалов.

Процесс создания геометрии такой же, как и в рассмотренных выше проблемах и в настоящем описании не рассматривается. Детально описываться будут только опции, характерные для этой задачи.

#### 7.1.1. Формулировка задачи (*Problem Definition*)

Для формулировки задачи необходимо открыть рассмотренное ранее окно, показанное на рис. 7.1.

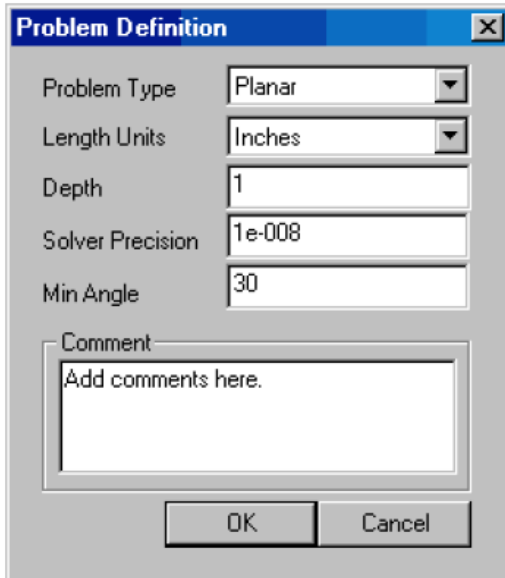


Рисунок 7.1 – Окно формулировки задачи

В котором необходимо указать:

тип проблемы;

единицы;

глубину для плоских задач (используется для вычисления объемных интегралов);

относительную точность;

минимальный угол элементарной ячейки (не стоит менять);

комментарии.

### **7.1.2. Определение свойств (Property Definition)**

Для решения проблемы, пользователь должен задать свойства задачи: материалы; граничные условия и т.д. Выбор свойств из имеющегося списка осуществляется при помощи однотипного окна, показанного на рис. 7.2.

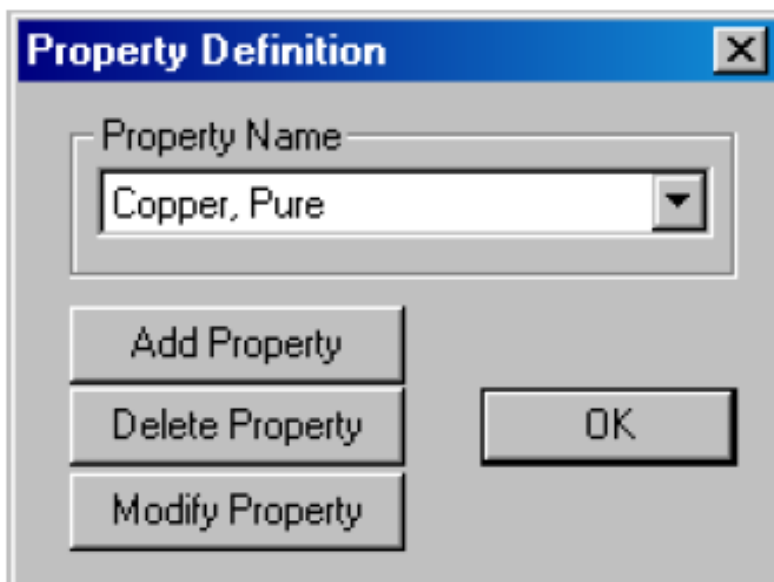


Рисунок 7.2 – Окно выбора и модификации свойств

При первом обращении к окну, список свойств будет пуст и пользователю посредством кнопки «Добавить» необходимо определить нужное свойство.

### 7.1.3. Свойства точки (Nodal Property)

Свойства точки задается в диалоговом окне, показанном на рис. 7.3.

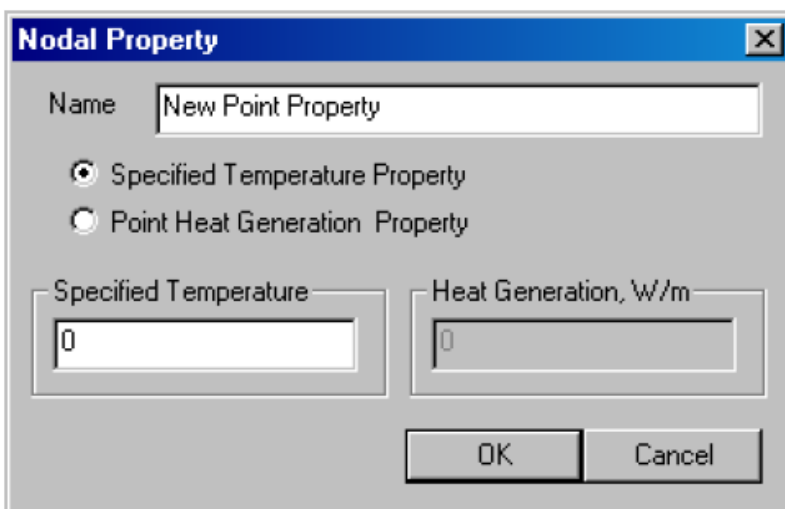


Рисунок 7.3 – Окно «свойства точки»

После задания имени, необходимо сделать выбор между температурой точки или мощностью на единицу глубины. Общая мощность в точке определяется глубиной для плоской задачи.

### 7.1.4. Граничные условия (Boundary Property)

Диалоговое окно свойств используется для задания свойств линий, сегментов, которые являются граничными для данной задачи (внешние границы). Окно показано на рис. 7.4.

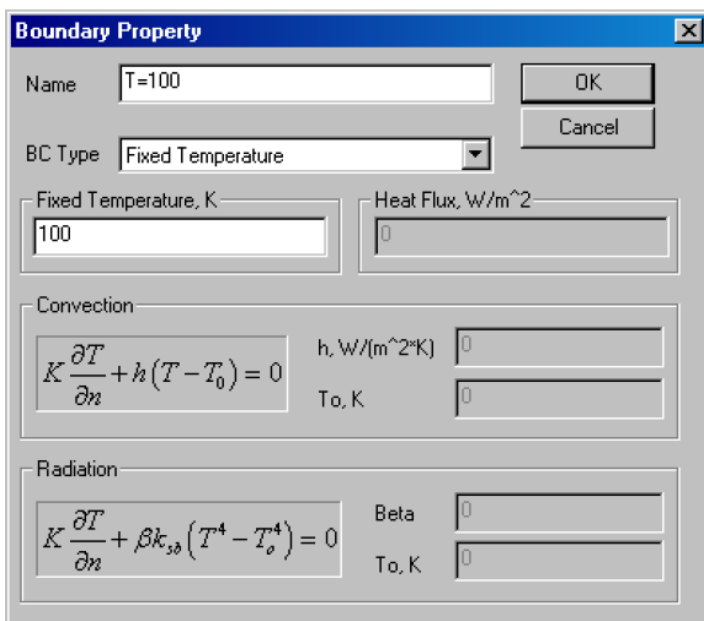


Рисунок 7.4 – Граничные свойства

Окно открывается командами *Граница/Добавить*. После задания названия границы из выпадающего списка необходимо выбрать соответствующее свойство и ввести числовое значение в соответствующее окно. Список возможных свойств:

1. Фиксированная температура – задание температуры.
2. Тепловой поток – задание плотности теплового потока.
3. Конвекция – задание коэффициента теплоотдачи и температуры окружающей среды.
4. Радиационное излучение – задание коэффициента черноты и температуры окружающей среды.

### 7.1.5. Свойства материалов (Block Property)

Данный блок используется для того, чтобы конкретизировать (исправить) определенные свойства ярлыка, связанного с блоком. После выбора *Свойства/Материал* можно выполнить следующие действия: либо задать новые свойства, либо исправить имеющиеся в окне, показанном на рис. 7.5.

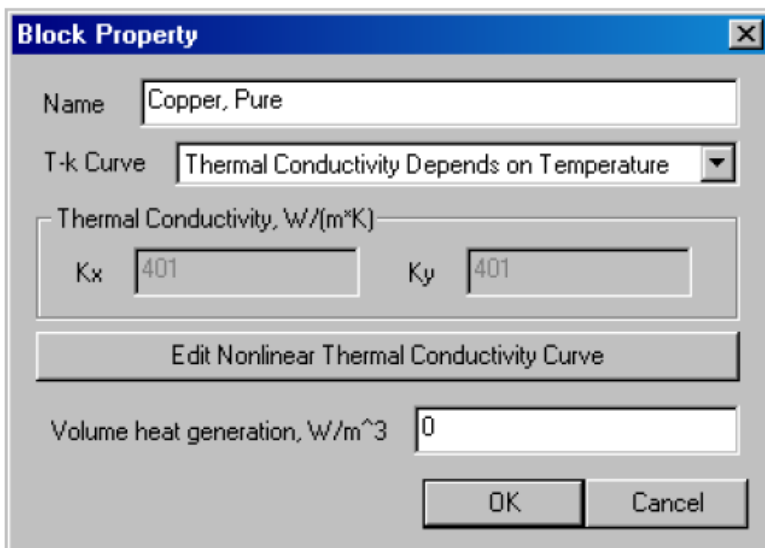


Рисунок 7.5 – Свойство материала блока

В диалоговом окне можно ввести значения теплопроводности либо в анизотропном виде, либо выбрать температурную зависимость (открывается диалоговое окно, где необходимо ввести значения либо вручную, либо выбрать соответствующий текстовый файл). Окно предусматривает задание внутренних объемных источников тепла внутри материала.

Нелинейную зависимость лучше задавать в библиотеке материалов путем введения в него своего материала.

### 7.1.6. Библиотека материалов (*Materials Library*)

Программа имеет встроенную библиотеку материалов, которая открывается из меню «Свойства» и показана на рис.7.6.

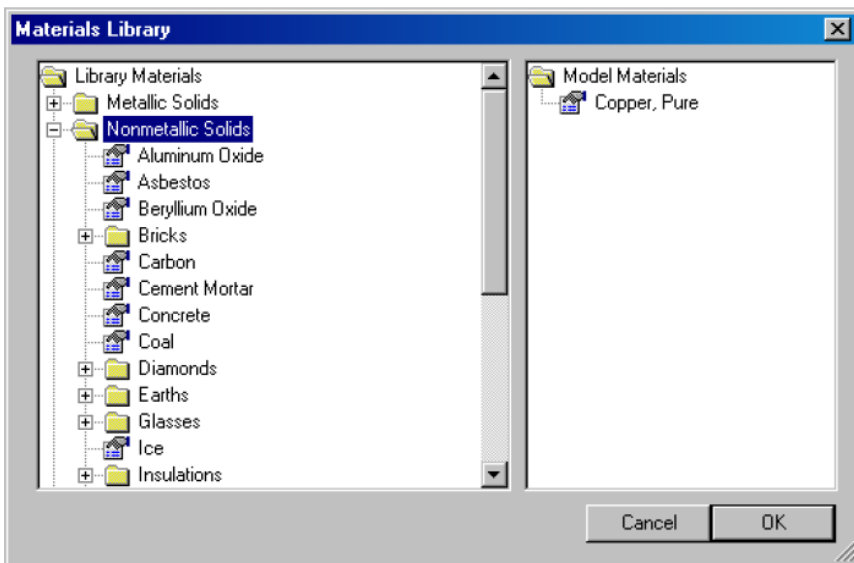


Рисунок 7.6 – Библиотека материалов

Правая часть – модель, левая библиотека. Добавление материалов в модель осуществляется путем перетаскивания материала левой клавишей мыши из библиотеки в модель. Щелчок правой клавише мыши в левой части окна позволяет добавить новую папку, новый материал в библиотеку или удалить материал из библиотеки.

### 7.1.7. Свойства проводника (*Circuit Property*)

Это свойство позволяет пользователю задать суммарное количество тепла проходящего через определенную поверхность. Свойство проводника рис.7.7 удобно еще тем, что позволяет связать несколько непересекающихся областей в одно целое посредством задания теплового потока. В этом

случае программа будет вычислять суммарный тепловой поток от всех регионов. Последнее утверждение касается больше случая задания теплового потока в проводнике (электротепловая задача). В случае задания температуры проводника, полный тепловой поток через поверхность можно определять только при помощи контурного интеграла.

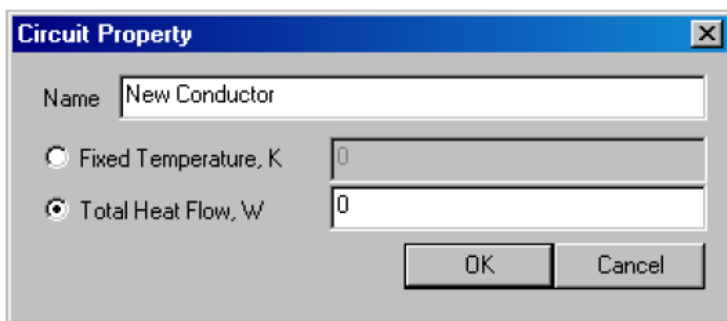


Рисунок 7.7 – Окно свойства проводника

## 7.2. Анализ задачи

Для генерации сетки, решения задачи и переключения в окно результатов осуществляется кнопками, показанными на рис. 7.8.



Рисунок 7.8 – Кнопки анализа задачи


Кнопку генерации сетки на экране можно проигнорировать. Сетка будет создаваться автоматически при нажатии средней кнопки. Кнопка показа сетки используется в случае возникновения проблемных областей. По окончании процесса решения, нажатие кнопки «просмотр» приводит к открытию окна постпроцессора.

### 7.3. Тепловой постпроцессор

После нажатия кнопки просмотра результатов с помощью команд зуммирования установите в окне приемлемый вид результатов. Окно просмотра ранее выполненного файла можно загрузить через команду – *Открыть*.

Все остальные операции аналогичны ранее рассмотренным и не представляют сложностей.

#### 7.3.1. Построение контуров (*View/Contour Plot*)

Для наглядности результатов при помощи кнопки  можно построить картину расположения изотерм. В диалоговом окне (см. рис. 7.9) можно выбрать количество и диапазон значений, а так же восстановить значения, принятые по умолчанию.

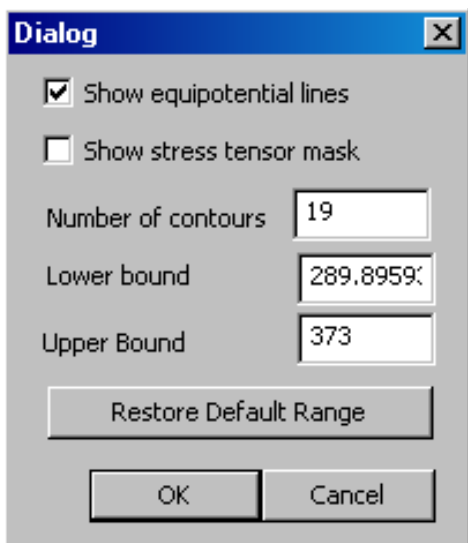


Рисунок 7.9 – Окно построения контуров

### 7.3.2. Графики плотности (*View/Density Plot*)

С помощью графика плотности легко оценить полученные результаты. Значения плотности появляются при первом открытии окна (свойства можно изменить в меню *Edit/Preferences/Heat Flow Output*). При помощи



кнопки пользователь может выбрать:

плотность температуры;  
теплого потока или градиента.

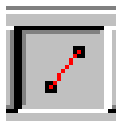
### 7.3.3. Векторное поле (*View/Vector Plot*)



Кнопка позволяет построить векторное поле потока тепла или градиента с указанием масштаба размера стрелок.

### 7.3.4. Линейные графики (*Plot X-Y*)

В случае задания линейного или дугового (кругового) контура при



помощи кнопки построения контура, могут быть построены графики следующих величин: температуры; модуля теплового потока; нормальное и тангенциальное значение потоков и градиента. Положительное направление обхода контура при вычислении величин такое, как показано на рис. 7.10.

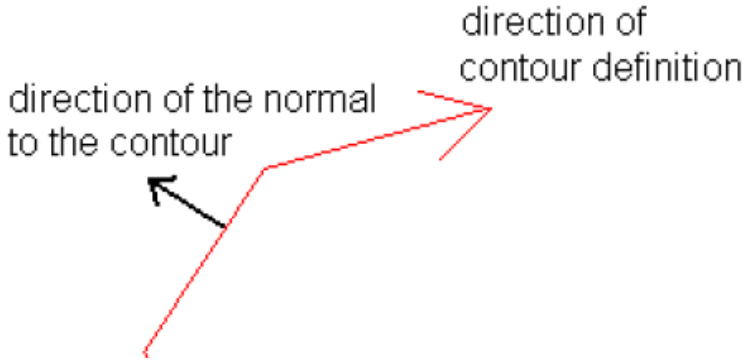


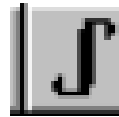
Рисунок 7.10 – Определение составляющих потока


Графики строятся в отдельном окне, а данные могут быть записаны в текстовый файл.

В некоторых случаях, построение может быть некорректным (график разрывной функции на границе раздела сред).

### 7.3.5. *Линейный интеграл (Integrate)*

Если указан некоторый контур, то вдоль этого контура может быть вычислен контурный (линейный) интеграл. Знак и результат зависит от правильности выбора направления контура (см. рис. 7.10). Для вычисления



интеграла необходимо задать контур и нажать кнопку . Линейный интеграл можно вычислить для следующих значений:

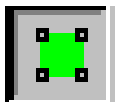
1. Temperature Difference (G.t). – Вычисляется разность температур между начальной и конечной точкой контура;
2. Heat Flux (F.n) – Определяется полный поток тепла, проходящий через поверхность, определяемую выдавливанием или вращением контура, а так же средняя плотность теплового потока.

3. Contour length & area. Вычисляется длина контура и площадь поверхности.

4. Average temperature. Средняя температура по длине контура.

### 7.3.6. Интеграл по блоку (*Block Integral*)

Для выделения блока необходимо активизировать клавишу выделе-

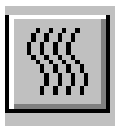


ния блока , а затем при помощи левой клавиши мыши указать замкнутую область. Система вычислит значение объемного интеграла (для плоской задачи с учетом заданной толщины). Можно вычислить следующие объемные интегралы:

1. Средняя температура по объему;
2. Площадь поперечного сечения;
3. Объем;
3. Средний удельный тепловой поток по координатам;
4. Среднее значение градиента температуры по координатам.

### 7.3.8. Проводник

Если были заданы свойства проводника, нажатие соответствующей



кнопки приводит к открытию окна, в котором указаны температура и тепловой поток.

