

**В.А. ВАНИН**, д-р техн. наук, проф., НТУ «ХПИ»;  
**А.А. ГРИГОРЬЕВ**, аспирант, НТУ «ХПИ»

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК УСТОЙЧИВОЙ ВОЛНЫ ПЕРЕНОСА УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ В ВИНТОВОМ СТЕРЖНЕ**

Отримано формули для розрахунку основних характеристик гвинтових фононів: енергії, імпульсу і спіну. Показано, що енергія цієї хвилі переносу пропорційна частоті, а значенню постійної Планка відповідатиме гвинтова траєкторія, діаметр якої близький до діаметру атома.

Получены формулы для расчёта основных характеристик винтовых фононов: энергии, импульса и спина. Показано, что энергия этой волны трансляции пропорциональна частоте, а значению постоянной Планка отвечает винтовая траектория, диаметр которой близок к диаметру атома.

The formulas for calculation of basic performances of propeller phonons are obtained: energy, impulse and spin. Is rotined, that the energy of this wave of translation is proportional to frequency, and the value of Planck's constants is responded by a propeller pathway, diameter is close to which one to diameter of atom.

**Введение и постановка задачи.** В работе [1] составлены линеаризованные уравнения высокочастотной гармонической волны переноса деформации в цилиндрической пружине (винтового фонона):

$$\left. \begin{aligned} Mx(v_f \cdot v_f' + f_v \cdot v_f) &= qf' - B \cdot qf + \Omega \cdot Qy_0 \\ Cx(v_f \cdot qf' + f_q \cdot qf) &= v_f' + B^T \cdot v_f + \Omega \cdot Vy_0 \end{aligned} \right\}, \tag{1}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \Omega = \begin{pmatrix} 0 & \chi_3 & -\chi_2 \\ -\chi_3 & 0 & 0 \\ \chi_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \tag{2}$$

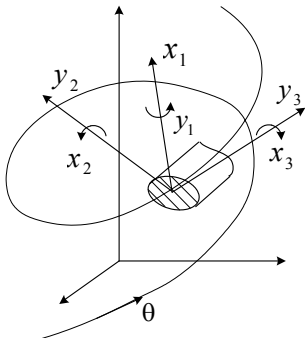
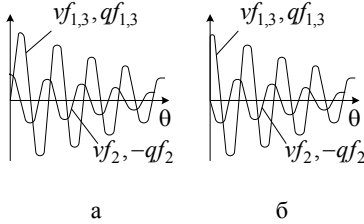


Рисунок 1 – Координаты поперечного сечения

$v_f$  – скорость перемещения волны;  $Mx$ ,  $Cx$  – диагональные матрицы инерционных коэффициентов и коэффициентов податливости сечения;  $v_f$ ,  $qf$  – скорости изменения координат (рис.1) и величины упругих сил (моментов сил);  $\chi_2, \chi_3$  – изгиб и кручение стержня. Уравнения учитывают рассеивание энергии на трение ( $f_v, f_q$  – коэффициенты трения) и поступление энергии от группы низкочастотных колебаний пружины (описываются векторами скоростей  $Vy_0$  и сил  $Qy_0$ ).

Там же получена формула для логарифми-

ческого декремента затухания волны (рис.2)



а  
б  
Рисунок 2 – Синусная (а) и косинусная (б) формы фонона

$$k_T = \left[ 0.5(f_v + f_q) / \omega_c^2 \right] \cdot \omega \quad (3)$$

и уравнение энергетического баланса фонона:

$$dE_n / d\tau = N_0 - N_T, \quad (4)$$

где  $\omega$ ,  $E_n$  – круговая частота и полная механическая энергия этой уединённой волны переноса;  $\omega_c$  – частота синфазных колебаний пружины (рис.3).

Предложена модель квантования амплитуды, базирующаяся на гистерезисе между нагрузкой и деформацией (рис.4).

В данной статье мы продолжим указанное направление исследования и получим основные характеристики винтового фонона, в том числе зависимость его энергии  $E_n$  от частоты  $\omega$ . На связь этой задачи с актуальными проблемами механики сплошной активной среды указывалось в работах [3-8].

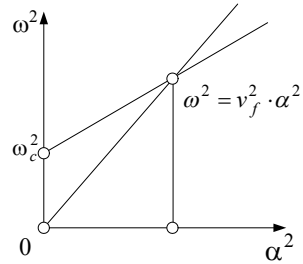


Рисунок 3 – Связь между волновым числом  $\alpha$  и скоростью фонона

### Условия устойчивости и ядро фонона.

Вычислим обе части неравенства

$$N_0 > N_T, \quad (5)$$

определяющего необходимые условия устойчивости фонона, имеющего амплитуду  $A$  и (для определённости) синусную форму волны. Начнём с вычисления мощности сил трения

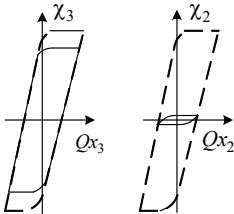


Рисунок 4 – Частичные петли гистерезиса для кручения и изгиба

$$N_T = \int_0^\infty \left[ f_v(Mx \cdot Vx, Vx) + f_q(Cx \cdot Qx, Qx) \right] d\theta.$$

Сравнивая эту формулу с равенством (36) из работы [1], можем сразу записать результат:

$$N_T = A^2 \cdot [1 / (4k_T\alpha)] \cdot (f_v \cdot T_1 + f_q \cdot \Pi_1).$$

Учтём, что плотность  $\Pi_1$  потенциальной энергии составляет половину от плотности всей механической энергии, следовательно:

$$N_T = A^2 \cdot [(f_v + f_q) / (8k_T\alpha)] \cdot E_1,$$

где  $E_1 = T_1 + \Pi_1 = z^{-2}$ ;  $z$  – индекс пружины.

