

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

Навчально-методичний посібник
до практичних занять з навчальної дисципліни
Теорія інформації та кодування»
для студентів спеціальності 123 – «Комп'ютерна інженерія»

Затверджено
редакційно-видавничою
радою університету НТУ «ХПІ»,
протокол № 2 від 27.06.2024

Харків – 2024

УДК 004.7

З 33

Рецензенти:

Герман ФЕСЕНКО, д-р. техн. наук, професор,
Харківський національний аерокосмічний університет «ХАІ».
Вячеслав ДАВИДОВ, д-р техн. наук, доцент,
завідувач кафедри інформаційних технологій,
«Університет науки, підприємництва та технологій».

Автори:

М. Й. Заполовський, професор, кандидат технічних наук,
М. В. Мезенцев, доцент, кандидат технічних наук

З 33 Заполовський М. Й. Теорія інформації та кодування /
М. Й. Заполовський, М. В. Мезенцев: навчально-методичний посібник до
практичних занять. – Харків : НТУ «ХП», 2024. – 109 с.

В посібнику розглядаються математичні моделі сигналів та їх дослідження в часовій формі; моделі сигналів у вигляді зображення Фур'є; математична теорія інформації та основи теорії кодування. Розглянуті найбільш поширені методи кодування та їх практична реалізація.

Навчально-методичний посібник призначено для інформаційно-методичного забезпечення лекційних занять, практичних робіт і досліджень у процесі вивчення курсу «Теорія інформації та кодування» студентами всіх форм навчання.

Для студентів спеціальності 123 – «Комп'ютерна інженерія»

Іл. 27 . Табл. 7. Бібліогр. 10 назв.

© М. Й. Заполовський,
М.В. Мезенцев, 2024

ЗМІСТ

Вступ.....	6
1 Дослідження сигналів та систем у часовій формі за допомогою моделювання.....	8
1.1 Мета практичної роботи.....	8
1.2 Теоретична частина.....	8
1.2.1 Пакет прикладних програм MATLAB.....	8
1.2.2 Середовище <i>Simulink</i> пакету <i>MATLAB</i>	8
1.3 Практична частина.....	9
1.3.1 Розв'язання звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР) першого порядку в середовищі <i>Simulink</i> пакету <i>MATLAB</i>	9
1.4 Завдання для самостійної роботи.....	13
Контрольні запитання.....	13
2 Розрахунок частотних характеристик систем.....	15
2.1 Мета практичної роботи.....	15
2.2. Теоретична частина.....	15
2.3. Практична частина.....	17
2.3.1 Знаходження частотних характеристик системи аналітичним методом.....	17
2.3.2 Отримання частотних характеристик системи за допомогою пакету <i>MATLAB</i>	19
2.4 Завдання для самостійної роботи.....	24
Контрольні запитання.....	24
3 Розробка дискретних моделей динамічних систем та їх елементів.....	25
3.1 Мета практичної роботи.....	25
3.2 Теоретична частина.....	25
3.2.1 Застосування засобу <i>Z</i> -перетворення для цифрового моделювання динамічних систем.....	26
3.2.2 Оператори диференціювання і інтегрування.....	29
3.3 Практична частина.....	30

3.4 Завдання для самостійної роботи	31
Контрольні запитання	31
4 Розрахунок спектральних характеристик періодичних сигналів	33
4.1 Мета практичної роботи	33
4.2. Теоретична частина.....	33
4.2.1 Моделі сигналів у вигляді Фур'є зображення.....	33
4.2.2 Форми аналітичного опису сигналів.....	35
4.3 Тригонометричний ряд Фур'є. Знаходження коефіцієнтів ряду Фур'є для $2l$ -періодичної функції	36
4.4 Практична частина	37
4.5 Завдання для самостійної роботи	44
Контрольні запитання	48
5 Розрахунок спектральних характеристик неперіодичних сигналів	50
5.1 Мета практичної роботи	50
5.2. Теоретична частина	50
5.2.1 Неперервне перетворення Фур'є	50
5.2.2 Інтеграл Фур'є	53
5.3 Практична частина	54
5.4 Завдання для самостійної роботи	63
Контрольні запитання	66
6 Визначення показників інформації	67
6.1 Мета практичної роботи	67
6.2 Теоретична частина	67
6.2.1 Кількість інформації	67
6.2.2 Ентропія інформації.....	68
6.2.3 Надмірність повідомлень	70
6.2.4 Види ентропії та їх обчислення	70
6.3 Практична частина	72
6.4 Завдання для самостійної роботи	81
Контрольні запитання	82
7 Кодування сигналів	84

7.1 Мета практичної роботи	84
7.2 Теоретична частина	84
7.2.1 Класифікація кодів	84
7.2.2 Способи подання кодів	85
7.2.3 Оптимальне статистичне кодування	85
7.2.4 Код Шеннона – Фано	86
7.2.5 Код Гаффмана.....	89
7.3 Завдання для самостійної роботи	90
Контрольні запитання	91
8 Перешкодостійке кодування	92
8.1 Мета практичної роботи	92
8.2 Теоретична частина.....	92
8.2.1 Перешкодостійкі коди. Методи кодування	92
8.2.2 Кориговальні коди	93
8.2.3 Лінійні групові коди	95
8.2.4 Код Гемінга	97
8.3 Практична частина	99
8.4 Завдання для самостійної роботи	105
Контрольні запитання	106
Список джерел інформації	107

ВСТУП

Навчально-методичний посібник призначений для інформаційно-методичного забезпечення практичних робіт і досліджень, що проводяться в процесі вивчення теоретичного курсу «Теорія інформації та кодування» для студентів спеціальності 123 – «Комп'ютерна інженерія» всіх форм навчання.

Даний посібник спрямований на розгляд питань, які пов'язані з математичними моделями сигналів та їх дослідженні в часовій і частотній формах, моделей сигналів у вигляді зображень Фур'є, дискретизації та відновленні сигналів, математичної теорії інформації та основ теорії кодування, найбільш поширених методів кодування та їх практичній реалізації з використанням сучасних інформаційних технологій, прикладних програм і пакетів моделювання, які застосовуються при проектуванні автоматизованих систем, інформаційно-обчислювальних комплексів, автоматизованих систем наукових досліджень.

Термін «інформація» часто ототожнюють з поняттями «сигнал» та «дані». Ці поняття не існують одне без одного, але належать до різних категорій. Поняття інформації має багато визначень. Що стосується «даних» (від латинського *datum* – факт), то це сукупність фактів, результатів спостереження, вимірювання будь-яких фізичних властивостей об'єктів, зображених у формалізованому вигляді, кількісному або якісному. Це не інформація, а лише матеріал для отримання періодичної інформації шляхом обробки та інтерпретації.

З математичної точки зору сигнал являє собою функцію, тобто залежність однієї величини від іншої, незалежної змінної. За змістом це інформаційна функція, яка несе повідомлення про фізичні властивості, стан або поведінку будь-якої фізичної системи, об'єкта чи середовища, а метою обробки сигналів можна вважати отримання певних інформаційних відомостей, що відображені в цих сигналах, і перетворення цих відомостей у

форму, зручну для сприйняття і подальшого використання. «Аналіз» сигналів (analysis) розуміється не тільки як їх чисто математичні перетворення, але й отримання на основі цих перетворень висновків про специфічні особливості відповідних процесів та об'єктів.

Цілі аналізу сигналів:

- визначення або оцінка числових параметрів сигналів (енергії, середньої потужності, середньоквадратичного значення та ін.);
- розкладання сигналів на елементарні складові для порівняння властивостей різних сигналів;
- порівняння ступеня близькості, «схожості», «спорідненості» різних сигналів, у тому числі з певними кількісними оцінками.

Мета навчально-методичного посібника є надання студентам основних знань з теоретичних і практичних основ методології теорії інформації та кодування, забезпечення отримання студентами теоретичних знань та придбання практичних умінь, навичок з інформаційно-комунікаційних технологій, сучасних методів і моделей дослідження інформаційних систем, набуття студентами компетентностей для забезпечення обробки даних в інформаційних системах.

Кожна практична робота повинна навчити студентів:

- самостійно працювати з науково-технічною літературою і програмною документацією в галузі аналітичних досліджень та комп'ютерного моделювання;
- отримати навички проведення експериментів, збирання даних та моделювання в комп'ютерних системах;
- вміти застосовувати знання для ідентифікації, формування і розв'язання технічних задач спеціальності, використовуючи методи, що найбільш характерні для досягнення поставлених цілей;
- оцінювати отримані результати та аргументовано захищати прийняті рішення.

Практична робота 1

ДОСЛІДЖЕННЯ СИГНАЛІВ ТА СИСТЕМ У ЧАСОВІЙ ФОРМІ ЗА ДОПОМОГОЮ МОДЕЛЮВАННЯ

1.1 Мета практичної роботи

Набуття практичних навичок розв'язання задачі дослідження за допомогою моделювання пакету *MATLAB*, зокрема набуття практичних навичок розв'язання звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР) та систем ЗДР у середовищі *Simulink* пакету *MATLAB*.

1.2 Теоретична частина

1.2.1 Пакет прикладних програм *MATLAB*. Мова *MATLAB* є високорівневою інтерпретованою мовою програмування, що включає структури даних засновані на матрицях, широкий спектр функцій, інтегроване середовище розробки, об'єктно-орієнтовані можливості та інтерфейси до програм, написаних на інших мовах програмування.

Програми, написані на *MATLAB*, бувають двох типів – функції та скрипти. Функції мають вхідні та вихідні аргументи, а також власний робочий простір для зберігання проміжних результатів обчислень і змінних. Скрипти ж використовують загальний робочий простір. Як скрипти, так і функції не компілюються в машинний код і зберігаються у вигляді текстових файлів. Існує також можливість зберігати так звані *preparsed* програми – функції та скрипти, оброблені у вигляді зручного для машинного виконання. У загальному випадку такі програми виконуються швидше звичайних, особливо якщо функція містить команди побудови графіків.

1.2.2 Середовище *Simulink* пакета *MATLAB*. Система автоматизованого моделювання і параметричної оптимізації *MATLAB/Simulink* застосовується для автоматизації наукових і інженерних розрахунків в області аналізу і синтезу широкого класу динамічних систем з

зосередженими параметрами.

За допомогою *MATLAB/Simulink* можна:

- проводити імітаційне моделювання;
- здійснювати параметричну оптимізацію;
- будувати частотні характеристики.

MATLAB/Simulink орієнтовано на блочно-структурну форму подання математичних моделей. Порядок системи, що інтегрується, обмежується лише доступною пам'яттю і може бути досить великим. На структуру накладається єдине обмеження: вона повинна бути такою, щоб вхідний сигнал будь-якого блоку міг бути обчислений системою до обчислення вихідного сигналу цього ж блоку. Моделювання можна перервати в будь-який момент.

1.3 Практична частина

1.3.1 Розв'язання звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР) першого порядку в середовищі *Simulink* пакету *MATLAB*. Розглянемо розв'язання звичайних диференціальних рівнянь першого порядку на прикладі задачі Коші






$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

з однією залежною змінною $y(x)$.

$$\frac{dx}{dt} + 2x = \sin(t), \quad x(0) = 0, \text{ на інтервалі } [0, 10].$$

Перепишемо це рівняння у такому вигляді:

$$\frac{dx}{dt} = -2x + \sin(t).$$

Для побудови моделі, необхідної для отримання розв'язання цього рівняння, потрібні такі блоки: суматор на два входи  Subtract, джерело синусоїдального сигналу  Sine Wave, блок підсилювача сигналу  Gain, інтегратор  Integrator та осцилограф  Scope для відображення результату.

Процес рішення в середовищі *Simulink* пакету *MATLAB* передбачає наступні дії.

Після запуску системи *MATLAB* і натискання кнопки *Simulink*, у вікні, що відкрилося, необхідно натиснути кнопку «*Create a new Model*». У файлі, що відкрився, можливо створити схему розв'язання рівняння, перетаскуючи за допомогою лівої клавіші миші необхідні блоки з вікна *Simulink Library Browser*.

Для побудови схеми розв'язання рівняння в *Simulink* використовується блок *Integrator* (клас *Continuous*). На його вхід подається похідна, а на виході одержують величину x . Блоки *Sum* (Суматор) і *Gain* (Підсилювач) (клас *Math*) необхідні для формування значення x' відповідно до заданого ЗДР. Для одержання сигналу $\sin(t)$ використовується блок *Sine Wave* (клас *Sources*), у якому необхідно провести налаштування, що відповідають завданню, відкривши блок подвійним натисканням миші або вибравши опцію *Block Parameters* в меню, що з'являється при натисканні правої клавіші миші на блоці. Отримане значення $x(t)$ подається на вхід блоку *Scope*. При відкритті даного блоку з'являється графік розв'язання. Установити масштаби осей, що відповідають отриманому розв'язку, можна, натиснувши кнопку *Autoscale*.

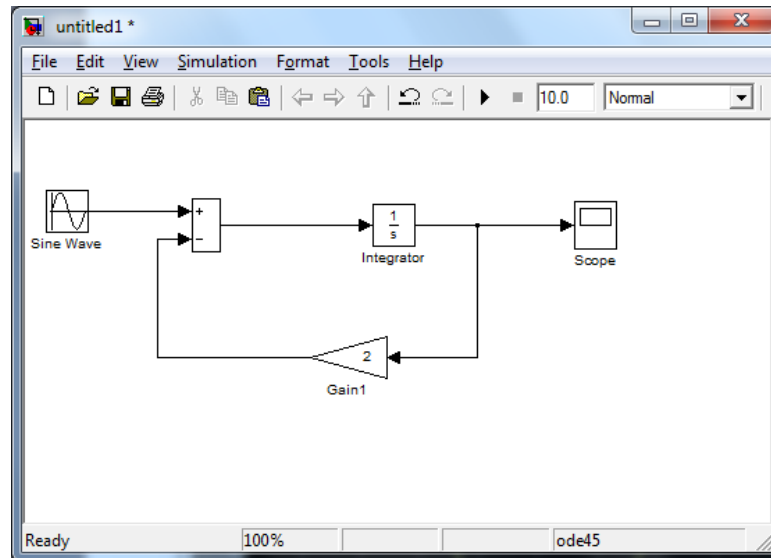


Рисунок 1.1 – Загальний вигляд моделі для розв’язання ЗДР в *Simulink*

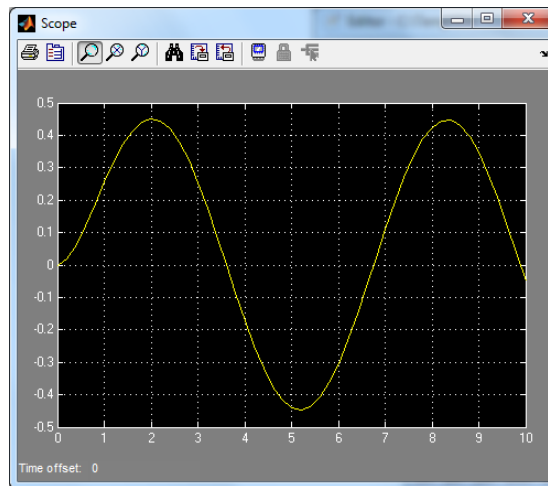


Рисунок 1.2 – Результат розв’язання ЗДР

Для перевірки знайденого числового розв’язання можна скористатися *MATLAB*. Для цього у вікні *Command Window* створіть *M*-Файл для розв’язання завдання (*File\New\M-file*). У вікні, що відкрилося, створіть функцію аналітичного розв’язання завдання, яке збережіть у поточній директорії під ім’ям *f.m* (зазначене ім’я система пропонує за замовчуванням).

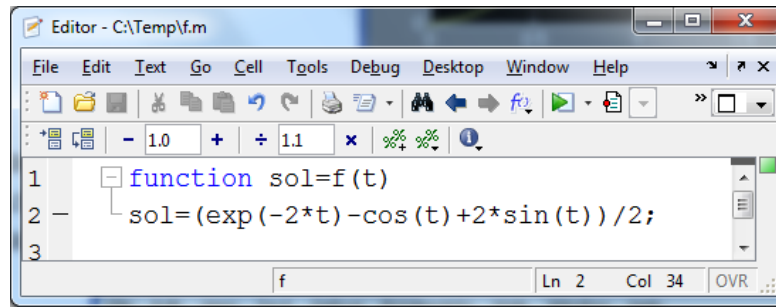


Рисунок 1.3 – Створення функції аналітичного розв’язання

Після цього у командному вікні *MATLAB* наберіть код:

```
>> t=(0:0.1:10);  
>> y=f(t);  
>> plot(t,y)  
>> grid on
```

Після виконання команд відкриється вікно з графіком функції (рис. 1.4).

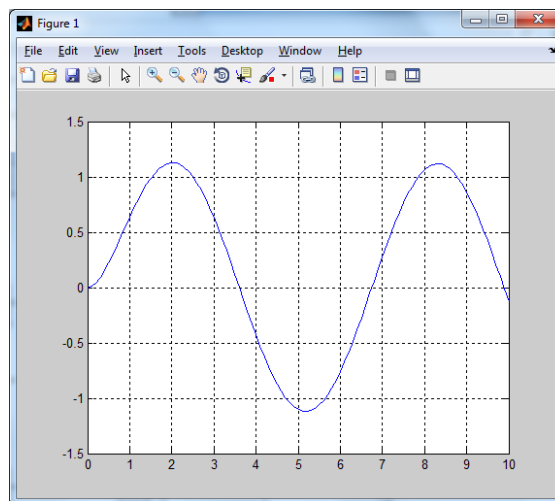


Рисунок 1.4 – Графік аналітичного розв’язання прикладу 1.1

Очевидно, що графіки рис. 1.2 та рис. 1.4 ідентичні.

Аналогічно можливо побудувати схему моделі і для розв’язання системи диференціальних рівнянь.

Для перевірки, рішення рівняння, постільки воно лінійне, можливо вирішити і аналітичним методом, що розглядалося в курсі вищої математики.

1.4. Завдання для самостійної роботи

Отримати схему розв'язання та побудувати графіки в середовищі *Simulink* таких диференційних рівнянь:

$$\begin{array}{l} 1) \left\{ \begin{array}{l} \frac{dy}{dt} = \frac{z}{t}, \\ \frac{dz}{dt} = \frac{2z^2}{t(y-1)} + \frac{z}{t}, \\ y(1) = 0, z(1) = 1/3. \end{array} \right. \quad \text{на } [1 \ 2]. \quad 2) \left\{ \begin{array}{l} \frac{dy}{dt} = (z-y)t, \\ \frac{dz}{dt} = (z+y)t, \\ y(0) = 1, z(0) = 1 \end{array} \right. \quad \text{на } [0 \ 1]. \\ 3) \left\{ \begin{array}{l} \frac{dy}{dt} = \cos(y+2z) + 2, \\ \frac{dz}{dt} = \frac{2}{t+2y^2} + t + 1, \\ y(0) = 1, z(0) = 0.05 \end{array} \right. \quad \text{на } [0 \ 0,3]. \quad 4) \left\{ \begin{array}{l} \frac{dy}{dt} = e^{-(t^2+z^2)} + 2t, \\ \frac{dz}{dt} = 2y^2 + z, \\ y(0) = 0,5, z(0) = 1. \end{array} \right. \quad \text{на } [0 \ 0,3]. \end{array}$$

5) $y'' = -y' / t + y / t^2 + 1, y(3) = 6, y'(3) = 3$ на $[3 \ 5]$.

6) $y'' - y = e^t, y(0) = 0, y'(0) = 0.5$ на $[0 \ 1]$.

7) $y'' - 2y' = t^2 - 1, y(1) = -1/6, y'(1) = -3/4$ на $[1 \ 2]$.

8) $y'' - 2y' = 3e^t, y(0,3) = 1,415, y'(0,3) = 5.83$ на $[0,3 \ 0,6]$.


9) $y'' + y' = t^2, y(1) = -1, y'(1) = 2$ на $[1 \ 2]$.

Контрольні запитання

1. Для чого використовується середовище *Simulink*?
2. Як виконується побудова моделі в *Simulink* для розв'язання диференційного рівняння (системи рівнянь)?

3. Як задати параметри моделювання в пакеті *Simulink*?
4. Як побудувати графік розв'язання рівняння в пакеті *Simulink*?
5. Для чого використовується функція *ode45*?
6. Як необхідно задавати функцію користувача при застосуванні її для розв'язання диференційного рівняння першого та високих порядків за допомогою функції *ode45*?

7. Яку функцію виконує блок інтегратор  Integrator ?

8. Для чого використовується блок осцилографа  Scope в *Simulink*?

9. Для чого використовується блок XY - *Graph* та які у нього параметри?

10. Які блоки - джерела сигналів використовуються в *Simulink*?

Практична робота 2

РОЗРАХУНОК ЧАСТОТНИХ ХАРАКТЕРИСТИК СИСТЕМ

2.1 Мета практичної роботи

Отримати практичні навички визначення частотних характеристик елементів та систем аналітичним методом та за допомогою пакета модулювання *MATLAB*.

2.2. Теоретична частина

Розглянемо елемент (складову) системи, що описується лінійним (лінійаризованим) диференціальним рівнянням такого вигляду:

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = \\ = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t), \end{aligned} \quad (2.1)$$

де $u(t)$ – вхідний процес; $y(t)$ – вихідний процес; $a_i, b_j, (i = \overline{1, n}; j = \overline{1, m};)$ – постійні коефіцієнти; $n, m (n \geq m)$ – постійні числа.

В операторній формі вираз (2.1) може бути записаний в такий спосіб:

$$A(D)y(t) = B(D)u(t),$$

де D – оператор диференціювання $\left(D^{def} = \frac{d}{dt} \right)$. Звідси запишемо

перетворення «вхід-вихід» системи:

$$\frac{y(t)}{u(t)} = \frac{B(D)}{A(D)} = W(D), \quad (2.2)$$

де $W(D)$ – операторна передавальна функція.

Один зі способів моделювання систем полягає в поданні перетворення «вхід-вихід» у вигляді комплексної передавальної функції:

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{B(s)}{A(s)} = W(s), \quad (2.3)$$

яка виходить шляхом застосування перетворення Лапласа до (22) при початкових нульових умовах. Тут s – комплексна змінна. Зв'язок між операторною (2.2) і комплексною (2.3) передавальними функціями можна записати у вигляді

$$W(s) = W(D)|_{D=s}.$$

Комплексні числа, що є коріннями багаточлена $B(s)$, називаються нулями передавальної функції, а корінь багаточлена $A(s)$ – полюсами.

Динамічні властивості систем характеризують реакції на вхідні впливи спеціального виду. Зокрема аналіз виходу системи на одиничний стрибок і δ -функцію (дельта-функцію).

Завдяки широкому застосуванню при дослідженні стійкості динамічних систем набули поширення частотні характеристики.

Нехай на вхід системи з передавальною функцією $W(s)$ подається гармонійний сигнал $u(t) = au \cos(\omega t)$, $t > 0$. У цих умовах має місце така теорема:

Якщо ланка є стійкою, то стала реакція $y(t)$ на гармонійний вплив є функцією тієї ж частоти з амплітудою

$$ay = au |W(i\omega)|$$

і відносним зрушенням за фазою

$$y = \arg W(i\omega),$$

а саме

$$y(t) = au |W(i\omega)| \cos(\omega t + \arg W(i\omega)),$$

де i – комплексна одиниця; $W(i\omega) = W(s)|_{s=i\omega}$ – частотна характеристика.

Частотною характеристикою $W(i\omega)$ стаціонарної динамічної системи називається перетворення Фур'є перехідної функції:

$$W(i\omega) = F[h(t, \tau)] = \int_0^{\infty} w(t - \tau) e^{-i\omega(t - \tau)} d\tau,$$

де $w(t - \tau)$ – імпульсна перехідна функція.