## РАЗДЕЛ 8. ЗАДАЧА РАСТЕКАНИЯ ТОКА

### 8.1. Предпроцессор растекания тока

Предпроцессор данной проблемы используется для прорисовки геометрии, задания граничных условий, свойств объектов. Так как основные команды этого предпроцессора аналогичны ранее рассмотренным командам, то в данном разделе будут рассмотрены только уникальные для данного раздела команды.

#### 8.1.1. Формулировка проблемы (*Problem Definition*)

В начале, при открытии нового окна нужно выбрать тип решаемой задачи, а затем в меню *Problems* в появившемся окне (см. рис.8.1) определить начальные параметры задачи.

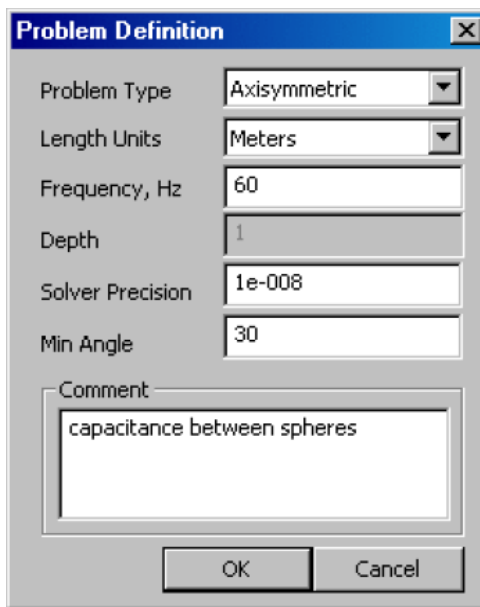


Рисунок 8.1 – Определение проблемы

Данное окно было рассмотрено ранее и в этом разделе не комментируется.

### **8.1.2. Определение свойств (Property Definition)**

Для успешного разрешения задачи необходимо задать граничные условия, материалы блоков и т.д. Если эти свойства выбраны, то изменить их или задать новые можно при помощи окна свойств, одинакового для всех параметров, (см. рис. 8.2).

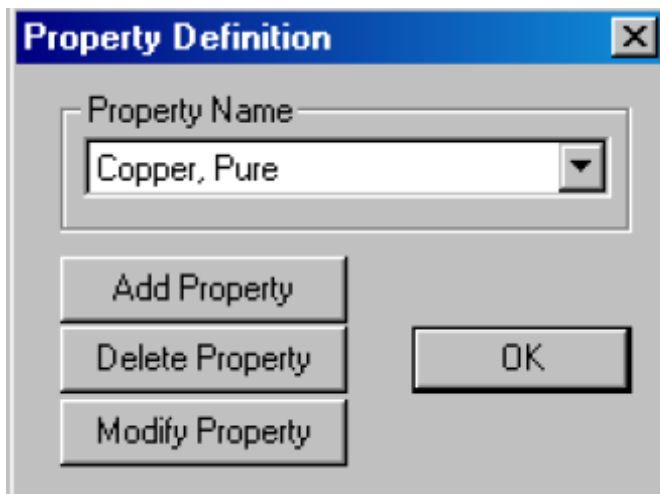


Рисунок 8.2 – Добавление или коррекция свойств

### **8.1.3. Свойства точки (Nodal Property)**

При выборе этого свойства раскрывается окно, показанное на рис.8.3, позволяющее задать либо напряжение, либо линейную плотность тока (общий ток определяется глубиной).

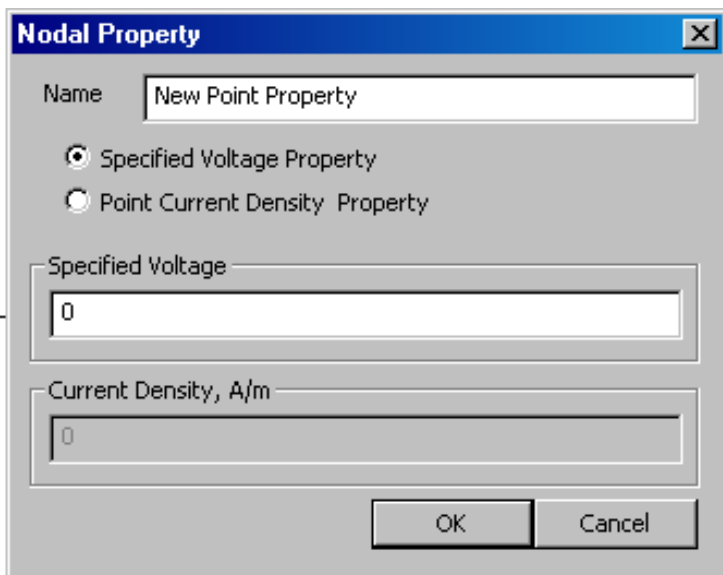


Рисунок 8.3 – Свойства точки

#### **8.1.4. Граничные условия**

При выборе соответствующей опции, открывается диалоговое окно, описанное ранее. В отличие от уже описанных свойств, в окне имеется опция – «поверхностный ток» (surface current density), позволяющая задать линейную плотность тока вдоль проводника. Задание значений проводится в системе СИ.

#### **8.1.5. Свойства материалов (Block Property)**

Окно используется для конкретизации физических параметров используемых материалов, рис. 8.4.

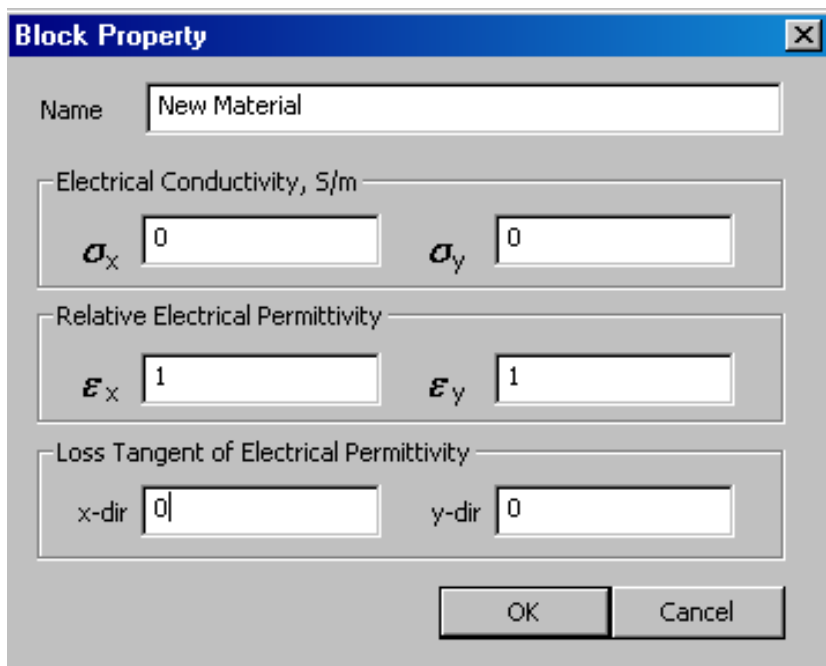


Рисунок 8.4 – Свойства материалов

В окне можно задать анизотропию по направлениям для проводимости и диэлектрической проницаемости, а так же различие в значении тангенса угла потерь. Если материал диэлектрик с потерями, проницаемость можно представить комплексным числом:

$$\varepsilon = |\varepsilon| \cdot (\cos(\phi) - j \cdot \sin(\phi)) \quad (8.1)$$

Тогда тангенс угла потерь можно представить:

$$\tan(\phi) = \frac{\sin(\phi)}{\cos(\phi)}. \quad (8.2)$$

Для полупроводниковых материалов, когда заполнены все ячейки окна, программа вычисляет комплексное «действующее» значение проводимости по формуле:

$$\begin{aligned}\sigma_{x\_k} &= \sigma_x + j \cdot \omega \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_x \cdot e^{-j \cdot \phi} \\ \sigma_{y\_k} &= \sigma_y + j \cdot \omega \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_y \cdot e^{-j \cdot \phi}\end{aligned}\quad (8.3).$$

### 8.1.6. Свойства проводников (Conductor Property)

Это свойство позволяет пользователю задать неизменное количество тока, входящего и выходящего из поверхности. При этом потенциал на границах объекта будет практически одинаков. Альтернативным свойством в этом случае, является задание фиксированного напряжения по границе объекта.

Диалоговое окно показано на рис. 8.5.

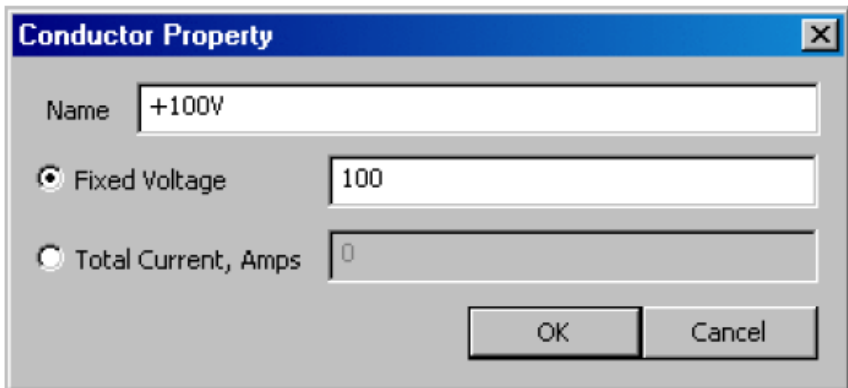


Рисунок 8.5 – Диалоговое окно задания свойств проводника

## 8.2. Анализ задачи

Анализ и решение задачи ничем не отличается от рассмотренного ранее решения и осуществляется кнопками, показанными на рис. 8.6.



Рисунок 8.6 – Кнопки анализа и решения задачи

Первая кнопка дает возможность визуализировать расчетную сетку, вторая – приводит в действие решатель задачи, третья – открывает окно постпроцессора. Причем, первая кнопка позволяет выявить ошибки в описании свойств блоков (свойства не описаны, одному блоку дважды присвоены свойства и т.д.). В случае ошибки, дефектная область не будет покрыта сеткой.

### 8.3. Токовый постпроцессор

Постпроцессор предназначен для просмотра результата расчета, а также построения графиков и вычисления контурных и объемных интегралов. Подробно назначение описано в предыдущих разделах.

#### 8.3.1. Построение графиков

Для визуализации полученных результатов используется группа кнопок, показанная на рис. 8.7.



Рисунок 8.7 – Кнопки визуализации результатов

Функции кнопок:

1. Построение эквипотенциалей, с возможностью выбора их количества и уровней;

2. Построение графика плотности;
3. Указание направления выбранной величины.

### 8.3.2. График эквипотенциалей (*View/Contour Plot*)

Диалоговое окно этого графика показано на рис. 8.8.

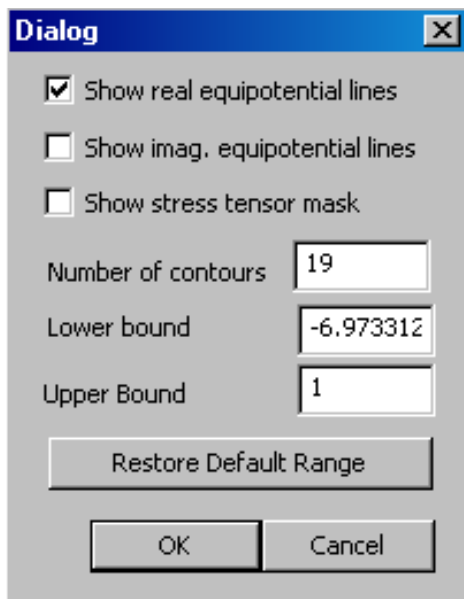


Рисунок 8.8 – Диалоговое окно построения эквипотенциалей

В окне можно выбрать тип линии ( $Re, Im$ ), количество отображаемых линий, нижний и верхний уровни значений потенциала. В случае необходимости значения, берущиеся по умолчанию можно восстановить.

### 8.3.3. График плотности (*View/Density Plot*)

Диалоговое окно показано на рис. 8.9.

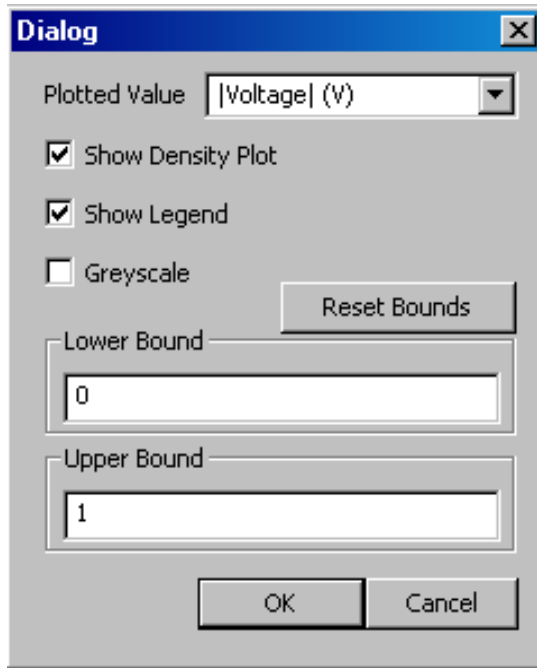


Рисунок 8.9 – Диалоговое окно плотности

В окне можно выбрать значения (модуль или составляющие функции для гармонической задачи):

- напряжения;
- плотности тока;
- напряженности поля.

Плотности и их расшифровка будут показаны при установке меток в соответствующих окнах. Плотность можно отобразить в оттенках серого цвета. Можно также установить уровни значений или восстановить исходные.

#### **8.3.4. Построение графика направления поля (View/Vector Plot)**

Диалоговое окно показано на рис. 8.10.

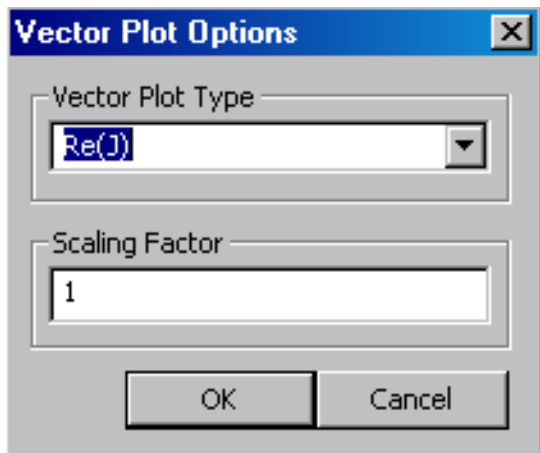
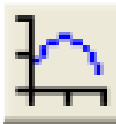


Рисунок 8.10 – Диалоговое окно векторного поля

В окне можно выбрать тип и масштаб поля.

### 8.3.5. Построение линейных графиков (Plot X-Y)

В случае вычерчивания в окне постпроцессора линии, программа может строить график указанной величины вдоль этой линии путем нажатия



на кнопку

Диалоговое окно показано на рис. 8.11.

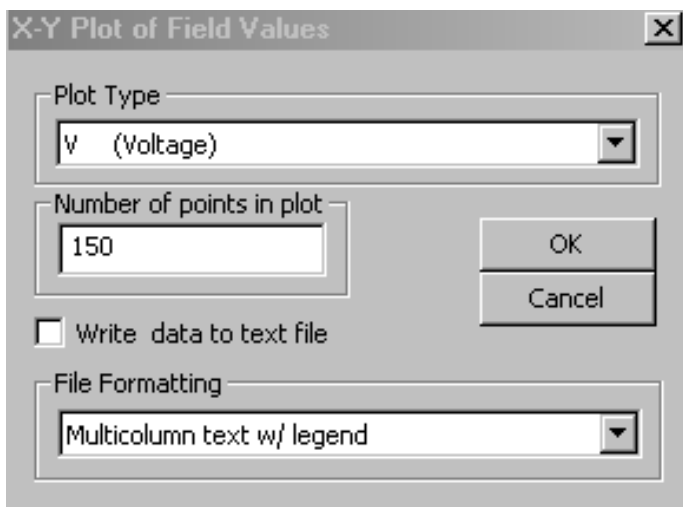



Рисунок 8.11 – Диалоговое окно линейного графика

В окне можно выбрать тип величины, количество точек построения и вид отображения. Значения могут быть записаны в текстовый файл.

График допускает построение, как модуля величины, так и составляющих по нормали и касательной к указанной линии (поверхности). Можно строить величины модулей напряжения, плотности тока, напряженности, а так же тока смещения.

### 8.3.6. *Линейный интеграл (Integrate)*



При нажатии кнопки  может быть вычислен интеграл по заданной линии. Диалоговое окно показано на рис. 8.12.

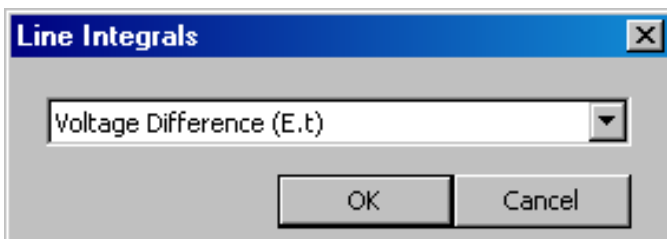
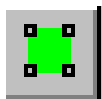


Рисунок 8.12 – Диалоговое окно вычисления линейного интеграла

В окне можно выбрать следующие значения:

1. Voltage difference (Et) – показывает падение напряжения между начальной и конечной точками.
2. Current flow (Jn) – вычисляет общий ток через указанную поверхность (поверхность определяется выдавливанием или поворотом линии в зависимости от типа задачи) и среднюю плотность тока.
3. Contour length & Area – Вычисляет длину и площадь выдавленного контура на указанную в начальных установках глубину.
4. Average Voltage – Среднее напряжение вдоль линии.
5. Force, Torque – Силы и момент, действующие на контур.

### 8.3.7. *Объёмный интеграл*



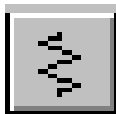
При выбранном блоке (кнопка  и щелчок левой клавишей) можно вычислить несколько объёмных интегралов.

1. Real power – Активная мощность;
2. Reactive power – Реактивная мощность;
3. Apparent power – Полная мощность;
4. Time Average Energy – Средняя за период энергия;
5. Blok Cross – Section – Площади поперечного сечения и объём;
6. Block Volume – Объём области

6. Force, Torque – Силы и момент.

### 8.3.8. Расчет проводника

Если используются свойство «проводник», то с помощью кнопки



можно легко определить его параметры. На рис.8.13 показан пример окна результатов.