Для гистерезисного трения

$$f_v + f_q = 2k_T \cdot \omega_c^2 / \omega ,$$

откуда после сокращения декрементов получаем:

$$N_T = A^2 \cdot [\omega_c^2 / (8\omega \cdot \alpha)] \cdot E_1 .$$

Для круглого сечения стержня эта формула принимает следующий вид:

$$N_T = A^2 / (2\omega \cdot \alpha) . \quad (6)$$

Если синусную форму волны заменить косинусной формой, то результат вычисления мощности  $N_T$ , рассеиваемой на трение, не изменится.

Теперь будем вычислять мощность  $N_0$ , для чего воспользуемся формулами (28 а) и (29 а) из работы [1], а также (20) для несобственного интеграла.

- Для случая  $\chi_{2,3} = 0$  (на гистерезисной полке по кручению) матрица связи  $\Omega = 0$ , и, следовательно, мощность  $N_0$  также равна 0.
- Для случая  $\chi_2 = 0$  (на гистерезисной полке) получаем:

$$\begin{aligned} N_0 / Ay_0 &= cx_3 \int_0^\infty Qx_3 \cdot Qx_2 d\theta + cx_3 \int_0^\infty Qx_3 \cdot Vx_2 d\theta = \\ &= A^2 cx_3 qx_3 (qx_2 + vx_2) \int_0^\infty e^{-2k_T \alpha \theta} \sin(\alpha \theta) \cos(\alpha \theta) d\theta = A^2 cx_3 qx_3 (qx_2 + vx_2) / (4\alpha) . \end{aligned}$$

Анализ формул из работы [2] для компонент продольного фонона показывает, что второе слагаемое скобок значительно меньше первого (в  $z \gg 1$  раз), и им можно пренебречь. В результате формула для мощности приобретает следующий вид (здесь принято значение коэффициента  $\mu = 0.27$ ):

$$N_0 = -0.8 / (4\omega \cdot \alpha z) \cdot A^2 \cdot Ay_0 . \quad (7)$$

Как следует из формул (6), (7), малая величина декремента трения  $k_T$  не влияет на результат. Но считать этот декремент равным нулю нельзя, поскольку колебания перестанут быть затухающими, а несобственные интегралы перестанут сходиться. Оказывается, что исследуемая гармоническая волна трансляции получает энергию от поперечных колебаний только лишь потому, что она является затухающей по длине.

Если угловая скорость изгиба  $Vy_1 = Ay_0$  при низкочастотных колебаниях отрицательна (то есть пружина распрямляется, смотри рис.1), то эта мощность оказывается положительной. Если скорость изгиба положительна (пружина сворачивается), то мощность  $N_0$  отрицательна, что делает существование стабильного фонона с синусной формой волны не возможным.

Но показательным является следующий результат: у косинусной формы волны компоненты  $vx_2$  и  $qx_2$  используются с противоположным знаком, в результате чего формула для мощности также изменяет знак. Следовательно, для устойчивости косинусной формы волны пружина должна не распрямляться, а наоборот, сворачиваться.

- Для случая  $\chi_2 \neq 0$  (за пределами полки) получаем:

$$\begin{aligned}
N_0 / Ay_0 &= \int_0^\infty [cx_3 Qx_3 \cdot Vx_2 - cx_2 Qx_2 \cdot (Qx_1 + Vx_3)] d\theta = \\
&= A^2 [cx_3 qx_3 \cdot vx_2 - cx_2 qx_2 \cdot (qx_1 + vx_3)] \cdot \int_0^\infty e^{-2k_r \alpha \theta} \sin(\alpha \theta) \cos(\alpha \theta) d\theta = \\
&= A^2 [cx_3 qx_3 \cdot vx_2 - cx_2 qx_2 \cdot (qx_1 + vx_3)] / (4\alpha) .
\end{aligned}$$

Анализ формул работы [2] для компонент продольного фона показывает, что первые слагаемые круглой и квадратной скобок значительно меньше вторых слагаемых (в  $z \gg 1$  раз), и ими можно пренебречь. В результате формула для мощности приобретает следующий вид:

$$N_0 = -A^2 cx_2 qx_2 vx_3 / (4\alpha) = [1 / (4\omega \cdot \alpha)] \cdot A^2 \cdot Ay_0 . \quad (8)$$

У косинусной формы фона в силу изложенной выше причины формула для этой мощности также имеет противоположный знак.

Сравнивая формулы (7) и (8), а также аналогичные равенства для косинусной формы фона, замечаем, что

- мощности имеют противоположные знаки, причём для стабильной волны первая мощность должна быть положительной, следовательно, вторая – отрицательная;
- величина отрицательной мощности в  $z$  раз больше величины положительной мощности.

При большом значении индекса пружины  $z \gg 10$  стабильный фон будет иметь в «голове» волны короткий участок  $X$ , на котором нарушается условие  $\chi_2 = 0$ , и избыточная мощность возвращается назад, в группу поперечных колебаний. Для синусной формы волны он будет располагаться непосредственно на фронте волны (рис.5 а), а для косинусной формы – отставать от фронта волны на четверть периода (рис.5 б).