Зв'язок між комплексною передавальною функцією й частотною характеристикою визначається співвідношенням:

$$W(s)|_{s=i\omega} = W(i\omega).$$

При фіксованому значенні ω частотна характеристика є комплексним числом i , отже, може бути подана у вигляді

$$W(i\omega) = A(\omega)e^{i\omega+\psi(\omega)} = U(\omega) + iV(\omega).$$

Тут:

$A(\omega) = |W(i\omega)|$ – амплітудно-частотна характеристика (АЧХ);

$\psi(\omega) = \arg W(i\omega)$ – фазово-частотна характеристика (ФЧХ);

$U(\omega) = \operatorname{Re}W(i\omega)$ – дійсна частотна характеристика (ДЧХ);

$V(\omega) = \operatorname{Im}W(i\omega)$ – уявна частотна характеристика (МЧХ).

Геометричне місце точок $W(i\omega)$ на комплексній площині при зміні ω від ω_0 до ω_1 (зазвичай $\omega_0=0$, $\omega_1=\infty$) називається амплітудно-фазовою характеристикою (АФХ) або частотним годографом Найквіста.

Також має широке практичне значення діаграма Боде (логарифмічна амплітудна характеристика, ЛАХ), що визначається як $L = 20\lg A(\omega)$, вимірюється в децибелах і будується як функція від $\lg \omega$.

2.3. Практична частина

2.3.1 Знаходження частотних характеристик системи аналітичним методом. Частотні (амплітудно-частотна і фазо-частотна) характеристики системи можуть бути визначені на основі відомої передавальної функції.

Нехай передавальна функція має вид:

$$W(p) = \frac{k}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}.$$

Для заданої системи при заданих параметрах (коефіцієнтів передач $k=1.8$ та постійних часу $T_1=T_2=1.6$) передавальна функція буде мати вид:

$$W(p) = \frac{1.8}{(2.56p^2 + 3.2p + 1)} = \frac{a_1}{(b_1p^2 + b_2p + 1)},$$

де $a_1=1.8$; $b_1=2.56$; $b_2=3.2$.

Частотна передавальна функція:

$$\begin{aligned} W(jw) &= \frac{a_1}{(b_1(jw)^2 + b_2(jw) + 1)} = \frac{a_1}{(1 - b_1w^2) + jb_2w} = \\ &= \frac{a_1((1 - b_1w^2) - jb_2w)}{(1 - b_1w^2)^2 + (b_2w)^2} = \frac{a_1(1 - b_1w^2)}{(1 - b_1w^2)^2 + (b_2w)^2} - \frac{jb_2wa_1}{(1 - b_1w^2)^2 + (b_2w)^2} = \\ &= \frac{a_1 * c_1}{(c_2 + c_3)} - j \frac{a_1b_2w}{(c_2 + c_3)}; \end{aligned}$$

$$c_1 = (1 - b_1w^2); \quad c_2 = c_1^2; \quad c_3 = (b_2w)^2.$$

Амплітудно-частотна характеристика:

$$A(w) = \sqrt{\frac{(a_1c_1)^2}{(c_2 + c_3)^2} + \frac{(a_1b_2w)^2}{(c_2 + c_3)^2}}.$$

Фазо-частотна характеристика:

$$Fi(w) = -\arctg \frac{a_1b_2w}{a_1c_1}.$$

Програма для побудови амплітудно-частотної та фазо-частотної характеристик в пакеті MATLAB:

Програма

```

clc
% Вихідні дані системи
a1=1.8;
b1=2.56;
b2=3.2;
% Задання діапазону частоти
w=[0:0.1:10];
c1=(1-b1*w.^2);
c2=c1.^2;
c3=b2^2*w.^2;
% Розрахунок АЧХ
a=sqrt(((a1*c1).^2+b2.^2*w.^2*a1.^2)./(c2+c3).^2);

```

```

% fi=-atan((a1*b2*w)./(a1*c1));
% Побудова графіка
plot(w,a)
% plot(w,fi)
xlabel('Chstota')
ylabel('Amplituda')
grid

```

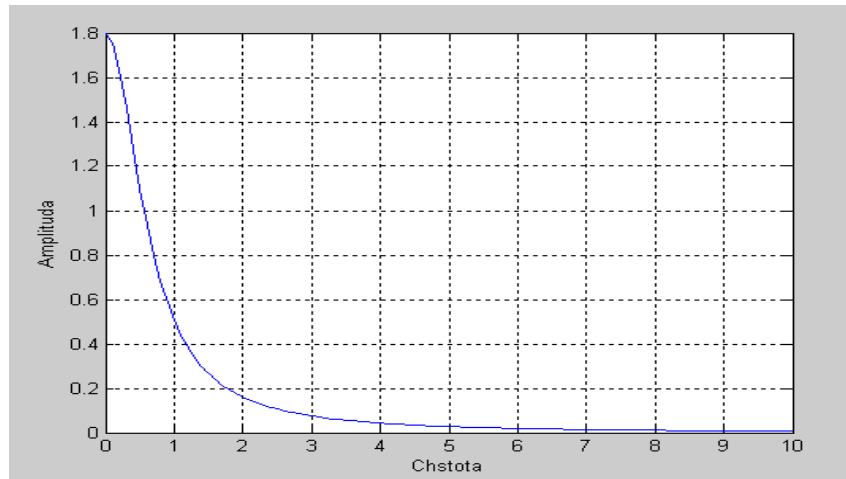


Рисунок 4.1 – Амплітудно-частотна характеристика

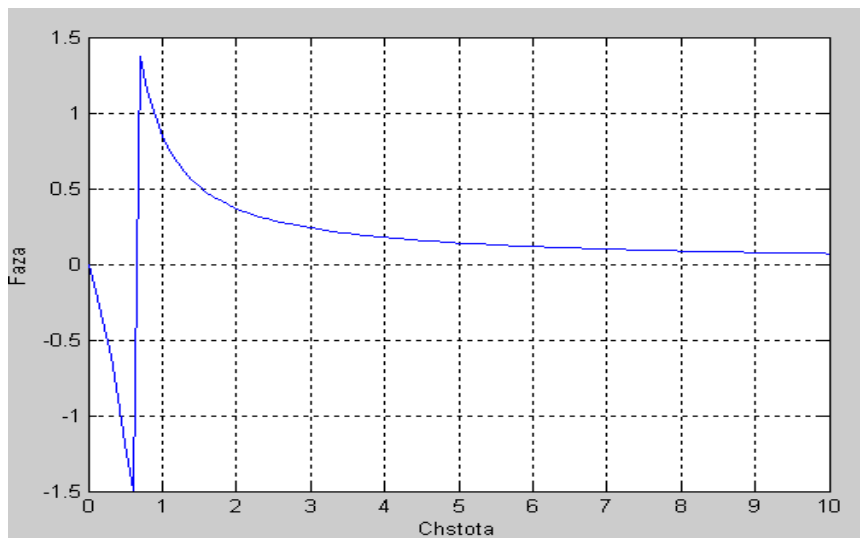


Рисунок 4.2 – Фазо-частотна характеристика

2.3.2 Отримання частотних характеристик системи за допомогою пакету MATLAB

Як об'єкт дослідження розглянемо лінійну динамічну стаціонарну систему з одним входом і одним виходом. При цьому модель одновимірної

системи задана у вигляді комплексної передавальної функції, записаної як відношення поліномів

$$W(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0}.$$

Нехай необхідно:

1. Визначити полюси й нулі передавальної функції:

$$s_i^*, (i = \overline{1, n}), s_j^0, (j = \overline{1, m}).$$

2. Побудувати графіки перехідної й імпульсно-перехідної функції:

$$h(t), w(t).$$

3. Побудувати логарифмічні частотні характеристики: $L(\omega)$.

4. Побудувати частотний годограф Найквіста: $W(i\omega)$, $\omega = [0, \infty]$.

Для розв'язання задачі використаємо пакет прикладних програм (ППП) *Control System Toolbox* пакета *MATLAB*. ППП призначений для роботи з *LTI*-моделями (*Linear Time Invariant Models*) систем управління.

В *Control System Toolbox* є тип даних, що визначають динамічну систему у вигляді комплексної передавальної функції. Синтаксис команди, що створює *LTI*-систему з одним входом і одним виходом, у вигляді передавальної функції:

$$tf([b_m, \dots, b_1, b_0], [a_n, \dots, a_1, a_0]),$$

b_m, \dots, b_0 – значення коефіцієнтів полінома B ,

a_n, \dots, a_0 – значення коефіцієнтів полінома A .

Іншим варіантом одержання графіків динамічних характеристик САУ є використання графічного інтерфейсу ППП *CST-LTIviewer*, виклик якого здійснюється командою *ltiview*, для якої як параметр можна вказати ім'я змінної, що описує *LTI*-об'єкт.

Нехай задана передавальна функція системи

$$W(s) = \frac{s + 2}{3s^3 + 4s^2 + 5s + 3}.$$

Знайдемо її динамічні і частотні характеристики з використанням ППП *Control System Toolbox* системи *MATLAB*. Будемо працювати в командному режимі.

Таблиця 2.1 – Деякі команди *Control System Toolbox*

Синтаксис	Опис
<i>pole</i> (<LTI-об'єкт>)	Обчислення полюсів передавальної функції
<i>zero</i> (<LTI-об'єкт>)	Обчислення нулів передавальної функції
<i>step</i> (<LTI-об'єкт>)	Побудова графіка перехідного процесу
<i>impulse</i> (<LTI-об'єкт>)	Побудова графіка імпульсної перехідної функції
<i>bode</i> (<LTI-об'єкт>)	Побудова логарифмічних частотних характеристик (діаграма Боде)
<i>nyquist</i> (<LTI-об'єкт>)	Побудова частотного годографа Найквіста. Для визначення коренів поліномів ступеня k може також застосовуватися команда <i>roots</i> (P), яка як аргумент P отримує матрицю коефіцієнтів полінома $[p_k, \dots, p_0]$

1. Створимо *LTI*-об'єкт із ім'ям w , для цього виконаємо:

```
>> w=tf([1 2],[3 4 5 3])
```

Transfer function:

$$s + 2$$

$$3 s^3 + 4 s^2 + 5 s + 3$$

2. Знайдемо полюси й нулі передавальної функції з використанням команд *pole*, *zero*.

```
>> pole(w)
```

ans =

$$-0.2639 + 1.0825i$$

$$-0.2639 - 1.0825i$$

$$-0.8055$$

```
>> zero(w)
ans =
    -2
```

3. Побудуємо перехідну функцію командою *step(w)*. Результат її виконання наведений на рис. 2.3.

```
>> step(w)
>> grid on
```

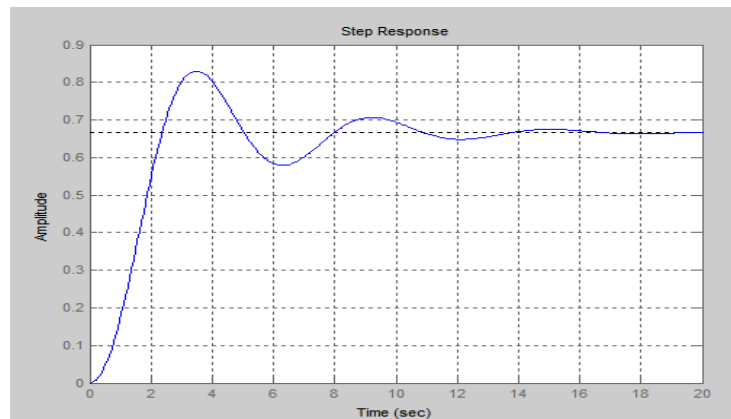


Рисунок 2.3 – Перехідна функція $h(t)$

4. Побудуємо імпульсну перехідну функцію командою *impulse(w)*. Результат показаний на рис. 2.4.

```
>> impulse(w)
>> grid on
```

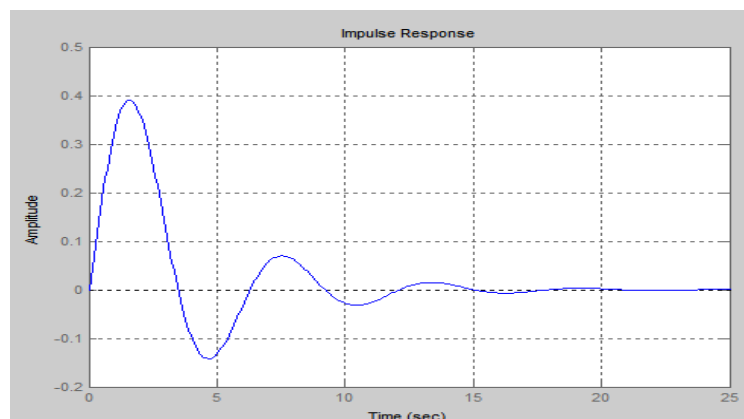


Рисунок 2.4 – Імпульсна перехідна функція

5. Діаграму Бодє одержимо, використовуючи команду *bode(w)* (рис. 2.5).

>> bode(w)

>> grid on

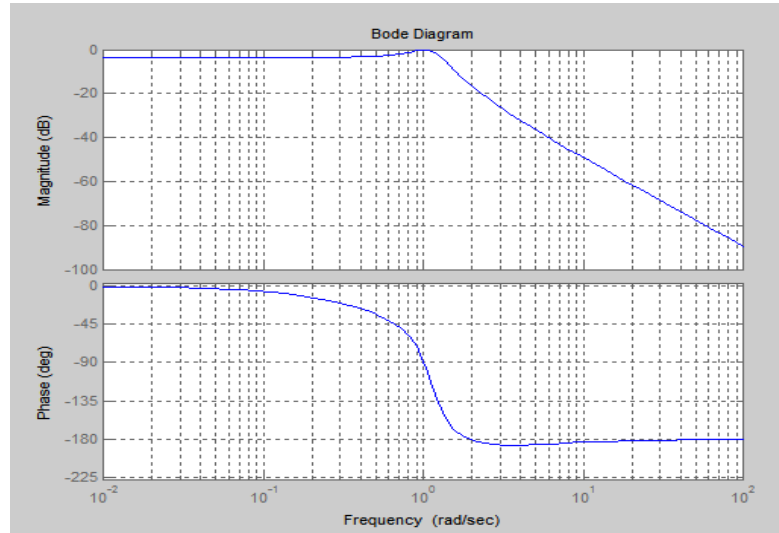


Рисунок 2.5 – Логарифмічні частотні характеристики

6. Визначимо частотний годограф Найквіста, виконавши команду *nyquist(w)* (рис. 2.6).

>> nyquist(w)

>> grid on

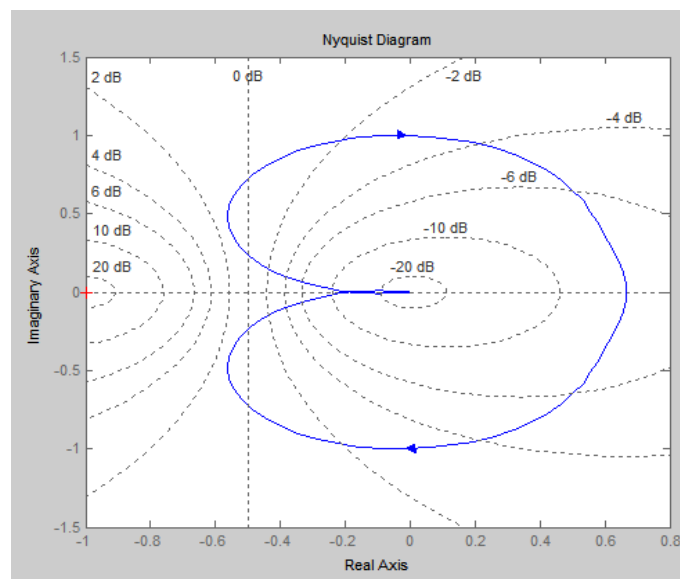


Рисунок 2.6 – Частотний годограф

Аналогічні результати можна одержати, використовуючи команду *ltiview(w)*, з відповідними налаштуваннями в меню «*Plot Configuration*».

2.4. Завдання для самостійної роботи

Виконати наступні операції для передавальної функції вигляду

$$\frac{ds^2 - ms + dm}{ds^3 + (N\%2)s^2 - (N\%2)s + N}$$

де d , m , N – відповідно день, місяць народження та номер за списком у журналі групи студента.

- 1) побудувати перехідну функцію;
- 2) знайти полюси й нулі передавальної функції;
- 3) побудувати імпульсну функцію;
- 4) побудувати діаграму Боде;
- 5) визначити частотний годограф Найквіста.
- 6) аналітично визначити АЧХ та ФЧХ і побудувати графіки функцій.

Контрольні запитання

1. Як записується перетворення між входом і виходом динамічної системи у вигляді передавальної функції?
2. Що таке операторна передавальна функція?
3. Що таке комплексна передавальна функція?
4. Які функції використовуються для дослідження динамічних властивостей системи та її елементів?
5. Що таке нулі передавальної функції та що вони характеризують?
6. Що таке полюси передавальної функції та що вони характеризують?
7. Який зв'язок між комплексною передавальною функцією й частотною характеристикою?
8. Що характеризує діаграма Боде?
9. Для чого використовується годограф Найквіста?

Практична робота 3

РОЗРОБКА ДИСКРЕТНИХ МОДЕЛЕЙ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ ТА ЇХ ЕЛЕМЕНТІВ

3.1. Мета практичної роботи

Ознайомлення з засобами інтегрування систем диференціальних рівнянь, розробка математичних моделей з використанням Z -перетворення, побудова рекурентних співвідношень.

3.2. Теоретична частина

При використанні ПК для моделювання безперервних динамічних систем вихідні диференціальні рівняння або апроксимуються різницевиими рівняннями (в цьому випадку моделювання виконується в часовій області), або піддаються Z -перетворенню (в цьому випадку моделювання виконується в комплексній області).

При моделюванні дискретних систем використовуються тільки цифрові ПК. Застосування для цієї мети аналогових обчислювальних машин пов'язане з суттєвими незручностями і на практиці має місце в дуже рідких випадках.

При моделюванні динамічних систем за допомогою ПК всі обчислення виконуються машиною послідовно в часі. В одному алгоритмічному циклі в першу чергу обчислюють всі входи першого блоку системи, що моделюється, після цього обчислюється вихід цього блоку, після чого здійснюється перехід до другого блоку і так далі доти, поки не буде обчислений вихід всієї системи. Після чого здійснюється перехід до наступного алгоритмічного циклу, коли послідовність обчислень повторюється.

Важливою задачею в цьому випадку є автоматизація вибору величини кроку незалежної змінної при чисельному інтегруванні.

Кожна схема інтегрування характеризується помилкою апроксимації, що може бути використана для управління в процесі обчислень величини кроку рішення задачі.

3.2.1 Застосування засобу Z-перетворення для цифрового моделювання динамічних систем. При моделюванні безперервних систем на ПК такі системи зводяться до еквівалентних дискретних, в яких сигнали перетворюються з аналогової форми в дискретну.

Найбільш поширеним є перетворення сигналу засобом квантування в часі. При цьому аналогова функція $X(t)$ перетворюється в послідовність імпульсів шириною T_n з постійним періодом T :

$$\{X(nt)\} = [X(0t), X(1t), \dots], \quad (3.1)$$

Огинаюча цих імпульсів відповідає вхідному сигналу. Таким чином одержуємо послідовність імпульсів, тривалість яких прагне до нуля.

Квантований за часом сигнал припускає застосування Z-перетворення, яке широко використовується для розв'язання диференціальних і рекурентних рівнянь. Z-перетворення безперервної функції $X(t)$ являє собою операцію перетворення послідовності величини (3.1) у функцію комплексної змінної Z:

$$X(z) = X(0t) + X(1t) Z^{-1} + X(2t) Z^{-2} + X(3t) Z^{-3} + \dots \quad (3.2)$$

З рівняння (3.2) виходить, що Z-перетворення неперервної функції являє собою послідовність ступенів комплексної змінної Z, які мають коефіцієнти, що дорівнюють амплітудним значенням послідовності імпульсів $\{X_n\}$.

Якщо відоме Z-перетворення, то можна отримати рекурентне співвідношення і навпаки – з рекурентного співвідношення отримати Z-перетворення.

Розглянемо отримання рекурентного співвідношення за допомогою операції інтегрування за методом прямокутників:

$$Y_{n+1} = Y_n + \tau X_n. \quad (3.3)$$

Схему перетворення умовно можливо подати у вигляді блок-схеми, яка показана на рис. 3.1.

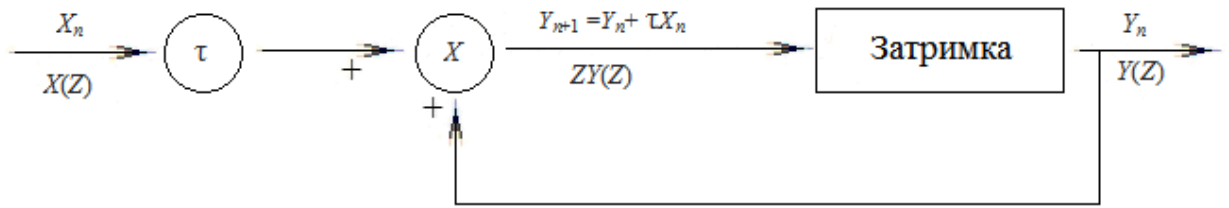


Рисунок 3.1 – Блок-схема процесу інтегрування

За умови, що відомі значення сигналів виходу Y_n і входу X_n , то можна отримати Y_{n+1} , як це показано на рис. 3.1. Якщо пропустимо Y_{n+1} через елемент затримки τ , то отримаємо Y_n . Рівняння (3.3) є рекурентним співвідношенням, яке включає зв'язок між окремими значеннями імпульсних послідовностей $\{Y_n\}$ і $\{X_n\}$.

Позначимо Z-перетворення $\{Y_n\}$ і $\{X_n\}$ як $Y(z)$ і $X(z)$ відповідно. Тоді рівняння (3.3) можемо подати у вигляді

$$Y_n = Y_{n-1} + \tau X_{n-1}. \quad (3.4)$$

Виконаємо Z-перетворення від обох частин виразу (3.4):

$$z\{Y_n\} = z\{Y_{n-1} + \tau X_{n-1}\}. \quad (3.5)$$

Тоді, використовуючи властивості лінійності Z-перетворення, отримаємо

$$Y(z) = z^{-1}Y(z) + \tau z^{-1}X(z) \quad (3.6)$$

або

$$zY(z) = Y(z) + \tau X(z) \quad (3.7)$$

Співвідношення (3.7) може бути подано у вигляді

$$Y(z) = \frac{\tau}{(z-1)} X(z) \quad (3.8)$$

Z-перетворення особливо важливе при одержанні рекурентних співвідношень.

Відношення Z -перетворення виходу лінійної системи до Z -перетворення входу цієї системи називається **імпульсною передавальною функцією**, тобто

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}. \quad (3.9)$$

Тоді для операції інтегрування за формулою прямокутників імпульсна передавальна функція має вигляд:

$$H(z) = \frac{\tau}{(z-1)}. \quad (3.10)$$

Аналогічні співвідношення для операції інтегрування (імпульсні передавальні функції) можна записати і для інших рекурентних співвідношень.

Для формули трапецій

$$H(z) = \frac{\tau(z+1)}{2(z-1)}. \quad (3.11)$$

Отримання рекурентного співвідношення із імпульсної передавальної функції виконується згідно з такою схемою.