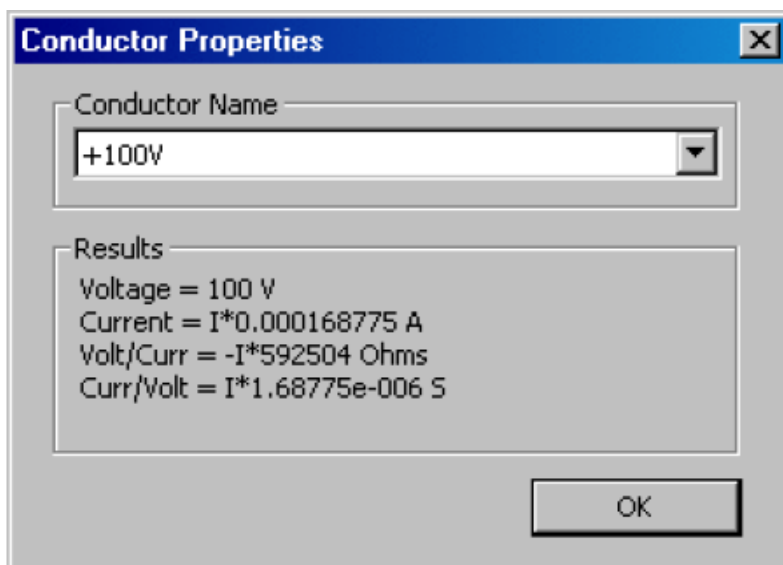


Рисунок 8.13 – Окно результатов "свойства проводника"

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Настоящее учебное пособие освещает далеко не все возможности пакета программ FEMM, а охватывает только основные моменты использования программы. В пособии очень кратко (в примерах) рассматривается язык *Lua Scripting* и не рассматриваются программы взаимодействия с *MatLab*. Это связано с тем, что программа FEMM изначально предназначалась для решения задач определенного класса сложности, с чем и справляется успешно. Задачи повышенной сложности более целесообразно решать в специальных программах более высокого уровня, таких как, например, COMSOL. Более детально возможности программы описаны в литературе [1], а так же в литературе [2], где подробно рассматривается задача по расчету электромагнитного механизма. Примеры данного учебного пособия подобраны таким образом, чтобы они не повторяли примеров, находящихся в инсталляционной директории программы C \ Program Files \ femm \ examples и примеров расчета электромагнитного механизма, описанных в [2].

Необходимо отметить, что данный программный комплекс является лишь инструментом в руках пользователя, поэтому правильное и эффективное использование этого инструмента во многом зависит от уровня теоретической подготовки самого пользователя.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. David Meeker. Finite Element Method Magnetics. Version 4.4. User's Manual. 2011.
2. О.Б. Буль. Методы расчета магнитных систем электрических аппаратов: Магнитные цепи, поля и программа Femm: Учебное пособие для студ. высш. учебн. заведений / Олег Болеславович Буль. – М.: Издательский центр "Академия", 2005. – 331 с.

## ПРИЛОЖЕНИЕ А

### А.1. Моделирование постоянных магнитов

Программа позволяет моделировать и проводить расчет постоянных магнитов, основываясь на одной из физических моделей, показанной на рис. А.1.

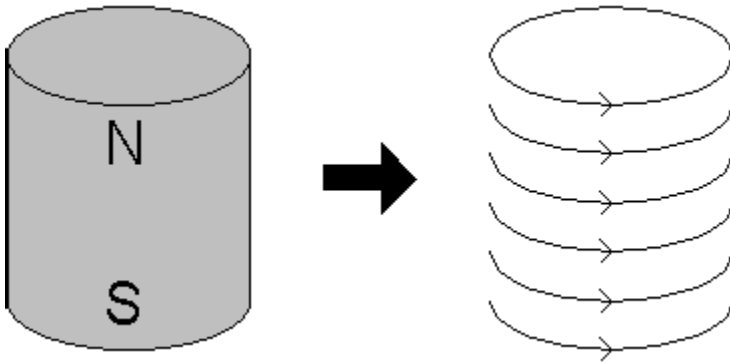


Рисунок А.1– Модель постоянного магнита

В модели постоянный магнит заменен некоторым ферромагнитным телом, которое окружено плоским током. Кривая намагничивания этого тела представляет собой смещенную по оси  $H$  кривую размагничивания материала. Точка с координатами  $-H_c$  смещается в т.  $(0,0)$ . Окно свойств постоянного магнита показано на рис. А.2.

**Block Property** X

Name

B-H Curve

Linear Material Properties

Relative  $\mu_r$        Relative  $\mu_z$

$\phi_{hr}$ , deg        $\phi_{hz}$ , deg

Nonlinear Material Properties

      $\phi_{hmax}$ , deg

Coercivity       Electrical Conductivity

$H_c$ , A/m       $\sigma$ , MS/m

Source Current Density

J, MA/m<sup>2</sup>

Special Attributes: Lamination & Wire Type

Lam thickness, mm       Lam fill factor

Number of strands       Strand dia, mm

Рисунок А.2 – Задание свойств постоянного магнита

Значение относительной магнитной проницаемости определяется как:

$$\mu_r = \frac{B_r}{\mu_0 \cdot H_c} . \quad (\text{A.1})$$

В случае нелинейных свойств материала магнита, система позволяет задать зависимость между индукцией и напряженностью магнитного поля при выборе опции «нелинейная зависимость  $B - H$ » в диалоговом окне.

## **А.2. Моделирование открытых границ асимптотическим граничным условием**

Метод конечных элементов предполагает задание некоторых условий на границе расчетной области, т.е. рассматривает расчет полей в замкнутых областях. Однако многие задачи требуют рассмотрения открытых границ, для которых  $A = 0$  при  $r \rightarrow \infty$  (постоянный магнит в воздухе, поле соленоида). В этих случаях необходимо моделирование открытых границ.

В простейшем случае можно построить достаточно удаленную внешнюю границу, задав нулевое значение магнитного потенциала на ней. Для уменьшения времени счета можно разделить расчетную область на несколько подобластей, укрупнив сетку в подобластях, не представляющих расчетный интерес. Но можно использовать асимптотическое граничное условие на границе области радиусом  $r_0$ . Для плоской проблемы решение для векторного магнитного потенциала на поверхности удаленной круговой области может быть представлено рядом по параметру  $\theta$ .

$$A(r, \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{r^m} \cdot \cos(\theta + \alpha_m), \quad (\text{A.2})$$

где  $a_m, \alpha_m$  – параметры, выбираемые так, чтобы решение соответствовало предписанному значению магнитного потенциала на границе.

Как правило, если расстояние достаточно велико, то доминирующей является первая гармоника и в формулах достаточно взять  $m=1$ .

Используя граничное условие Робина, можно записать:

$$c_0 = \frac{m}{\mu_0 \cdot r_0}, c_1 = 0, \quad (\text{A.3})$$

где  $m$  – номер гармоники (обычно первая),  $r_0$  – радиус внешней границы в [м],  $\mu_0$  – магнитная проницаемость вакуума, равная  $4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}$  [Гн/м].

Для электростатической задачи:

$$c_0 = \frac{\varepsilon_0 \cdot m}{r_0}, c_1 = 0, \quad (\text{A.4})$$

где  $m$  – номер гармоники (обычно первая),  $r_0$  – радиус внешней границы в [м],  $\varepsilon_0$  – проницаемость вакуума, равная  $8,8541 \cdot 10^{-12}$  [Ф/м].

Более подробно этот вопрос описан в инструкции к программе. Причем, подобный подход может быть применен и в осесимметричном случае.

**Пример.** Рассчитать поле двух алюминиевых пластин с токами  $100 \text{ A}$  и  $-100 \text{ A}$  при частоте  $5000 \text{ Гц}$ , радиус дуги –  $50 \text{ мм}$ , рис. А3.

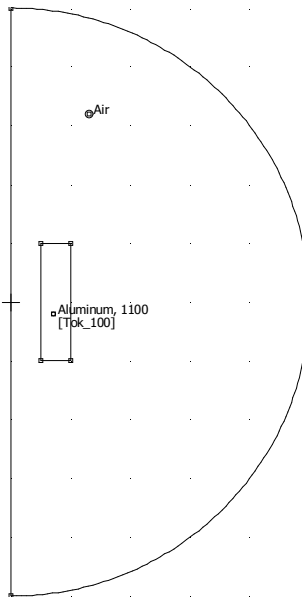


Рисунок А.3 – Пластина с током

В этом случае выбираем коэффициенты в граничном условии Робина:

$$c_0 = \frac{1}{\mu_0 \cdot r_0} = 15915494,31, \quad c_1 = 0.$$

На внутренней границе граничное условие  $A=0$ . В результате получаем картину поля, показанную на рис. А.4.

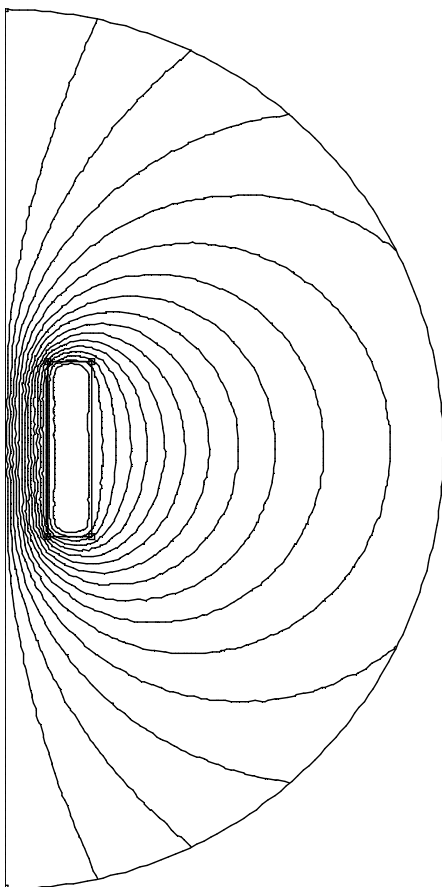


Рисунок А.4 – Картина поля двух шин с противоположным направлением тока

Однако, в случае поля постоянного магнита, заметную роль могут играть и высшие гармоники. В этом случае к внешней границе необходимо применить специальное граничное условие Strategic dual image – позволяющее учесть особенности моделирования постоянных магнитов.

### **А.3. Моделирование бесконечных границ при помощи преобразования Кельвина**

Данное преобразование позволяет точно моделировать открытые границы, не внося изменений в алгоритм решения задачи методом конечных элементов.

#### **А.3.1. Общие положения**

Как правило, на больших расстояниях от источника поля пространство однородно и линейно (воздух). В этом случае, поле описывается уравнением для векторного магнитного потенциала:

$$\nabla^2 \vec{A} = 0. \quad (\text{A.5})$$

В полярной форме (A.5) запишется:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \cdot \left( r \cdot \frac{\partial A_\varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial A_\varphi^2}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (\text{A.6})$$

Предположим, что «ближнее» поле определено в круге радиуса  $r_0$ . В этом случае «дальняя» область – все то, что осталось за пределами этого круга. Тогда, можно попытаться отобразить безграничную область на окружность, связав первую и вторую области соответствующим образом выбранными граничными условиями. Определим новую переменную  $R = \frac{r_0^2}{r}$ .

Далее, необходимо записать (A.6) в новых переменных. Алгебраические

преобразования показывают, что вид уравнения для переменной  $R$  аналогичен уравнению (A.6) (более подробно см. инструкцию Femm).

Преобразованное уравнение для внешнего региона имеет точно такую же форму, как и для внутренней области. Следовательно, создавая две плоских круговых области – расчетную и область удаленного поля и связывая соответствующие границы периодическими условиями для непрерывности областей – можно решить поставленную задачу.

Алгоритм решения задачи следующий:

1. Построить круговую область решения в «ближней» области.
2. Построить круговую область решения в «дальней» области.
3. Задать периодические граничные условия и применить их к соответствующим границам (см. рис. A.5).

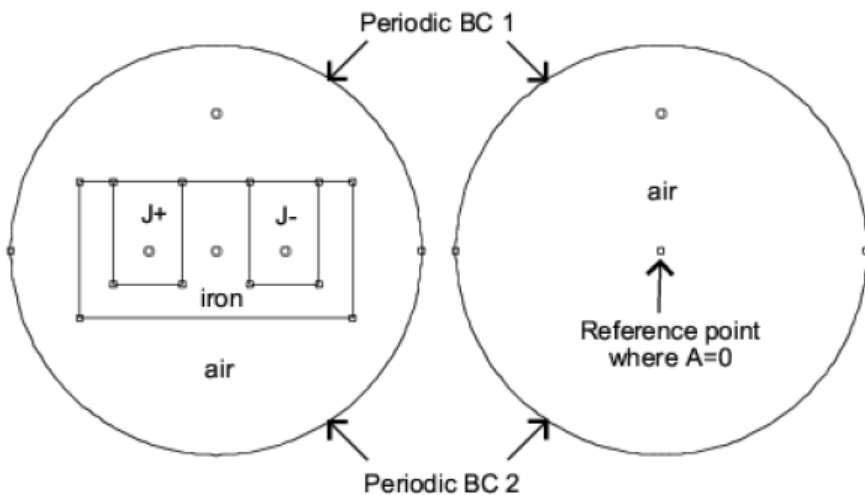


Рисунок A.5 – периодические условия на границах

Причем, окружности могут быть и неодинакового радиуса.

В случае осесимметричной задачи, соответствующие окружности должны располагаться так, как показано на рис. А.6.

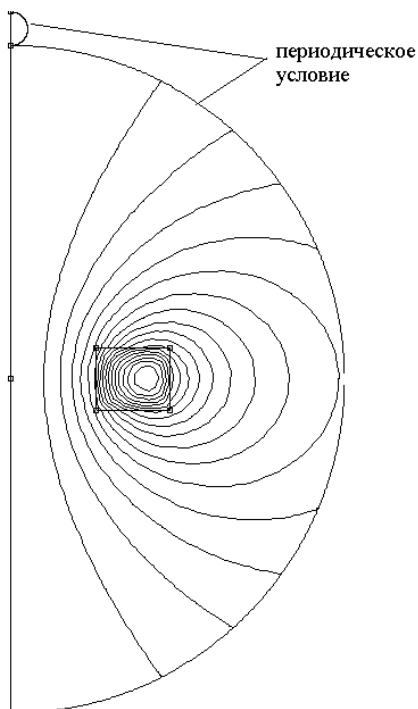



Рисунок А.6 – Моделирование открытых границ в осесимметричном случае

Данные граничные условия могут быть применимы к осесимметричной задаче, либо к плоской задаче, если алгебраическая сумма токов расчетной области равна нулю.

В последних версиях программы появилась специальная опция задания открытых границ , позволяющая построить такие границы для

плоского и осесимметричного случая. Вид раскрывающегося окна показан на рис. А.7.

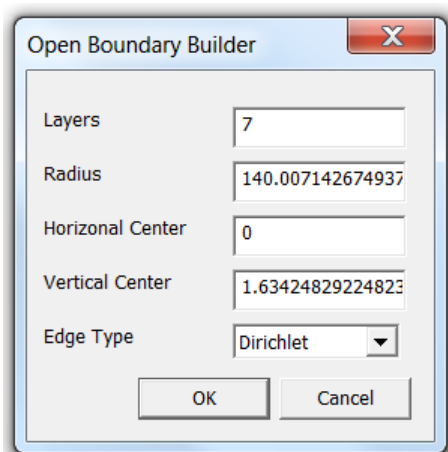


Рисунок А.7 – Моделирование открытых границ в осесимметричном случае

В окне надо указать:

- число слоев;
- радиус расчетной области;
- центральную точку;
- условие на дальней границе (как правило, условие Дирихле – ноль поля на бесконечности).

В результате программа сформирует многослойную внешнюю границу в соответствии с типом задачи, с различными значениями магнитной проницаемости вне расчетной области, подобранными так, чтобы на самой последней внешней границе поле было равно нулю.

Результат расчета показан на рис. А.8.

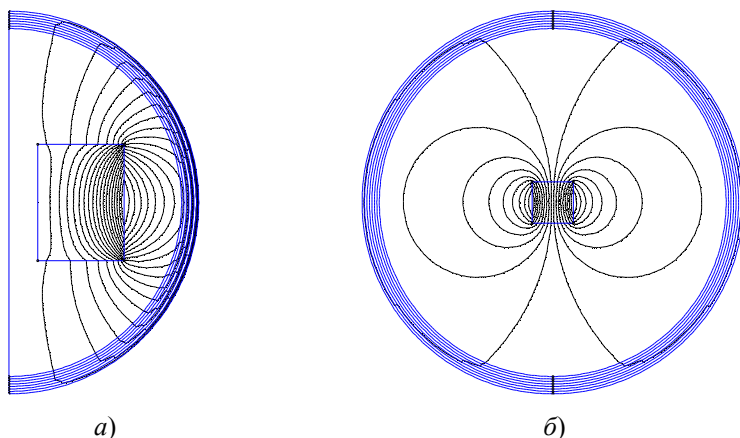


Рис. А.8 – Результаты расчета в осесимметричном *а* и плоском *б* случаях

Для более подробного изучения, рекомендуется посмотреть и проанализировать примеры, приведенные в системе.

#### **А.4. Приближённое моделирование слоистых структур**

Для уменьшения потерь от вихревых токов в электротехнике часто применяют слоистую структуру материала (шихтованный магнитопровод). Наиболее правильный и точный путь моделирования таких структур – моделировать каждое дискретное расслоение ферромагнитного материала и изоляцию между ними. Вместе с тем, необходимо отметить, что такое моделирование трудновыполнимо и существует альтернативный метод, рассматривающий такую структуру как единый материал со свойствами, различными вдоль и поперек шихтовки. Рассмотрим два характерных случая: шихтовка расположена вдоль линий магнитного потока; шихтовка расположена поперёк линий магнитного потока.

#### А.4.1. Шихтовка вдоль линий магнитного потока

Расчетная модель показана на рис. А.9.