Этот участок мы далее будем называть *нелинейным ядром фона*.

Заметим, что о необходимости существования такого нелинейного участка у фотона сказано, например, в классическом учебнике по квантовой механике [9], Э. Вихман использовал для него схожий термин – *ядро фотона*. Но всем ясно, что такое ядро не является центральным и отличается от привычного понятия ядра атома. Кроме того, если индекс  $z$  не является очень большим числом, то ядро фона будет иметь несколько частей  $X_j$  (рис.6), соответ-

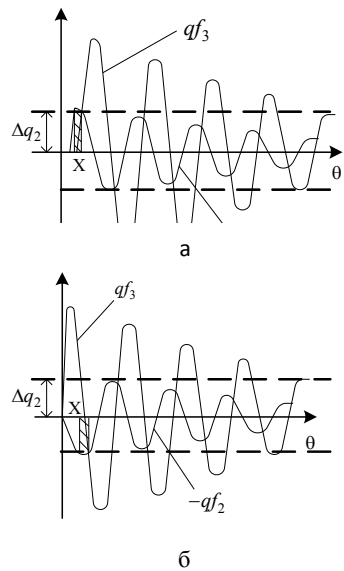


Рисунок 5 – Расположение ядра для синусной (а) и косинусной (б) формы фона

вующих различной «глубине погружения» волны в область изменённой кривизны  $\chi_2 \neq 0$ , где

$$|qf_2| > \Delta q_2 .$$

Разумеется, следует понимать, что рис.5,6 – это схемы первого приближения; в действительности уход с гистерезисной полки имеет переходной участок, и именно на этом участке будет располагаться та часть фонона, которая названа его ядром.

Теперь мы готовы учесть условие устойчивости. Неравенство (5) с учётом формул (6) и (7) принимает следующий вид (синусная форма):

$$A^2 / (2\omega \cdot \alpha) < A^2 \cdot [0.2 / (\omega \cdot \alpha \cdot z)] \cdot Ay_0 ,$$

что эквивалентно условию

$$-Ay_0 > 2.5 \cdot z . \tag{9}$$

Для косинусной формы волны соответствующее условие будет иметь вид

$$Ay_0 > 2.5 \cdot z . \tag{9 а}$$

Заметим, что эти неравенства противоречат условию прочности для одиночной волны из работы [2], но могут быть реализованы для суммы волн, как указывалось там же. Необходимо отметить также и то, что требуемая по условию (9) скорость распрямления пружины должна быть очень большой; линейная скорость  $V_{y_3}$  осевого перемещения торца близка к скорости звука в материале пружины. В следующем пункте мы опишем другие условия формирования устойчивого фонона, не требующие такой экстремальной динамики для поддерживающих колебаний. Но прежде, чем двигаться дальше, нужно изучить полученные решения, и, понять ту схему, которая обеспечивает устойчивость фонона.

Заметим, что при выводе неравенства (9) квадраты амплитуды колебаний опять были сокращены. Но сейчас впервые в этой работе возникает ситуация, когда условие устойчивости волны зависит от величины амплитуды колебаний.

Поскольку максимальное значение изгибающего момента  $Qx_2$  и момента кручения  $Qx_3$  пропорциональны модулю амплитуды  $A$ , то от величины этой амплитуды зависит выполнение условий

$$\chi_{2,3} = 0, \chi_2 = 0, \chi_3 \neq 0 \text{ или } \chi_{2,3} \neq 0 ,$$

которые влияют на интенсивность и направление энергетического обмена между фононом и низкочастотными поперечными колебаниями.

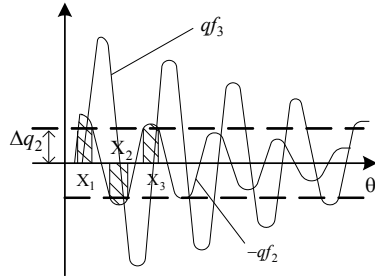


Рисунок 6 – Фонон с тремя ядрами

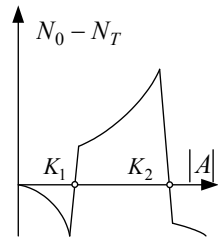


Рисунок 7 – Баланс мощностей

На рис.7 показана схема поступления мощности при разных амплитудах, но одной и той же частоте волны.

При малых амплитудах имеет место условие  $\chi_{2,3} = 0$ , суммарная мощность определяется силами трения и отрицательна.

При средних значениях амплитуды имеем  $\chi_2 = 0$ ,  $\chi_3 \neq 0$ , поступление мощности превышает убыль, и суммарная мощность положительна.

При больших значениях амплитуды имеет место условие  $\chi_{2,3} \neq 0$ , вместо поступления энергии от низкочастотных колебаний наблюдается её убыль, и суммарная мощность отрицательна.

У этого процесса имеются две точки устойчивого равновесия – точка начала координат и точка  $K_2$ , а также точка неустойчивого равновесия  $K_1$ . Координаты точек  $K_{1,2}$  изменяются пропорционально частоте  $\omega$ .