Якщо відома імпульсна передавальна функція, яка зв'язує Z -перетворення $X(z)$ і $Y(z)$

$$Y(z) = H(z) X(z),$$

де $H(z)$ – дробово-раціональна функція від z , наприклад

$$Y(z) = \frac{b_0 z^2 + b_1 z + b_2}{a_0 z^2 + a_1 z + a_2} X(z). \quad (3.12)$$

Тоді, поділивши чисельник і знаменник на вищий степінь z (в данному випадку z^2), отримаємо:

$$Y(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} X(z) \quad (3.13)$$

або

$$(a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2})Y(z) = (b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2})X(z). \quad (3.14)$$

На основі рівняння (3.14) отримаємо

$$a_0 Y_n + a_1 Y_{n-1} + a_2 Y_{n-2} = b_0 X_n + b_1 X_{n-1} + b_2 X_{n-2}. \quad (3.15)$$

Тоді рекурентне співвідношення буде мати вигляд

$$Y_n = \frac{1}{a_0} (b_0 X_n + b_1 X_{n-1} + b_2 X_{n-2} - a_1 Y_{n-1} - a_2 Y_{n-2}). \quad (3.16)$$

Таким чином, за допомогою Z -перетворення здійснюється відповідність між імпульсними передавальними функціями (які описують динаміку дискретних систем у комплексній площині) і рекурентними співвідношеннями (які описують динаміку дискретних систем в часовій області).

Для дослідження систем, які описуються диференціальними рівняннями, використовують підхід, що дозволяє подати диференціальне рівняння у вигляді рекурентного співвідношення. Цей підхід базується на використанні Z -перетворення і операторного методу. При цьому використовуються оператори диференціювання та інтегрування.

3.2.2 Оператори диференціювання і інтегрування. Оператором диференціювання називається такий оператор D , для якого

$$Dx = x'; D^2x = x''; D^3x = x''' \text{ і так далі.}$$

Оператором інтегрування називається такий оператор I , для якого

$$Ix = \int_0^t x dt; I^2x = \int_0^t \int_0^\alpha x(t) dt d\alpha \text{ і так далі.}$$

При виборі відповідних значень початкових умов оператор I зворотний оператору D .

Оператор I може бути поданий відповідною імпульсною передавальною функцією, наприклад, у вигляді (3.10), (3.11) чи якоюсь іншою.

3.3. Практична частина

Розглянемо методику отримання рекурентного співвідношення для системи, що описується диференціальним рівнянням вигляду (змінні y та x – функції часу):

$$y'' + 6y' + 5y = x. \quad (3.17)$$

Представимо рівняння (3.17) у вигляді операторів диференціювання i інтегрування (D і I):

$$D^2y + 6Dy + 5y = x;$$

$$(D^2 + 6D + 5)y = x;$$

$$(1 + 6I + 5I^2)y = xI^2.$$

Для операції інтегрування використаємо метод прямокутників з імпульсною передавальною функцією:

$$I = \frac{\tau}{(z-1)},$$

де τ – крок інтегрування.

Тоді

$$\left[1 + 6\frac{\tau}{(z-1)} + 5\left(\frac{\tau}{(z-1)}\right)^2\right]y(z) = \left(\frac{\tau}{(z-1)}\right)^2 x(z). \quad (3.18)$$

Після нескладних перетворень рівняння (3.18) отримаємо

$$[1 + (6\tau - 2)z^{-1} + (1 - 6\tau + 5\tau^2)z^{-2}]y(z) = \tau^2 z^{-2} x(z). \quad (3.19)$$

Використовуючи рівняння (3.19) діючи аналогічно перетворенням (3.14) – (3.16), запишемо рекурентне співвідношення для розв'язання системи (3.17) за допомогою методу прямокутників:

$$y_n + (6\tau - 2)y_{n-1} + (1 - 6\tau + 5\tau^2)y_{n-2} = \tau^2 x_{n-2} \quad (3.20)$$

або

$$y_n = (2 - 6\tau)y_{n-1} - (1 - 6\tau + 5\tau^2)y_{n-2} + \tau^2 x_{n-2}. \quad (3.21)$$

Рівняння (3.21) (рекурентне співвідношення) є дискретною моделлю системи (3.17).

При моделюванні складних систем такі аналітичні розрахунки пов'язані з певними труднощами, оскільки необхідно виконувати розрахунок коренів характеристичного рівняння n -го ступеня.

3.4. Завдання для самостійної роботи

1. Для заданого диференціального рівняння побудувати рекурентне співвідношення методом прямокутників та трапецій.

2. Визначити значення кроку інтегрування.

3. Знайти 10 перших значень розв'язання диференціального рівняння з отриманим кроком інтегрування.

4. Порівняти ці значення з відповідними значеннями, отриманими в пакеті *MATLAB*.

1) $y'' = -y' / t + y / t^2 + 1$, $y(3) = 6$, $y'(3) = 3$ на інтервалі $[3, 5]$.

2) $y'' - y = e^t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0.5$ на інтервалі $[0, 1]$.

3) $y'' - 2y' = t^2 - 1$, $y(1) = -1/6$, $y'(1) = -3/4$ на інтервалі $[1, 2]$.

4) $y'' - 2y' = 3e^t$, $y(0,3) = 1,415$, $y'(0,3) = 5.83$ на інтервалі $[0,3, 0,6]$.

5) $y'' + y' = t^2$, $y(1) = -1$, $y'(1) = 2$ на інтервалі $[1, 2]$.

Контрольні запитання

1. Моделювання динамічних систем на ПК. Z-перетворення. Основні властивості Z-перетворення.

2. Блок-схема процесу інтегрування.

3. Поняття операторів диференціювання та інтегрування. Використання операторів для укладання рекурентних співвідношень розв'язання диференціальних рівнянь.

4. Побудова дискретних моделей системи на підставі Z-перетворення за формулами Ейлера та трапецій.

5. Чисельне інтегрування. Найпростіші засоби чисельного інтегрування. Рекурентне співвідношення для формули прямокутників та трапецій.

6. Вибір кроку інтегрування. Рекомендації щодо вибору кроку інтегрування.

7. Помилки обчислень. Характеристика помилок обчислень.

8. Визначення кроку чисельного інтегрування.

Практична робота 4

РОЗРАХУНОК СПЕКТРАЛЬНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПЕРІОДИЧНИХ СИГНАЛІВ

4.1. Мета практичної роботи

Отримати практичні навички розроблення моделей сигналів у вигляді Фур'є зображення та програмної реалізації у вигляді М - файлів побудови їх спектрів.

4.2. Теоретична частина

4.2.1 Моделі сигналів у вигляді Фур'є зображення. Крім звичного зображення сигналів і функцій у вигляді залежності їх значень від певних аргументів (часу, лінійної або просторової координати тощо) при аналізі й обробці даних широко використовується математичний опис сигналів по аргументах. Можливість такого опису визначається тим, що будь-який як завгодно складний за своєю формою сигнал, що не має нескінченних значень на своєму інтервалі, можна зобразити у вигляді суми більш простих сигналів і, зокрема, у вигляді суми найпростіших гармонічних коливань, що виконується за допомогою перетворення Фур'є.

Математично розкладання сигналу на гармонічні складові описується функціями значень амплітуд і початкових фаз коливань по неперервному або дискретному аргументу. Сукупність амплітуд гармонічних коливань розкладання називають амплітудним спектром сигналу, а сукупність початкових фаз – фазовим спектром. Обидва спектри разом утворюють повний частотний спектр сигналу, що за точністю математичного зображення тотожний динамічній формі опису сигналу.

Крім гармонічного ряду Фур'є, застосовуються й інші види розкладання сигналів: за функціями Уолша, Адамара, Вейвлета та інших. Крім того, існують розкладання за поліномами Чебишева, Лагерра, Лежандра

та інших. Цей спосіб зображення сигналів спирається на те, що в будь-якому сигналі присутні гармонічні складові. Залежно від частоти, складові називаються гармоніками (перша, друга і так далі). Сума гармонік з відповідними вагами становить модель сигналу.

Відзначимо важливу особливість цього способу зображення: замість усього сигналу у всіх його подробицях достатньо зберігати вектор чисел, що являють собою вагові коефіцієнти складових його гармонік. Тобто ці числа повністю характеризують вихідний сигнал, оскільки за ним сигнал можна повністю відновити формулою оберненого перетворення Фур'є.

Сукупність модулів амплітуд і відповідних частот гармонік називають спектром амплітуд, сукупність початкових фаз і відповідних частот гармонік – спектром фаз. Спектр амплітуд і спектр фаз однозначно визначають сигнал.

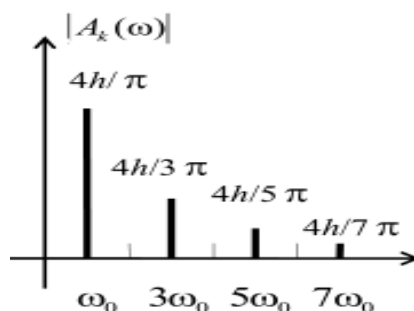


Рисунок 4.2 – Спектральна характеристика періодичного сигналу

На рис. 4.2 наведено графічне зображення спектра амплітуд періодичного сигналу. Характерною особливістю періодичного сигналу є його дискретність. Дискретний спектр не обов'язково означає періодичність функції $x(t)$. Останнє має місце тільки тоді, коли відстань між спектральними лініями кратна основній частоті ω_1 . При аналізі спектрів сигналів основну увагу приділяють визначенню ширини спектра, оскільки цей фактор використовується для узгодження з апаратурою обробки інформації каналом.

Ширина спектра не повинна бути більшою за полосу пропускання каналу. Ширина спектра, як правило, визначається через його енергетичну

характеристику – середню потужність. Середня потужність періодичного коливання і розподілення цієї потужності між окремими гармоніками має вигляд:

$$\overline{x^2} = \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k|)^2.$$

4.2.2 Форми аналітичного опису сигналів. Сигнали можуть бути представлені в часовій, операторній або частотній області, зв'язок між якими визначається за допомогою перетворень Фур'є і Лапласа.

Перетворення Лапласа:

$$L: x(p) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-pt} dt; \quad L^{-1}: x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} x(p)e^{pt} dp.$$

Перетворення Фур'є:

$$F: x(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt; \quad F^{-1}: x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(j\omega)e^{j\omega t} d\omega.$$

При цьому можуть бути використані різні форми зображення сигналів у вигляді функцій, векторів, матриць, геометричне та інші. При описі випадкових процесів у часовій області використовується так звана кореляційна теорія випадкових процесів, а при описі в частотній області – спектральна теорія випадкових процесів.

З урахуванням парності функцій і відповідно до формул Ейлера

$$e^{j\omega\tau} = \cos(\omega\tau) + j\sin(\omega\tau); \quad e^{-j\omega\tau} = \cos(\omega\tau) - j\sin(\omega\tau),$$

можна записати вирази для кореляційної функції $R_x(\tau)$ та енергетичного спектра (спектральної щільності) випадкового процесу $S_x(\omega)$, які пов'язані перетворенням Фур'є або формулами Вінера – Хинчина

$$R_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega)e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_x(\omega)\cos(\omega\tau)d\omega;$$

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau = 2 \int_0^{\infty} R_x(\tau)\cos\omega\tau d\tau.$$

Слід узяти до уваги: якщо сигнал періодичний, то час розгляду становить один період сигналу; якщо сигнал неперіодичний, то періодом сигналу вважається весь час його розгляду.

4.3 Тригонометричний ряд Фур'є. Знаходження коефіцієнтів ряду Фур'є для $2l$ -періодичної функції

Функцію $f(x)$ називають періодичною з періодом T , якщо $f(x)$ визначена на всій числовій осі і для будь-якого $x \in (-\infty, +\infty)$ відповідає $f(x+T) = f(x)$. Для того, щоб отримати графік функцій $f(x)$, достатньо побудувати її графік на будь-якому відрізку довжини T , а потім періодично продовжити його на всю числову вісь. Якщо $f(x)$ – періодична функція з періодом T , то $f(x) = f(x+T) = f(x+nT)$, де n – будь яке ціле число.

Тригонометричним рядом називають функціональний ряд виду:

$$\frac{a_0}{2} + \left(a_1 \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right) + b_1 \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) \right) + \left(a_2 \cos\left(\frac{2\pi x}{l}\right) + b_2 \sin\left(\frac{2\pi x}{l}\right) \right) + \dots, \quad (4.1)$$

де $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots$, – дійсні числа, $l \in (0, +\infty)$.

У скороченому запису

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right). \quad (4.2)$$

Числа $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots$, називають коефіцієнтами тригонометричного ряду.

Оскільки члени ряду є неперервними функціями періоду $2l$, то і його сума також є періодичною функцією з періодом $2l$.

За умови, якщо тригонометричний ряд збігається до функції $f(x)$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right) \quad (4.3)$$

то його можливо інтегрувати почленно на проміжку $[-l, l]$. Тоді:

$$\int_{-l}^l f(x) dx = \int_{-l}^l \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{-l}^l a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx + \int_{-l}^l a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx \right). \quad (4.4)$$

Враховуючи, що $\int_{-l}^l a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx = 0$, $\int_{-l}^l a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx = 0$, отримаємо:

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx. \quad (4.5)$$

В результаті перетворень рівняння (4.3), враховуючи ортогональність тригонометричної системи, отримаємо:

$$a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right) dx, \quad (4.6)$$

$$b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) dx. \quad (4.7)$$

Тригонометричний ряд, у якому коефіцієнти визначено за формулами (4.5) - (4.7) називається тригонометричним рядом Фур'є, а коефіцієнти $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots$ – коефіцієнтами Фур'є.

Якщо задано $2l$ -періодичну функцію $f(x)$, яка є інтегрованою на періоді, то можна обчислити за формулами (4.5) - (4.7) коефіцієнти і побудувати її ряд Фур'є. При цьому слід керуватись теоремою Діріхле: якщо функція $f(x)$ є періодичною з періодом $2l$ і задовольняє на проміжку $[-l, l]$ умови Діріхле, то ряд Фур'є функції $f(x)$ збігається на $[-l, l]$ і його сума

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right)$$

в точках неперервності функції $f(x)$ дорівнює $f(x)$, а в точках розриву – функції $f(x)$

$$S(x) = \frac{1}{2} (f(x+0) + f(x-0)).$$

4.4 Практична частина

Приклад _1. Задано неперервну функцію $f(x) = 3(1-x)/5$ в інтервалі $(-3, 3)$.

Необхідно:

- розкласти функцію $f(x)$ в ряд Фур’є;
- розробити програму (M-файл) для побудови графіків суми ряду Фур’є і функції $f(x)$;
- проаналізувати вплив числа гармонік на результат апроксимації функції $f(x)$.

Розв’язання.

Продовжимо функцію $f(x)$ періодично на всю числову вісь відповідно до заданого інтервалу з періодом $3 - (-3) = 6$. В результаті такого продовження отримали періодичну функцію, яка задовольняє умови Діріхле. Знайдемо коефіцієнти Фур’є функції $f(x)$. Оскільки $2l = 6$, $l = 3$.

Для розрахунку коефіцієнтів a_0, a_n, b_n використаємо рівняння (4.5)–(4.7).

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx = \frac{1}{3} \int_{-3}^3 \left(\frac{3-3x}{5} \right) dx = \frac{3}{15} \int_{-3}^3 x dx + \frac{3}{15} \int_{-3}^3 dx = \frac{x^2}{10} \Big|_{-3}^3 + \frac{1}{5} x \Big|_{-3}^3 = \frac{6}{5}; \\
 a_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right) dx = \frac{1}{3} \int_{-3}^3 \left(\frac{3-3x}{5} \right) \cos\left(\frac{\pi n x}{3}\right) dx = \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} u = \frac{3-3x}{5}, du = \left(\frac{3-3x}{5} \right)' dx = -\frac{3}{5} dx \\ dv = \cos\left(\frac{\pi n x}{3}\right) dx, v = \int \cos\left(\frac{\pi n x}{3}\right) dx = \frac{3}{\pi n} \sin \frac{\pi n x}{3} \end{array} \right\} = \\
 &= \left(\frac{3(3-3x)}{15\pi n} \sin \frac{\pi n x}{3} \right) \Big|_{-3}^3 - \frac{1}{3} \int_{-3}^3 \left(-\frac{3}{5} \right) \frac{3}{\pi n} \sin \frac{\pi n x}{3} dx = \\
 &= \frac{3-9}{5\pi n} \sin \pi n - \frac{3+9}{5\pi n} \sin(-\pi n) - \frac{3}{5\pi n} \frac{3}{\pi n} \cos \frac{\pi n x}{3} \Big|_{-3}^3 = \\
 &= -\frac{9}{5\pi^2 n^2} (\cos(\pi n) - \cos(-\pi n)) = \left\| \cos(\pi n) = \cos(-\pi n) = (-1)^n \right\| = \\
 &= \frac{9}{5\pi^2 n^2} ((-1)^n - (-1)^n) = 0.
 \end{aligned}$$

У процесі перетворення враховано, що задана функція $f(x)$ парна; $\cos\left(\frac{\pi nx}{l}\right)$ – парна, $\sin\left(\frac{\pi nx}{l}\right)$ – непарна функції. Добуток парних функцій дає парну функцію, добуток парної функції на непарну – непарну функцію.

Аналогічні перетворення виконаємо і для знаходження b_n , враховуючи те, що $\cos(\pi n) = \cos(-\pi n) = (-1)^n$, $\sin(\pi n) = \sin(-\pi n) = 0$.

В результаті отримаємо:

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx = \frac{18}{5\pi n} (-1)^n.$$

Таким чином, для кожного x заданого інтервалу $[-3, 3]$ функція $f(x)$ розкладається в ряд Фур'є згідно за формулою:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right) \right) = \frac{3}{5} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{18}{5\pi n} (-1)^n \sin \frac{\pi nx}{3}.$$

Програма (М-файл) для побудови графіків суми ряду Фур'є і функції $f(x)$.

Програма AF_1.m

```
y=0;
x=[-10:0.01:10];
for n=1:200% графіки приведено для варіантів
%числа гармонік 5 і 200
y=y+(18/(5*pi*n))*(-1)^n*(sin(pi*n*x/3));%сума ряду
y1=y+3/5;
%hold on
end
figure
plot(x,y1)
xlabel('x')
ylabel('y1')
grid
y2=(3/5)-((3*x)/5); %задана функція
figure
plot(x,y2)
xlabel('x')
ylabel('y2')
grid
```

Результат виконання наведено на рис. 4.1 – 4.2.

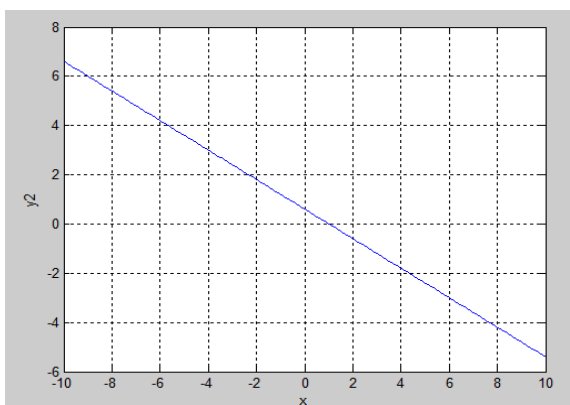


Рисунок 4.1 – Графік функції $f(x)$

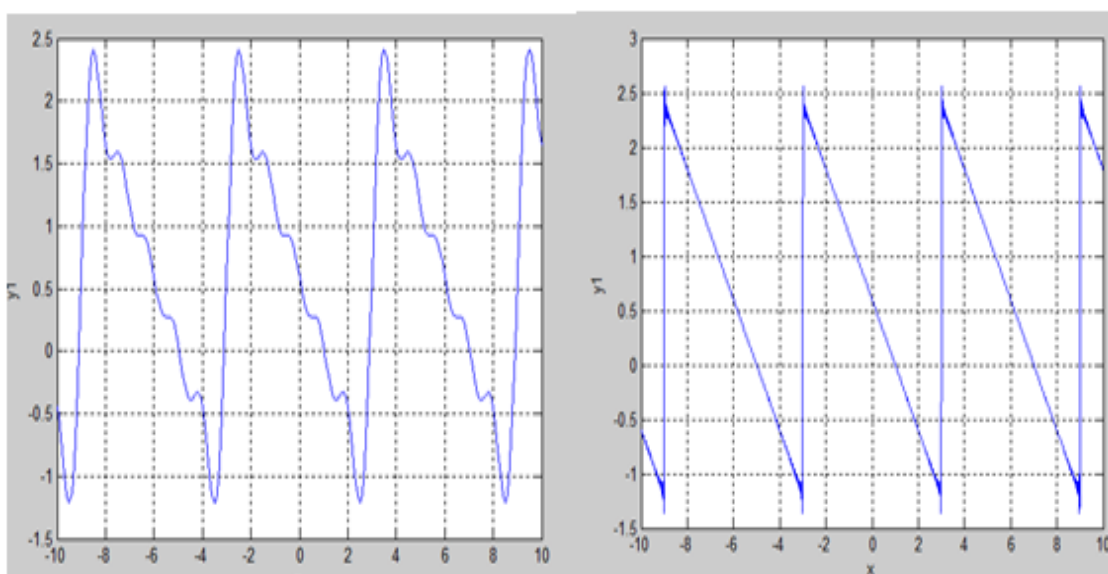


Рисунок 4.2 – Графіки суми ряду Фур'є при $n = 5$ і $n = 200$

Згідно з отриманим співвідношення сума ряду має вираховуватись від одиниці до нескінченності числа гармонік. Графіки приведені для випадку врахування 5-ти і 200-т гармонік (рис. 4.2). Задовільний результат – при врахуванні 200-от гармонік. Порівняння графічних залежностей (заданої і отриманих) дає підставу стверджувати, що отримані співвідношення адекватно відображають процес зображення заданої функції рядом Фур'є.

Приклад 2. Функція $f(x)$ задана графічно (рис. 4.3) .

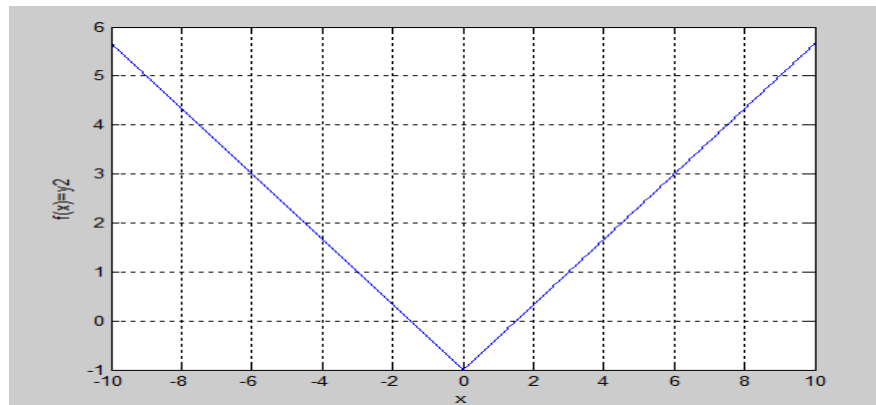


Рисунок 4.3 – Графік функції $f(x)$

Необхідно:

- розкласти функцію $f(x)$ в ряд Фур'є в інтервалі $(-3, 3)$;
- розробити програму (M-файл) для побудови графіків суми ряду Фур'є і функції $f(x)$;
- проаналізувати вплив числа гармонік на результат розкладання функції $f(x)$.

Розв'язання.

З рис. 4.3 видно, що графік функції $f(x)$ є симетричним відносно осі y . Значить, функція $f(x)$ є парною та її ряд Фур'є не містить синусів.

Знайдемо рівняння прямої, яка проходить через дві точки $(0, -1)$ та $(3, 1)$.

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}; \frac{x - 0}{3 - 0} = \frac{y + 1}{2}; y = \frac{2}{3}x - 1.$$

Період функції: $2l = 3 - (-3) = 6$; $l = 3$.

Використаємо методику Знаходження коефіцієнтів ряду Фур'є для парних і непарних $2l$ -періодичних функцій.