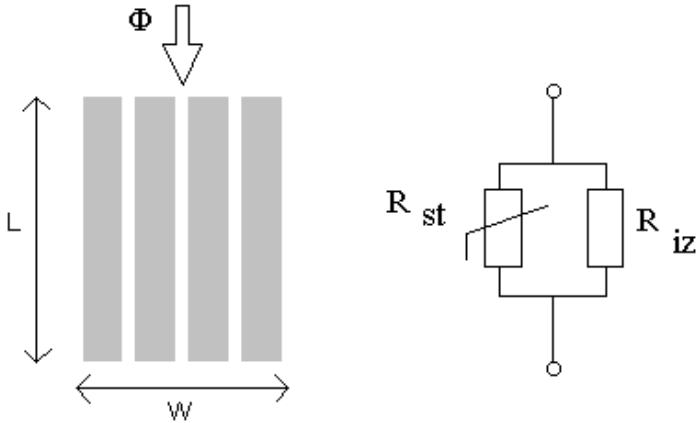


Рисунок А.9 – Продольная шихтовка

В этом случае, приняв магнитную проницаемость ферромагнетика постоянной величиной, а магнитную проницаемость изоляции как  $\mu_0$  (глубина участка равна единице), можно записать:

$$R_{st} = \frac{L}{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot c \cdot W}, R_{iz} = \frac{L}{\mu_0 \cdot (1 - c) \cdot W}, \quad (\text{A.7})$$

где  $R_{st}$  – магнитное сопротивление ферромагнетика;  $R_{iz}$  – магнитное сопротивление изоляции;  $L$  – длина участка;  $W$  – ширина участка;  $c$  – коэффициент заполнения объема ферромагнетиком.

Вычисляя эквивалентное сопротивление можно получить:

$$R_{ek} = \frac{L}{\mu_0 \cdot (1 - c + \mu_r \cdot c) \cdot W}. \quad (\text{A.8})$$

Из (А.8) следует, что моделирование шихтовки расположенной вдоль потока сводится к соответствующему изменению магнитной проницаемости в этом направлении:

$$\mu_{\parallel} = \mu_0 \cdot ((1 - c) + \mu_r \cdot c). \quad (\text{А.9})$$

Если учесть, что коэффициент заполнения в зависимости от толщины пластин равен (0,7...0,95), то проницаемость практически равна проницаемости железа.

#### ***А.4.2. Шихтовка поперек линий магнитного потока***

Вид расчетной модели показан на рис. А.8.

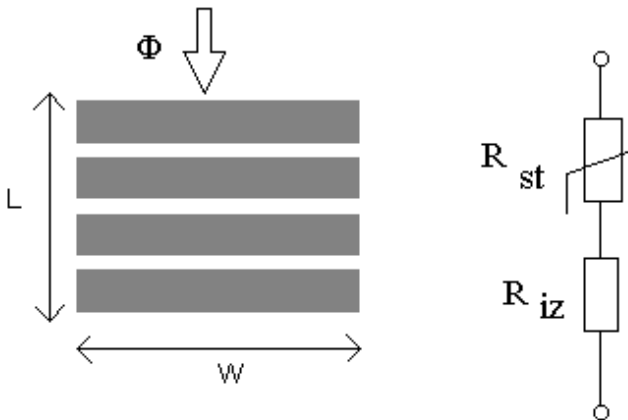


Рисунок А.8 – Расчетная модель поперечной шихтовки

Значение сопротивления ферромагнетика и изоляции можно записать:

$$R_{st} = \frac{c \cdot L}{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot W}, \quad R_{iz} = \frac{(1 - c) \cdot L}{\mu_0 W}. \quad (\text{А.10})$$

Тогда эквивалентное сопротивление определится по формуле:

$$R_{ek} = \frac{L \cdot (c + \mu_r - \mu_r \cdot c)}{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot W}. \quad (\text{А.11})$$

В этом случае, эквивалентная магнитная проницаемость для случая поперечного протекания потока запишется:

$$\mu_{\perp} = \frac{\mu_0 \cdot \mu_r}{(c + (1-c) \cdot \mu_r)}. \quad (\text{A.12})$$

Моделирование шихтованной структуры при произвольном направлении потока осуществляется при помощи формул (A.9, A.12).

В случае гармонической проблемы вихревые токи вызывают дополнительные потери в шихтованном магнитопроводе. Если толщина листа шихтовки соизмерима с другими размерами геометрии, то эффекты потерь могут быть смоделированы частотно-зависимой магнитной проницаемостью. В этом случае относительная магнитная проницаемость в формулах (A.9, A.12) может быть заменена следующим выражением:

$$\mu_{rf} = \frac{\mu_r \cdot e^{-\frac{j \cdot \phi_h}{2}} \cdot \tanh \left[ e^{-\frac{j \cdot \phi_h}{2}} \cdot \sqrt{j \cdot \omega \cdot \sigma \cdot \mu_0 \cdot \mu_r} \cdot \frac{d}{2} \right]}{\sqrt{j \cdot \omega \cdot \sigma \cdot \mu_0 \cdot \mu_r} \cdot \frac{d}{2}}. \quad (\text{A.13})$$

где  $\phi_h$  – представляет фазовый угол сдвига между напряжённостью поля и вектором магнитной индукции;  $\sigma$  – проводимость материала;  $d$  – толщина листа шихтовки;  $\omega$  – круговая частота поля.

Примечательно, что потери на гистерезис могут быть учтены и для не шихтованного материала путем умножения магнитостатической проницаемости на величину  $e^{-\frac{j \cdot \phi_h}{2}}$ .

## ПРИЛОЖЕНИЕ Б. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

### Б.1. Задачи по расчету магнитных полей

#### *Б.1.1. Ферромагнитный цилиндр в однородном постоянном магнитном поле*

Определить параметры и построить картину изменения постоянного магнитного поля напряженностью 20 А/м при внесении в него ферромагнитного цилиндра. Размеры цилиндра и расчетной области показаны на рис. Б.1 в миллиметрах.

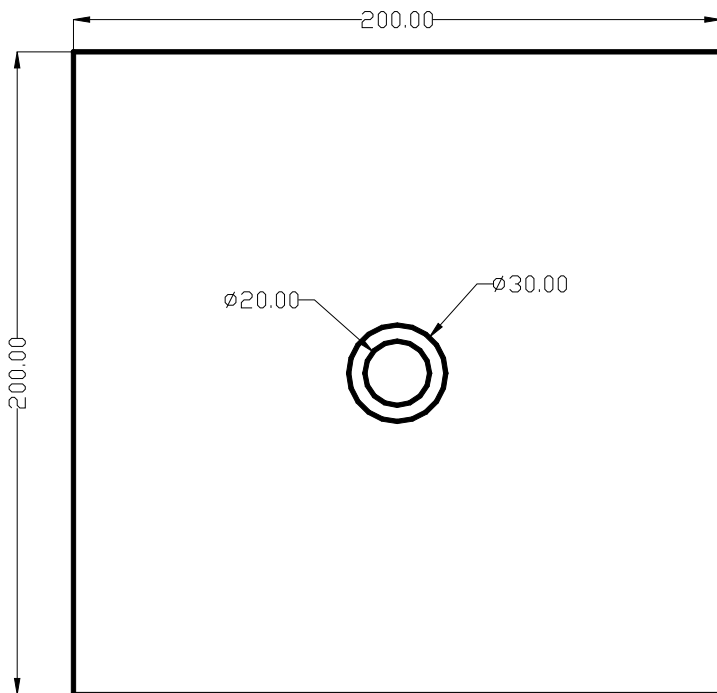


Рисунок Б.1 – Расчетная область и ферромагнитный цилиндр

Материал цилиндра – железо, окружающая среда – воздух.

Алгоритм решения задачи.

1. Открыть программу и выбрать *File/New*.

2. В меню *Problem/Problem Definition* выбрать:

*Problem Type – Planar*;

*Length Units – Millimeters*;

*Frequency Hz – 0*;

*Depth – 100*.

Остальные параметры оставить по умолчанию.

3. Для прорисовки геометрии войти в режим рисования точек и нажав клавишу *Tab* ввести последовательно координаты точек расчетной области А(-100,100), В(100,100), С(-100,-100), Д(100,-100). Далее с помощью команды *View Natural* согласовать размеры расчетной области с размерами экрана и немного уменьшить командой *Zoom Out*.

4. В режиме рисования точек:

– ввести координаты точек окружностей (0,15), (0,10);

– выделить точки правой клавишей мыши;

– выполнить команду *Edit Mirror* (или клавишей быстрого доступа) и в открывшемся окне указать линии отражения – например (0,0) и (10,0);

– в случае ошибки – выделить новые точки и нажать клавишу *Delete* или выполнить команду *Undo*;

– перейти в режим рисования дуг, выделить левой клавишей мыши две точки с наименьшей ординатой, в окне указать дуговой угол  $-180^{\circ}$ , продолжить действия до построения двух окружностей.

5. Выбор материалов:

– открыть *Property/Material Library* и перетянуть левой клавишей мыши требуемые материалы из библиотеки в модель (из левого окна в правое окно);

– редактирование свойств выбранных материалов (если оно требуется) осуществляется командой *Property/Material/Modify Property* выбранного из списка материала, в этом же окне кнопкой *Add Property* можно создать свой материал, задав его имя и свойства;

– для задания свойств областей перейти в режим "задание материальных свойств" – зеленая кнопка;

– левой клавишей мыши пометить три области: внешнее пространство – корпус цилиндра – внутренне пространство цилиндра;

– щелчком правой клавиши мыши выделить метки внешнее пространство – внутренне пространство цилиндра, нажать клавишу *ПРОБЕЛ* и в окне выбрать: *Blok Type – Air*; убрать метку – *Let Triangle Choose Mesh Size*; установить – *Mesh Size* равным 2;

– метке внутри цилиндра присвоить значения – *Pure Iron- Mesh Size - 1*.

6. Выбор граничных условий. Для задания значения напряженности поля на границах области выбраны смешанные граничные условия с помощью команд *Property/Boundary/Boundary Property*.

В открывшемся окне выбрать *Add Property* и установить:

– для первой границы *Name – H+*, *BC Type – Mixed*,  $c1 = 20; c0 = 0$ ;

– для второй границы *Name – H-*, *BC Type – Mixed*,  $c1 = -20; c0 = 0$ .

Перейти в режим *ЛИНИЯ*:

– выделить правой клавишей верхнюю границу расчетной области и с помощью клавиши *ПРОБЕЛ* задать граничное условие *H-*;

– выделить правой клавишей нижнюю границу расчетной области и с помощью клавиши *ПРОБЕЛ* задать граничное условие *H+*.

7. Командой *Analysis/Analyze* решить задачу.

8. Командой *Analysis/View Results* перейти в окно вывода результатов.

Расчетная картина магнитного поля показана на рис.Б.2.

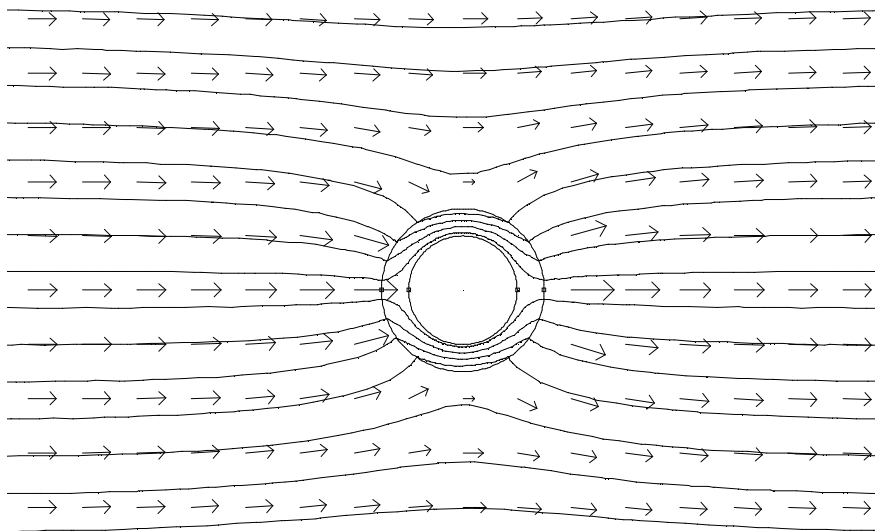


Рисунок Б.2 – Картина расчетного магнитного поля

### ***Б.1.2. Неферромагнитный цилиндр в однородном переменном магнитном поле***

Для расчета такого рода задач необходимо в меню *Problem* установить значение частоты *5000 Гц*, добавить из библиотеки материал *Алюминий* и провести расчет. Картина магнитного поля показана на рис. Б.3.

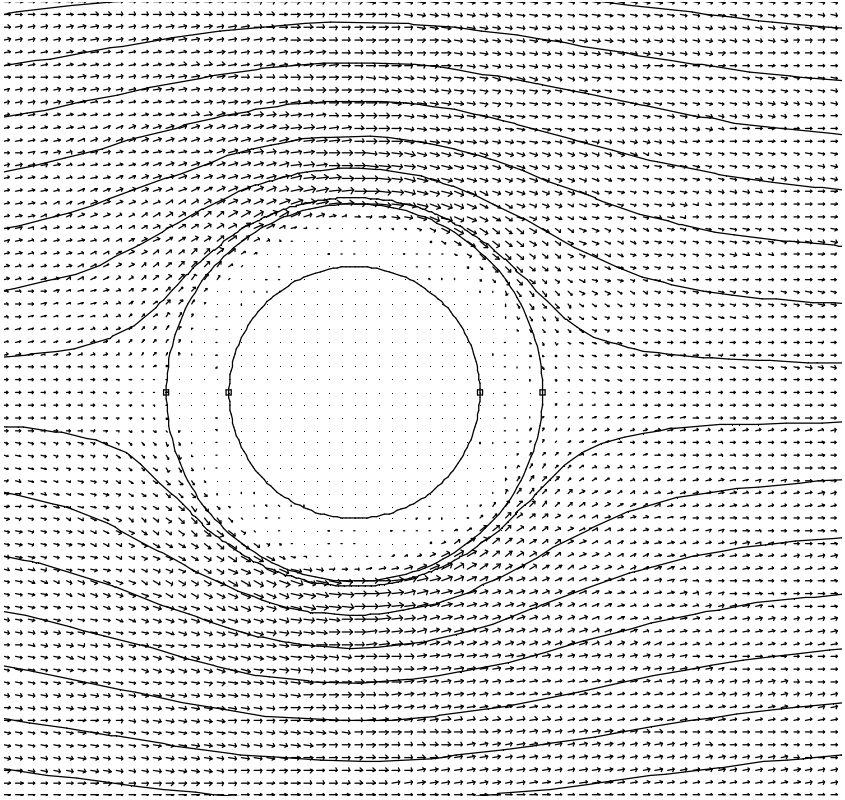


Рисунок Б.3 – Картина магнитного поля проводящего неферромагнитного цилиндра, помещенного во внешнее переменное поле

В случае ферромагнитного цилиндра в переменном магнитном поле необходимо существенно уменьшить размеры расчетной сетки внутри цилиндра, так как глубина проникновения электромагнитной волны в ферромагнетик достаточно мала. Задачи такого рода могут использоваться для расчета степени экранирования магнитного поля проводниками и ферромагнетиками.

На рис.Б.4 показаны картины магнитного поля для сплошного и шихтованного ферромагнитных цилиндров (изменение в свойствах материала) при толщине пластин шихтовки 0,5 мм и коэффициенте заполнения 0,5 при частоте внешнего поля 50 Гц.

Изменение свойств *Pure Iron*:

- выбрать команду *Property/Material/Modify Property*;
- для учета шихтовки в окне *Special Attributes – Laminated in plane* (однаправленная шихтовка для нелинейных материалов не поддерживается), *Lam thickness – 0.5*, *Lam fill factor - 0.5*.

На рис. Б.4 внутри цилиндра видна дополнительная область с более мелкой сеткой по внешнему периметру.

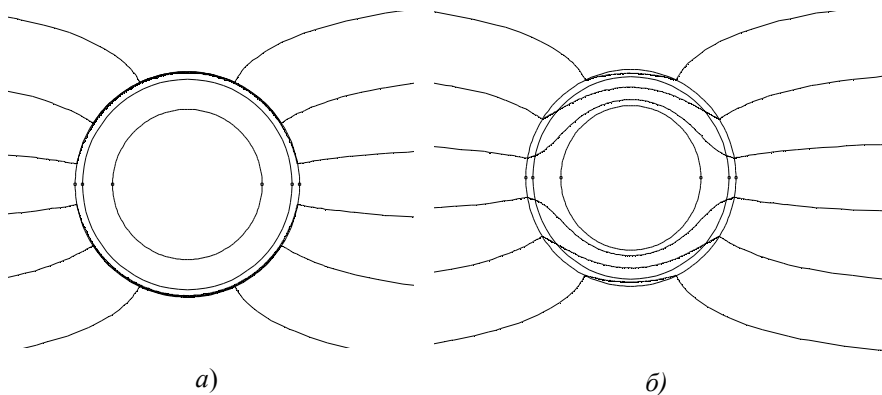


Рисунок Б.4 – Различие магнитного поля для сплошного *а* цилиндра и шихтованного *б*

Картину плотности поля направление поля можно посмотреть с помощью команд *View/Dense Plot/Contour Plot/Vector Plot*.

Построить график поля по линии:

- перейти в режим *Линия*;
- правой клавишей обозначит две точки линии;

– в команде *Plot X-Y* выбрать требуемую переменную.

### **Б.1.3. Поверхностный эффект**

Определить параметры поверхностного эффекта при протекании тока 100 А частоты 1 кГц по круглому (диаметр 20 мм) и квадратному (сторона 20 мм) медным проводникам.

Специфика данной задачи заключается в определении распределения плотности тока в *одном* проводнике. Очевидно, что такая постановка задачи не совсем верна с физической точки зрения. В этом случае для соответствия математической модели реальным физическим условиям применяется специальное граничное условие.

На рис.Б.5 показано окно задания граничных условий и границы проводника.

