УДК 519.6

МЕТОД ЗНАХОДЖЕННЯ ТОЧОК РОЗРИВУ ПЕРШОГО РОДУ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

***О. М. Литвин**, д. ф.-м. н., професор*
Українська інженерно-педагогічна академія
academ_mail@ukr.net
***Ю. І. Першина**, к. ф.-м. н., доцент*
Українська інженерно-педагогічна академія
yulia_pershina@mail.ru

Нехай розривна лінійна функція задана на інтервалі [0;1]. Інформацією про функцію $f(x)$, $x \in [0;1]$ є її значення, які можна отримати на довільній скінченній множині точок з інтервалу $[0,1]$. Потрібно знайти точки ε-розриву першого роду.

Визначення 1. Будемо називати розривним інтерполяційним лінійним сплайном на відрізку $[x_k, x_{k+1}],\ k = \overline{1, n-1}$ функцію $S(x) \in C^{-1}[a,b]$, яка визначається наступним чином

$$S(x) = C_k^+ \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} + C_{k+1}^- \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k},\ k = \overline{1, n-1}, \tag{1}$$

де $C_k^+, C_{k+1}^-, k = \overline{1, n-1}$ – параметри сплайну $S(x)$, що визначаються у вигляді односторонніх границь

$$C_k^+ = \lim_{x \to x_k + 0} f(x), \quad C_{k+1}^- = \lim_{x \to x_{k+1} - 0} f(x).$$

Визначення 2 Розривним апроксимаційним лінійним сплайном на відрізку $[x_k, x_{k-1}],\ k = \overline{1, n-1}$ будемо називати розривну функцію, визначену формулою (1), де коефіцієнти C_k^+, C_{k+1}^- сплайна знаходяться методом найменших квадратів в одній із форм

– дискретній формі

$$\sum_{k=1}^{n-1} (f(x_k + 0) - S_k(x_k + 0))^2 + \sum_{k=1}^{n-1} (f(x_k - 0) - S_k(x_k - 0))^2 \to \min_C ;$$

– інтегральній формі

$$\sum_{k=1}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(t) - S(t))^2 \, dt \to \min_C \qquad (2)$$

Теорема 3. Якщо $f(x) \in C^{-1}[0;1]$ є кусково-лінійною функцією і має одну точку розриву першого роду $x^* = \frac{m}{2^k}$, $m, k \in N$, $m < 2^k$, то можна її виявити не більше, ніж за k ітерацій.

Теорема 4. Якщо $f(x) \in C^{-1}[0;1]$ – кусково-лінійна функція і має одну точку розриву першого роду x^*, то виявити її можна за $k = \lceil -\log_2 2\varepsilon \rceil$ ітерацій з похибкою ε.

Приклад. Нехай розривна лінійна функція $f(x)$ має розрив першого роду в точці $x^* = \pi - 3 \approx 0.14159265$. Складемо таблицю результатів виявлення точки ε-розриву, тобто ε - інтервал, та номер ітерації в залежності від заданої похибки ε.

Похибка ε	Номер ітерації, k	ε-інтервал
0,01	6	(0.140625; 0.15625)
0,001	9	(0.140625; 0.1425781)
0,0001	13	(0.14147949; 0.1416016)

Визначення 4. Базисним розривним лінійним сплайном на інтервалі $[0;1]$ будемо називати сплайн

$$B(x) = \begin{cases} h(x), & x \in [0;1], \\ 0, & x \notin [0;1] \end{cases},$$

де $h(x)$ – лінійний неперервний поліном.

Теорема 3. Довільну розривну лінійну функцію $f(x)$ зі скінченною кількістю розривів першого роду можна представити у вигляді суми базисних розривних сплайнів.

Дійсно завжди, знайдуться такі $M \in N$ і параметри $C_k^{\pm}$, що лінійну розривну функцію можна записати у вигляді

$$f(x)=\sum_{k=1}^{M} B(Mx-k;C_k^{\pm}),\quad C_k^{\pm} = f\left(\frac{k}{M}\pm 0\right).$$

Викладемо алгоритм наближення розривної лінійної функції покроково.

Крок 1. Будуємо розривний апроксимаційний лінійний сплайн $S(x)$ на заданих вузлах $x_k,\ k=\overline{1,n}$ (наприклад, рівномірно розташованих) за формулою (1) з невідомими коефіцієнтами $C_k^{+}, C_{k+1}^{-},\ k=\overline{0,n-1}$. Причому на першій ітерації вважаємо, що односторонні значення функції в заданих вузлах збігаються. Знаходимо вектор $C=(C_1^{+},C_2^{-},C_2^{+},C_3^{-},...,C_{n-1}^{+},C_n^{-})$ з умови (2), обчислюючи функціонал $J(C)$.

Крок 2. Знаходимо інтервали, на яких $\int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(t)-Sp_k(t))^2\,dt \neq 0,\ k=\overline{0,n-1}$. Обчислюємо їх довжину $d_k = x_{k+1}-x_k$. Якщо $d_k < 2\varepsilon$, то інтервали (x_k, x_{k+1}) є ε-околом точок розриву (ε-розривами) і ітераційний процес закінчено. Якщо ця умова не виконується, то знайдені інтервали ділимо навпіл. Інші інтеграли дорівнюють нулю, оскільки $f(x)$ є кусково-лінійною функцією. Отримаємо новий набір вузлів. І повторюємо крок 1.

Крок 3. В якості вузлів розривного сплайну обираємо кінці інтервалу (0;1) та точки ε-розриву $x_m^*,\ m=\overline{1,M}$, враховуючи $C_0^{+} = f(0),\ C_m^{\pm} = f(x_m \pm \varepsilon),\ .\ m=\overline{1,M},\ C_{M+1}^{-} = f(1)$.

Цей алгоритм можна модифікувати на випадок нелінійної функції. Оскільки наближувати будемо лінійним розривним сплайном, то крім значення ε, потрібно ще значення точності наближення δ.

Висновок. В роботі введено поняття розривного лінійного апроксимаційного сплайну, та пропонується метод знаходження точок розриву лінійної функції однієї змінної, інформацією про яку є її значення, які можна отримати на довільній скінченній множині точок з інтервалу $[0;1]$. Цей метод може бути розповсюджений на випадок нелінійної розривної функції.