Функція $f(x)$ називається парною, якщо $f(-x) = f(x)$, і непарною, якщо $f(-x) = -f(x)$.

Якщо функція $f(x)$ є парною, то $f(x) + f(-x) = 2f(x)$. Для парних функцій

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx.$$

Якщо функція $f(x)$ є непарною, то $f(x) + f(-x) = f(x) - f(x) = 0$. Для непарних функцій

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0.$$

Якщо функція $f(x)$ є $2l$ -періодичною кусково-гладкою або кусково-монотонною парною функцією, тоді коефіцієнти для розкладання $f(x)$ в ряд Фур'є набудуть вигляду:

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x)dx = \frac{2}{l} \int_0^l f(x)dx.$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx; \text{ парна функція}$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx = 0. \text{ непарна функція}$$

Якщо $f(x)$ функція парна, то

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right);$$

$$a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(x)dx;$$

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx, b_n = 0, n = 1, 2, \dots$$

Особливість – ряд Фур'є парної функції не містить синусів.

Аналогічно, якщо $f(x)$ є $2l$ -періодичною кусково-гладкою або кусково-монотонною непарною функцією, то $f(x)$ розкладається в ряд Фур'є, який містить лише синуси:

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx = 0;$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx = 0;$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx.$$

Якщо $f(x)$ функція не парна, то:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right);$$

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx, n = 1, 2, \dots, a_0 = 0, a_n = 0.$$

Знаходимо коефіцієнти Фур'є.

$$a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx = \frac{2}{3} \int_0^3 \left(\frac{2}{3}x - 1 \right) dx = \frac{4}{9} \int_0^3 x dx - \frac{2}{3} \int_0^3 dx = \frac{4x^2}{18} \Big|_0^3 - \frac{2}{3} x \Big|_0^3 = 0;$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{\pi n x}{l} dx = \frac{2}{3} \int_0^3 \left(\frac{2}{3}x - 1 \right) \cos \frac{\pi n x}{l} dx = \\ &= \left(\frac{2(2x-3)3}{9\pi n} \right) \sin \frac{\pi n x}{3} \Big|_0^3 - \frac{2}{3} = \frac{4x^2}{18} \Big|_0^3 - \frac{2}{3} \int_0^3 \frac{2}{3} \frac{3}{\pi n} \sin \frac{\pi n x}{3} dx = \\ &= \frac{2}{\pi n} \sin(\pi n) + \frac{2}{\pi n} \sin(0) + \frac{4}{3\pi n} \frac{3}{\pi n} \cos \frac{\pi n x}{3} \Big|_0^3 = \\ &= \frac{4}{\pi^2 n^2} (\cos(\pi n) - \cos(0)) = \left\| \cos(\pi n) = (-1)^n, \cos(0) = 1 \right\| = \frac{4}{\pi^2 n^2} \left((-1)^n - 1 \right); \end{aligned}$$

$$b_n = 0.$$

У результаті отримуємо розкладання функції у вигляді ряду Фур'є на проміжку $x \in (-3, 3)$.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{\pi n x}{l} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi^2 n^2} \left((-1)^n - 1 \right) \cos \frac{\pi n x}{3}, \quad x \in (-3, 3).$$

Програма (М-файл) для побудови графіків суми ряду Фур'є і функції $f(x)$.

Програма AF_2.m

y=0;

```

x=[-10:0.01:10];
for n=1:200 %графік приведено для варіанту
%числа гармонік 200
y=y+(4/(pi^2*n^2))*((-1)^n-1)*(cos(pi*n*x/3));%сума ряду
y1=y;
hold on
end
figure
plot(x,y1)
xlabel('x')
ylabel('y1')
grid
y2=abs((2/3)*x)-1; %задана функція
figure
plot(x,y2)
xlabel('x')
ylabel('f(x)=y2')
grid

```

Результат виконання програми наведено на рис. 4.4.

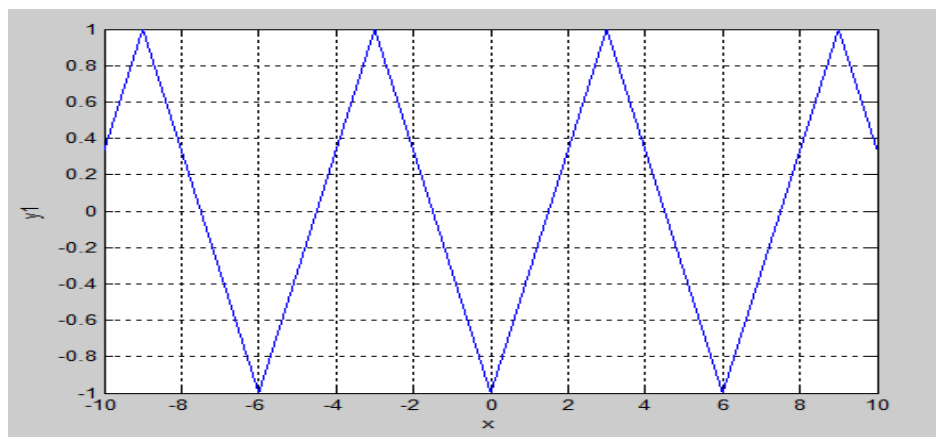


Рисунок 4.4 – Графік суми ряду Фур'є при $n = 200$

4.5 Завдання для самостійної роботи

Завдання 1. Задана функція $f(x)$ в інтервалі $(-4, 4)$:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } -2 \leq x \leq 2, \\ 2, & \text{якщо } 2 < x \leq 4, \\ -2, & \text{якщо } -2 \geq x \geq -4. \end{cases}$$

Необхідно:

– розкласти функцію $f(x)$ в ряд Фур'є в інтервалі $(-4, 4)$;

– розробити програму (M-файл) для побудови графіків суми ряду Фур’є функції $f(x)$;

– проаналізувати вплив числа гармонік на результат розкладання функції $f(x)$.

Завдання 2. Задана функція $f(x)$, яка визначена згідно з аналітичним виразом:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } 0 \leq x \leq 2, \\ 2, & \text{якщо } 2 \leq x \leq 4. \end{cases}$$

Необхідно:

– розкласти функцію $f(x)$ в ряд Фур’є;

– розробити програму (M-файл) для побудови графіків суми ряду Фур’є функції $f(x)$.

Особливості функції. Функція задана на відрізку $[0, 4]$. Продовжимо задану функцію симетрично на відрізок $[-4, 0]$. Отримали парну функцію з періодом $2l = 4 - (-4) = 8$, $l = 4$. Рівняння функції однієї із симетричних частин – із двох складових: $y = x$, якщо $0 \leq x \leq 2$ і $y = 2$, якщо $2 \leq x \leq 4$.

Завдання 3.

Задана періодична функція $f(x)$ в інтервалі $(-\pi, +\pi)$:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } -\pi < x < 0; \\ x, & \text{якщо } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

Необхідно:

– розкласти функцію $f(x)$ у ряд Фур’є в інтервалі $(-\pi, +\pi)$;

– розробити програму (M-файл) для побудови графіків суми ряду Фур’є функції $f(x)$.

Допоміжна теорія.

У випадку, коли $f(x) \in 2\pi$ -періодичною кусково-монотонною або кусково-гладкою функцією, розкладення у ряд Фур'є функції $f(x)$ має вигляд:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx; \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx; \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx; \quad n = 1, 2, \dots$$

Якщо $f(x) - 2\pi$ -періодична парна функція, то

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx); \quad a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx;$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx; \quad n = 1, 2, \dots; \quad b_n = 0.$$

Якщо $f(x) - 2\pi$ -періодична непарна функція, то

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n \sin nx); \quad a_0 = 0; \quad a_n = 0;$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx; \quad n = 1, 2, \dots; \quad b_n = 0.$$

Завдання 4. Задана функція $f(x)$, яка визначена згідно з аналітичним виразом:

$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{для } 0 < x < 2; \\ 1, & \text{для } 2 \leq x \leq 4. \end{cases}$$

Необхідно:

– розкласти функцію $f(x)$ в ряд Фур'є у синус-косинусній та косинусній формах на інтервалі $(0, 4)$;

– розробити програму (M-файл) для побудови графіків суми ряду Фур'є функції $f(x)$.

Теорія.

Припустимо, що маємо $2l$ -періодичну функцію $f(t)$ у вигляді ряду Фур'є:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi}{l} t + b_n \sin \frac{\pi}{l} t \right).$$

Позначимо: $\omega_1 = \frac{\pi}{l}$.

Тоді:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t).$$

Таку форму запису ряду Фур'є називають синус-косинусною, або квадратурною.

Зобразимо кожен додано у вигляді:

$$a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t = A_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n).$$

Тоді

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n),$$

де $A_0 = \frac{a_0}{2}$, $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, $\omega_1 = \frac{\pi}{l}$, $\varphi_n = \arg(a_n - ib_n)$.

Такий запис називають косинусною формою запису ряду Фур'є. Сукупність чисел – коефіцієнтів a_n та b_n у синус-косинусній формі ряду Фур'є функції $f(t)$ – називають спектром сигналу $f(t)$. Для того щоб побудувати спектр, треба відкласти значення a_n та b_n на частотах $0, \omega_1, 2\omega_1, 3\omega_1, \dots$ (рис. 4.5).

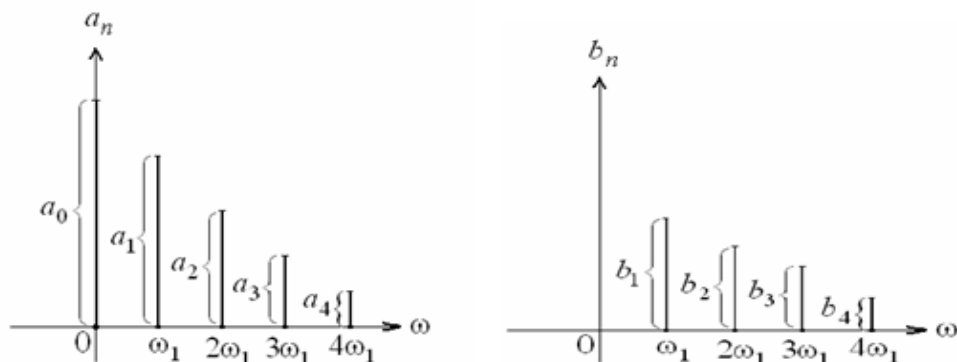


Рисунок 4.5 – Спектр сигналу у синус-косинусній формі

Контрольні запитання

1. Які способи подання (зображення) моделей сигналів відомі?
2. У чому полягають переваги частотного методу зображення сигналів?
3. Яку функцію називають періодичною? Які властивості мають періодичні функції?
4. Який ряд називають тригонометричним?
5. Який ряд називають рядом Фур'є? Сформулюйте достатні умови для розкладення функції в ряд Фур'є.
6. За яких умов періодична функція може бути зображена рядом Фур'є?
7. Що розуміється як спектр амплітуд і спектр фаз?
8. Які характерні особливості спектра періодичного сигналу?
9. Нехай $f(x)$ – кусково-монотонна або кусково-гладка функція. Чому дорівнює сума ряду Фур'є функції $f(x)$ в точках неперервності функції $f(x)$, в точках розриву функції $f(x)$?
10. За якими формулами обчислюють коефіцієнти Фур'є $2l$ -періодичної функції $f(x)$?
11. За якими формулами обчислюють коефіцієнти Фур'є парної або непарної $2l$ -періодичної функції $f(x)$?
12. За якими формулами обчислюють коефіцієнти Фур'є 2
 π -періодичної функції $f(x)$?
13. За якими формулами обчислюють коефіцієнти Фур'є парної або непарної 2π -періодичної функції $f(x)$?
14. Як розкласти кусково-монотонну або кусково-гладку функцію $f(x)$, визначену на відрізку $[0, 1]$, в ряд Фур'є тільки за синусами або тільки за косинусами?
15. Що називають гармонічним коливанням? Як знайти амплітуду і фазу гармонічного коливання?

16. Що називають синусно-косинусною або квадратурною формою запису ряду Фур'є?
17. Що називають косинусною формою запису ряду Фур'є?
18. Як побудувати спектр сигналу у синусно-косинусній формі запису ряду Фур'є?
19. Як побудувати амплітудний і фазовий спектри сигналу у косинусній формі запису ряду Фур'є?
20. Що називають комплексною формою запису ряду Фур'є?
21. Як побудувати амплітудний і фазовий спектри сигналу у комплексній формі запису ряду Фур'є?
22. Як пов'язані між собою коефіцієнти у комплексній та синусно-косинусній формах запису ряду Фур'є?
23. Яку симетрію має амплітудний спектр у комплексній формі запису ряду Фур'є?
24. Яку симетрію має фазовий спектр у комплексній формі запису ряду Фур'є?
25. Як у спектрі амплітуд відображається постійна складова сигналу?
26. Який вигляд має спектр гармонічного сигналу?
27. Як можна енергетично пояснити спектр періодичного сигналу?
28. Що розуміється як практична ширина спектра періодичного сигналу?
29. У чому полягає критерій вибору практичної ширини спектра періодичного сигналу?
30. Як виглядає спектр періодичної послідовності прямокутних імпульсів?
31. Який фізичний зміст має крива, що обводить спектр амплітуд періодичного сигналу?
32. Чим відрізняються спектри симетричного і несиметричного періодичних прямокутних імпульсів?

Практична робота 5

РОЗРАХУНОК СПЕКТРАЛЬНИХ ХАРАКТЕРИСТИК НЕПЕРІОДИЧНИХ СИГНАЛІВ

5.1 Мета практичної роботи

Отримати практичні навички розроблення моделей сигналів у вигляді Фур'є зображення.

5.2. Теоретична частина

5.2.1 Неперервне перетворення Фур'є. Для аперіодичних процесів замість розкладання у ряд Фур'є використовується розкладання в інтеграл Фур'є при виконанні таких вог: функція $f(t)$ задовольняє умову Діріхле і є абсолютно інтегрованою.

Умови Діріхле:

- не повинно бути розривів другого роду (гілок функції, що прямують до нескінченності);
- кількість розривів першого роду (стрибків) має бути скінченною;
- кількість екстремумів функції має бути скінченною.

Припустимо, що функція $f(x)$ відмінна від 0 на деякому скінченному проміжку (t_1, t_2) , а за межами цього проміжку $f(x) = 0$ (рис. 5.1).

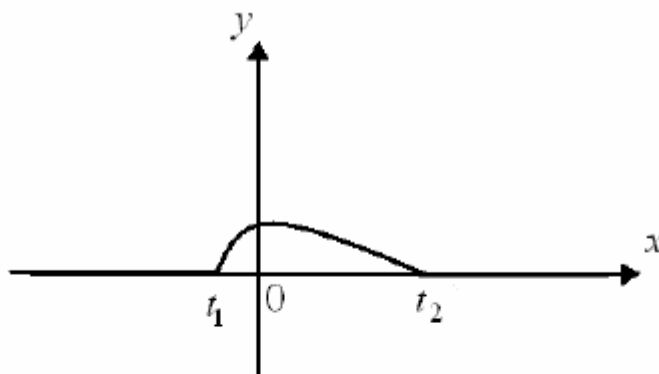


Рисунок 5.1 – Графік неперіодичної функції $f(x)$

Виберемо довільний інтервал довжини T , який містить всередині себе проміжок (t_1, t_2) , і продовжимо функцію $f(x)$ періодично з періодом T (рис. 5.2).

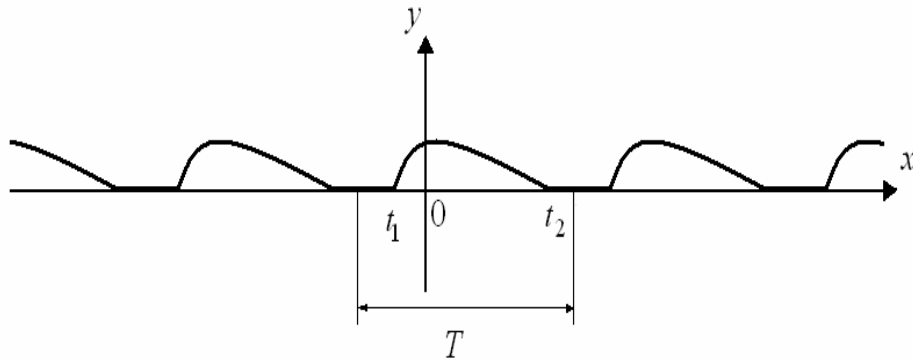


Рисунок 5.2 – Графік функції $f(x)$ з періодом T

Отримуємо нову функцію $f_T(x)$, яка є періодичною з періодом T . Таку функцію можна розкласти в ряд Фур'є в комплексній формі:

$$f_T(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i \frac{\pi n x}{T/2}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega_1 x}, \quad (5.1)$$

$$\text{де } \omega_1 = \frac{\pi}{T/2} = \frac{2\pi}{T}, \quad c_n = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} f(x) e^{-i \frac{\pi n x}{T/2}} dx = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} f(x) e^{-in\omega_1 x} dx.$$

Тоді отримаємо

$$f_T(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} f(x) e^{-in\omega_1 t} dt \right) e^{in\omega_1 x}. \quad (5.2)$$

Оскільки $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$, маємо рівність $\frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \omega_1$.

Тоді

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \omega_1 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\int_{t_1}^{t_2} f(t) e^{-in\omega_1 t} dt \right) e^{in\omega_1 x}. \quad (5.3)$$

При цьому спектральні лінії спектра функції $fT(x)$ мають абсциси $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}, 2\omega_1, 3\omega_1, \dots$

Рівняння (5.3) набуде вигляду:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} \left(\int_{t_1}^{t_2} f(t) e^{-i\omega t} dt \right) d\omega.$$

Позначимо вираз у дужках, який залежить тільки від ω , через $F(\omega)$:

$$F(\omega) = \int_{t_1}^{t_2} f(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (5.4)$$

Оскільки за межами проміжку $[t_1, t_2]$ функція $f(x)$ дорівнює 0, рівність (5.4) можна записати як

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (5.5)$$

При цьому

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega. \quad (5.6)$$

Рівняння (5.5) називається прямим перетворенням Фур'є функції $f(x)$, а вираз функції $f(x)$ за формулою (5.6) називають **оберненим перетворенням Фур'є** (або комплексною формою інтеграла Фур'є).

Функцію $F(x)$ називають **спектральною щільністю** функції $f(x)$. Модуль $F(\omega)$ називають **амплітудним спектром** функції $f(x)$. Фазовий спектр $\theta(\omega)$ визначається рівністю $\theta(\omega) = \arg(F(\omega))$.

При цьому, якщо функція $f(x)$ є дійсною і парною, то фазовий спектр може набувати тільки значення 0 або $\pm\pi$. Якщо функція $f(x)$ є дійсною і непарною, то фазовий спектр може набувати лише значення $\pm\frac{\pi}{2}$.

5.2.2 Інтеграл Фур'є. Припустимо, що функція $f(x)$ визначена на інтервалі $(-\infty, +\infty)$, існує інтеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx$, і на будь-якому проміжку $(-l, l)$ функція $f(x)$ розкладається в ряд Фур'є:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi n x}{l} + b_n \sin \frac{\pi n x}{l} \right). \quad (5.7)$$

Підставимо в рівняння (5.7) вирази для коефіцієнтів a_n , b_n , a_0 . Отримуємо рівність:

$$f(x) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \cos \frac{n\pi t}{l} dt \cos \frac{n\pi x}{l} + \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \sin \frac{n\pi t}{l} dt \sin \frac{n\pi x}{l} \right). \quad (5.8)$$

Позначимо $\frac{\pi}{l} = \omega_1$, тоді $\frac{1}{l} = \frac{\omega_1}{\pi}$.

Отримаємо

$$f(x) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \cos m \omega_1 t dt \cdot \cos m \omega_1 x + \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \sin m \omega_1 t dt \cdot \sin m \omega_1 x \right) \omega_1.$$

При $l \rightarrow \infty$

$$\left| \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt \right| \leq \frac{1}{2l} \int_{-l}^l |f(t)| dt \leq \frac{1}{2l} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt \rightarrow 0, \quad \text{за умови } l \rightarrow \infty, \omega_1 \rightarrow d\omega,$$

$n\omega_1 \rightarrow \omega$ і операція підсумовування перетворюється в операцію інтегрування.

Тоді

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left(\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega t dt \right) \cos \omega x \right) + \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \omega t dt \right) \sin \omega x.$$

В результаті отримаємо:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} (A(\omega) \cos \omega x + B(\omega) \sin \omega x) d\omega, \quad (5.9)$$

$$\text{де } A(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega t dt, \quad B(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \omega t dt.$$

Цей запис (5.9) називають *інтегралом Фур'є*.

Якщо $f(x)$ парна функція, то

$$A(\omega) = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega t dt, \quad B(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \omega t dt = 0.$$

Інтеграл Фур'є для парної функції:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} f(t) \cos \omega t dt \right) \cos \omega x d\omega.$$

Інтеграл Фур'є для непарної функції:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} f(t) \sin \omega t dt \right) \sin \omega x d\omega.$$

5.3 Практична частина

Приклад 1. Знайти спектр прямокутного імпульсу тривалістю τ і одиночної амплітуди (рис. 5.3).

Математичне зображення імпульсу:

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \tau]; \\ 0, & t \notin [0, \tau]. \end{cases}$$

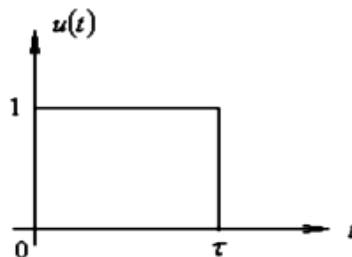


Рисунок 5.3 – Графік прямокутного імпульсу

Для знаходження спектра використаємо формулу прямого перетворення Фур'є. Підінтегральна функція відмінна від нуля тільки на відріжку $[0, \tau]$:

$$U(\omega) = \int_0^{\tau} 1e^{-j\omega t} dt = \frac{1 - e^{-j\omega\tau}}{j\omega} = \frac{\tau}{2} \frac{e^{j\frac{\omega\tau}{2}} - e^{-j\frac{\omega\tau}{2}}}{j\frac{\omega\tau}{2}} e^{-j\frac{\omega\tau}{2}} = \tau \frac{\sin \frac{\omega\tau}{2}}{\frac{\omega\tau}{2}} e^{-j\frac{\omega\tau}{2}}.$$

Якщо імпульс амплітудою h , то спектр буде визначатись як

$$U(\omega) = h\tau \frac{\sin \frac{\omega\tau}{2}}{\frac{\omega\tau}{2}} e^{-j\frac{\omega\tau}{2}}.$$

Спектр є комплексною функцією. Як правило, в ньому виділяють амплітуду і фазу, відповідно амплітудний і фазовий спектри. Для прямокутного імпульсу отримали, що амплітудний спектр поводитьсь як функція $\frac{\sin x}{x}$, де $x = \frac{\omega\tau}{2}$, а фазовий спектр – лінійна функція ($\varphi = \frac{\omega\tau}{2}$). Використовуючи властивості перетворення Фур'є, можливо отримати спектри інших сигналів, які можуть бути виражені через прямокутний імпульс.

Приклад 2. Задана функція $f(x)$, яка визначена згідно з аналітичним виразом:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < -2, \\ 1, & \text{якщо } -2 \leq x \leq 2, \\ 0, & \text{якщо } x > 2. \end{cases}$$

Необхідно:

- розкласти функцію $f(x)$ в ряд Фур'є;
- розробити програму (М-файл) для побудови графіків суми ряду Фур'є функції $f(x)$;

– побудувати амплітудний та фазовий спектри.

Розв’язання.

Графік заданої функції зображено на рис. 5.4.