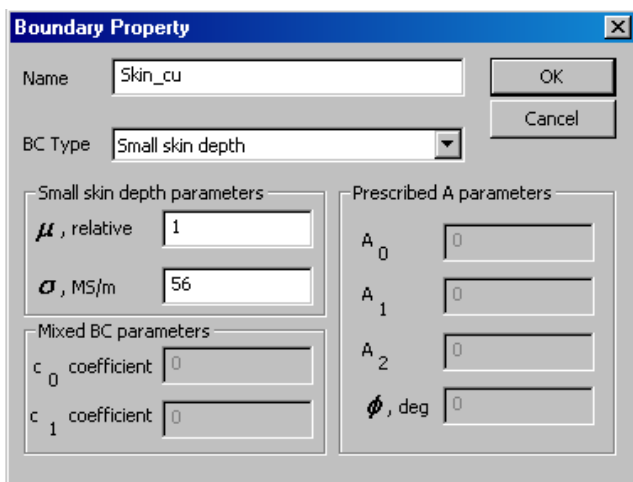
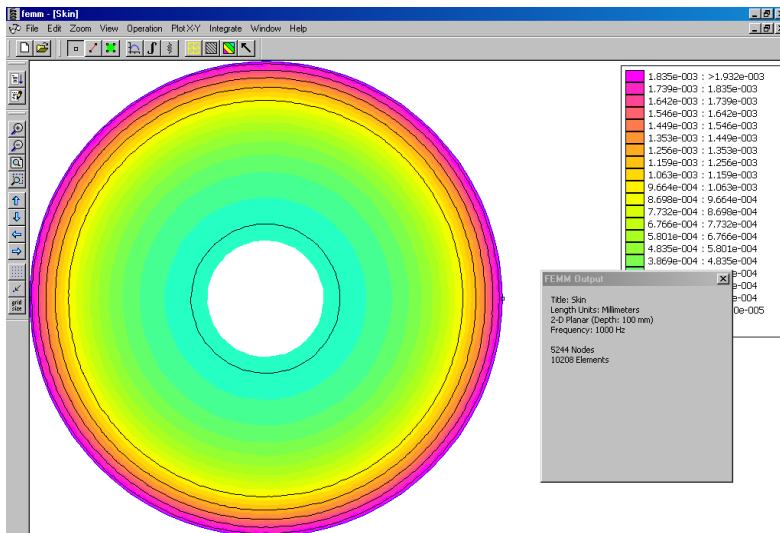
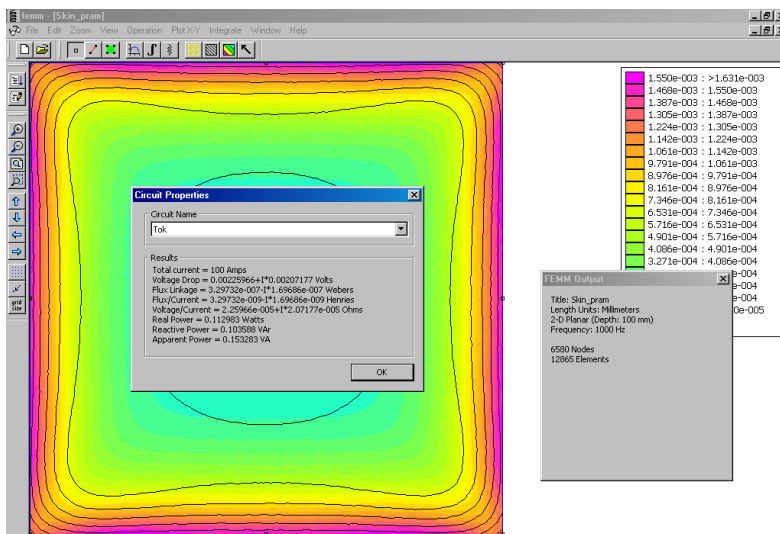


Рисунок Б.5 – Окно задания граничных условий

Результаты расчета и окно «Свойства тока» показаны на рис.Б.6 для цилиндрического и прямоугольного проводников.



a)



б)

Рисунок Б.6 – Окно результатов расчета плотности тока а – цилиндр; б – квадрат

В окне свойства тока показаны значения:

– полный ток проводника; потокосцепление; индуктивность; полное сопротивление; активная, реактивная и полная мощности.

Для того чтобы посмотреть распределение тока в сечении проводника необходимо:

1. Перейти в режим Operation/Contour;
2. Установить режим Snap Grid (привязка к узлам сетки);
3. Правой клавишей мыши указать точки диагонали квадрата;
4. Выбрать опцию Plot;
5. Выбрать опцию "Суммарный ток".

График распределения плотности тока показан на рис. Б.7.

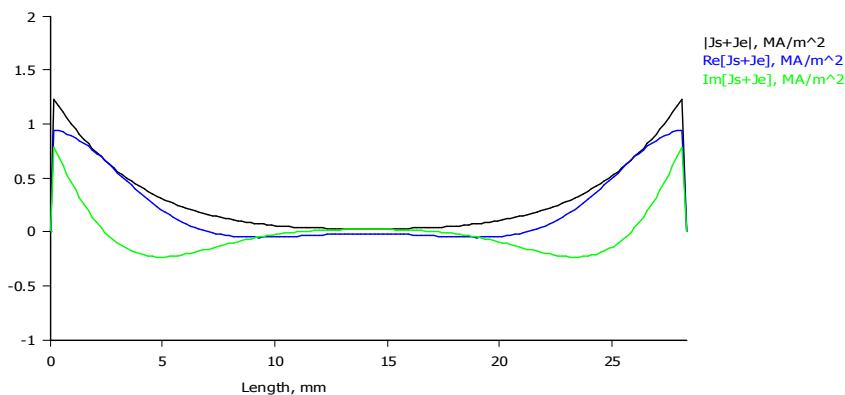


Рисунок Б.7 – Распределение плотности тока по диагонали квадрата

#### **Б.1.4. Магнитное поле колец Гельмгольца**

Рассчитать магнитное поле колец Гельмгольца при протекании по ним постоянного однонаправленного и разнонаправленного тока в осесимметричной системе координат. Проводники с током ввиду малости их размера можно описать как точечные, задав в свойствах точки значения токов, а затем присвоив эти свойства соответствующим точкам путем выделения

точек правой клавишей мыши и нажатия клавиши *Пробел*. Граничные условия задаются в виде преобразования Кельвина в осесимметричной системе координат. На рис. Б.8 показана геометрия системы и ее свойства.

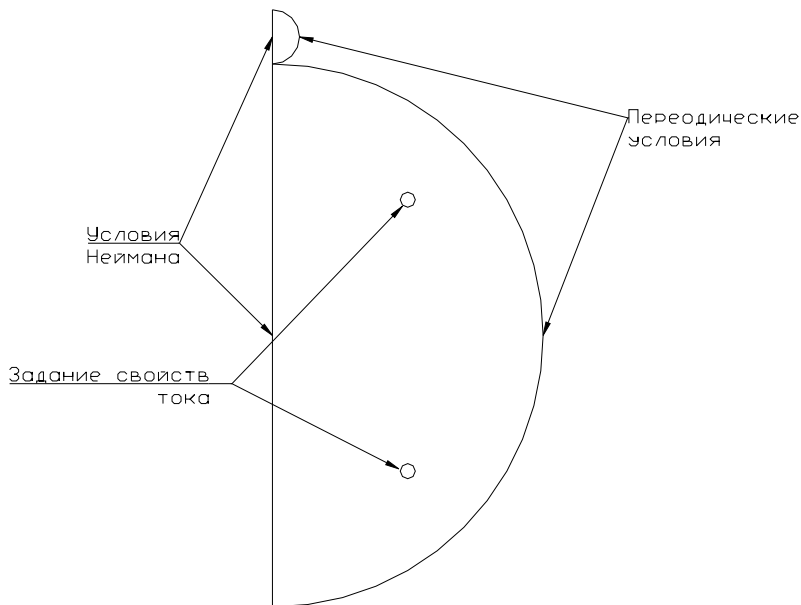


Рисунок Б.8 – Геометрия и граничные условия

Для прорисовки геометрии необходимо выбрать осесимметричную задачу, частота процесса – 0 Гц, единицы измерения миллиметры.

Нарисовать точки с координатами  $A(50,50)$  и  $B(50,-50)$ . Диаметр расчетной области (полуокружности) – 200 мм, полуокружности отображения внешнего пространства – 20 мм.

В меню *Свойства/Точка* с помощью опции *Добавить*, задать два значения тока – 100 А и минус 100 А.

В режиме точка, выделить нужную точка и нажатием клавиши *Пробел* задать ее свойства (значение тока). Задать материальные свойства расчетных областей, присвоив им свойства воздуха.

Граничные условия задаются командой меню Свойства/Границы в котором необходимо выбрать границу *Periodic* и в режиме *Дуга* нажатием клавиши *Пробел* присвоить это условие дугам двух окружностей, предварительно выбрав их правой клавишей мыши. Такое условие позволит задать эффект неограниченного пространства.

Условие Неймана по линии  $r=0, z$  задается программой "по умолчанию". На рис. Б.9 приведена картина поля для однонаправленных и разнонаправленных значений тока.

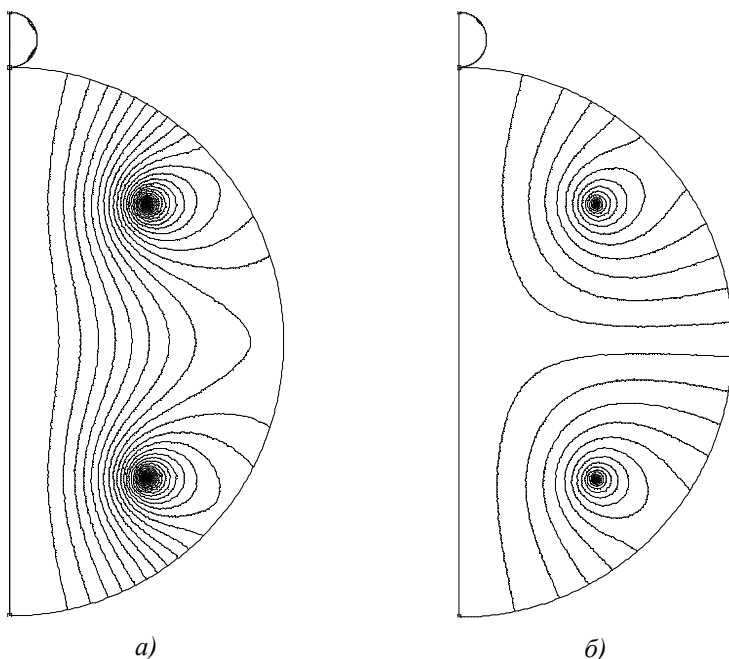


Рисунок Б.9 – Поле колец Гельмгольца при одинаковом *a* и противоположных *б* направлениях тока

**Б.1.5. Магнитное поле постоянного кругового магнита с «бесконечными» границами**

В том случае, если поводится расчет поля постоянного магнита, то неограниченность магнитного поля можно задать с помощью специального условия, которое применяется только для этого случая «Strategic dual image».

Расчетная геометрия показана на рис. Б.10, тип – осевая симметрия.

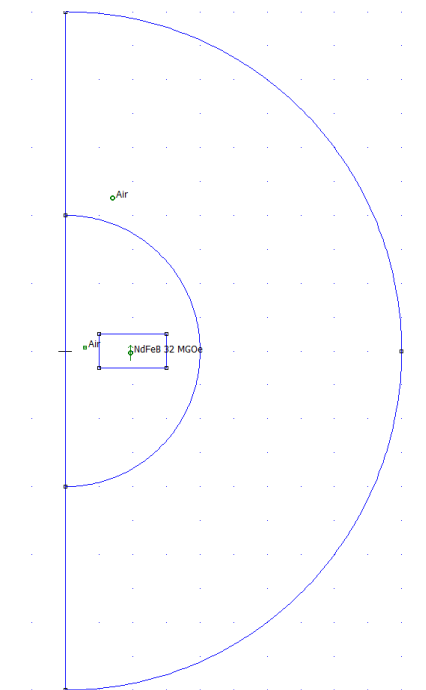


Рисунок Б10 – Расчетная область

Геометрические размеры: диаметры полуокружностей – 200 мм и 80 мм; размеры магнита – А(10,5), Б(30,5), В(10,-5), Г(30,-5). Внутренняя

полуокружность нужна для построения более мелкой сетки вблизи магнита. Свойства среды – воздух, магнит –  $NdFeB$ .

На рис. Б.11 показано поле кругового магнита с «бесконечными» внешними границами «Strategic dual image».

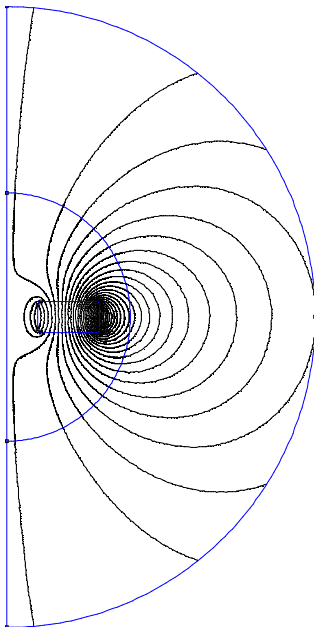
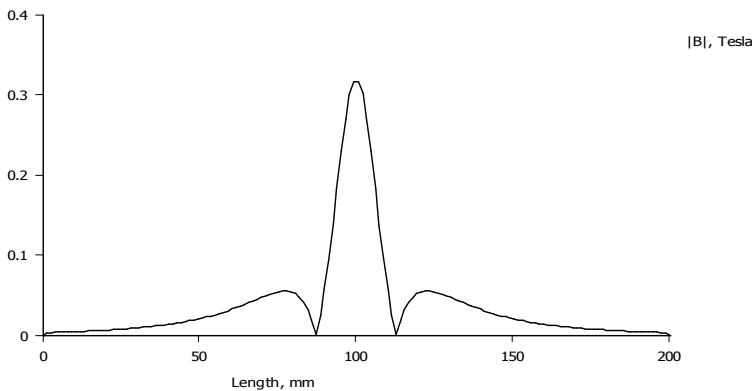
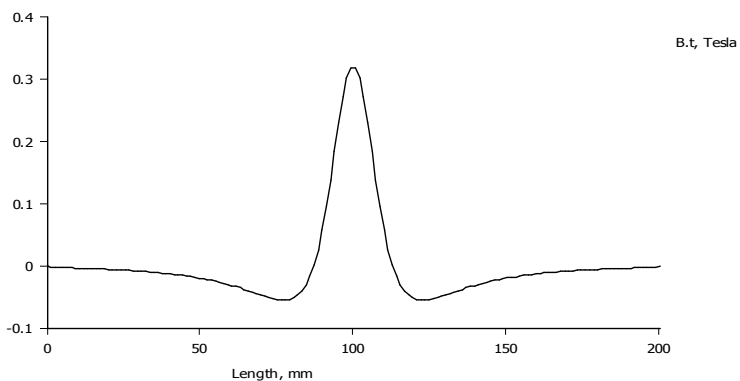


Рисунок Б.11 – Картина поля постоянного магнита

На рис.Б.12 показан график модуля поля по оси магнита и его  $z$  составляющая.



*a)*



*b)*

Рисунок Б.12 – График модуля поля *a* и его осевая составляющая *b*

Как следует из графика, поле кругового магнита имеет две точки нуля поля на оси магнита.

### ***Б.1.6. Экспорт файла. Магнитное поле трехфазной системы.***

В примере рассмотрен расчет квазистатического поля трехфазной системы, показанной на рис. Б.13.

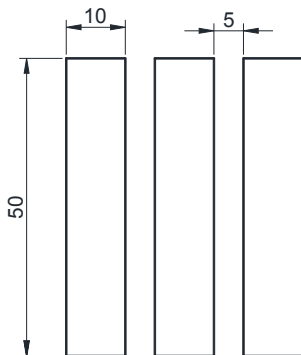


Рисунок Б.13 – Трехфазная система

Рассмотрим процесс импорта геометрии из имеющегося файла с расширением DXF.

Для этого в программе *femt*:


1. Создаем новый файл и выбираем *Магнитная проблема*;
2. Устанавливаем *тип задачи* - плоская, *единицы* - миллиметры, *частота* – 50 Гц, *глубина* – 1000 мм.

3. Командой *Файл/Импорт DXF* выбрать место расположения файла, выделить его и выбрать опцию *Открыть*;

4. В окне *Допуск* нажать *ОК* и согласиться с предупреждением. Необходимо отметить, что предупреждения появляются лишь в том случае, если программа считает некоторые построения в файле некорректными. В этом случае можно повторить процесс "втягивания" файла изменив допуск. Если эта операция не дает желаемого результата, то геометрия в программе требует ручной коррекции. Например, если на чертеже были указаны, а затем удалены размеры, они могут появиться в импортируемом файле. Размеры объектов из импортируемого файла переносятся в файл *femt* один к одно-

му и соответствуют установленным ранее в файле *DXF* единицам. Для просмотра всей геометрии выбираем *Вид/По размеру экрана (Natural)*.

5. Импортируем в программу из библиотеки материалы *Air, Cu*.

6. Определение граничных условий. Так как в симметричной трехфазной системе алгебраическая сумма токов равна нулю, то в качестве граничных условий можно выбрать "открытые границы" кнопкой . В

открывшемся окне выбрать Радиус – 50 мм. Остальные значения – "по умолчанию".

7. Задание токов системы. В меню *Свойства/Ток* добавляем токи трех фаз:  $TokA=1000$ ,  $TokB=-500-I*500*\sqrt{3}$ ,  $TokC=-500+I*500*\sqrt{3}$ . Начальная фаза тока *A* равна нулю. Программа понимает функцию *sqrt*. Окно задания тока показано на рис. Б.14.

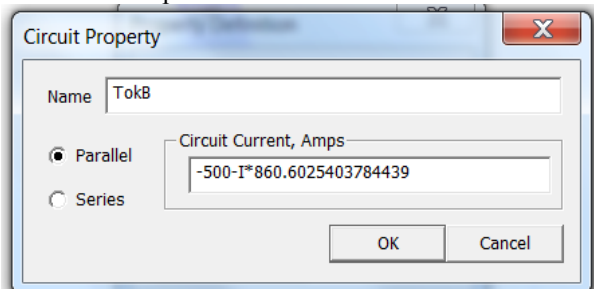
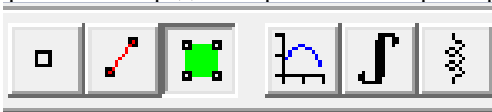


Рисунок Б.14 – Окно задания тока

8. Присваиваем областям материальные свойства, токи и выбираем шаг дискретизации сетки равным 1 мм.

9. Решаем задачу.

В окне постпроцессора можно определить различные параметры системы при помощи кнопок



- свойства поля в точке;
- построение линии;
- выделение блока;
- построение графика по линии;
- интеграл по блоку;

– характеристики проводника сток.

На рис. Б.15 показано окно проводника сток.