При амплитудах, меньших  $K_1$ , волна рассеивает всю свою энергию в тепло и быстро затухает во времени. Тем самым реализуется своеобразный барьер для излучения фонона: если амплитуда возбуждаемого колебания меньше  $K_1$ , то уединённая волна трансляции на данной частоте не возникает.

С другой стороны, если в стержне уже возникла волна, определяемая уравнениями продольного фонона и имеющая амплитуду, большую  $K_1$ , то эта волна не затухнет, а её амплитуда стабилизируется на уровне  $K_2$ . Необходимая для этого энергия будет получена от низкочастотных поперечных колебаний. А если первоначальная энергия волны является излишней, то эта часть энергии будет в ядре фонона возвращена поперечным колебаниям.

Таким образом, в описываемом процессе прослеживается чёткий механизм стабилизации амплитуды волны в зависимости от частоты; такой механизм называется *квантованием амплитуды*. Кроме того, квантуется и фаза волны: в зависимости от направленности процесса низкочастотной деформации «выживает» синусная либо косинусная форма фонона.

Заметим, что в соответствии с описанным механизмом квантования амплитуда (а, значит, и энергия) косинусной формы оказывается большей, чем амплитуда (и энергия) синусной формы; это объясняется разным расположением ядра. Поэтому синусная форма при изменении фазы  $\psi$  (смотри формулы (18) работы [1]) является формой устойчивого равновесия, а косинусная форма – не устойчива.

Например, если пружина не распрямляется, а сворачивается, то косинусная форма в любой момент подъёма амплитуды волны может перейти в синусную форму, и волна будет затухать. Но если амплитуду всё же удалось поднять до точки  $K_2$ , то синусная форма будет продолжать разгоняться, пока этот процесс не столкнётся с другими ограничениями, которые используемой в этой работе линеаризованной моделью не описываются.

Поэтому *устойчивость винтовых фононов возможна только при расп-*

рямлящейся пружине («вселенная» обязана расширяться).

**Стабилизация фонона за счёт энергии колебаний кластера.** Теперь, когда имеем механизм квантования, целесообразно вернуться к задаче синтеза фонона и попытаться обойти условие (9), которое требует чрезмерной интенсивности для амплитуды низкочастотных колебаний.

Используем вместо длинно волновых колебаний основной частоты низкочастотные колебания, образующие кластер, описанный формулами работы [2]. Формулы для величин плотностей получаемой мощности примут вид:

$$N = -cx_3 Qx_3 \cdot Qx_1 \cdot \sin(\theta) \cdot Ay0,$$

$$N = -cx_3 Qx_3 \cdot Qx_1 \cdot \sin(\theta) \cdot Ay0 - cx_2 Qx_2 \cdot Qx_1 \cdot \cos(\theta) \cdot Ay0.$$

Они отличаются от формул (28 а) и (29 а) из работы [1] тем, что моменты  $Qx_3$  и  $Qx_1$  совпадают и описываются тригонометрическими функциями одного типа (либо косинусами, либо синусами). В результате интеграл для вычисления мощности  $N_0$  оказался аналогичным интегралу для вычисления энергии, и её формула (для случая  $\chi_2 = 0, \mu = 0.27$ ) принимает вид

$$N_0 = -[0.89 / (4\alpha z^2 \cdot k_T)] \cdot A^2 \cdot Ay0 \cdot \sin(\theta).$$

Появление в знаменателе этой формулы вместо частоты  $\omega$  (это число больше индекса  $z$ ) декремента  $k_T$  (это число имеет порядок 0.002) позволяет обеспечить выполнение условия устойчивости (9) при значительно меньшем (на порядки) значении амплитуды скорости  $Ay0$ .

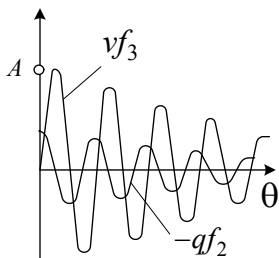


Рисунок 8 – Начальный участок фонона

Кластер (смотри [2]) имеет короткую длину волны и позволяет стабилизировать фонон локально, на малом участке витка. Поэтому мы не будем приводить дальнейший анализ этого случая, а используем его как источник положительного опыта, который нужно повторить в других случаях.

**Характеристики фононов. «Постоянная Планка» для стержня.** В этом пункте будут определены основные характеристики для синусной формы фононов (рис.8): амплитуда, спин, угол закручивания, деформация уплотнения, полная энергия, масса, импульс и мощность трения.

Для косинусной формы амплитуда, полная энергия, масса, импульс и мощность трения определяются по аналогичным формулам, а спин, угол закручивания и деформация уплотнения оказываются меньшими в  $k_T^{-1} \approx 500$  раз, то есть близкими к нулю.