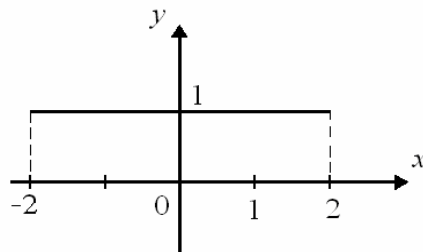


Рисунок 5.4 – Графік функції $f(x)$

Знаходимо пряме перетворення Фур’є:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt.$$

$$F(\omega) = \int_{-2}^2 1e^{-i\omega t} dt = \left. \frac{e^{i\omega t}}{-i\omega} \right|_{-2}^2 = \frac{e^{-2i\omega} - e^{2i\omega}}{-i\omega} =$$

$$= \frac{i}{-i\omega * i} (\cos(-2\omega) + i \sin(-2\omega) - \cos(2\omega) - i \sin(2\omega)) = \frac{i}{\omega} (-2i \sin 2\omega) =$$

$$= \frac{2 \sin 2\omega}{\omega}.$$

Пряме перетворення Фур’є заданої функції $f(x)$:

$$F(\omega) = \frac{2 \sin 2\omega}{\omega}.$$

Графік функції $F(\omega)$ зображено на рис. 5.5 (ліворуч).

Значення функції $F(\omega)$, наведені на графіку, відповідають умові:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \sin ax}{ax} = a \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{ax} = a.$$

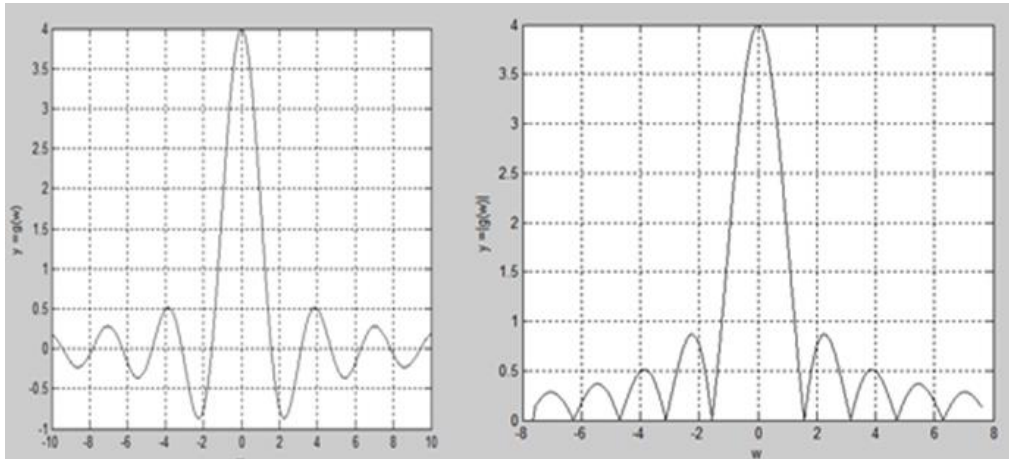


Рисунок 5.5 – Графіки функції $F(\omega)$ і $|F(\omega)|$

Для побудови амплітудного спектра потрібно точки графіка функції $F(\omega)$, які розташовані нижче осі абсцис, симетрично відобразити відносно цієї осі (тобто її модуль). Амплітудний спектр наведено на рис. 5.5 (праворуч), який отримано згідно з програмою, викладеною нижче (Програма AF_7_5.m).

Програма AF_7_5.m

```
clear, clc, close all
y=0;
yy=[];
ww=[];
for w=-24/pi:0.01:24/pi
yy=[yy y];
ww=[ww w];
y=abs(2*sin(2*w)/w);
end
figure
plot(ww,yy,'k')
xlabel('w')
ylabel('y = |g(w)|')
%ylabel('y =faza')
grid
```

При знаходженні перетворення Фур'є обчислення можна також проводити у тригонометричній формі:

$$\begin{aligned}
F(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)(\cos(\omega t) - i\sin(\omega t))dt = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(\omega t)dt - i \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin(\omega t)dt = A(\omega) - iB(\omega), \\
\text{де } A(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(\omega t)dt; \quad B(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin(\omega t)dt.
\end{aligned}$$

Амплітуда і фаза спектра визначаються як

$$|F(\omega)| = \sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)}; \quad \Theta(\omega) = \arg(A(\omega) - iB(\omega)).$$

Приклад 3. Знаходження вихідного сигналу системи (лінійне коло) на основі використання спектральної характеристики вхідного сигналу і частотних характеристик каналу.

Послідовність аналізу лінійних кіл спектральним методом:

- 1) Визначення спектральної щільності вхідного сигналу.
- 2) Визначення частотних характеристик кола.
- 3) Розрахунок спектральної щільності вихідного сигналу.
- 4) Розрахунок вихідного сигналу в часовій області.

Для знаходження спектра вихідного сигналу можливо скористатися формулою:

$$S_{\text{вих}}(j\omega) = S_{\text{вх}}(j\omega) \cdot K(j\omega), \quad \text{яку можливо представити у вигляді:}$$

$$S_{\text{вих}}(j\omega) = S_{\text{вх}}(\omega)e^{j\varphi(\omega)} \cdot K(\omega)e^{j\Psi(\omega)} = S_{\text{вх}}(\omega) \cdot K(\omega)e^{j(\varphi(\omega) + \Psi(\omega))},$$

де $K(\omega)$ – АЧХ кола (модуль), $\varphi(\omega)$ – ФЧХ кола, $\Psi(\omega)$ – фазовий спектр вхідного сигналу.

Амплітудно-частотна характеристика (див. практичне заняття 2, приклад 1):

$$A(\omega) = \sqrt{\frac{(a_1 c_1)^2}{(c_2 + c_3)^2} + \frac{(a_1 b_2 \omega)^2}{(c_2 + c_3)^2}}.$$

Фазо-частотна характеристика:

$$Fi(w) = -\arctg \frac{b_2 w}{c_1}.$$

Знаходження спектра вхідного сигналу.

Нехай задана функція $f(t)$ (сигнал) на інтервалі $[0, 4]$ визначається наступним аналітичним виразом:

$$f(x) = \begin{cases} t, & \text{якщо } 0 \leq t \leq 2; \\ 2, & \text{якщо } 2 \leq t \leq 4. \end{cases}$$

Характеристика сигналу приведена на рис. 5.6.

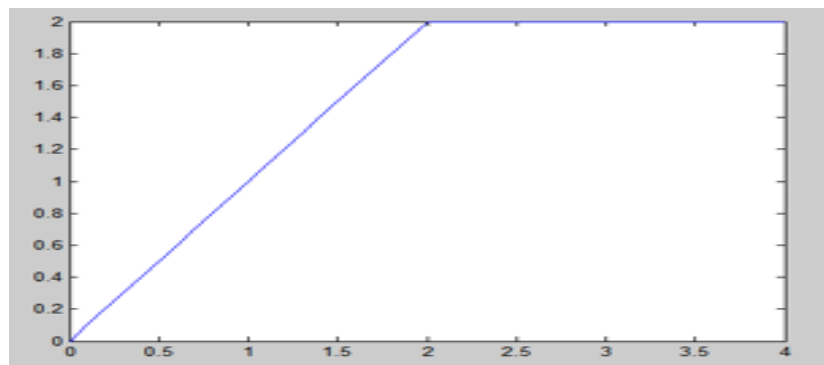


Рисунок 5.6 – Графік функції $f(t)$ на інтервалі $[0, 4]$

Для знаходження спектра сигналу використаємо наступні співвідношення (перетворення Фур'є):

– пряме перетворення Фур'є функції $x(t)$

$$F: x(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt;$$

– обернене перетворення Фур'є функції $x(t)$

$$F^{-1}: x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(j\omega)e^{j\omega t} d\omega.$$

З урахуванням парності функцій і в відповідності до формул Ейлера:

$$e^{j\omega\tau} = \cos(\omega\tau) + j\sin(\omega\tau); e^{-j\omega\tau} = \cos(\omega\tau) - j\sin(\omega\tau).$$

Згідно формули прямого перетворення Фур'є для заданого сигналу запишемо:

$$F(i\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt = \int_0^4 f(t)e^{-i\omega t} dt = \int_0^2 te^{-i\omega t} dt + \int_2^4 2e^{-i\omega t} dt.$$

Знаходження інтеграла $I_1 = \int_0^2 te^{-i\omega t} dt$ виконаємо згідно

співвідношення:

$$I_1 = UV - \int VdU.$$

Прийmemo, що $U = t$, $dV = e^{-i\omega t} dt$.

Тоді: $dU/dt = 1$ або $dU = dt$.

Знайдемо V .

$$V = \int e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{-i\omega} * e^{-i\omega t}.$$

$$U_1(i\omega) = UV = t * \left(\frac{1}{-i\omega} * e^{-i\omega t} \right) = \frac{it}{\omega} e^{-i\omega t}.$$

$$U_2(i\omega) = \int VdU = \int Vdt = \int \frac{1}{-i\omega} e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{-i\omega} * \frac{1}{-i\omega} e^{-i\omega t} = -\frac{1}{\omega * \omega} e^{-i\omega t}.$$

$$I_1(i\omega) = U_1(i\omega) - U_2(i\omega) = \left(\frac{it}{\omega} e^{-i\omega t} + \frac{1}{\omega * \omega} e^{-i\omega t} \right) = \frac{i2}{\omega} e^{-2i\omega} +$$

$$\frac{1}{\omega * \omega} e^{-2i\omega} - \frac{1}{\omega * \omega} = \frac{1}{\omega} e^{-2i\omega} \left(2i + \frac{1}{\omega} \right) - \frac{1}{\omega * \omega}.$$

Знаходження $I_2(i\omega) = \int_2^4 2e^{-i\omega t} dt$.

$$I_2(i\omega) = \int_2^4 2e^{-i\omega t} dt = 2 * \frac{1}{-i\omega} e^{-i\omega t} =$$

$$= \frac{2}{-i\omega} e^{-4i\omega} - \frac{2}{-i\omega} e^{-2i\omega} = \frac{2}{-i\omega} (e^{-4i\omega} - e^{-2i\omega}) = \frac{2}{\omega} e^{-2i\omega} (e^{-2i\omega} - 1).$$

В результаті:

$$F(i\omega) = \frac{1}{\omega} e^{-2i\omega} \left(2i + \frac{1}{\omega} \right) - \frac{1}{\omega * \omega} + \frac{2}{\omega} e^{-2i\omega} (e^{-2i\omega} - 1).$$

На рис. 5.7 приведена характеристика модуля спектра сигналу функції $f(t)$ на інтервалі $[0, 4]$, на рис. 5.8 - фазовий спектр сигналу функції $f(t)$ на інтервалі $[0, 4]$.

Програмна реалізація (М-файл) отримання графіків спектральних характеристик (модуля) амплітуди і фази.

```

% очищення екрана
clear, clc, close all
y=0;
yy=[];
ww=[];
t=5;
for w=-15/pi:0.01:15/pi
yy=[yy y];
ww=[ww w];
% частина постійної складової
% y=abs(2*i/w*exp(-2*i*w)*(exp(-2*i*w)-1));
% частина лінійно-наростаючої частини
% y=abs(((exp(-2*i*w))/w)*(2*i+1/w)-1/w^2);
% сумарна частина інтегралу-амплітудний спектр
y=abs((2*i/w*exp(-2*i*w)*(exp(-2*i*w)-1))+(((exp(-2*i*w))/w)*(2*i+1/w)-1/w^2));
% фазовий спектр сигналу
% y=angle((2*i/w*exp(-2*i*w)*(exp(-2*i*w)-1))+(((exp(-2*i*w))/w)*(2*i+1/w)-1/w^2));
end
figure
plot(ww,yy)
xlabel('CHASTOTA')
ylabel('AMPLITUDA')
grid

```

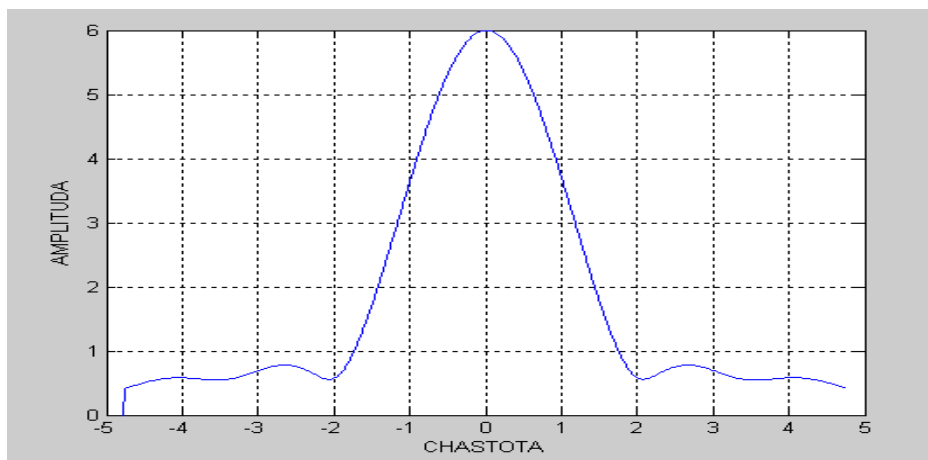


Рисунок 5.7 – Модуль спектра сигналу функції $f(t)$ на інтервалі $[0, 4]$

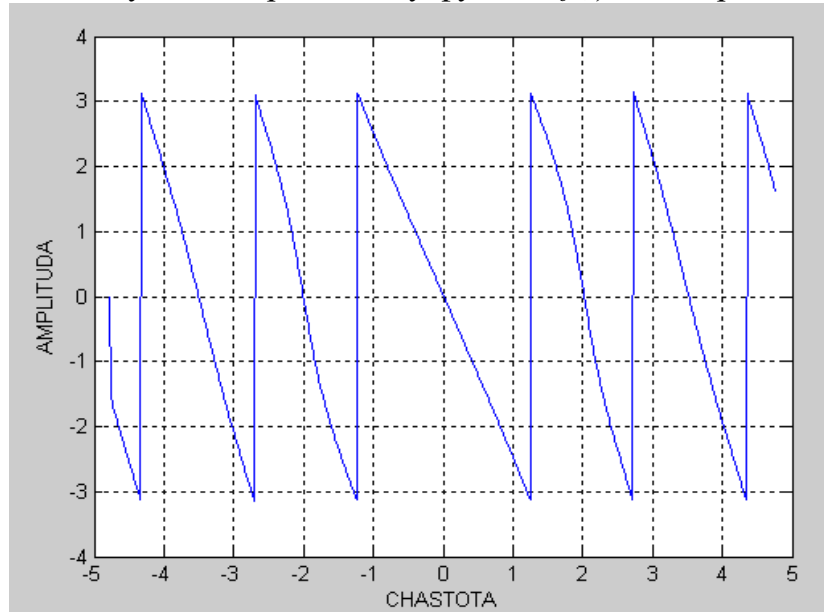


Рисунок 5.8 – Фазовий спектр сигналу функції $f(t)$ на інтервалі $[0, 4]$

На рис. 5.9 приведена характеристика модуля спектра вихідного сигналу функції $f(t)$ на інтервалі $[0, 4]$, отриманого за допомогою програми **Pr2.m**

Програма Pr2S.m

```
% очищення екрана
clear, clc, close all
y=0;
y1=0;
yy=[];
ww=[];
yy1=[];
t=5;
a1=1.8;
b1=2.56;
b2=3.2;
for w=-15/pi:0.01:15/pi
    c1=(1-b1*w.^2);
    c2=c1.^2;
    c3=b2^2*w.^2;
    a=sqrt(((a1*c1).^2+b2.^2*w.^2*a1.^2)./(c2+c3).^2);
    fi=atan((a1*b2*w)./(a1*c1));
    yy=[yy y];
    ww=[ww w];
    yy1=[yy1 y1];
```

```

%частина постійної складової
%y=abs(2*i/w*exp(-2*i*w)*(exp(-2*i*w)-1));
%частина лінійно-наростаючої частини
%y=abs(((exp(-2*i*w))/w)*(2*i+1/w)-1/w^2);
%сумарна частина інтегралу помножена на АЧХ (модуль спектру вихідного
сигналу)
y=abs((2*i/w*exp(-2*i*w)*(exp(-2*i*w)-1))+(((exp(-2*i*w))/w)*...
(2*i+1/w)-1/w^2))*a;
y1=angle((2*i/w*exp(-2*i*w)*(exp(-2*i*w)-1))+(((exp(-2*i*w))/w)*...
(2*i+1/w)-1/w^2));
end
figure
plot(ww,yy)
xlabel('CHASTOTA')
ylabel('AMPLITUDA')
grid
figure
plot(ww,yy1)
xlabel('CHASTOTA')
ylabel('FAZA')
grid

```

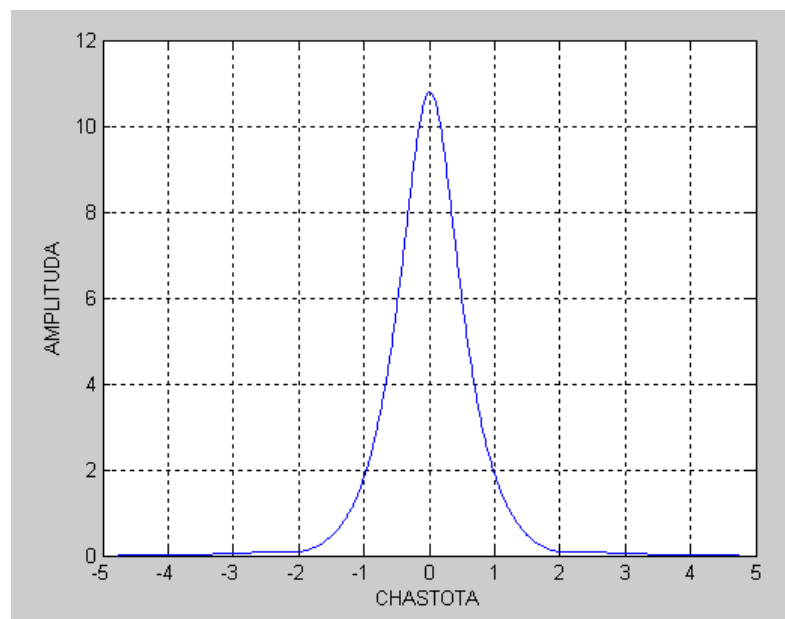


Рисунок 5.9 – Спектр вихідного сигналу

5.4 Завдання для самостійної роботи

Згідно варіанту:

1. Розрахувати спектральну характеристику вхідного сигналу.
2. Розрахувати частотний коефіцієнт передачі лінійного кола.
3. Розрахувати спектральну характеристику вихідного сигналу.
4. Розробити комп'ютерну програму для розрахунків та відображення результатів дослідження (мова програмування вибирається самостійно).

Варіанти завдань

1. Модель системи

$$1.1) W(p) = \frac{k}{p(Tp + 1)}; \quad 1.2) W(p) = W(p) = \frac{kp}{T^2 p^2 + kp + 1};$$

$$1.3) W(p) = \frac{k}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)};$$

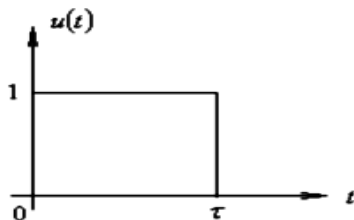
$$1.4) W(p) = \frac{kp}{Tp + 1}; \quad 1.5) W(p) = \frac{k}{T^2 p^2 + kp + 1}, \quad T_1 = T; \quad T_2 = 0.1 k.$$

де k – номер варіанта; T – число букв в імені (сек.); p – оператор Лапласа.

2. Форма вхідного сигналу

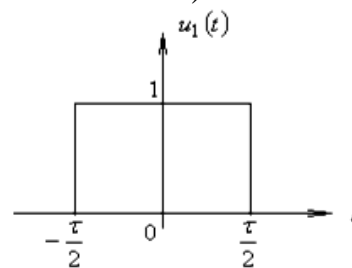
$$2.1) f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } -2 \leq x \leq 2, \\ 2, & \text{якщо } 2 < x \leq 4, \\ -2, & \text{якщо } -2 \geq x \geq -4. \end{cases}$$

2.2)

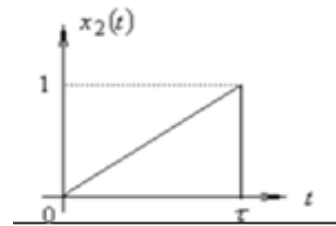
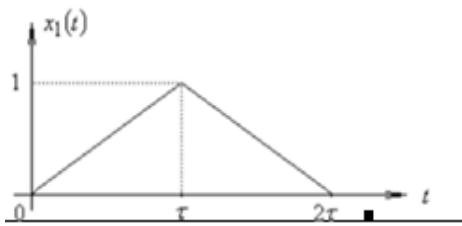


2.4)

2.3)



2.5)



Таблиця 1 – Параметри системи

Варіант	k	T (сек)	τ (сек)	Система	Сигнал
1	0.1	1.0	2.0	1.1	2.1
2	0.2	1.0	2.0	1.2	2.2
3	0.3	1.0	2.0	1.3	2.3
4	0.4	2.0	2.0	1.4	2.4
5	0.5	2.0	2.0	1.5	2.5
6	0.6	2.0	2.0	1.1	2.2
7	0.7	1.5	2.0	1.2	2.3
8	0.8	1.5	2.0	1.3	2.4
9	0.9	1.5	2.0	1.4	2.5
10	1.0	1.5	2.0	1.5	2.1
11	1.1	2.5	1.0	1.1	2.3
12	1.2	2.5	1.0	1.2	2.4
13	1.3	2.5	1.0	1.3	2.5
14	1.4	2.5	1.0	1.4	2.1
15	1.5	2.5	1.0	1.5	2.2
16	1.6	1.6	1.5	1.1	2.4
17	1.7	1.6	1.5	1.2	2.5
18	1.8	1.6	1.5	1.3	2.1
19	1.9	1.6	1.5	1.4	2.2
20	2.0	1.6	1.5	1.5	2.3
21	1.9	1.2	1.5	1.1	2.5
22	1.8	1.2	1.5	1.2	2.1
23	1.7	1.2	1.5	1.3	2.2
24	1.6	1.2	2.5	1.4	2.3
25	1.5	1.2	2.5	1.5	2.4
26	1.4	1.8	2.5	1.1	2.5
27	1.3	1.8	2.5	1.2	2.1
28	1.2	1.8	2.5	1.3	2.2
29	1.1	1.8	2.5	1.4	2.3
30	1.0	1.8	2.5	1.5	2.4

Контрольні запитання

1. При яких умовах неперіодична функція може бути зображена інтегралом Фур'є?
2. Які умови Діріхле?
3. Що розуміється як пряме й обернене перетворення Фур'є?
4. Які основні властивості перетворення Фур'є?
5. Порівняйте перетворення Фур'є з перетворенням Лапласа?
6. Які характерні особливості спектра неперіодичного сигналу?
7. Які властивості спектральної щільності сигналу?
8. Який спектр одиночного прямокутного імпульсу?
9. Як можна енергетично пояснити спектр неперіодичного сигналу?
10. Що розуміється як практична ширина спектра неперіодичного сигналу?
11. У чому є критерій вибору практичної ширини спектра неперіодичного сигналу?
12. Як можна отримати спектр імпульсу високочастотних коливань, використовуючи властивості перетворення Фур'є?
13. Як можна отримати спектр неперіодичного сигналу безпосередньо зі спектра відповідного періодичного сигналу?
14. Який фізичний сенс ряду Котельникова?

Практична робота 6

ВИЗНАЧЕННЯ ПОКАЗНИКІВ ІНФОРМАЦІЇ

6.1 Мета практичної роботи

Набуття практичних навичок розв'язання задачі визначення показників інформації в повідомленнях.