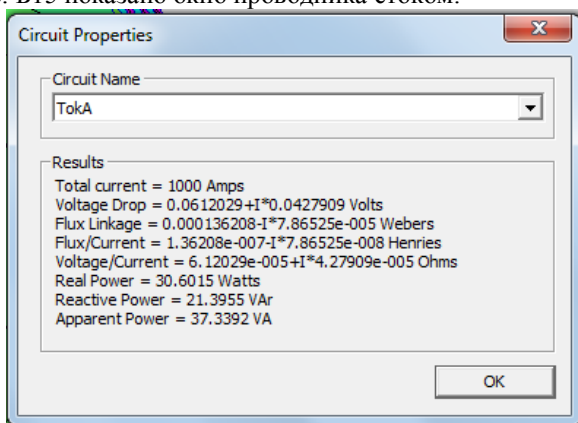


Рисунок Б.15 – Характеристики проводника сток

### ***Б.1.7. Некоторые особенности решения плоских задач. Трансформатор тока.***

На рис. Б.16 показана плоская задача расчета трансформатора тока.

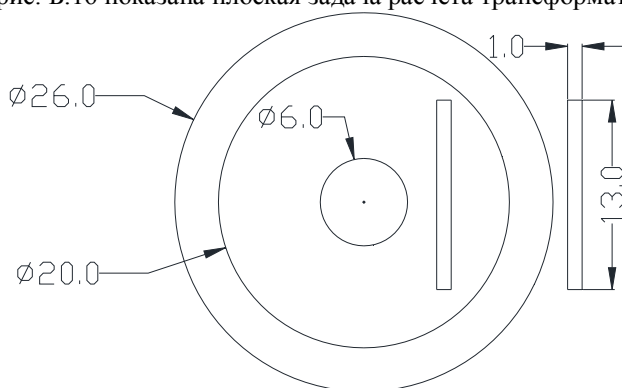


Рисунок Б.16 – Трансформатор тока

Первичная обмотка трансформатора – медный проводник с током 100 А; вторичная обмотка – два прямоугольных проводника 1\*13 мм; магнитопровод – шихтованная сталь.

Особенность решения задачи заключается в задании условий на границе расчетной области. Задание нулевого потенциала на удаленной границе, имитация бесконечного пространства приводят в данном случае к тому, что прямой и обратный токи вторичной обмотки будут существенно отличаться один от другого, а суммарный ток не будет равным нулю, чего не может быть.

Проблема заключается в некорректной математической постановке задачи: физически не существует однопроводной системы.

Решение задачи должно быть таким, как показано на рис. Б.17.

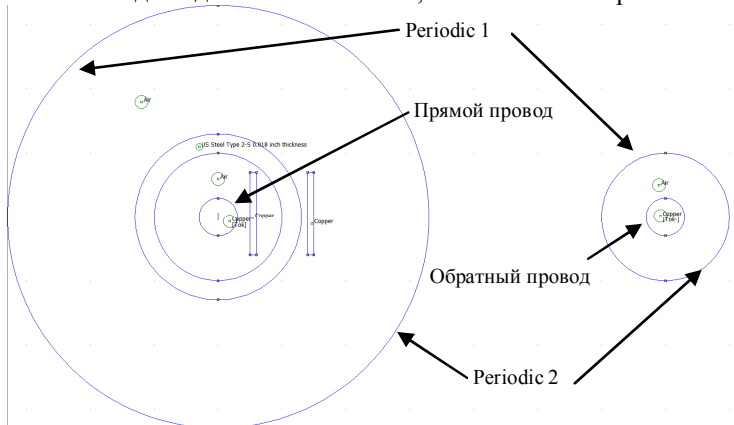


Рисунок Б.17 – Задание граничных условий задачи

В данном случае создана "бесконечная" область при помощи преобразования Кельвина, но с заданием внутри внешнего пространства обратного тока. Расчеты показывают, что при токе 100 А, суммарный ток прямого и обратного провода вторичной обмотки отличается на величину порядка  $10^{-6}$  А.

### **Б.1.8. Основы работы с использованием языка Lua Scripting.**

Довольно часто при решении электротехнических задач приходится проводить однотипный расчет при нескольких положениях рабочего органа.

Например: определение силы, действующей на якорь электромагнита при различной величине рабочего воздушного зазора; определение момента, действующего на ротор двигателя в зависимости от угла поворота; изменение потокоцепление катушки датчиков положения и т.д.

В этом случае можно воспользоваться возможностями, предоставляемыми языком *Lua scripting*, встроенным в программу *femm*. Все возможно

сти языка описаны в [1]. Команды языка являются текстом и могут быть написаны и отредактированы в любом редакторе, включая простейшие, такие как "Блокнот".

*Задача 1.* Определить силу, действующую на ферромагнитный объект,двигающийся по оси цилиндрической катушки с током 1 А и числом витков 5000 рис. Б.18, если путь, проходимый телом, составляет 80 мм. Внутренний радиус катушки – 10 мм, наружный – 30 мм, радиус ферромагнитного объекта – 2,5 мм, высота расположения тела – 40 мм. Тип задачи - осесимметричный; задание внешних границ определяется преобразованием Кельвина, условия Неймана на оси симметрии.

Значение силы будет вычисляться в 11 дискретных точках с шагом по координате – минус 8 мм, включая начальную точку.

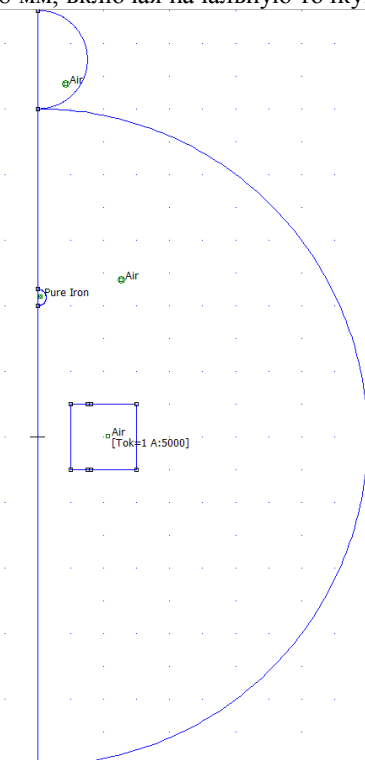



Рисунок Б.18 – Расчетная модель движущегося тела

Отличия данной задачи заключаются в необходимости объединить в единое целое все характеристики движущегося тела: точки, линии, дуги и свойства среды.


Это достигается при помощи команды *Группа*  :

- выбрать команду;

- прямоугольной или круговой рамкой  выделить смещаемый объект вместе со значком *Свойства среды*;

- нажать клавишу *Пробел* задать номер группы, например 1 (группа 0 – все объекты геометрии по умолчанию).

Перед дальнейшими действиями желательно сохранить исходный файл, а все остальные манипуляции проводить в рабочем файле, сохраненном под другим именем.

Далее, кнопкой  открыть окно *Lua Console* рис. Б.19, вставив в него текстовый файл.

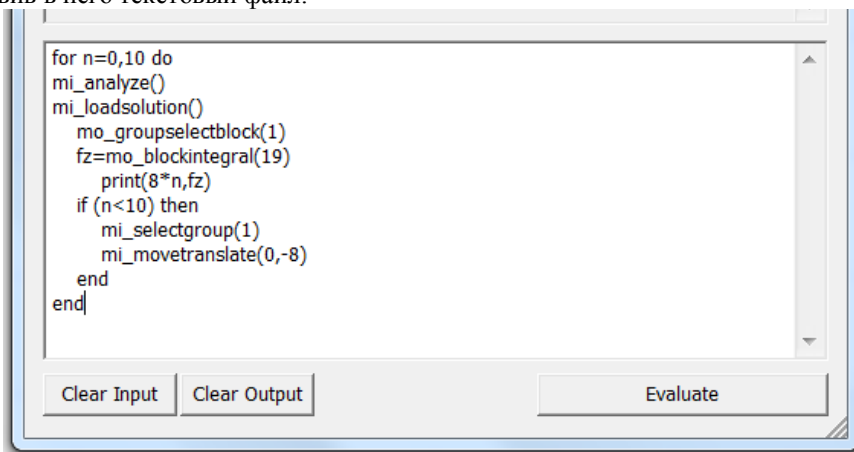


Рисунок Б.18 – Окно *Lua Console* с текстом программы

Расшифровка команд программы.

for n=0,10 do	
mi_analyze()	Загружает и анализирует геометрию
mi_loadsolution()	Выполняет решение проблемы
mo_groupselectblock(1)	Активизирует блок с меткой 1
fz=mo_blockintegral(19)	Вычисляет интеграл функции с №19
print(8*n,fz)	Вывод на консоль пути и силы

```

if (n<10) then          Ограничивает последнее перемещение
    mi_selectgroup(1)  Выделяет все элементы блока
    mi_movetranslate(0,-8) Перемещает элементы блока на  $\Delta r$ ,  $\Delta z$ 
end
end
end

```

Команда *Evaluate* запускает процесс решения задачи, по окончании которого в окне *Output* (окно вывода результатов аналогичное рис. Б.18) можно посмотреть результат. Оформленный в виде графика результат путем преобразования данных в таблицу программы *EXCEL* показан на рис. Б.19.

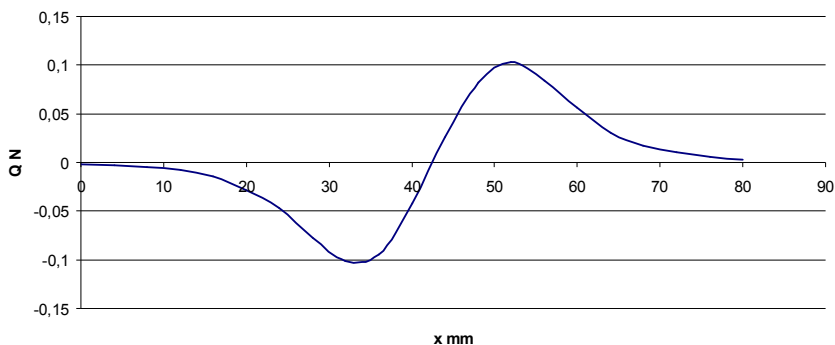


Рисунок Б.19 – Зависимость электромагнитной силы от пути

**Задача 2.** Определить силу, действующую на якорь броневое электромагнита постоянного тока с ферромагнитным шунтом и поток, приведенный по потокоцеплению катушки в функции величины хода якоря рис. Б.20. Ход якоря – 14 мм, ампервитки катушки – 5000 А.

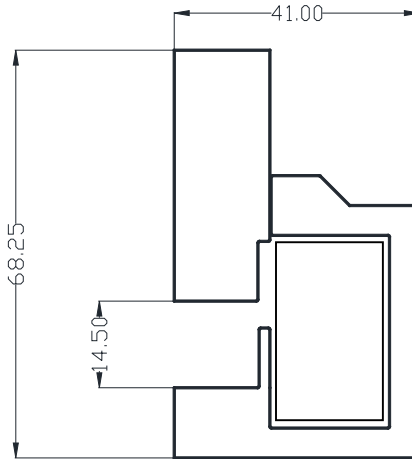


Рисунок Б.20 – Бронево́й электромагнит

Отличие данной программы от предыдущей заключается в том, что в ней имеются два блока: 1 – якорь электромагнита; 2 – катушка электромагнита.

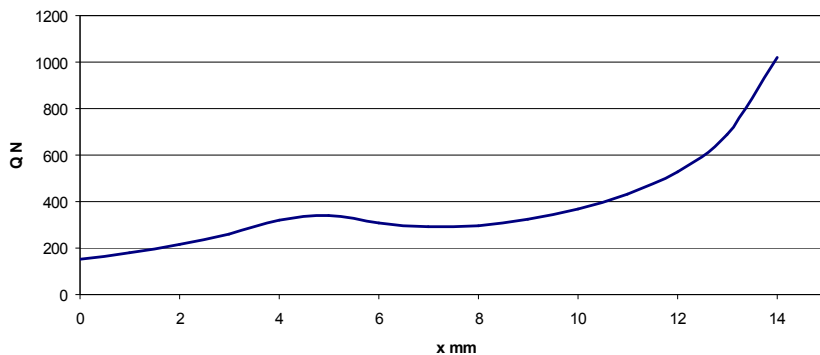
Текс программы:

S=0.000470683	Площадь поперечного сечения катушки
for n=0,14 do	
mi_analyze()	
mi_loadsolution()	
mo_groupselectblock(1)	
fz=mo_blockintegral(19)	
mo_clearblock(1)	Очистка выделенного ранее блока
mo_groupselectblock(2)	
F=mo_blockintegral(1)	Вычисление интеграла Вб*м <sup>2</sup>
print(n,fz,F/S)	Печать хода, силы, потока
if (n<14) then	
mi_selectgroup(1)	
mi_movetranslate(0,-1)	
end	
end	

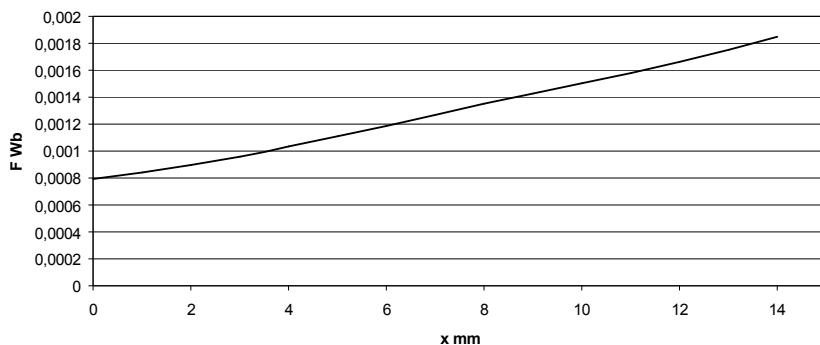
В результате в окне вывода будут величины хода [мм], силы [Н], потока [Вб]. Наличие оператора *mo\_clearblock(1)* необходимо, иначе вычис-

ление второго интеграла будет проводиться по первому и второму блокам, что неверно.

Результат показан на рис. Б.21, на котором сила показана с противоположным (для удобства восприятия) знаком и поток.



а)



б)

Рисунок Б.21 – Сила *a* и поток *б* постоянного электромагнита

**Задача 3.** Определить момент, действующий на ротор муфты с постоянными магнитами в зависимости от его угла поворота. Глубина муфты – 30 мм; внешний диаметр – 80 мм. В качестве постоянных магнитов используются магниты *NiFeB*. Расчетная модель в программе *femm* показана на рис.Б.22. Из рис. Б.22 следует, что при повороте внутренней части муфты (ротора) на 90 градусов, система придет в исходное положение.

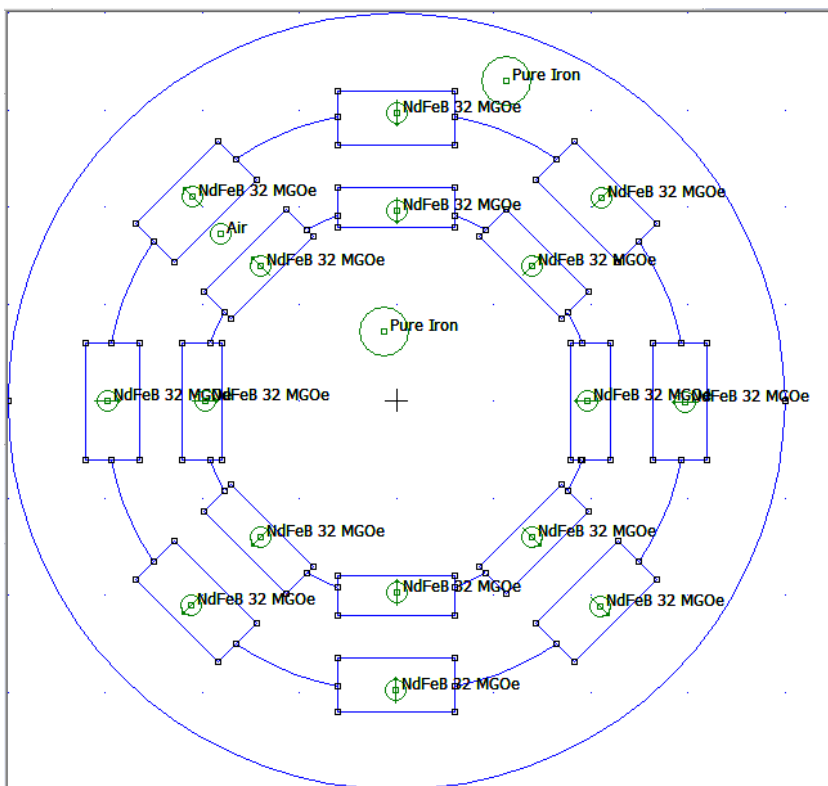


Рисунок Б.22 – Муфта на постоянных магнитах

Так как необходимо вычислить ряд значений моментов при ряде положений ротора, то целесообразно автоматизировать этот процесс.

Отличие данной программы по сравнению с задачей 1, заключается в операторах:

`mz=mo_blockintegral(23)` – вычисление момента (операция №23) на основании тензора Максвелла;

`mi_selectgroup(1)`

`mi_moverotate(0,0,1,4)` – поворот относительно оси с координатами (0, 0) на 1 градус всех элементов (4) выделенного блока `mi_selectgroup(1)` с номером (1).

Результат расчета показан на рис. Б.23.

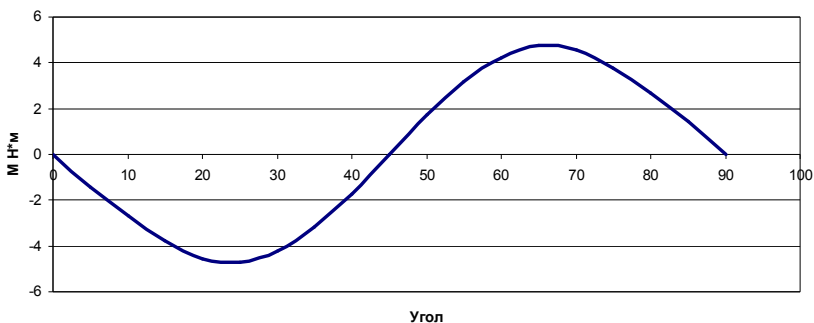


Рисунок Б.23 – Момент ротора в функции угла

Из рис. Б.23 следует, что при вращении ротора на статор будет действовать "тянущий" момент, передающий вращение на вал.

**Задача 4.** Определить потокосцепление катушек электрической машины с постоянным магнитом рис. Б.24 в предположении, что витки равномерно распределены по площади катушки. Глубина модели – 100 мм.