Амплитуда волны. Условие

$$\Delta\sigma \approx k_m \cdot \sigma_T,$$

применительно к изгибу стержня и выполненным нормировкам упругих сил и моментов сил принимает следующий вид:

$$A \cdot cx_2 \cdot qx_2 = k_m \cdot 0.005 \cdot z \approx 10^{-4} \cdot z ,$$

где  $k_m \approx 0.02$  – коэффициент затухания свободного гармонического колебания. Отсюда, поскольку

$$cx_2 \cdot qx_2 = 1/\omega ,$$

находим амплитуду волны:

$$A = (k_m \cdot 0.005 \cdot z) \cdot \omega \approx 10^{-4} \cdot z \cdot \omega . \quad (10)$$

Теперь учтём ограничение на частоту  $\omega$ , вытекающее из условия прочности стержня. Максимальное кручение  $\chi_3$  определяется равенством

$$\chi_{3.\max} = A \cdot cx_3 \cdot qx_3 = A \cdot [0.627 \cdot (1 + \mu) / z] \approx 0.8 \cdot 10^{-4} \cdot \omega .$$

Исходя из условия прочности, эта величина должна быть меньше допустимого предела  $0.01 z$ , то есть

$$0.8 \cdot 10^{-4} \cdot \omega \leq 0.01 z ,$$

откуда

$$\omega \leq 125 \cdot z . \quad (11)$$

Можно учесть связь между декрементом и коэффициентом затухания:

$$k_m = 2\pi \cdot k_T ,$$

после чего неравенство (11) примет общий вид:

$$\omega \leq (0.4/k_T) \cdot z \approx (2.5/k_m) \cdot z . \quad (11 \text{ а})$$

Правые части неравенств (11) определяют верхний предел частоты фона, достижимый по условию прочности. Максимальная угловая скорость  $A_M$  закручивания витка на верхнем пределе частоты определяется формулой

$$A_M = 1.25 \cdot 0.00625 \cdot z^2 ,$$

или, после перехода к размерным величинам путём умножения на нормировочный множитель

$$\delta T^{-1} = a_{np} / (2 \cdot z \cdot R) ,$$

$a_{np} \approx 5 \cdot 10^3 \text{ м/с}$  – скорость звука для продольной волны;  $R$  – радиус витка:

$$\hat{A}_M \approx 18.75 \cdot z / R \quad [1/\text{сек}] .$$

Максимальная угловая скорость  $A$  закручивания витка определяется формулой (10), которая при частоте  $\omega = 1.25 z$ , то есть на нижней границе рассматриваемого волнового диапазона  $\alpha \geq 1$ , определяется формулой

$$A_m = k_m \cdot 0.00625 \cdot z^2 \approx 1.25 \cdot 10^{-4} \cdot z^2 . \quad (12)$$

На верхней границе диапазона эта величина будет в  $1.25 \cdot k_m^{-1}$  раз больше:

$$A_M = 1.25 \cdot 0.00625 \cdot z^2 \approx 19 \dots 75 , \quad (13)$$

где приближённые значения соответствуют индексам  $z \approx 50 \dots 100$ .

Для перехода к размерным величинам эти результаты нужно умножить на нормировочный множитель  $\delta T^{-1}$ :

$$\hat{A}_m \approx 15 \cdot k_m \cdot z / R \approx 0.3 \cdot z / R = 0.3 / r; \quad \hat{A}_M \approx 18.75 \cdot z / R = 18.75 / r. \quad (14)$$

*Спин волны.* Эта величина определяется формулой

$$I_3 = mx_3 \cdot A / \alpha$$

и при значениях  $\alpha \geq 1$  практически не зависит от частоты и длины волны. Поэтому вычислим её при волновом числе  $\alpha = 1$  и значениях

$$mx_3 = 1 / (2z^2), \quad \omega = 1.25 \cdot z \cdot \alpha: \\ I_3 \approx 0.5 \cdot 0.00625 \cdot k_m \approx 6.25 \cdot 10^{-5}. \quad (15)$$

Спин имеет физическую размерность *действия*, то есть  $[Дж \cdot с = кг \cdot м^2 / с]$ .

Учтём, что инерционный коэффициент до нормировки имел значение

$$\widehat{mx}_3 = \rho \pi r^4 / 2,$$

следовательно, для действия получаем нормировочный множитель:

$$\Delta h = \frac{\widehat{mx}_3}{mx_3} \cdot \frac{\hat{A}_m}{A_m} \cdot \frac{\alpha}{\hat{\alpha}} = \frac{(1/2) \cdot \rho \cdot \pi \cdot r^4}{(1/2) \cdot 1/z^2} \cdot \frac{a_{np}}{2 \cdot z \cdot R} \cdot \frac{1}{R^{-1}} = \rho \cdot \frac{\pi \cdot r^4}{2} \cdot a_{np} \cdot z.$$

Теперь используем этот множитель и формулу (15):

$$I_3 \approx 3.125 \cdot 10^{-3} \cdot k_m \cdot \rho \cdot \frac{\pi \cdot r^4}{2} \cdot a_{np} \cdot z. \quad (16)$$

Для стального стержня плотность  $\rho = 7.8 \cdot 10^3 \text{ кг} / \text{м}^3$ , коэффициент  $k_m \approx 0.02$  и

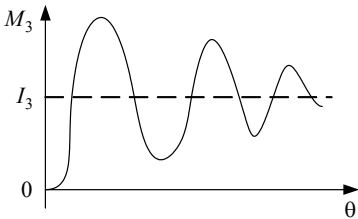
$$I_3 \approx 3600 \cdot z \cdot r^4 = 3600 \cdot R \cdot r^3 [Дж \cdot с]. \quad (16 \text{ а})$$

Поскольку радиус сечения стержня обычно удовлетворяет условию

$$r < 0.01 \text{ м},$$

то спин фонона является достаточно малой величиной.

Рисунок 9 – Изменение момента количества движения для начального участка волны.