6.2 Теоретична частина

6.2.1 Кількість інформації. Середню кількість інформації для всієї сукупності повідомлень можна одержати шляхом усереднення по всіх подіях:

$$I(x) = -\sum_{i=1}^m p_i \log p_i. \quad (6.1)$$

Кількість інформації у повідомленні, що складається з n нерівноймовірних його елементів, дорівнює (цю міру запропоновано в 1948 р. К. Шенноном):

$$I(x) = -n \sum_{i=1}^m p_i \log p_i. \quad (6.2)$$

Для випадку незалежних рівноймовірних подій кількість інформації визначається (цю міру запропоновано в 1928 р. Р. Хартли):

$$I(x) = -n \sum_{i=1}^m p_i \log p_i = -n \cdot m \left(\frac{1}{m} \log \frac{1}{m} \right) = n \cdot \log m. \quad (6.3)$$

Властивості кількості інформації:

1. Кількість інформації в повідомленні зворотно-пропорційна ймовірності появи цього повідомлення.
2. Властивість адитивності – сумарна кількість інформації двох джерел дорівнює сумі інформації джерел.
3. Для події з одним результатом кількість інформації дорівнює нулю.
4. Кількість інформації в дискретному повідомленні зростає залежно від збільшення обсягу алфавіту – m .

6.2.2 Ентропія інформації. Ентропія – змістовність, міра невизначеності інформації.

Ентропія – математичне сподівання $H(x)$ випадкової величини $I(x)$, визначеної на ансамблі $\{X, p(x)\}$, тобто вона характеризує середнє значення кількості інформації, що доводиться на один символ.

$$H(X) = M[I(X)] = \frac{I(X)}{n} = - \sum_{i=1}^m p(x_i) \cdot \log p(x_i). \quad (6.4)$$

Визначимо максимальне значення ентропії $H_{\max}(x)$. Скористаємося методом невизначеного множника Лагранжа – (для відшукування умовного екстремуму функції). Знаходимо допоміжну функцію:

$$F = - \sum_{i=1}^m p_i \log_2 p_i - \lambda. \quad (6.5)$$

Подімо допоміжну функцію F у вигляді:

$$F = - \sum_{i=1}^m p_i \log_2 p_i - \lambda \sum_{i=1}^m p_i = - \sum_{i=1}^m [p_i \log_2 p_i + \lambda p_i] = - \sum_{i=1}^m F_i. \quad (6.6)$$

Знайдемо максимум цієї функції

$$\frac{\partial F_i}{\partial p_i} = \log_2 p_i + \log_2 e + \lambda = 0; \quad \log_2 p_i = -\log_2 e - \lambda; \text{ тому що } (\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e.$$

Як видно з виразу, величина імовірності p_i не залежить від i , а це може бути у випадку, якщо всі p_i рівні, тобто $p_1 = p_2 = \dots = p_m = 1/m$.

При цьому, вираз для ентропії рівноімовірних, незалежних елементів дорівнює:

$$H_{\max}(x) = - \sum_{i=1}^m \frac{1}{m} \log_2 \frac{1}{m} = \log_2 m. \quad (6.7)$$

Знайдемо ентропію системи двох альтернативних подій з імовірностями p_1 і p_2 :

$$H(X) = -p_1 \cdot \log_2 p_1 - p_2 \cdot \log_2 p_2 = -p_1 \cdot \log_2 p_1 - [1 - p_1] \cdot \log_2 [1 - p_1] =$$

$$= \begin{cases} 1; & p_1 = p_2 = 1/2; \\ 0; & p_1 = 0, p_2 = 1 \text{ або } p_1 = 1, p_2 = 0. \end{cases}$$

При $m = 2$ для рівноймовірних подій $p_i = 1/2$ ентропія дорівнює 1. Зміну ентропії залежно від імовірності події наведено на рис. 6.1. Як видно, максимум ентропії відповідає рівноймовірним подіям.

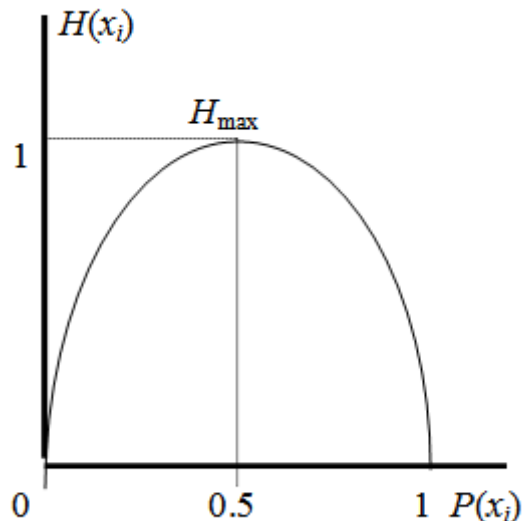


Рисунок 6.1 – Графік ентропії для двох альтернативних подій

Властивості ентропії повідомлень

1. Ентропія є величина дійсна, обмежена, невід’ємна, безперервна на інтервалі $0 \leq p \leq 1$.

2. Ентропія максимальна для рівноймовірних подій.

3. Ентропія для детермінованих подій дорівнює нулю.

4. Ентропія системи двох альтернативних подій змінюється від 0 до 1.

5. Ентропія числово збігається із середньою кількістю інформації але принципово вони різні, через таке:

$H(x)$ – виражає середню невизначеність стану джерела та є його об’єктивною характеристикою, вона може бути обчислена апіорно, тобто до одержання повідомлення при наявності статистики повідомлень;

$I(x)$ – визначається апостеріорно, тобто після одержання повідомлення. З отриманням інформації про стан системи ентропія знижується.

6.2.3 Надмірність повідомлень. Однією з інформаційних характеристик джерела дискретних повідомлень є надмірність, що визначає, яка частка максимально можливої ентропії не використовується джерелом

$$R = \frac{H_{\max} - H(x)}{H_{\max}} = 1 - \frac{H(x)}{H_{\max}} = 1 - \mu, \quad (6.8)$$

де μ – коефіцієнт стиску.

Надмірність призводить до збільшення часу передачі повідомлень, зменшення швидкості передачі інформації, зайвого завантаження каналу, разом з тим надмірність необхідна для забезпечення достовірності переданих даних, тобто надійності СПД, підвищення перешкодостійкості. При цьому, застосовуючи спеціальні коди, що використовують надмірність у переданих повідомленнях, можна виявити й виправити помилки.

6.2.4 Види ентропії та їх обчислення. Ентропія об'єднання – сукупність двох і більше ансамблів дискретних, випадкових подій. З об'єднанням пов'язані поняття умовної, безумовної, спільної й взаємної ентропії.

На практиці найчастіше зустрічаються взаємозалежні символи й повідомлення. Наприклад, при передачі текстових повідомлень передаються не просто літери, а слова, що мають певні смислові значення. При цьому, кожна літера і сполучення літер мають різні імовірності появи в тексті. Умовна ентропія враховує взаємозв'язок подій через їх умовні імовірності.

Обчислення загальної умовної ентропії зручно робити за допомогою каналних матриць (матриць перехідних станів).

Втрати інформації в каналі можна оцінювати з боку джерела або приймача повідомлень.

Канальна матриця має вигляд, наведений у табл. 6.1.

Імовірності, розташовані на діагоналі, характеризує імовірність правильного прийому, інші – помилкового, чим далі вони розташовані від діагоналі, тим вони менші. При відсутності перешкод у каналі зв'язку елементи матриці, розташовані по діагоналі, дорівнюють одиниці, а всі інші – нулю. Канальні матриці завжди квадратні, тому що кількість переданих сигналів дорівнює кількості прийнятих, хоча ймовірність проходження окремих сигналів може дорівнювати нулю.

Втрати інформації, спричинені дією перешкод, визначаються за допомогою умовної ентропії.

Таблиця 6.1 – Канальна матриця

$Y \backslash X$	y_1	y_2	y_m
x_1	$p(y_1/x_1)$	$p(y_2/x_1)$	$p(y_m/x_1)$
x_2	$p(y_1/x_2)$	$p(y_2/x_2)$	$p(y_m/x_2)$
...			
x_m	$p(y_1/x_m)$	$p(y_2/x_m)$	$p(y_m/x_m)$

При цьому:

$$\sum_{j=1}^m p(y_j/x_1) = 1.$$

Для рівно ймовірних сигналів на виході джерела загальна умовна ентропія обчислюється за формулою:

$$H(Y/X) = -\frac{1}{m} \sum_j^m \sum_i^m p(y_j/x_i) \log p(y_j/x_i). \quad (6.9)$$

Для нерівно ймовірних сигналів на виході джерела загальна умовна ентропія обчислюється за формулою:

$$\begin{aligned} H(Y/X) &= -\sum_j^m \sum_i^m p(x_i) p(y_j/x_i) \log p(y_j/x_i) = \\ &= -\sum_j^m \sum_i^m p(x_i, y_j) \log p(y_j/x_i). \end{aligned} \quad (6.10)$$

Часткова умовна ентропія визначає втрати інформації, що доводяться на частку якогось конкретного сигналу (наприклад, втрати для сигналу x_1),

$$H(y_j/x_1) = -\sum_j^m p(y_j/x_1) \log p(y_j/x_1). \quad (6.11)$$

При відсутності перешкод імовірність одержання правильного сигналу стане безумовною, а умовна ентропія дорівнюватиме нулю.

Для дослідження каналу з боку приймача (відомий отриманий сигнал) – умовна імовірність $p(x_i/y_i)$ означає імовірність того, що при прийманні повідомлення y_i було передане повідомлення x_i .

6.3 Практична частина

Приклад 1. Обчислити ентропію джерела, що видає два символи 0 і 1 з імовірностями $p(0) = p(1) = 1/2$, і визначити його надмірність.

Розв’язання. Ентропія для випадку незалежних, рівноймовірних елементів дорівнює: $H(x) = \log_2 m = \log_2 2 = 1$.

При цьому $H(x) = H_{\max}(x)$ і надмірність дорівнює $R = 0$.

Приклад 2. Обчислити ентропію джерела незалежних повідомлень, що видає два символи 0 і 1 з імовірностями $p(0) = 3/4$, $p(1) = 1/4$.

Розв’язання. Ентропія для випадку незалежних, нерівно ймовірних елементів дорівнює:

$$\begin{aligned} H(X) &= -\sum_{i=1}^m p(x_i) \log_2 p(x_i) = -[p(0) \log_2 p(0) + p(1) \log_2 p(1)] = \\ &= -\left[\frac{3}{4} \log_2 \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \log_2 \frac{1}{4}\right] = 0.815. \end{aligned}$$

При цьому надмірність дорівнює $R = 1 - 0.815 = 0.185$.

Приклад 3. Обчислити ентропію джерела повідомлень, що видає два символи 0 і 1 з імовірностями $p(0)=3/4$, $p(1)=1/4$ і умовними ймовірностями: $p(0/0) = 2/3$, $p(1/0) = 1/3$, $p(0/1) = 1$, $p(1/1) = 0$, тобто після 1 завжди йде 0.

Розв'язання. Для випадку взаємозалежних, нерівно ймовірних елементів ентропія дорівнює:

$$\begin{aligned} H(X) &= -\sum_{i=1}^m p(x_i) \sum_{j=1}^{m_i} p(y_j / x_i) \log_2 p(y_j / x_i) = \\ &= \{ p(0)[p(0/0)\log_2 p(0/0) + p(1/0)\log_2 p(1/0)] + \\ &+ p(1)[p(0/1)\log_2 p(0/1) + p(1/1)\log_2 p(1/1)] \} = \\ &= -\frac{3}{4} \left[\frac{2}{3} \log_2 \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \log_2 \frac{1}{3} \right] = 0.685. \end{aligned}$$

Приклад 4. Визначити ентропію джерела повідомлень, якщо імовірності появ символів на вході приймача дорівнюють: $P(b_1) = 0.1$; $P(b_2) = 0.3$; $P(b_3) = 0.4$, $P(b_4) = 0.2$, а канална матриця має вигляд:

$$P(a/b) = \begin{vmatrix} 0.99 & 0.02 & 0 & 0 \\ 0.01 & 0.98 & 0.01 & 0.01 \\ 0 & 0 & 0.98 & 0.02 \\ 0 & 0 & 0.01 & 0.97 \end{vmatrix}, \quad \begin{array}{l} \text{Сума імовірностей при} \\ \text{однойменних умовах дорівнює} \\ \sum_{i=1}^m P(a_i/b_1) = 1. \end{array}$$

Розв'язання. Визначимо ентропію джерела

$$H(A) = -\sum_{i=1}^n P(a_i) \log P(a_i).$$

$$P(a_1) = \sum_i P(b_i) P(a_1 / b_i) =$$

$$\begin{aligned} &= P(b_1)P(a_1 / b_1) + P(b_2)P(a_1 / b_2) + P(b_3)P(a_1 / b_3) + P(b_4)P(a_1 / b_4) = \\ &= 0.1 \cdot 0.99 + 0.3 \cdot 0.2 + 0.4 \cdot 0 = 0.105; \end{aligned}$$

$$P(a_2) = 0.1 \cdot 0.01 + 0.3 \cdot 0.98 + 0.4 \cdot 0.01 + 0.2 \cdot 0.01 = 0.301;$$

$$P(a_3) = 0.1 \cdot 0 + 0.3 \cdot 0 + 0.4 \cdot 0.98 + 0.2 \cdot 0.02 = 0.396;$$

$$P(a_4) = 0.1 \cdot 0 + 0.3 \cdot 0 + 0.4 \cdot 0.01 + 0.2 \cdot 0.97 = 0.198;$$

$$\text{Перевірка: } \sum_i P(a_i) = 0.105 + 0.301 + 0.396 + 0.198 = 1.$$

При цьому ентропія джерела дорівнює:

$$H(A) = -(0.105 \log 0.105 + 0.301 \log 0.301 + 0.396 \log 0.396 + 0.198 \log 0.198) = 1.856 \text{ біт/симв.}$$

Приклад 5. Визначити ентропію джерела й умовну ентропію повідомлень, переданих по каналу зв'язку таких що складаються з рівно ймовірних символів, якщо вплив перешкод у каналі описується матрицею:

$$P(y/x) = \begin{vmatrix} 0.96 & 0.04 & 0 \\ 0.03 & 0.95 & 0.02 \\ 0.02 & 0.04 & 0.94 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання. Для рівноймовірних символів у повідомленні ентропія джерела повідомлень дорівнює:

$$H(X) = \log_2 m = \log_2 3 = 1.584 \text{ біт/симв.}$$

Повна умовна ентропія дорівнює:

$$\begin{aligned} H(Y/X) &= -\frac{1}{m} \sum_i \sum_j P(y_j/x_i) \log_2 P(y_j/x_i) = \\ &= -\frac{1}{3} [0.96 \cdot \log_2 0.96 + 2 \cdot 0.04 \cdot \log_2 0.04 + 0.03 \cdot \log_2 0.03 + \\ &+ 0.95 \cdot \log_2 0.95 + 2 \cdot 0.02 \cdot \log_2 0.02 + 0.94 \cdot \log_2 0.94] = \\ &= \frac{1}{3} [0.056 + 2 \cdot 0.186 + 0.152 + 0.07 + 2 \cdot 0.113 + 0.084] = \\ &= 0.96/3 = 0.32 \text{ біт/симв.} \end{aligned}$$

Приклад 6. Визначити ентропію приймача повідомлень, якщо ймовірності появи символів a_1 , a_2 і a_3 на вході джерела повідомлень рівні $P(a_1) = 0.5$; $P(a_2) = 0.3$ і $P(a_3) = 0.2$, а канална матриця має вигляд:

$$P(b/a) = \begin{vmatrix} 0.97 & 0.03 & 0 \\ 0.01 & 0.98 & 0.01 \\ 0 & 0.04 & 0.96 \end{vmatrix},$$

Розв'язання. Ентропія приймача дорівнює:

$$H(B) = -\sum_{i=1}^n P(b_i) \cdot \log_2 P(b_i).$$

Імовірності появи символів на вході приймача

$$P(b_1) = \sum_{i=1}^3 P(a_i)P(b_1/a_i) = P(a_1)P(b_1/a_1) + \dots + P(a_3)P(b_1/a_3) =$$

$$= 0.5 \cdot 0.97 + 0.3 \cdot 0.01 + 0.2 \cdot 0 = 0.488;$$

$$P(b_2) = 0.5 \cdot 0.03 + 0.3 \cdot 0.98 + 0.2 \cdot 0.4 = 0.317;$$

$$P(b_3) = 0.5 \cdot 0 + 0.3 \cdot 0.01 + 0.2 \cdot 0.96 = 0.195.$$

Перевірка: $\sum_i P(b_i) = 0.488 + 0.317 + 0.195 = 1.$

При цьому

$$H(B) = -(0.488 \cdot \log_2 0.488 + 0.317 \cdot \log_2 0.317 + 0.195 \cdot \log_2 0.195) =$$

$$= 1.49 \text{ біт/симв.}$$

Приклад 7. Побудувати каналну матрицю $P(b/a)$ джерела повідомлень із вхідної сторони та матрицю $P(a,b)$, що здійснює передачу чотирьох символів алфавіту. При цьому виконати таке:

– побудувати каналну матрицю $P(a/b)$, яка описує джерело повідомлення із вихідної сторони.

– знайти часткові умовні ентропії $H(b_j/a_1)$ і $H(a_i/b_1)$.

– знайти повні умовні ентропії $H(B/A)$ і $H(A/B)$.

– знайти ентропію об'єднання $H(A,B)$.

– знайти кількість інформації на виході каналу $I(A,B)$, а також ентропію $H(A)$ і $H(B)$.

Рішення. Виходячи з умови завдання, джерело повідомлень складається з чотирьох символів. Отже, розмірність матриці дорівнює 4×4 . Елементи, розташовані на головній діагоналі, визначають імовірність правильного прийому. Все решта – імовірність помилкового прийому. Починати заповнення матриці потрібно саме з імовірностей, які визначають помилковий прийом. При цьому на відповідних позиціях повинні бути вписані імовірності, що відповідають можливостям літер, що утворюють ПІБ студента. Приклад заповнення матриці наведено нижче.

Заповнюються клітинки, відповідні невірному прийому. Матриця заповнюється зліва направо, зверху вниз. Імовірності правильного прийому заповнюються нулями.

Загальний вигляд каналної матриці, яка описує джерело повідомлення із вхідної сторони.

$$P(b/a) = \begin{vmatrix} P(b_1/a_1) & P(b_2/a_1) & P(b_3/a_1) & P(b_4/a_1) \\ P(b_1/a_2) & P(b_2/a_2) & P(b_3/a_2) & P(b_4/a_2) \\ P(b_1/a_3) & P(b_2/a_3) & P(b_3/a_3) & P(b_4/a_3) \\ P(b_1/a_4) & P(b_2/a_4) & P(b_3/a_4) & P(b_4/a_4) \end{vmatrix};$$

$$P(b/a) = \begin{vmatrix} 0 & P(A) & P(H) & P(T) \\ P(O) & 0 & P(H) & P(O) \\ P(B) & P(B) & 0 & P(B) \\ P(A) & P(C) & P(I) & 0 \end{vmatrix}.$$

Замість літерних позначень вписуються числові значення імовірностей для літер українського алфавіту:

$$P(b/a) = \begin{vmatrix} 0 & 0.062 & 0.035 & 0.014 \\ 0.012 & 0 & 0.062 & 0.028 \\ 0.09 & 0.038 & 0 & 0.038 \\ 0.062 & 0.045 & 0.062 & 0 \end{vmatrix}.$$

Для визначення діагональних елементів необхідно скористатися властивістю каналної матриці, яка описується з боку входу. Сума елементів у кожному рядку такої матриці дорівнює 1.

$$P(b/a) = \begin{vmatrix} 0.889 & 0.062 & 0.035 & 0.014 \\ 0.012 & 0.898 & 0.062 & 0.028 \\ 0.09 & 0.038 & 0.834 & 0.038 \\ 0.062 & 0.045 & 0.062 & 0.831 \end{vmatrix}.$$

Побудова матриці $P(a, b)$

При побудові матриці $P(a, b)$ необхідно, перш за все, вибрати імовірності появи символів $P(a_1)$, $P(a_2)$, $P(a_3)$, $P(a_4)$. Вибір значень

імовірностей визначається умовою $\sum_{i=1}^4 P(a_i) = 1$.

Наприклад: $P(a_1) = 0.1$; $P(a_2) = 0.2$; $P(a_3) = 0.3$; $P(a_4) = 0.4$.

Елементи матриці $P(a, b)$ можуть бути обчислені за допомогою співвідношення

$$P(a_i, b_j) = \frac{P(b_j/a_i)}{P(a_i)},$$

$$P(a_i, b_j) = \begin{vmatrix} P(a_1, b_1) & P(a_1, b_2) & P(a_1, b_3) & P(a_1, b_4) \\ P(a_2, b_1) & P(a_2, b_2) & P(a_2, b_3) & P(a_2, b_4) \\ P(a_3, b_1) & P(a_3, b_2) & P(a_3, b_3) & P(a_3, b_4) \\ P(a_4, b_1) & P(a_4, b_2) & P(a_4, b_3) & P(a_4, b_4) \end{vmatrix}.$$

$$P(a_i, b_j) = \begin{vmatrix} 0.0889 & 0.0062 & 0.0035 & 0.0014 \\ 0.0024 & 0.1796 & 0.0124 & 0.0056 \\ 0.027 & 0.0114 & 0.2502 & 0.0114 \\ 0.0248 & 0.018 & 0.0248 & 0.3324 \end{vmatrix}.$$

Матриця (3.20) має властивість $\sum_{j=1}^4 P(a_i, b_j) = P(a_i)$. Перевірка

властивості:

$$\begin{aligned} P(a_1) &= \sum_{j=1}^4 P(a_1, b_j) = P(a_1, b_1) + P(a_1, b_2) + P(a_1, b_3) + P(a_1, b_4) = \\ &= 0.0889 + 0.0062 + 0.0035 + 0.0014 = 0.1. \end{aligned}$$

Аналогічні перевірки необхідно виконати для $P(a_2)$, $P(a_3)$, $P(a_4)$.

Знаходження ймовірностей $P(b_i)$

Для обчислення ймовірностей $P(b_i)$ необхідно скористатися іншою властивістю матриці $P(a_i, b_j)$, а саме:

$$\sum_{i=1}^4 P(a_i, b_j) = P(b_j).$$

У результаті розрахунку отримаємо:

$$P(b_1) = 0.1431; P(b_2) = 0.2152; P(b_3) = 0.2909; P(b_4) = 0.3508.$$

Необхідно також перевірити властивість $\sum_{j=1}^4 P(b_j) = 1$.

Побудова каналної матриці $P(a/b)$, яка описує джерело повідомлення із вихідної сторони.

Для розрахунку каналної матриці з боку виходу скористаємося співвідношенням

$$P(a_i/b_j) = P(a_i, b_j) / P(b_j).$$

Загальний вигляд каналної матриці, що характеризує джерело повідомлень з боку виходу:

$$P(a/b) = \begin{vmatrix} P(a_1/b_1) & P(a_1/b_2) & P(a_1/b_3) & P(a_1/b_4) \\ P(a_2/b_1) & P(a_2/b_2) & P(a_2/b_3) & P(a_2/b_4) \\ P(a_3/b_1) & P(a_3/b_2) & P(a_3/b_3) & P(a_3/b_4) \\ P(a_4/b_1) & P(a_4/b_2) & P(a_4/b_3) & P(a_4/b_4) \end{vmatrix}.$$

В результаті обчислень отримаємо:

$$P(a/b) = \begin{vmatrix} 0.6212 & 0.0288 & 0.0120 & 0.0040 \\ 0.0168 & 0.8346 & 0.0426 & 0.0160 \\ 0.1887 & 0.0530 & 0.8601 & 0.0325 \\ 0.1733 & 0.0836 & 0.0853 & 0.9475 \end{vmatrix}.$$

Необхідно перевірити, щоб сума елементів по стовпцях отриманої каналної матриці дорівнювала 1.