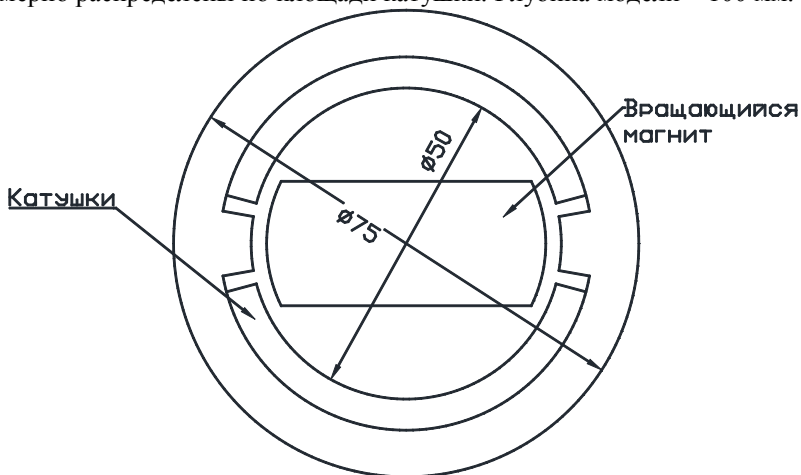


Рисунок Б.24 – Расчетная модель

Данная задача представляет собой комбинацию второй и третьей задач. Центральный магнит оформляется как вращающийся объект, а катушки как объект расчета. В случае если не удастся оформить блок одним выделением при помощи рамки, его можно оформить последовательно через свойства точки, линии, сегмента, материала. При расчете необходимо

иметь учесть, что суммарное потокоцепление (выделение одновременно всей катушки) равно нулю. Как и в задаче 2, система рассчитывает величину  $Вб \cdot м^2$ . Поэтому полученный расчетный результат необходимо разделить на площадь поперечного сечения катушки.

Текст программы:

```
S=0.000359517          Площадь катушки
for n=0,20 do
mi_analyze()
mi_loadsolution()
mo_groupselectblock(2)
F1=mo_blockintegral(1)
mo_clearblock(2)
mo_groupselectblock(3)
F2=mo_blockintegral(1)
print(18*n,F1/S,F2/S)  18 – дискретность угла поворота
if (n<20) then
mi_selectgroup(1)
mi_moverotate(0,0,36,4)
end
end
```

На рис. Б.25 показан поток катушки в функции угла поворота постоянного магнита.

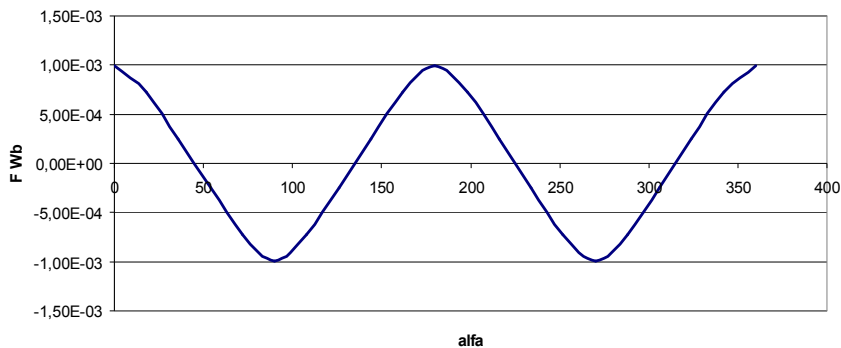


Рисунок Б.25 – Поток катушки в функции угла поворота

**Задача 5.** Определить постоянную горизонтальную составляющую силы, действующую на один из параллельных проводников с током частоты 50 Гц, рис. Б.26, при ряде токов (1000, 2000, 3000, 4000, 5000) А. Глубина модели – 1000 мм. Суммарный ток шин равен нулю.

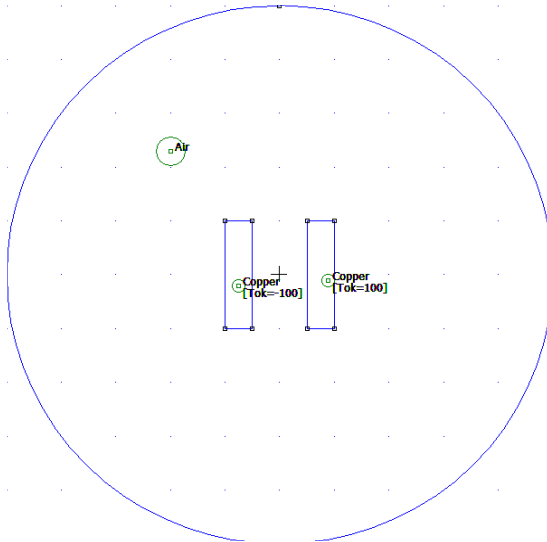


Рисунок Б.26 – Расчетная модель

Геометрические размеры модели:

- размеры шины  $5 \times 20$  мм<sup>2</sup>;
- расстояние между шинами 10 мм;
- глубина 1000 мм;
- граничное условие – нулевой потенциал на удаленной границе

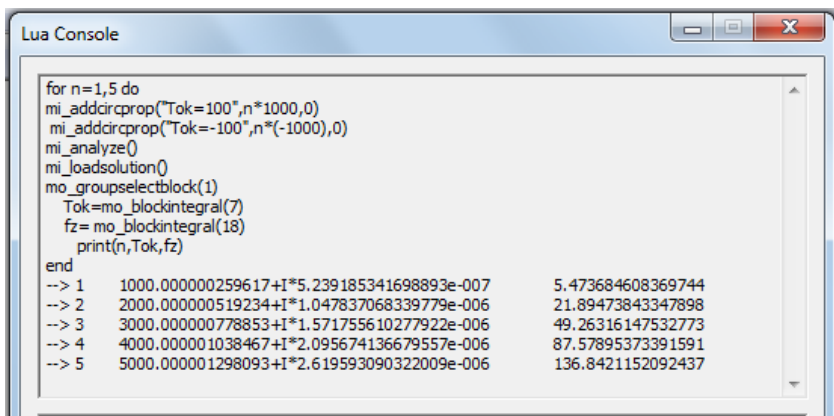
Программа автоматического изменения свойств тока расчетных областей.

```

for n=1,5 do
mi_addcircprop("Tok=100",n*1000,0)      Изменяет значение тока
mi_addcircprop("Tok=-100",n*(-1000),0)  Изменяет значение тока
mi_analyze()
mi_loadsolution()
mo_groupselectblock(1)                   Активирует блок
Tok=mo_blockintegral(7)                  Вычисляет интеграл от плотности тока
fz= mo_blockintegral(18)                  Вычисляет силу
print(n,Tok,fz)
end

```

Результат расчета показан на рис. Б27.



```
for n=1,5 do
mi_addcirprop("Tok=100",n*1000,0)
mi_addcirprop("Tok=-100",n*(-1000),0)
mi_analyze()
mi_loadsolution()
mo_groupselectblock(1)
  Tok=mo_blockintegral(7)
  fz= mo_blockintegral(18)
  print(n,Tok,fz)
end
--> 1    1000.000000259617+I*5.239185341698893e-007    5.473684608369744
--> 2    2000.000000519234+I*1.047837068339779e-006    21.89473843347898
--> 3    3000.000000778853+I*1.571755610277922e-006    49.26316147532773
--> 4    4000.000001038467+I*2.095674136679557e-006    87.57895373391591
--> 5    5000.000001298093+I*2.619593090322009e-006    136.8421152092437
```

Рисунок Б.27 – Результаты расчета

Необходимо учесть, что при переменном токе сила будет изменяться от 0 до значения равного удвоенному среднему значению с частотой 100 Гц.

На левую шину будет действовать такая же сила, но противоположная по знаку.

## Б.2. Задачи расчета электростатических полей

### Б.2.1. Электростатическое поле цилиндров, имеющих различные потенциалы

В примере рассчитывается плоское электростатическое поле двух цилиндров, находящихся под разными потенциалами. Для задания одинаковости потенциала внутри каждого цилиндра используется свойство «Проводник», которое затем присваивается границам цилиндров. В данном случае –  $\pm 1000$  В. Бесконечные внешние границы моделируются при помощи преобразования Кельвина. Расчетная схема и свойства областей показаны на рис. Б.28.

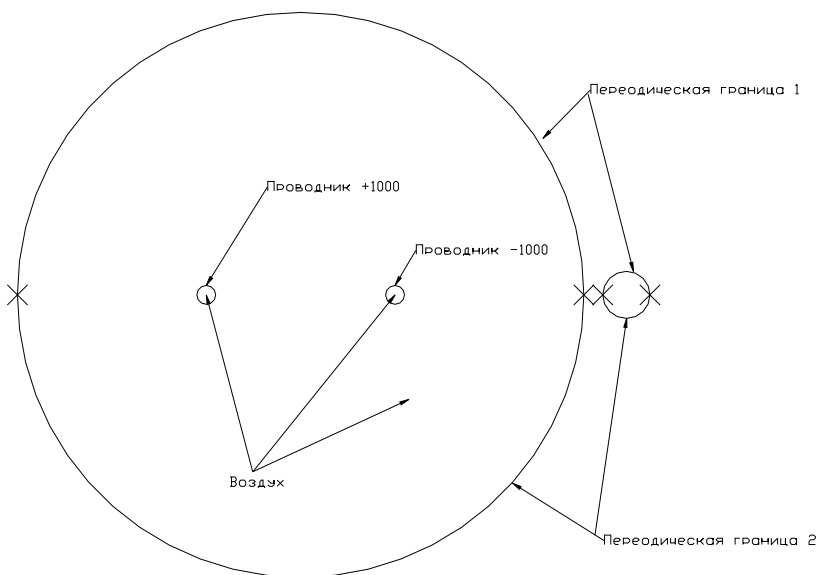


Рисунок Б.28 – Свойства проводников, границ и областей

Расчетная картина напряженности электрического поля с окном «Свойства проводника» показана на рис. Б.29.

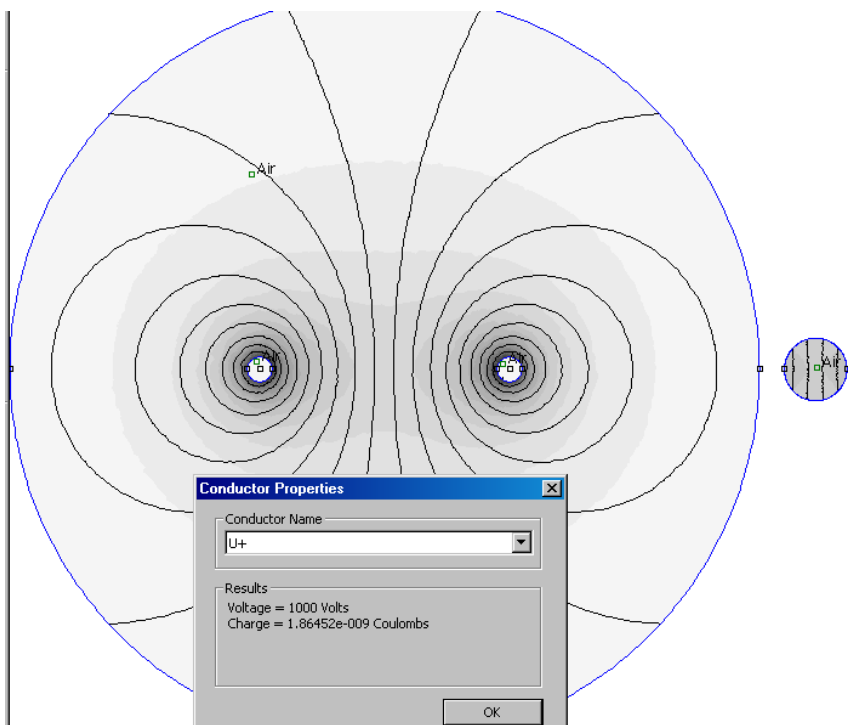


Рисунок Б.29 – Расчетная картина поля

### ***Б.2.2. Электростатическое поле шара, закрепленного над землей на изоляторе***

Расчетная схема в осесимметричной системе координат показана на рис. Б.30. Расстояния указаны в метрах.

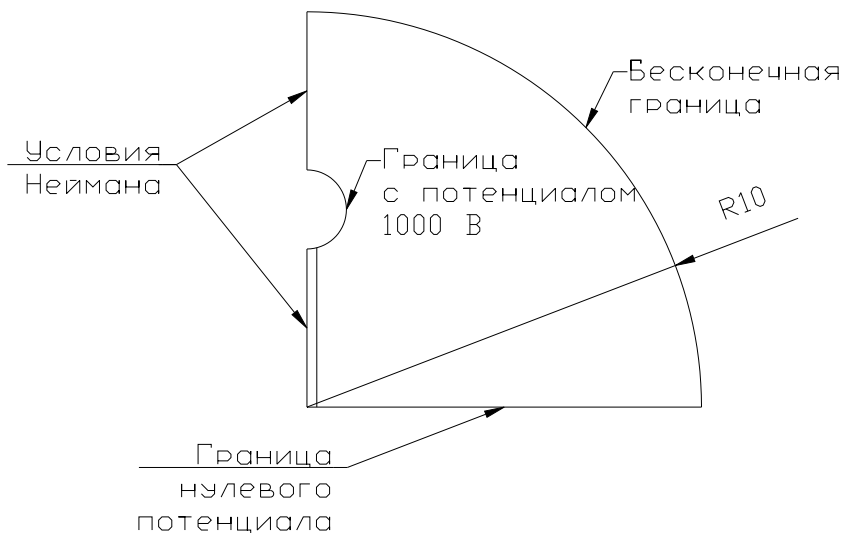


Рисунок Б.30 – Расчетная схема

Граничные условия Неймана заданы в виде опции *Mixed* с коэффициентами  $c_0=0$ ,  $c_1=0$ ; потенциальные границы – *Fixed Voltage*; условия на внешней границе – *Mixed*,  $c_0=8,85 \cdot 10^{-12}/10$ . Окружающая среда – воздух, подставка шара – фарфор. На рис. Б.31 показана картина напряженности электростатического поля и эквипотенциали.

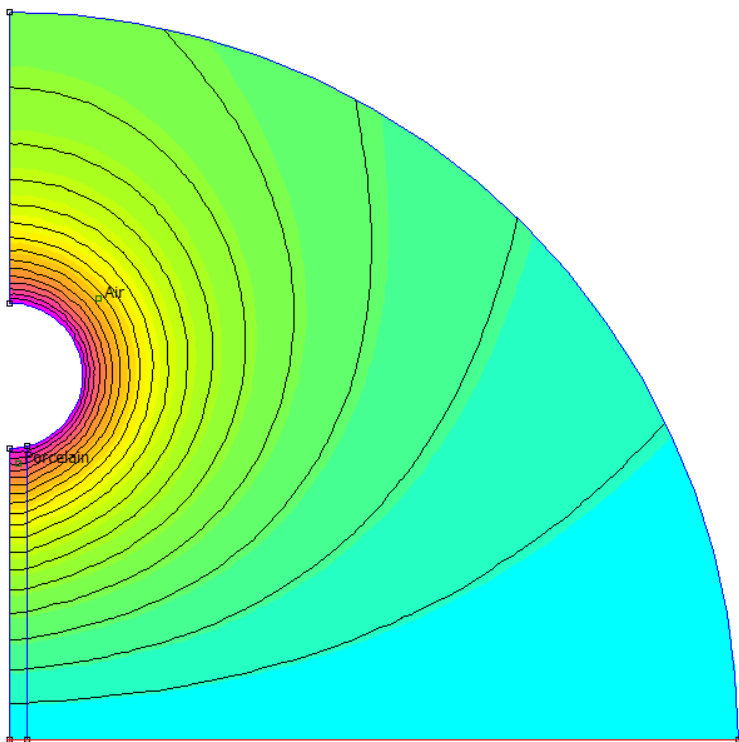


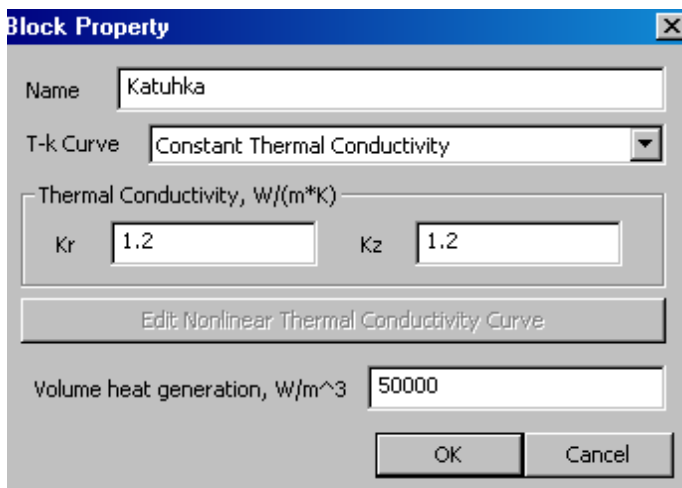
Рисунок Б.31 – Картина напряженности электростатического поля

В задачах такого типа свойство "*Проводник*" желательно применять для эквипотенциальных границ.

### Б.3. Тепловые задачи

#### Б.3.1. Нагрев катушки внутренними источниками тепла

Определить температуру цилиндрической катушки, намотанной на металлический цилиндрический стержень. Коэффициент теплоотдачи с наружной боковой поверхности равен  $12,6 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \text{ } ^\circ\text{C})$ . При этом на внутренней поверхности катушки  $K_t=21,2 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \text{ } ^\circ\text{C})$ ; на верхней поверхности –  $16,38 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \text{ } ^\circ\text{C})$ ; на нижней поверхности –  $8,61 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \text{ } ^\circ\text{C})$ . Температура окружающего воздуха –  $20^\circ\text{C}$ . Катушка нагревается за счет внутренних источников тепла с объёмной мощностью  $5 \cdot 10^4 \text{ Вт}/\text{м}^3$ . Теплопроводность материала катушки –  $1,2 \text{ Вт}/(\text{м } ^\circ\text{C})$ . На рис. Б.32 показано окно задания граничных условий и окно материала катушки.



a)

Рисунок Б.32: a – задание свойств материала

**Boundary Property** [X]

Name:  [OK] [Cancel]

BC Type:  [v]

Fixed Temperature, K:

Heat Flux, W/m<sup>2</sup>:

Convection

$K \frac{\partial T}{\partial n} + h(T - T_0) = 0$     h, W/(m<sup>2</sup>\*K):

To, K:

Radiation

$K \frac{\partial T}{\partial n} + \beta k_{\text{св}}(T^4 - T_0^4) = 0$     Beta:

To, K:

б)

Рисунок Б.32:б – задание граничных условий (продолжение)  
График изотерм приведен на рис. Б.33.