Изменение момента количества движения  $M_3(\theta)$  для начального отрезка фонона происходит по закону, показанному на рис.9. Оказывается, что весь этот момент переносится головной частью волны, составляющей четверть её длины. Для частоты  $\omega = 1.25 \cdot z$  этот отрезок занимает четверть витка пружины, а для  $\omega = 125 \cdot z$  – около  $1.5^0$ .

*Угол закручивания стержня.* Эта величина (обозначим её  $\Delta x_3$ ) также не

зависит от частоты и вычисляется по формуле

$$\Delta x_3 = x_3(\infty) - x_3(0) = \int_0^\infty (\partial x_3 / \partial \theta) d\theta = \nu f^{-1} \cdot \int_0^\infty V x_3(\theta) d\theta = \nu f^{-1} \cdot A / \alpha .$$

Используя результаты, полученные при вычислении спина, имеем:

$$\Delta x_3 \approx [0.00625 \cdot 10^{-4} z^2 \cdot k_m / (1.25 \cdot z)] \approx 10^{-4} \cdot z . \quad (17)$$

Данная величина является безразмерной и определяется в радианах. Основное закручивание происходит в головной части волны, где сосредоточен и её спин.

*Деформация уплотнения.* Указанная деформация стержня происходит в направлении бинормали (параллельно оси пружины) и определяется формулой:

$$\Delta x_1 = x_1(\infty) - x_1(0) = \int_0^\infty (\partial x_1 / \partial \theta) d\theta = \nu f^{-1} \int_0^\infty V x_1(\theta) d\theta = \nu f^{-1} \cdot (A / \alpha) \cdot (1.13 / z^2) ,$$

которая преобразуется к следующему виду:

$$\Delta x_1 \approx [0.00625 \cdot 10^{-4} z^2 \cdot k_m / (1.25 \cdot z)] \cdot [1.13 / z^2] \approx 10^{-4} \cdot z^{-1} .$$

После перехода к размерным величинам, получаем:

$$\Delta x_1 \approx 10^{-4} \cdot r . \quad (18)$$

Если радиус сечения составляет несколько миллиметров или сантиметров, то деформация  $\Delta x_1$  определяется в микронах, то есть очень мала. Характер изменения этой величины по длине волны повторяет изменение момента количества движения (смотри рис.9).

*Энергия волны.* Полная механическая энергия волны в стержне с учётом формул статьи [1] определяется равенством:

$$E_n = A^2 / (4 k_T \cdot \alpha \cdot z^2) .$$

Используем для амплитуды волны формулу (10) и получим:

$$E_n = (0.005 \cdot k_m \cdot z \cdot \omega)^2 \cdot \frac{1}{4(k_m / (2\pi))\alpha \cdot z^2} \approx 12.5 \cdot 10^{-6} \cdot \pi \cdot k_m \cdot \omega^2 / \alpha .$$

Учтём, что при условии  $\alpha > 2$  (рис.10) выполняется соотношение

$$\lambda \approx a_{np} \cdot \alpha \approx 1.25 \cdot z \cdot \alpha .$$

Следовательно

$$E_n \approx 12.5 \cdot 10^{-6} \cdot \pi \cdot k_m \cdot 1.25 \cdot z \cdot \omega \approx 0.5 \cdot 10^{-4} \cdot k_m \cdot z \cdot \omega \approx 10^{-6} \cdot z \cdot \omega . \quad (19)$$

Энергия распределена по всей длине фотона, но неравномерно (рис.11), и экстремальные значения плотности  $\delta E(\theta)$  убывают по экспоненциальному

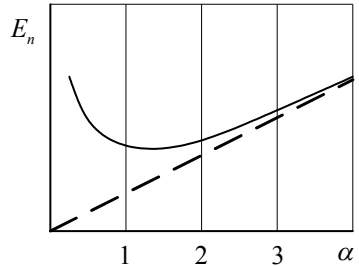


Рисунок 10 – Зависимость энергии от длины волны

закону.

Коэффициент

$$h = 12.5 \cdot 10^{-6} \pi \cdot 1.25 k_m \cdot z \approx 10^{-6} \cdot z \quad (20)$$

играет в формуле (19) ту же роль, что и постоянная Планка  $\hbar$  в известной формуле [10], связывающей энергию и частоту фотона.

Сравнивая формулы (15) и (20), замечаем, что спин фонона будет равен величине постоянной  $\hbar = h/(2\pi)$ , как это имеет место у фотона, при условии  $z = 62.5$ .

Но, если учесть, что число 0.005, используемое в формуле (11) для измерения отношения напряжения при пластической деформации к пределу текучести, может быть изменено, то следует принять условие

$$z \approx 50 \dots 100.$$

Тем самым, будет обеспечено выполнение известного тезиса квантовой механике о том (смотри [9]), что *постоянные Планка, определяющие энергию волны и момент количества движения волны – это одна и та же величина.*

В трёхмерном случае выполнение этого тезиса обеспечивается дополнительной *устойчивой процедурой квантования индекса*. Если величина  $R$  здесь определяется начальной кривизной пространства и является величиной заданной, то радиус  $r = R/z$ , определяющий характерные размеры поперечного сечения волны, в принципе может быть произвольным. Но существуют условия, которые среди многих возможных значений  $r$  отбирают только то, которое удовлетворяет цитированному тезису. Обсуждение этих условий выходит за рамки данной работы.

Принятие условия  $z \approx 50 \dots 100$  означает, что начальная величина относительной кривизны  $z^{-1}$  стержня (читай – пространства) мала.