Для першого стовпця

$$\sum_{i=1}^4 P(a_i / b_1) = 0.6212 + 0.0168 + 0.1887 + 0.1733 = 1.$$

Умова виконується.

Аналогічні перевірки для інших стовпців:

$$\sum_{i=1}^4 P(a_i / b_2), \sum_{i=1}^4 P(a_i / b_3), \sum_{i=1}^4 P(a_i / b_4).$$

Знаходження часткових умовних ентропій $H(b_j / a_1)$ і $H(a_i / b_1)$

Невизначеність відправника про правильність отримання інформації можна виразити через часткову умовну ентропію вигляду:

$$H(b_j / a_1) = - \sum_{j=1}^4 P(b_j / a_1) \log P(b_j / a_1).$$

Аналогічно невизначеність одержувача про те, чи отримав він правильний символ, виражається через часткову умовну ентропію вигляду:

$$H(a_i / b_1) = - \sum_{i=1}^4 P(a_i / b_1) \log P(a_i / b_1).$$

Підставляючи числові значення для ймовірностей, одержимо

$$H(b_j / a_1) = - \left[P(b_1 / a_1) \log P(b_1 / a_1) + P(b_2 / a_1) \log P(b_2 / a_1) + \right. \\ \left. + P(b_3 / a_1) \log P(b_3 / a_1) + P(b_4 / a_1) \log P(b_4 / a_1) \right] = \\ = 0.65512 \text{ (біт/симв.)}.$$

Аналогічно

$$H(a_i / b_1) = - \sum_{i=1}^4 P(a_i / b_1) \log P(a_i / b_1) = 0.68261 \text{ (біт/симв.)}.$$

Отримання повних умовних ентропій $H(B / A)$ та $H(A / B)$

Повна умовна ентропія (або загальна умовна ентропія) характеризує невизначеність одержувача в правильності прийому будь-якого з переданих символів. Для її оцінки використовуються співвідношення

$$H(B/A) = -\sum_{i=1}^4 P(a_i) \sum_{j=1}^4 P(b_j/a_i) \log P(b_j/a_i);$$

$$H(A/B) = -\sum_{j=1}^4 P(b_j) \sum_{i=1}^4 P(a_i/b_j) \log P(a_i/b_j).$$

Підставляючи числові значення для ймовірностей, одержимо

$$H(B/A) = 0.8225 \text{ біт/симв}, \quad H(A/B) = 0.74225 \text{ біт/симв}.$$

Знаходження ентропії об'єднання $H(A, B)$

Ентропія об'єднання може бути розрахована за допомогою трьох співвідношень

$$H(A, B) = -\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 P(a_i, b_j) \log P(a_i, b_j);$$

$$H(A, B) = H(A) + H(B/A), \text{ де } H(A) = -\sum_{i=1}^4 P(a_i) \log P(a_i);$$

$$H(A, B) = H(B) + H(A/B), \text{ де } H(B) = -\sum_{j=1}^4 P(b_j) \log P(b_j).$$

Підставивши чисельні значення параметрів, отримаємо

$$H(A, B) = -\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 P(a_i, b_j) \log P(a_i, b_j) = 2.6689 \text{ біт/симв}.$$

$$H(A) = 1.8464 \text{ біт/симв.}; \quad H(A, B) = H(A) + H(B/A) = 2.6689 \text{ біт/симв.}$$

$$H(B) = 1.9267 \text{ біт/симв.}; \quad H(A, B) = H(B) + H(A/B) = 2.6689 \text{ біт/симв.}$$

Знаходження кількості інформації на виході каналу зв'язку $I(A, B)$

Кількість інформації на виході каналу зв'язку може бути знайдено трьома різними способами:

$$I(A, B) = H(A) + H(B) - H(A, B) = 1.8464 + 1.9267 - 2.6689 = 1.1042 \text{ біт};$$

$$I(A, B) = H(A) - H(A/B) = 1.8464 - 0.74225 = 1.1042 \text{ біт};$$

$$I(A, B) = H(B) - H(B/A) = 1.9267 - 0.8225 = 1.1042 \text{ біт}.$$

6.4 Завдання для самостійної роботи

1. Визначити кількість інформації в заданому тексті певної довжини українською мовою, якщо ентропія українського алфавіту $H = 4.577179$ біт/симв.

2. Яка кількість інформації доводиться на літеру алфавіту, що складається з 32 літер.

3. Обчислити ентропію і надмірність джерела, що видає повідомлення x_1, x_2, x_3 і x_4 з імовірностями:

$$p(x_1) = 1/2, p(x_2) = 1/4, p(x_3) = p(x_4) = 1/8.$$

4. Визначити ентропію джерела й умовну ентропію повідомлень, переданих по каналу зв'язку і таких, що складаються з рівноймовірних символів, якщо вплив перешкод у каналі описується матрицею:

$$P(y/x) = \begin{vmatrix} 0.98 & 0.01 & 0.01 \\ 0.15 & 0.75 & 0.1 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{vmatrix}.$$

5. Визначити ентропію приймача повідомлень, якщо канална матриця має вигляд:

$$P(b/a) = \begin{vmatrix} 0.97 & 0.03 & 0 \\ 0.01 & 0.98 & 0.01 \\ 0 & 0.04 & 0.96 \end{vmatrix},$$

а ймовірності появи символів a_1 , a_2 та a_3 на вході джерела повідомлень дорівнюють: $P(a_1) = 0.5$; $P(a_2) = 0.3$ і $P(a_3) = 0.2$.

6. Визначити ентропію джерела повідомлень X , якщо ймовірність появи сигналів на вході приймача Y дорівнює: $P(y_1) = 0.1$; $P(y_2) = 0.2$; $P(y_3) = 0.3$ $P(y_4) = 0.4$, а канална матриця має вигляд:

$$P(x/y) = \begin{vmatrix} 0.97 & 0.01 & 0 & 0 \\ 0.02 & 0.98 & 0.02 & 0 \\ 0.01 & 0.01 & 0.96 & 0.03 \\ 0 & 0 & 0.02 & 0.97 \end{vmatrix}.$$

7. Обчислити повну умовну ентропію повідомлень, переданих по каналу зв'язку і таких, що складаються із символів з імовірностями:

$P(x_1) = 0.6$; $P(x_2) = 0.3$ та $P(x_3) = 0.1$. Вплив перешкод у каналі описується матрицею:

$$P(y/x) = \begin{vmatrix} 0.96 & 0.04 & 0 \\ 0.03 & 0.95 & 0.02 \\ 0.02 & 0.04 & 0.94 \end{vmatrix}. \quad \text{При цьому, } \sum_j P(y_j/x_i) = 1.$$

Контрольні запитання

1. Дайте визначення «ентропії інформації».
2. Які вимоги до міри кількості інформації?
3. Перерахуйте одиниці виміру інформації.
4. Що характеризує середню кількість інформації?
5. Перерахуйте основні властивості кількості інформації.
6. Поясніть сутність поняття ентропії.
7. Перерахуйте одиниці виміру ентропії.

8. Що характеризує ентропія?
9. Перерахуйте основні властивості ентропії.
10. Що являє собою міра Хартлі?
11. Що являє собою міра Шеннона?
12. Що розуміється як надмірність повідомлень?
13. Який зв'язок між ентропією й інформацією?
14. Що являє собою умовна ентропія?
15. Що являє собою безумовна ентропія?
16. Що являє собою взаємна ентропія?
17. Що являє собою загальна ентропія?
18. Що являє собою часткова й повна ентропії?
19. Що являє собою канальна матриця?

Практична робота 7

КОДУВАННЯ СИГНАЛІВ

7.1 Мета практичної роботи

Набуття практичних навичок використання методів розв'язання задач кодування сигналів,

7.2 Теоретична частина

7.2.1 Класифікація кодів. Кодування – це перетворення повідомлень у сигнал, тобто перетворення повідомлень у кодові комбінації. Код – система відповідності між елементами повідомлень і кодових комбінацій.

Алфавіт – безліч можливих елементів коду, тобто елементарних символів (кодових символів) $X = \{x_i\}$, де $i = \overline{1, m}$. Кількість елементів коду – m називається його *основою*. Для двійкового коду $x_i = \{0, 1\}$ і $m = 2$. Кінцева послідовність символів цього алфавіту називається *кодовою комбінацією* (кодовим словом). Число елементів у кодовій комбінації – n називається *значністю* (довжиною комбінації). Число різних кодових комбінацій ($N = m^n$) називається *обсягом*, або потужністю коду.

Коди можна класифікувати за різними ознаками:

1. За основою (кількості символів в алфавіті): *бінарні* (двійкові $m = 2$) і *не бінарні* ($m \neq 2$).
2. За довжиною кодових комбінацій (слів):
 - *рівномірні* – якщо всі кодові комбінації мають однакову довжину;
 - *нерівномірні* – якщо довжина кодової комбінації не постійна.
3. За способом передачі:
 - *послідовні* й *паралельні*;
 - *блокові* – (дані спочатку вміщуються в буфер, а потім передаються в канал) і бінарні *безперервні*.
4. За перешкодостійкістю:

– *прости* (примітивні, повні) – для передачі інформації використовують усі можливі кодові комбінації (без надмірності);

– *коригувальні* (порешкодозахищені) – для передачі повідомлень використовують не всі, а тільки частину (дозволені) кодових комбінацій.

Цілі кодування:

1. Підвищення ефективності передачі даних за рахунок досягнення максимальної швидкості передачі даних.

2. Підвищення перешкодостійкості при передачі даних.

7.2.2 Способи подання кодів. Залежно від застосовуваних методів кодування, використовують різні математичні моделі кодів, при цьому найбільш часто застосовується подання кодів у вигляді: кодових матриць; кодових дерев; багаточленів; геометричних фігур та інш.

Матричне подання кодів використовується для подання рівномірних n -значних кодів.

Подання кодів у вигляді кодових дерев. Кодове дерево – зв’язувальний граф, що не містить циклів. Зв’язувальний граф – граф, у якому для будь-якої пари вершин існує шлях, що з’єднує ці вершини. Граф складається з вузлів (вершин) і ребер (гілок), що з’єднують вузли, розташовані на різних рівнях.

Подання кодів у вигляді багаточленів. Подання кодів у вигляді поліномів засновано на подібності (ізоморфізмі) простору двійкових n -последовностей і простору поліномів степеня не вище $n - 1$.

Геометричне подання кодів. Будь-яка комбінація n -розрядного двійкового коду може бути зображена як вершина n -мірного одиничного куба, тобто куба з довжиною ребра, що дорівнює 1.

7.2.3 Оптимальне статистичне кодування. Оптимальним статистичним (економним) кодуванням називається кодування, при якому забезпечується розподіл часу на передачу окремих символів алфавіту залежно від апріорних імовірностей їхньої появи:

$$t_i = -\frac{\log_2 p_i}{C_n}, \quad (7.1)$$

де C_n – пропускна здатність каналу; p_i – апіорна ймовірність i -тої кодової комбінації; t_i – тривалість i -тої кодової комбінації.

Існує багато методів оптимального, статистичного кодування. Найбільш часто використовують оптимальне кодування за методом Шеннона – Фано й Гаффмана.

7.2.4 Код Шеннона – Фано. Кодування за методом Шеннона – Фано здійснюється в такий спосіб:

1. Множина символів, з яких формуються повідомлення, записуються за убубанням їхніх апіорних ймовірностей.

2. Подальша побудова коду виробляється методом послідовного розподілу навпіл. Символи повідомлення розбиваються на дві групи із приблизно рівними ймовірностями (тому що при відсутності статистичного зв'язку між символами швидкість передачі максимальна за умови рівної ймовірності передачі символів). Якщо рівної ймовірності в підгрупах досягти не можна, то бажано щоб сумарна ймовірність нижньої підгрупи була більшою за верхню.

3. Всім символам верхньої групи приписується кодовий символ 1, а символам нижньої – 0. Можна навпаки, тому що для кодової реалізації байдуже 0 або 1, але з погляду потужності краще, якщо в кодовій комбінації менше одиниць.

4. Потім кожна підгрупа аналогічно розбивається на підгрупи по можливості з однаковими ймовірностями. Розбивка здійснюється доти, доки в кожній підгрупі залишиться по одному символу.

Приклад побудови коду наведено у табл. 7.1.

Таблиця 7.1 – Приклад побудови коду

a_i	p_i	Розбиття	Кодова комбінація	Довжина
a_1	1/2	}1	1	τ
a_2	1/4	0 }1	01	2τ
a_3	1/8	}0 }1	001	3τ
a_4	1/8	}0	000	3τ

Побудований код є префіксним.

Наприклад: отримана кодова послідовність 111000101 однозначно декодується як 1 1 1 000 1 01 $\Rightarrow a_1 a_1 a_1 a_4 a_1 a_2$.

$$a_1 a_1 a_1 a_4 a_1 a_2$$

Застосовуючи статистичне кодування можна одержати результат, близький до ідеального кодування за Шенноном.

Середня довжина кодової комбінації, при використанні двійкового коду як вторинного, дорівнює:

$$l_{\text{сер}} = \sum_{i=1}^N p_i l_i, \quad (7.2)$$

де l_i – довжина i -тої комбінації; N – основа первинного коду.

Ефективність ОНК максимальна при

$$l_{\text{сер}} = H; \quad \sum_{i=1}^N p_i l_i = - \sum_{i=1}^N p_i \log_2 p_i. \quad (7.3)$$

Коефіцієнт відносної ефективності (коефіцієнт використання пропускної здатності) дорівнює:

$$K_{\text{в.е.}} = \frac{H}{l_{\text{сер}}}. \quad (7.4)$$

Коефіцієнт статистичного стиску (зменшення кількості двійкових розрядів на символ повідомлення при використанні статистичного кодування порівняно зі звичайним кодуванням) дорівнює:

$$K_{\text{с.с.}} = \frac{H_{\text{max}}}{l_{\text{сер}}} = \frac{\log_2 m}{l_{\text{сер}}}. \quad (7.5)$$

Для розглянутого прикладу при тривалості символу кодової комбінації (0 або 1), яка дорівнює τ , середня довжина й середня тривалість кодової комбінації відповідно дорівнюють:

$$l_{\text{сер}} = \sum_{i=1}^N p_i l_i = 0.5 + 2 \cdot 0.25 + 2 \cdot 3 \cdot 0.125 = 1.75; \quad \bar{\tau} = \sum_{i=1}^N p_i \tau_i = 1.75\tau.$$

Ентропія джерела дорівнює:

$$\begin{aligned} H(X) &= -\sum_{i=1}^4 p(x_i) \log_2 p(x_i) = \\ &= -\left(\frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \log_2 \frac{1}{4} + \frac{2}{8} \log_2 \frac{1}{8}\right) = 1.75 \text{ біт/симв.} \end{aligned}$$

При цьому $K_{\text{в.е.}} = 1.75/1.75 = 1$; $K_{\text{с.с.}} = 2/1.75 = 1.14$.

Швидкість передачі інформації

$$\bar{I}(X) = \frac{H(X)}{\bar{\tau}} = \frac{1.75}{1.75\tau} = \frac{1}{\tau} = C, \quad (7.6)$$

тобто коефіцієнт використання пропускну здатності каналу дорівнює 1, а виходить, має місце ідеальне використання каналу (оптимальне статистичне кодування).

Якщо підгрупи мають не однакову сумарну імовірність, то коефіцієнт менший 1. Для рівномірного коду $\bar{\tau} = 2\tau$, при цьому

$$\bar{I}(X) = \frac{H(X)}{\bar{\tau}} = \frac{1.75}{2\tau} = 0.875 \frac{1}{\tau} = 0.875C.$$

Недолік коду ОНК – низька перешкодостійкість, тому що втрата одного розряду може означати втрату символу.

7.2.5 Код Гаффмана. Кодування за методом Гаффмана здійснюється

так:

1. Всі символи, що підлягають кодуванню, записуються за зменшенням їх апіорних імовірностей. Якщо деякі символи мають однакові імовірності, то їх розташовують поруч у довільному порядку.

2. Вибирають символи з мінімальними імовірностями по 2 і одному приписують 0, а іншому 1.

3. Обрані символи поєднують у проміжні символи із сумарною імовірністю.

4. Знову знаходять пару символів із найменшими імовірностями й виконують аналогічно.

У табл. 9.2 наведено приклад кодування за методом Гаффмана для джерела повідомлень із заданими імовірностями символів алфавіту:

$$x_1 = 0.4; x_2 = x_5 = 0.2; x_3 = 0.1; x_4 = x_6 = 0.05.$$

Таблиця 7.2 – Приклад кодування за методом Гаффмана

Символ	p_i	Граф коду Гаффмана	Код
x_1	0.4		1
x_2	0.2		01
x_5	0.2		001
x_3	0.1		0001
x_4	0.05		00001
x_6	0.05		00000

$$\sum_i p_i = 1$$

Ентропія джерела дорівнює:

$$H(X) = -\sum_{i=1}^4 p(x_i) \log_2 p(x_i) = -(0.4 \cdot \log_2 0.4 + 2 \cdot 0.2 \cdot \log_2 0.2 + 0.1 \cdot \log_2 0.1 + 2 \cdot 0.05 \log_2 0.05) = 2.22 \text{ біт/симв.}$$

Середня довжина кодової комбінації цього коду

$$l_{\text{сер}} = \sum_{i=1}^6 p_i \tau_i = 0.4 + 0.2 \cdot 2 + 0.2 \cdot 3 + 0.1 \cdot 4 + 0.05 \cdot 5 + 0.05 \cdot 5 = 2.3.$$

Довжина кодової комбінації примітивного коду визначається співвідношенням

$$l \geq \frac{\log_2 N}{\log_2 m} = \frac{\log_2 6}{\log_2 2} = \log_2 6 = 2.5849. \quad (7.7)$$

Округляючи до найближчого цілого в більшу сторону, одержимо $l = 3$.

Ефективність ОНК максимальна, якщо $l_{\text{сер}} = H$.

Коефіцієнт відносної ефективності дорівнює:

$$K_{\text{в.е.}} = \frac{H}{l_{\text{сер}}} = \frac{2.22}{2.3} = 0.96.$$

Коефіцієнт статистичного стиску дорівнює:

$$K_{\text{с.с.}} = \frac{H_{\text{max}}}{l_{\text{сер}}} = \frac{\log_2 N}{l_{\text{сер}}} = \frac{\log_2 6}{2.3} = \frac{2.58}{2.3} = 1.12.$$

Нерівномірний код можна передавати блоками заданої довжини, а на приймальній стороні декодувати всю послідовність.

7.3 Завдання для самостійної роботи

Побудувати оптимальні коди ОНК за методом Шеннона – Фано й Гаффмана, визначити ефективність кожного з них, тобто наскільки вони близькі до оптимального. Визначити необхідний обсяг каналу зв'язку для кожного коду. Виконати порівняльний аналіз кодів. Вихідні дані наведені в табл. 7.5.

Таблиця 7.5 – Вихідні дані для побудови кодів

N	a_i	1	2	3	4	5	6	7	τ , мкс	V , симв./с
1	a_1	0.15	0.18	0.02	0.01	0.019	0.26	0.01	1	–
2	a_2	0.23	0.12	0.04	0.55	0.098	0.5	0.24	–	10
3	a_3	0.18	0.11	0.07	0.13	0.25	0.12	0.03	10	–
4	a_4	0.03	0.09	0.14	0.1	0.03	0.06	0.48		100
5	a_5	0.12	0.02	0.49	0.07	0.04	0.03	0.04	20	–
6	a_6	0.16	0.05	0.14	0.03	0.45	0.01	0.02	–	200
7	a_7	0.01	0.03	0.07	0.05	0.061	0.02	0.15	50	
8	a_8	0.04	0.01	0.01	0.05	0.052	–	0.03	–	500
9	a_9	0.06	0.33	0.02	–	–	–	–	200	–
10	a_{10}	0.02	0.01	–	–	–	–	–	–	1000

Контрольні запитання

1. Наведіть класифікацію кодів за основою.
2. Наведіть класифікацію кодів за довжиною кодових слів.
3. Наведіть класифікацію кодів за способом передачі.
4. Наведіть класифікацію кодів за перешкодостійкістю.
5. Перелічте цілі кодування.
6. Перелічте способи подання кодів.
7. Поясніть сутність подання кодів у вигляді кодових дерев.
8. Поясніть сутність геометричного подання кодів.
9. Як зобразити код у вигляді полінома?
10. Поясніть сутність оптимального статистичного кодування.
11. Наведіть приклади статистичних кодів.
12. Поясніть алгоритм коду Шеннона – Фано.
13. Поясніть алгоритм коду Гаффмана.
14. Як оцінюється ефективність оптимальних кодів?

Практична робота 8

ПЕРЕШКОДОСТІЙКЕ КОДУВАННЯ

8.1 Мета практичної роботи

Набуття практичних навичок розв'язання задачі розроблення систем кодування, здатних здійснювати прийом інформації в умовах наявності перешкод у лінії зв'язку усередині апаратних трактів з метою забезпечення надійності і достовірності переданої інформації (даних).

8.2 Теоретична частина

8.2.1 Перешкодостійкі коди. Методи кодування. Наявність перешкод ставить додаткові вимоги до методів кодування. Для захисту інформації від перешкод необхідно вводити в тому або іншому вигляді надмірність: підвищення потужності сигналу; повторення повідомлень; збільшення довжини кодової комбінації та ін.

Одним із найбільш ефективних методів підвищення достовірності й надійності передачі даних є завадостійке кодування, що дозволяє за рахунок внесення додаткової надмірності (збільшення мінімальної кодової відстані) у кодових комбінаціях переданих повідомлень забезпечити можливість виявлення й виправлення одиночних, кратних і групових помилок.

Мінімальна кодова відстань характеризує перешкодостійкість і надмірність повідомлень. Залежно від величини мінімальної кодової відстані існують коди, що виявляють і виправляють помилки.

Кодова відстань d визначається як кількість одиниць у результаті підсумовування за модулем 2 двох кодових комбінацій. Мінімальна кодова відстань d_0 – мінімальна з кодових відстаней усіх можливих кодових комбінацій.

Для виявлення r помилок мінімальна кодова відстань дорівнює:

$$d_0 \geq r+1. \quad (8.1)$$

Для виявлення r помилок і виправлення s помилок мінімальна кодова відстань дорівнює:

$$d_0 \geq r+s+1. \quad (8.2)$$

Тільки для виправлення помилок мінімальна кодова відстань дорівнює:

$$d_0 \geq 2s+1. \quad (8.3)$$

Виявляючі коди – це коди, що дозволяють виявити помилку, але не виправити її. Найпростіший спосіб виявлення помилки це додавання до послідовності бітів даних ще одного біта – біта перевірки на парність (непарність) значення, який дорівнює сумі за модулем 2 вихідної послідовності бітів. Частіше організується перевірка на непарність.

Перевірка на парність по вертикалі й горизонталі. При цьому послідовність бітів даних перебудовується у двовимірний масив і обчислюються біти на парність, як для кожного рядка, так і для кожного стовпця. Таким чином можна виявити кілька помилок, якщо вони не розташовуються в однакових рядках і стовпцях.

8.2.2 Кориговальні коди. Перешкодостійкими, або кориговальними кодами називаються коди, що дозволяють виявити й усунути помилки при передачі інформації через вплив перешкод.

Найпоширенішим є клас кодів із корекцією одиночних і виявленням подвійних помилок (КО-ВП). Найвідомішим серед цих кодів є код Гемінга, що має простий і зручний для технічної реалізації алгоритм виявлення й виправлення одиночної помилки.