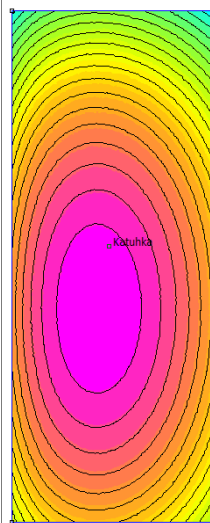


Рисунок Б.33 – График изотерм и температур

Причем, выделяемая мощность равна 37,69 Вт, а отводимая, подсчитанная через интеграл по поверхности – 37,3 Вт (при сетке 0,5 мм).

Среднее превышение температуры по боковой поверхности катушки – 53,6<sup>0</sup>С. В случае если это значение существенно отличается от того, при котором рассчитан коэффициент теплоотдачи с наружной боковой поверхности, то требуется его уточнение и новый расчет.

### ***Б.3.2. Излучение тепла***

Определить мощность, излучаемую нагревателем, который представляет собой константановую спираль, нагретую до 400<sup>0</sup>С и находящуюся в кварцевой оболочке длиной 100 мм. Причем, тепло отдается излучением только с половины поверхности кварцевой оболочки.

В качестве граничных условий приняты условия: теплоизолированная поверхность – *Heat flux*=0; *Fixed temperature*=693 <sup>0</sup>К; *Radiation* –  $\beta=0.8$ ,  $T_0=273$  <sup>0</sup>К. В случае, если поверхность нагревателя находится под одним тепловым потенциалом, то границу нагревателя можно задать как *Проводник*. В этом случае после расчета становится доступным соответствующее окно, показанное на рис. Б.34.

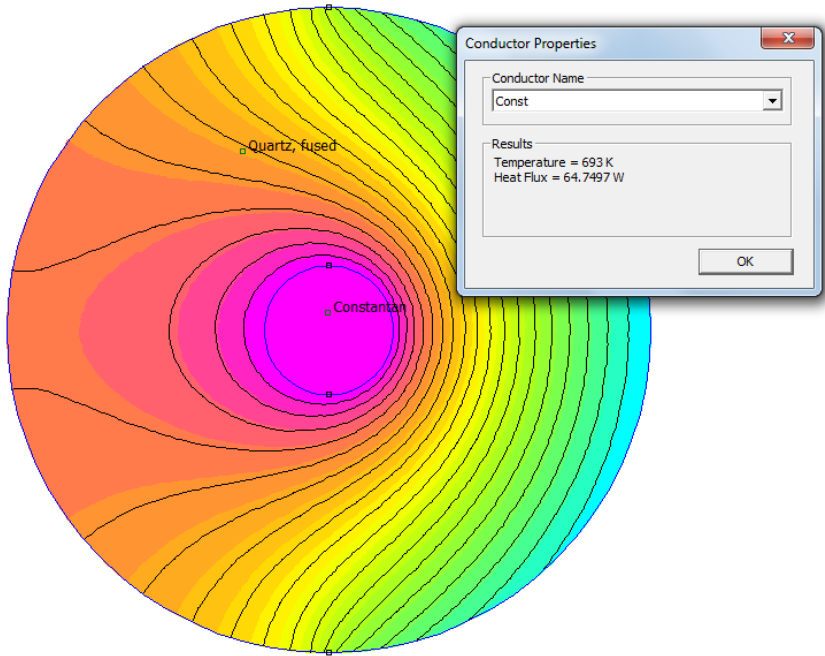


Рисунок Б.34 – Поле изотерм и температур

Суммарный отводимый тепловой поток, излучением – 64,7 Вт.

## Б.4. Задачи растекания тока

### Б.4.1. Определение параметров проводника при протекании по нему переменного тока промышленной частоты

Определить параметры тонкого (1 мм) медного проводника размерами 40×20 мм сложной конфигурации при протекании по нему тока 2000 А промышленной частоты рис. Б.35.

Для решения задачи необходимо создать новый файл, указав тип решаемой задачи, систему координат, частоту и глубину модели для плоской задачи.

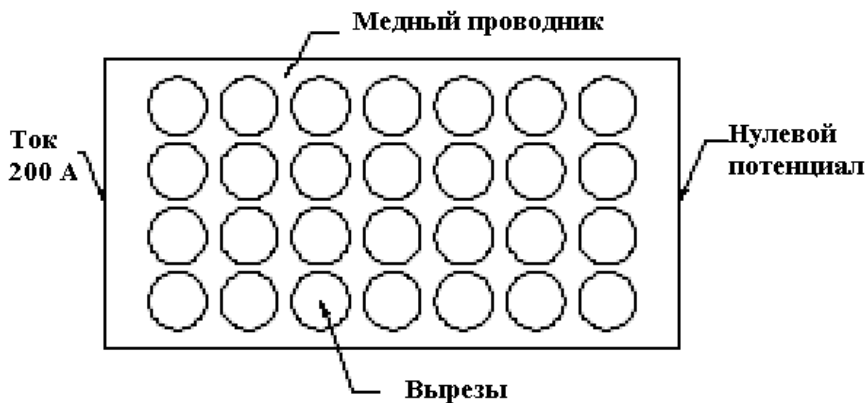
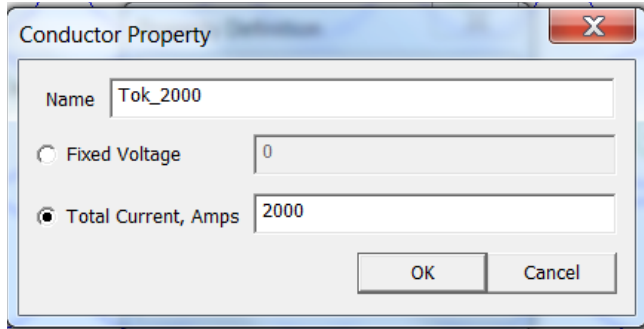


Рисунок Б.35 – Материал, конфигурация и граничные условия расчетной модели

Для задания граничных условий проще всего выбрать команду *Свойства/Проводник* и в отрывшемся окне задать значение тока



Второе граничное условие можно задать с помощью такого же окна *Проводник*, либо с помощью опции *Граница*, выбрав нулевое значение потенциала.

Для моделирования отверстий был создан материал *Air* с нулевой проводимостью. На рис. Б.34 показано распределение модуля плотности тока и окно «свойства проводника», позволяющее определить параметры проводника: падение напряжения, полное сопротивление и т.д.

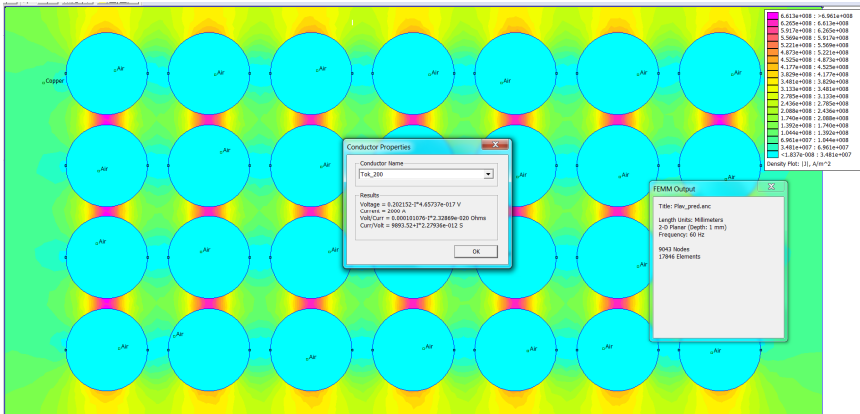


Рисунок Б.36 – Окно «свойства проводника»

#### **Б.4.2. Определение параметров заземления**

Заземленный стержень длиной 2 м находится во влажном грунте под потенциалом 100 В. Определить ток и распределение потенциала в осесимметричной системе координат, приняв, что на расстоянии 100 м потенциал равен нулю. Граничные условия и материал показаны на рис. Б.37.

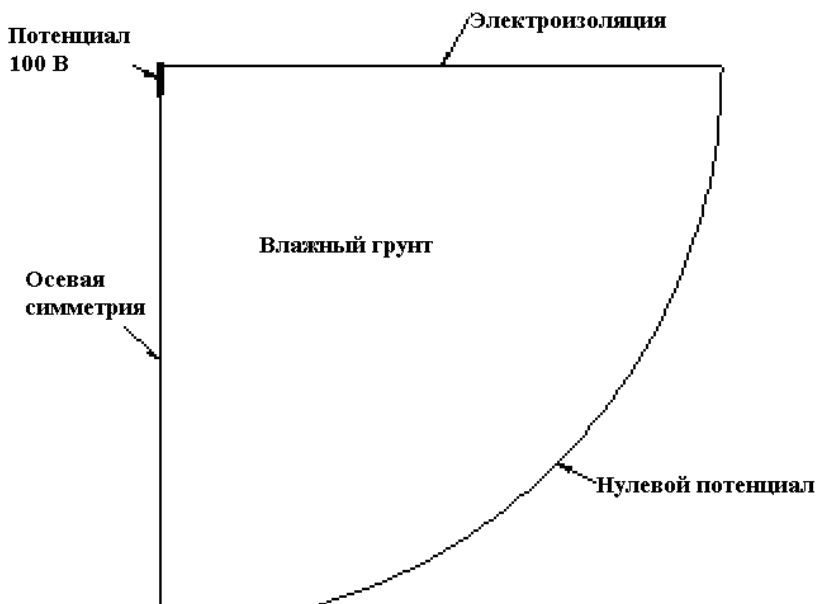


Рисунок Б.37 – Граничные условия и материалы

На рис. Б.37 проводящий стержень задан как проводник. Результаты расчета приведены на рис. Б.38, где показано окно «свойства проводника», параметры системы в заданной точке.

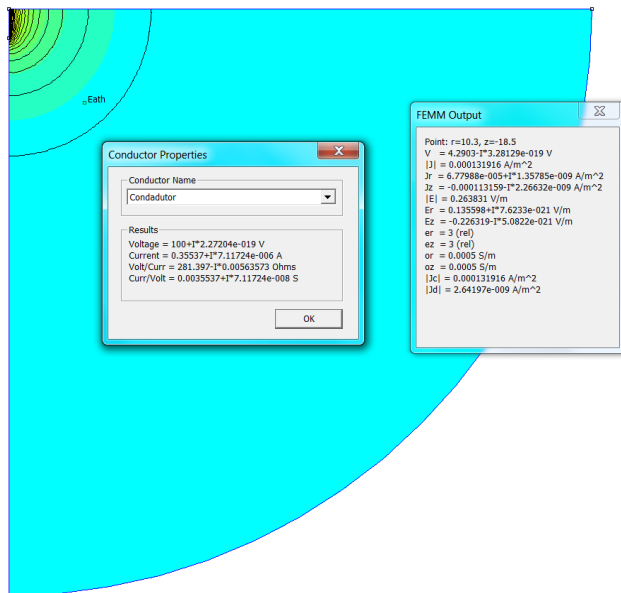


Рисунок Б.38 – Результаты расчета, свойства участка грунта и параметры заземления

На рис. Б.39 показано значение потенциала по глубине грунта.

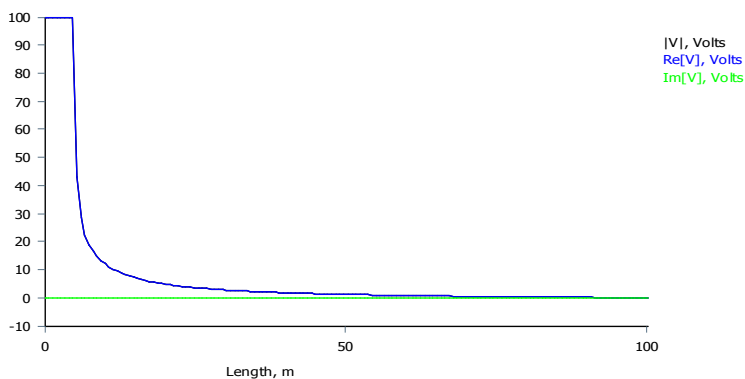


Рисунок Б.39 – Распределение потенциала по глубине грунта

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
Раздел 1. Общие сведения о системе	5
1.1. Состав пакета	5
1.2. Ограничения в применении программы	6
Раздел 2. Уравнения магнитного, электростатического, теплового и токового полей.	7
2.1. Магнитостатическая проблема	7
2.2. Уравнения Максвелла для установившегося синусоидального тока	9
2.3. Электростатическая задача	10
2.4. Тепловая задача	11
2.5. Задача растекания тока в проводнике	12
2.6. Граничные условия	13
2.6.1. Граничные условия для магнитных и электростатических полей	13
2.6.2. Граничные условия для тепловых полей	15
2.6.3. Граничные условия для токовых полей	16
Раздел 3. Конечно-элементный анализ	17
Раздел 4. Работа с САД системой	19
Раздел 5. Магнитостатика	20
5.1. Магнитный предпроцессор	20
5.1.1. Предпроцессор рисования	20
5.1.2. Клавиатура и команды	21
5.1.3. Работа с сеткой	24
5.1.4. Редактирование объектов	25
5.1.5. Формулировка задачи	27
5.1.6. Определение свойств	28
5.1.7. Свойства точки	29
5.1.8. Свойства границ	30
5.1.9. Свойства материалов	33
5.1.10. Библиотека материалов	32
5.1.11. Свойства тока	37
5.1.12. Свойства выбранного блока или границы	38
5.2. Анализ поставленной задачи	39
5.3. Магнитный постпроцессор	40
5.3.1. Манипуляции с изображением	42
5.3.2. Использование клавиатуры	43
5.3.3. Контурные построения	43
5.3.4. Плотность потока	44
5.3.5. Векторное поле	45
5.3.6. Линейное построение	46
5.3.7. Линейные интегралы	48

5.3.8. Интегралы по выделенной области	48
5.3.9. Вычисление сил и моментов	52
5.3.10. Свойства тока	55
Раздел 6. Электростатика	56
6.1. Электростатический предпроцессор	56
6.1.1. Формулировка задачи	56
6.1.2. Определение свойств	57
6.1.3. Свойства точки	58
6.1.4. Свойства границы	58
6.1.5. Свойства материала	60
6.1.6. Свойства проводника	61
6.2. Анализ и решение задачи	62
6.3. Электростатический постпроцессор	62
6.3.1. Контурное построение	63
6.3.2. Построение графика плотности	63
6.3.3. Линейное построение	63
6.3.4. Линейный интеграл	65
6.3.5. Интегралы по блоку	66
6.3.6. Вычисление свойств проводника	67
Раздел 7. Тепловая задача	68
7.1. Тепловой предпроцессор	68
7.1.1. Формулировка задачи	68
7.1.2. Определение свойств	69
7.1.3. Свойства точки	70
7.1.4. Граничные условия	70
7.1.5. Свойства материалов	72
7.1.6. Библиотека материалов	73
7.1.7. Свойства проводника	73
7.2. Анализ задачи	74
7.3. Тепловой постпроцессор	75
7.3.1. Построение контуров	75
7.3.2. Графики плотности	76
7.3.3. Векторное поле	76
7.3.4. Линейные графики	76
7.3.5. Линейный интеграл	77
7.3.6. Интеграл по блоку	78
7.3.8. Проводник	78
Раздел 8. Проблема растекания тока	79
8.1. Предпроцессор растекания тока	79
8.1.1. Формулировка проблемы	79
8.1.2. Определение свойств	80

8.1.3. Свойства точки	80
8.1.4. Граничные условия	81
8.1.5. Свойства материалов	81
8.1.6. Свойства проводников	83
8.2. Анализ задачи	83
8.3. Токовый постпроцессор	84
8.3.1. Построение графиков	84
8.3.2. График эквипотенциалей	85
8.3.3. График плотности	85
8.3.4. Построение графика направления поля	86
8.3.5. Построение линейных графиков	87
8.3.6. Линейный интеграл	88
8.3.7. Объёмный интеграл	89
8.3.8. Расчет проводника	90
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	91
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	92
Приложение А	93
А.1. Моделирование постоянных магнитов	93
А.2. Моделирование открытых границ асимптотическим граничным условием	95
А.3. Моделирование бесконечных границ при помощи преобразования Кельвина	98
А.3.1. Общие положения	98
А.4. Приближённое моделирование слоистых структур	102
А.4.1. Шихтовка вдоль линий магнитного потока	103
А.4.2. Шихтовка поперек линий магнитного потока	104
Приложение Б. Примеры решения задач	106
Б.1. Задачи по расчету магнитных полей	106
Б.2. Задачи расчета электростатических полей	118
Б.2.1. Электростатическое поле цилиндров, имеющих разноименные потенциалы	134
Б.2.2. Электростатическое поле шара, закрепленного над землёй на изоляторе	135
Б.3. Тепловые задачи	138
Б.3.1. Нагрев катушки внутренними источниками тепла	138
Б.3.2. Излучение тепла	140
Б.4. Задачи растекания тока	142
Б.4.1. Определение параметров проводника при протекании по нему переменного тока промышленной частоты	142
Б.4.2. Определение параметров заземления	144
СОДЕРЖАНИЕ	146

Навчально – методичний посібник

БАЙДА Євген Іванович

РОЗРАХУНОК ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ТА ТЕПЛОВИХ ПОЛІВ  
ЗА ДОПОМОГОЮ ПРОГРАМИ FEMM

Для студентів та аспірантів електротехнічних спеціальностей

В авторській редакції

План 2015 р. поз 110/\_\_\_\_\_

Подп. до друку \_\_\_\_\_. Формат 60×84 1/16. Папір друк. №2.

друк – різнографія. Гарнітура Times New Roman. Умов. друк. стор. 5,8. Обл.-вид. арк. 8,0

Тираж 50 экз. Зак.№\_\_\_\_\_. Ціна договірна.

---

Видавничий центр НТУ "ХПИ"

Свідоцтво про державну реєстрацію ДК №116 от 10.07.2000 р.

61002, Харків, вул. Фрунзе, 21.

---

Типографія НТУ "ХПИ", 61002, Харків, ул. Фрунзе, 21.