Если число 0.005, используемое в формуле (11), обозначить  $\kappa$ , то

$$z = [1/\pi]/\kappa,$$

$$A = (1/\pi) \cdot k_m \cdot \omega, \quad (10 \text{ а})$$

$$h = 2 \cdot m x_3 \cdot k_m \cdot a_{non} = 2 \cdot k_m \cdot a_{non}, \quad (20 \text{ а})$$

а предельное по условиям прочности волновое число  $\alpha_M$  определяется формулой

$$\alpha_M = [0.005/\kappa] \cdot [(1+\mu)/k_m].$$

«Постоянная Планка»  $\hbar$  так же, как и спин, имеет физическую размерность действия, и в размерных величинах определяется формулой:

$$\hat{h} = h \cdot \Delta h = 12.5 \cdot 10^{-6} \pi \cdot 1.25 \cdot k_m \cdot z \cdot \rho \cdot \frac{\pi r^4}{2} \cdot a_{np} z \approx 5 \cdot 10^{-5} k_m \cdot \rho \cdot \frac{\pi r^4}{2} \cdot a_{np} z^2.$$

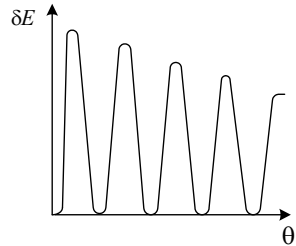


Рисунок 11 – Плотность распределения энергии по длине фонона

Этой формуле можно придать следующий вид:

$$\hat{h} \approx 5 \cdot 10^{-5} \cdot k_m \cdot \widehat{m}x_3 \cdot a_{np} \cdot z^2. \quad (21)$$

Для стального стержня результат становится более конкретным:

$$\hat{h} \approx 10^{-6} \cdot \widehat{m}x_3 \cdot a_{np} \cdot z^2 \approx 30 \cdot R^2 \cdot r^2 [\text{Дж} \cdot \text{с}]. \quad (21 \text{ а})$$

*Масса и импульс.* Если центр системы координат, показанной на рис.1, разместить в ядре фонона и перемещать по стержню с той же скоростью звука  $a_{non}$ , с которой движется волна, то фонон будет выглядеть как неподвижное деформированное упругое тело. При этом он сохранит свою потенциальную энергию  $\Pi$ , а кинетическая энергия окажется равной 0.

Будем, как это принято в механике (смотри, например, похожий вывод для фотонов в [10]), считать, что фонон имеет приведенную массу  $m_{np}$ , которая перемещается по стержню со скоростью  $a_{non}$ , и кроме кинетической энергии

$$T = 0.5 \cdot m_{np} \cdot a_{non}^2$$

обладает внутренней энергией  $\Pi$  (в данном случае это энергия упругих деформаций). Тогда из двух равенств для энергий

$$T + \Pi = E_n \quad \text{и} \quad T = \Pi$$

получаем соотношение

$$E_n = m_{np} \cdot a_{non}^2, \quad (22)$$

которое является аналогом знаменитого *уравнения Эйнштейна*.

Заметим, что на самом деле, применительно к винтовому фонону (и фотону) *это равенство является определением инерционной массы*, а основной (или первичной) характеристикой волны является её частота.

Если рассматривать крупный масштаб времени, то естественно принять, что фонон движется вдоль оси пружины со скоростью

$$a_\phi = a_{non} \cdot \sin \delta, \quad (23)$$

где  $\delta$  – это угол подъёма винтовой линии. В результате формула (22) принимает вид

$$E_n = m_\phi \cdot a_\phi^2, \quad (22 \text{ а})$$

и может служить определением *инерционной массы фонона*  $m_\phi$ :

$$m_\phi = E_n / a_\phi^2 = [\hat{h} / a_\phi^2] \cdot \omega = [\hat{h} / (\sin^2 \delta \cdot a_{non}^2)] \cdot \omega = [\hat{h} / (\sin^2 \delta \cdot a_{non})] \cdot \alpha,$$

то есть его инерционная масса пропорциональна частоте и волновому числу.

Величина

$$I_\phi = m_\phi \cdot a_\phi = E_n / a_\phi = [\hat{h} / a_\phi] \cdot \omega = [\hat{h} / (\sin \delta \cdot a_{non})] \cdot \omega = (\hat{h} / \sin \delta) \cdot \alpha$$

определяет модуль *импульса фонона*; импульс направлен вдоль оси пружины.

**Мощность трения.** Для фонона эта величина пропорциональна полной энергии, но коэффициент пропорциональности – это коэффициент трения

$$f = k_T \cdot \omega_c^2 / \omega ,$$

и он обратно пропорционален частоте. В результате мощность трения  $\hat{N}_T$  для всех частот имеет одно и то же значение:

$$\hat{N}_T = [k_m / (2\pi)] \cdot \hat{h} \cdot \hat{\omega}_c^2 , \quad (24)$$

где  $\hat{\omega}_c$  – размерное значение нижней синфазной круговой частоты продольных колебаний.

**Пример №1.** Рассматривается цилиндрическая пружина, изготовленная из стального прута диаметром  $2r = 10 \text{ мм}$ . Диаметр пружины  $2R = 700 \text{ мм}$ , индекс  $z = 70$ , угол навивки  $\delta = 3^\circ$ , коэффициент затухания  $k_m = 0.02$ .