Серед кориговальних кодів широко використовуються циклічні коди. В ЕОМ ці коди застосовуються при послідовній передачі даних між ЕОМ і зовнішніми пристроями, а також при передачі даних по каналах зв'язку. Для виправлення двох і більше помилок ($d_0 \geq 5$) використовуються циклічні коди БЧХ (Боуза – Чоудхурі – Хоквінгема), а також Ріда – Соломона, які широко використовуються в пристроях цифрового запису звуку на магнітну стрічку або оптичні компакт-диски, що дозволяють здійснювати корекцію групових

помилки. Здатність коду виявляти й виправляти помилки досягається за рахунок уведення надмірності в кодові комбінації, тобто кодовим комбінаціям з k двійкових інформаційних символів, які надходять на вхід кодуючого пристрою, відповідає на виході послідовність із n двійкових символів (такий код називається (n, k) -кодом).

Якщо $N_0 = 2^n$ – загальна кількість кодових комбінацій, а $N = 2^k$ – кількість дозволених, то кількість заборонених кодових комбінацій дорівнює:

$$N_0 - N = 2^n - 2^k.$$

При цьому кількість помилок, що призводить до забороненої кодової комбінації, дорівнює:

$$E = \sum_{i=0}^S C_n^i, \quad (8.4)$$

де S – кратність помилки, тобто кількість перекручених символів у кодовій комбінації $S = 0, 1, 2, \dots$; C_n^i – сполучення з n елементів по i , що обчислюється за формулою

$$C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots[n-(i-1)]}{i!}. \quad (8.5)$$

$$\text{Для } S = 0; C_n^0 = 1;$$

$$S = 1; C_n^1 = n;$$

$$S = 2; C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2!};$$

$$S = 3; C_n^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \text{ і т.д.}$$

Для виправлення S помилок кількість комбінацій кодового слова, складеного з m перевірних розрядів $N = 2^m$, має бути більшою від можливої кількості помилок (10.6), при цьому кількість помилок, що виявляються, у два рази більша, ніж тих, що виправляються

$$2^{n-k} \geq \sum_{i=0}^S C_n^i = 1 + n + \frac{n(n-1)}{2!} + \frac{n(n+1)(n-2)}{3!} + \dots \quad (8.6)$$

$$2^m \geq \sum_{i=0}^S C_n^i, \text{ звідки } m \geq \log_2 \sum_{i=0}^S C_n^i.$$

Для одиночної помилки як найбільш імовірної $m \geq \log_2(C_n^0 + C_n^1)$.

Залежно від вихідних даних коду (n або k), можна використовувати формули

$$2^m \geq n+1, \quad 2^k \leq \frac{2^n}{(n+1)}. \quad (8.7)$$

При цьому $m = \lceil \log_2(1+n) \rceil$ або $m = \lceil \log_2 \{ (k+1) + \lceil \log_2(k+1) \rceil \} \rceil$, де квадратні дужки позначають округлення до більшого цілого.

Для виправлення дворазової помилки

$$m \geq \log_2(C_n^0 + C_n^1 + C_n^2) \text{ або } 2^m \geq 1 + n + \frac{n(n-1)}{2}. \quad (8.8)$$

8.2.3 Лінійні групові коди. Лінійним називається код, у якому перевірні символи являють собою лінійні комбінації інформаційних. Груповим називається код, що утворює алгебраїчну групу щодо операції додавання за модулем 2.

Групові коди зручно задавати за допомогою матриць, розмірність яких визначається параметрами k і n . Число рядків дорівнює k , а число стовпців – $n = k+m$.

$$G(n, k) = \left\| \begin{array}{cccccccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2m} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} & p_{k1} & p_{k2} & \dots & p_{km} \end{array} \right\|. \quad (8.9)$$

Коди, породжені цими матрицями, називаються (n, k) -кодами, а відповідні їм породжувальні матриці – утворюючими, виробляючими. Породжувальна матриця G складається з інформаційної I_{kk} і перевірної R_{km}

матриць. Вона є стислим описом лінійного коду й може бути зображена в канонічній (типовий) формі:

$$G(n, k) = \|I_{kk} R_{km}\| = \|R_{km} I_{kk}\|. \quad (8.10)$$

Як інформаційну матрицю зручно використовувати одиничну матрицю, ранг якої визначається кількістю інформаційних розрядів

$$I_{kk} = \left\| \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right\|. \quad (8.11)$$

Рядки одиничної матриці являють собою лінійно-незалежні комбінації (базисні вектори), тобто їх попарне підсумовування за модулем 2 не приводить до нульового рядка.

Рядки породжувальної матриці являють собою перші k комбінацій коригувального коду, а інші кодові комбінації можуть бути отримані в результаті підсумовування за модулем 2 всіляких сполучень цих рядків.

Стовпці додаткової матриці R_{km} визначають правила формування перевірок. Число одиниць у кожному рядку додаткової матриці має задовольняти умову $r_l \geq d_0 - 1$, але число одиниць визначає число суматорів за модулем 2 у шифраторі й дешифраторі, і чим їх більше, тим складніша апаратура.

Виробляюча матриця коду $G(7,4)$ може мати вигляд

$$G(7,4) = \left\| \begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right\| \text{ і т.д.}$$

Процес кодування полягає у взаємно-однозначній відповідності k -розрядних інформаційних слів – I і n -розрядних кодових слів – c :

$$c = IG. \quad (8.12)$$

Наприклад: інформаційному слову $I = [1 \ 0 \ 1 \ 0]$ відповідає наступне кодове слово

$$c = [1 \ 0 \ 1 \ 0] \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = [1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]. \quad (8.13)$$

8.2.4 Код Гемінга. Код Гемінга належить до класу лінійних кодів і являє собою систематичний код – код, у якому інформаційні й контрольні біти розташовані на строго певних місцях у кодовій комбінації. Код Гемінга, як і будь-який (n, k) -код, містить k -інформаційних та $m = n - k$ надлишкових (перевірних) бітів.

Надлишкова частина коду будується так, щоб можна було при декодуванні не тільки встановити наявність помилки, але і вказати номер позиції, в якій відбулася помилка, а значить, і виправити її, інвертувавши значення відповідного біта.

Існують різні методи реалізації коду Гемінга й кодів, які є модифікацією коду Гемінга. Розглянемо алгоритм побудови коду для виправлення одиночної помилки.

1. За заданою кількістю інформаційних символів – k , або інформаційних комбінацій $N = 2^k$, використовуючи співвідношення:

$$n = k + m, \quad 2^n \geq (n + 1)2^k \text{ і } 2^m \geq n + 1, \quad (8.14)$$

$$m = \lceil \log_2 \{ (k + 1) + \lceil \log_2(k + 1) \rceil \} \rceil$$

обчислюють основні параметри коду n і m .

2. Визначають робочі й контрольні позиції кодової комбінації. Нумери контрольних позицій визначаються за законом 2^i , де $i = 1, 2, 3, \dots$, тобто вони дорівнюють 1, 2, 4, 8, 16, ..., а інші позиції є робочими.

3. Визначаємо значення контрольних розрядів (0 або 1) за допомогою багаторазових перевірок кодової комбінації на парність. Кількість перевірок дорівнює $m = n - k$. У кожену перевірку включається один контрольний і певні

перевірні біти. Якщо результат перевірки дає парне число, то контрольному біту надається значення – 0, у протилежному випадку – 1. Номери інформаційних бітів, що включаються в кожну перевірку, визначаються за двійковим кодом натуральних n -чисел розрядністю – m (табл. 10.2, для $m = 4$) або за допомогою перевірної матриці $H(m \times n)$, стовпці якої представляють запис у двійковій системі всіх цілих чисел від 1 до $2^k - 1$, перерахованих у зростаючому порядку. Для $m = 3$ перевірна матриця має вигляд

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (8.15)$$

Кількість розрядів m визначає кількість перевірок.

У першу перевірку включають коефіцієнти, що містять 1 у молодшому (першому) розряді, тобто b_1, b_3, b_5 і т.д.

У другу перевірку включають коефіцієнти, що містять 1 у другому розряді, тобто b_2, b_3, b_6 і т.д.

У третю перевірку – коефіцієнти, які містять 1 у третьому розряді й т.д.

Таблиця 8.1 – Визначення бітів, що включаються в кожну перевірку

Десяткові числа (номери розрядів кової комбінації)	Двійкові числа та їх розряди		
	3	2	1
1	0	0	1
2	0	1	0
3	0	1	1
4	1	0	0
5	1	0	1
6	1	1	0
7	1	1	1

Для виявлення й виправлення помилки складаються аналогічні перевірки на парність контрольних сум, результатом яких є двійкове $(n-k)$ -розрядне число, що називається синдромом і вказує на положення помилки, тобто на номер помилкової позиції, що визначається за двійковим записом числа або за перевірною матрицею.

Для виправлення помилки необхідно проінвертувати біт у помилковій позиції. Для виправлення одиночної помилки й виявлення подвійної використовують додаткову перевірку на парність. Якщо при виправленні помилки контроль на парність фіксує помилку, то значить у кодовій комбінації є дві помилки.

8.3 Практична частина

Приклад 1. Символи алфавіту джерела кодуються семи розрядним двійковим кодом із вагою кодових векторів (кількістю одиниць у кодовій комбінації) $w = 3$. Визначити необхідну потужність коду і його надмірність.

Розв'язання. Потужність семи розрядного коду дорівнює $N = 2^7 = 128$.

Оскільки для кодування використовуються тільки кодові вектори з вагою три, то кількість таких векторів у семи розрядному коді дорівнює:

$$K = C_m^n = \frac{m!}{n!(m-n)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4)} = 35.$$

Надмірність коду дорівнює: $R = 1 - \log_2 K / \log_2 N = 0.265$.

Приклад 2. Визначити кількість перевірних розрядів для систематичного коду, що виправляє одиночну помилку й складається з 20 інформаційних розрядів.

Розв'язання. Загальна довжина кодової комбінації дорівнює $n = k + m$, де k – кількість інформаційних розрядів, а m – перевірних розрядів.

Для виявлення подвійних і виправлення одиночної помилки залежності

для розрядів мають вигляд $2^m \geq n + 1, 2^k \leq \frac{2^n}{(n + 1)}$, при цьому

$$m = [\log_2 \{(k+1) + [\log_2(k+1)]\}] = [\log_2 \{(20+1) + [\log_2(20+1)]\}] = 5,$$

тобто одержимо (25, 20)-код.

Приклад 3. Побудувати груповий код, здатний передавати 16 символів первинного алфавіту з виправленням одиночної помилки. Показати процес кодування, декодування й виправлення помилки для переданого інформаційного слова 1001.

Розв'язання.

1. Побудуємо виробляючу матрицю $G(n, k)$.

Якщо обсяг коду $N = 2^k = 16$, то кількість інформаційних розрядів $k = 4$. Мінімальна кодова відстань для виправлення одиночної помилки ($s = 1$) $d_0 = 2s + 1 = 3$. За заданою довжиною інформаційного слова, використовуючи співвідношення:

$$n = k + m, 2^n \geq (n + 1) 2^k \text{ і } 2^m \geq n + 1$$

обчислимо основні параметри коду n і m .

$$m = [\log_2 \{(k + 1) + [\log_2(k + 1)]\}] = [\log_2 \{(4+1) + [\log_2(4+1)]\}] = 3.$$

Звідки $n = 7$, тобто необхідно побудувати (7, 4)-код.

Як інформаційну матрицю $I_k(7, 4)$ обираємо одиничну матрицю (4×4), а як перевірну матрицю $R_{km}(7, 4)$ – матрицю (4×3), кожний рядок якої містить число одиниць більше або таке, що дорівнює двом ($r_1 \leq d_0 - 1$).

Таким чином, як виробляючу можна взяти матрицю

$$G(7,4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Визначимо комбінації коригувального коду.

Для заданого числа інформаційних розрядів $k = 4$, число кодів комбінацій дорівнює $N = 2^k = 2^4 = 16$.

- | | | | |
|---------|---------|----------|----------|
| 1) 0000 | 5) 0010 | 9) 0001 | 13) 0011 |
| 2) 1000 | 6) 1010 | 10) 1001 | 14) 1011 |
| 3) 0100 | 7) 0110 | 11) 0101 | 15) 0111 |
| 4) 1100 | 8) 1110 | 12) 1101 | 16) 1111 |

Старшинство розрядів візьмемо зліва направо, відповідно до їх надходження на вхід довкола.

Знаходимо коригувальні розряди для кожного інформаційного слова як результат підсумовування за модулем 2 рядків перевіркої матриці, номери яких збігаються з номерами одиниць в інформаційних розрядах коду.

Наприклад, для інформаційного слова $I = [1001]$ кодове слово має вигляд

$$c = [1001] \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = [1001010].$$

Передані в канал кодові комбінації мають вигляд:

- | | | | |
|-------------|-------------|--------------|--------------|
| 1) 0000 000 | 5) 0010 110 | 9) 0001 101 | 13) 0011 011 |
| 2) 1000 111 | 6) 1010 001 | 10) 1001 010 | 14) 1011 100 |

- 3) 0100 011 7) 0110 101 11) 0101 110 15) 0111 000
 4) 1100 100 8) 1110 010 12) 1101 101 16) 1111 111

Процес декодування полягає у визначенні відповідності прийнятого кодового слова, переданому інформаційному й здійснюється за допомогою перевірної матриці $H(7, 4)$.

Для побудованого $(7, 4)$ -коду перевірна матриця має вигляд

$$H(7,4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix}.$$

Рядки перевірної матриці визначають правила формування перевірок, що дозволяють визначити синдром помилки.

Нехай у процесі передачі відбулася помилка в 2-му інформаційному розряді

$$1 \begin{matrix} \square \\ \downarrow \end{matrix} 0 1 1 0 0 1$$

Відповідно до перевірної матриці визначаємо перевірні вектори

$$p_1 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_4 = S_1 = 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 = 0;$$

$$p_2 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 = S_2 = 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 = 1;$$

$$p_3 \oplus a_1 \oplus a_3 \oplus a_4 = S_3 = 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 = 1.$$

Синдром 011 показує, що помилка відбулася в 2-му інформаційному розряді, який необхідно проінвертувати.

Приклад 4. Побудувати утворюючу матрицю групового коду, для передачі 100 різних повідомлень, здатну виправляти якомога більшу кількість помилок.

Розв'язання. Обсяг коду дорівнює $N = 2^k$. При 100 повідомленнях: $100 \leq N \leq 2^k$, звідки $k = 7$. За заданою довжиною інформаційного слова, використовуючи співвідношення

$$n = k + m, \quad 2^n \geq (n + 1)2^k \text{ і } 2^m \geq n + 1,$$

обчислимо основні параметри коду n і m .

$$m = \lceil \log_2 \{(k + 1) + \lceil \log_2(k + 1) \rceil\} \rceil = \lceil \log_2 \{(7 + 1) + \lceil \log_2(7 + 1) \rceil\} \rceil = 4.$$

Звідки $n = 11$, тобто одержали (11, 7)-код.

Як інформаційну матрицю обираємо одиничну матрицю $I(7 \times 7)$. Перевірна матриця містить 4 стовпці й 7 рядків, які містять $r_1 \leq d_0 - 1$ одиниць у чотирирозрядному коді (2, 3, 4-одиниці).

$$G(11,7) = \begin{pmatrix} 1000000 & 1111 \\ 0100000 & 1110 \\ 0010000 & 1101 \\ 0001000 & 1011 \\ 0000100 & 0111 \\ 0000010 & 1001 \\ 0000001 & 0110 \end{pmatrix}.$$

Приклад 5. Побудувати код Гемінга для передачі повідомлень у вигляді послідовності десяткових цифр, представлених 4-х розрядними двійковими словами. Показати процес кодування, декодування й виправлення одиночної помилки на прикладі інформаційного слова 0101.

Розв'язання.

1. За заданою довжиною інформаційного слова ($k = 4$) визначимо кількість контрольних розрядів m , використовуючи співвідношення:

$$m = \lceil \log_2 \{(k + 1) + \lceil \log_2(k + 1) \rceil\} \rceil = \lceil \log_2 \{(4 + 1) + \lceil \log_2(4 + 1) \rceil\} \rceil = 3,$$

при цьому $n = k + m = 7$, тобто одержали (7, 4)-код.

2. Визначаємо номери робочої та контрольної позицій кодової комбінації. Номери контрольних позицій вибираємо за законом 2^i .

Для розглянутого завдання (при $n = 7$) номери контрольних позицій дорівнюють 1, 2, 4. При цьому кодова комбінація має вигляд:

$$\begin{array}{ccccccc} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 & b_7 \\ k_1 & k_2 & 0 & k_3 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

3. Визначаємо значення контрольних розрядів (0 або 1), використовуючи перевірну матрицю.

Перша перевірка:

$$k_1 \oplus b_3 \oplus b_5 \oplus b_7 = k_1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 \text{ буде парною при } k_1 = 0.$$

Друга перевірка:

$$k_2 \oplus b_3 \oplus b_6 \oplus b_7 = k_2 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 \text{ буде парною при } k_2 = 1.$$

Третя перевірка:

$$k_3 \oplus b_5 \oplus b_6 \oplus b_7 = k_3 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 \text{ буде парною при } k_3 = 0.$$

	1	2	3	4	5	6	7
Передана кодова комбінація:	0	1	<u>0</u>	0	1	0	1
Припустимо прийнято:	0	1	<u>1</u>	0	1	0	1

Для виявлення й виправлення помилки складемо аналогічні перевірки на парність контрольних сум, відповідно до перевірної матриці, результатом яких є двійкове $(n-k)$ -розрядне число, що називається синдромом, яке вказує на положення помилки, тобто на номер помилкової позиції.

$$1) k_1 \oplus b_3 \oplus b_5 \oplus b_7 = 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 = 1.$$

$$2) k_2 \oplus b_3 \oplus b_6 \oplus b_7 = 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 = 1.$$

$$3) k_3 \oplus b_5 \oplus b_6 \oplus b_7 = 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0.$$

Порівнюючи синдром помилки зі стовпцями перевірної матриці, визначаємо номер помилкового біта. Синдрому 011 відповідає третій стовпець, тобто помилка в третьому розряді кодової комбінації. Символ у 3-й позиції необхідно змінити на зворотний.

8.4 Завдання для самостійної роботи

1. Побудувати виробляючу матрицю для групового коду, здатного виправляти одиночну помилку при передачі повідомлень у вигляді символів шістнадцяткового алфавіту, зображених у вигляді чотиризначного двійкового коду.

2. Побудувати виробляючу матрицю для групового коду, здатного виправляти одиночну помилку в інформаційному слові, що становить 16-розрядну послідовність двійкових розрядів.

3. Побудувати груповий код, здатний виправляти одиночну помилку при передачі повідомлень у вигляді символів шістнадцяткової системи числення, зображених у вигляді чотиризначного двійкового коду.

4. Побудувати груповий код, здатний виправляти одиночну помилку при передачі повідомлень, що складаються з букв українського алфавіту, цифр і 10 спеціальних символів.

5. Побудувати груповий код за заданою виробляючою матрицею:

$$G(7,4) = \left\| \begin{array}{cc} 1000 & 111 \\ 0100 & 110 \\ 0010 & 101 \\ 0001 & 011 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} 1000 \\ 0100 \\ 0010 \\ 0001 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} 111 \\ 110 \\ 101 \\ 011 \end{array} \right\|.$$

6. Побудувати код Гемінга для передачі повідомлень у вигляді чотиризначного двійкового коду з виправленням одиночної помилки й виявленням подвійної.

7. Побудувати код Гемінга для передачі повідомлень у вигляді шістнадцяткових цифр, зображених чотиризначним двійковим кодом з виправленням одиночної помилки.

8. Побудувати код Гемінга для передачі повідомлень у вигляді п'ятизначного двійкового коду з виправленням одиночної помилки.

Контрольні запитання

1. Пояснити сутність завадостійкого кодування.
2. Який зв'язок мінімальної кодової відстані з кількістю помилок, що виправляються?
3. Який зв'язок мінімальної кодової відстані з кількістю помилок, що виявляються?
4. Який зв'язок мінімальної кодової відстані з кількістю помилок, що виявляються, і помилок, що виправляються?
5. У чому сутність контролю на непарність?
6. Які коди називаються виявляючими?
7. Які коди називаються коригувальними?
8. Які коди називаються лінійними?
9. Які коди називаються груповими?
10. Яка матриця називається утворюючою?
11. Як побудувати утворюючу матрицю?
12. Що характеризує кодову відстань?
13. Що являє собою код Гемінга? Його застосування.
14. Що являє собою кодер для коду Гемінга?
15. Поясніть алгоритм побудови коду Гемінга.
16. Поясніть процедуру кодування, виявлення й виправлення помилок.
17. Перелічте сфери застосування кодів Гемінга.

СПИСОК ДЖЕРЕЛ ІНФОРМАЦІЇ

1. Заполовський М.Й. Теорія інформації і кодування. Навчальний посібник для студентів денної та заочної форм навчання спеціальності 125 – «Кібербезпека» / М.Й. Заполовський, С.М. Порошин, М.В. Мезенцев. – Харків: Тов «ДІСА ПЛЮС», 2020. – 257 с.
2. Сайко В. Г. Основи цифрового оброблення сигналів в системах цифрового радіозв'язку : навч. посіб. / В. Г. Сайко, О. Г. Оксіюк, О. В. Дікарєв. – Київ : ДУТ, 2016. – 107 с.
3. Згуровський М.З., Панкратова Н.Д. Основи системного аналізу: Підручник Згуровський, Н.Д.Панкратова. – Київ: Видавнича група ВНУ, 2007. – 544 с.
4. Дубровін В. І. Комп'ютерні методи інтелектуальної обробки даних : навч. посіб. / В. І. Дубровін, Ю. В. Твердохліб, В. В. Харченко. – Запоріжжя: ЗНТУ, 2013. – 105 с.
5. Рибальченко М. О. Цифрова обробка сигналів : навч. посіб. / М. О. Рибальченко, О. П. Єгоров, В. Б. Зворикін. – Дніпро : НМетАУ, 2018. – 79 с.
6. Гаєв Є. О. Універсальний математичний пакет MatLab і типові задачі обчислювальної математики : навч. посіб. / Є. О. Гаєв, Б. М. Нестеренко. – Київ : Національний авіаційний університет, 2004. – 176 с.
7. Комп'ютерне моделювання систем та процесів. Методи обчислень. Частина 2 : навчальний посібник / Кветний Р. Н., Богач І. В., Бойко О. Р., Софіна О. Ю., Шушура О.М.; за заг. ред. Р.Н. Кветного. –Вінниця: ВНТУ, 2012. – 230 с.
8. Фельдман Л. П. Чисельні методи в інформатиці : підручник /Фельдман Л. П. Згуровського М. З., Фельдман Л. П., Петренко А. І., Дмитрієва О. А. – К.: Вид. група ВНУ, 2006. – 480 с.
9. Ляшенко М. Я. Чисельні методи : підручник / Ляшенко М. Я., Головань М. С. – К. : Либідь, 1996. – 288 с.

10. Толочко О.І. Пакети прикладних програм для ПЕОМ. Частина 1. *MATLAB, SIMULINK, SIMPOWERSYSTEM*. Основи програмування. Лабораторний практикум. – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020.

Навчальне видання

ЗАПОЛОВСЬКИЙ Микола Йосипович,
МЕЗЕНЦЕВ Микола Вікторович

ТЕОРІЯ ІНФОРМАЦІЇ ТА КОДУВАННЯ

Навчально-методичний посібник до практичних занять
для студентів всіх форм навчання
спеціальності 123 – «Комп'ютерна інженерія»

Відповідальний за випуск *О.Ю. Заковоротний*
Роботу до видання рекомендував *В. Д. Дмитрієнко*

План 2024р., п. 35

Підп. до друку 27.06. 2024.

Видавничий центр НТУ «ХП»
61002, Харків, вул. Кирпичова, 2.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 5478 від 21.08.2017 р.

Електронне видання