Нижняя синфазная частота для продольных колебаний составляет около 1400 Гц, для поперечных колебаний – около 2300 Гц.

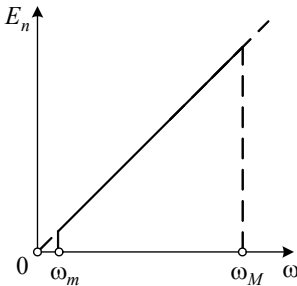


Рисунок 12 – Изменение энергии фонона в зависимости от его частоты

«Постоянная Планка»

$$\hat{h} = 2\pi \hat{I}_3 \approx 2 \cdot 10^{-3} \text{ Дж} \cdot \text{с} .$$

Энергия фонона изменяется пропорционально частоте (рис.12):

- от значения 5.2 Дж на нижней границе
- до значения 162.5 Дж на верхней границе волнового диапазона.

Инерционная масса фонона  $m_\phi$  изменяется в пределах 0.058...1.8 г.

Для сравнения укажем массу одного витка пружины –  $m_0 = 1.4 \text{ кг}$ , что в сотни раз больше максимальной массы фонона  $m_\phi$ .

Импульс фонона изменяется в диапазоне 0.0058...0.18 кг·м/с.

Верхняя синфазная частота для поперечных колебаний составляет около 205 кГц, то есть, находится в ультразвуковой области; для продольных колебаний эта величина превышает 20 МГц (диапазон радиочастот).

Волновой диапазон фононов составляет (по частотам) от  $\omega_m = 4000 \text{ Гц}$  до  $\omega_M = 125 \text{ кГц}$ , то есть, находится в области звуковых и ультразвуковых колебаний.

Спин фонона оценивается величиной

$$\hat{I}_3 \approx 0.31 \cdot 10^{-3} \text{ Дж} \cdot \text{с} ,$$

угол закручивания  $\Delta\chi_3 \approx 0.4^\circ$ ,

деформация уплотнения  $\Delta\chi_1 \approx 0.5 \text{ мкм}$ .

Мощность трения составляет  $\hat{N}_T \approx 0.35 \text{ Вт}$ .

Анализ полученных результатов показывает, что для возбуждения фонона в данной пружине можно воспользоваться, например, звуковым генератором, входящим в комплект высокочастотной измерительной аппаратуры и используемым для тарирования датчиков. Амплитуду волны несложно проконтролировать по изменению угла закручивания.

Если коэффициент затухания  $k_m$  составляет не 0.02, как принято в этом расчёте, а 0.005, что по данным работы [11] так же возможно, то верхний предел волнового диапазона фононов увеличится в четыре раза, до 500 кГц.

Но постоянная  $\hat{h}$  изменяется пропорционально величине  $k_m^2$ , и поэтому она уменьшится в 16 раз. Следовательно, минимальная энергия фонона снизится в 16 раз и составит 0.32 Дж, а максимальная – в четыре раза, до 40 Дж.

**Пример № 2.** Рассматривается обратная задача. По величинам постоянной Планка  $\hbar \approx 1.05 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$ , скорости света  $c \approx 3 \cdot 10^8 \text{ м/сек}$ , коэффициентов Пуассона  $\mu \approx 0.27$  и затухания  $k_m \approx 0.005$  требуется оценить диаметр пружины, имеющей индекс  $z \approx 70$  и такое же значение константы  $\hat{h}$ .

Используем формулы (21), (21 а) и получим:

$$7.5 \cdot R^2 \cdot r^2 = 7.5 \cdot R^4 / z^2 = 1.05 \cdot 10^{-34},$$

откуда

$$2R \approx 3.2 \cdot 10^{-8} \text{ м}.$$

Диаметр пружины оказался в 320 раз большим диаметра атома.

Но если вместо скорости звука  $a_{np}$  использовать в формуле (21) значение скорости света  $c$ , увеличенное (как это имеет место в механике при переходе от поперечных колебаний к продольным колебаниям) в  $\sqrt{2(1+\mu)} \approx 1.6$  раза, то диаметр пружины уменьшится в 18 раз и составит

$$2R \approx 1.8 \cdot 10^{-9} \text{ м}.$$

Учтём, что при распространении волны по винтовому стержню проекция скорости на направление оси уменьшается (при плотной укладке витков) в  $\pi \cdot z \approx 200$  раз, поэтому в формуле (21) скорость  $a_{np}$  следует дополнительно увеличить в такое же число раз. В результате диаметр пружины уменьшится:

$$2R \approx 4.8 \cdot 10^{-10} \text{ м},$$

что в 5 раз больше диаметра атома.

Осталось заметить, что неизвестна плотность материала, из которого изготавливается эта гипотетическая «пружина», и поэтому мы выше использовали для величины  $\rho$  то же значение, что и у плотности стали.

Поскольку

$$a_{np} = \sqrt{E / \rho},$$

где  $E$  – это модуль упругости, то величина  $\hat{h}$  пропорциональна  $\sqrt[8]{1/\rho}$ .

Известно (смотри, например, [12]), что плотность вещества в ядре атома составляет  $2 \cdot 10^{17} \text{ кг/м}^3$ , и это превышает плотность стали в  $2.5 \cdot 10^{13}$  раз. Поэтому, если согласиться с тем, что плотность  $\rho$  должна быть выше плотности стали, причём не менее чем в  $5^8 \approx 4 \cdot 10^5$  раз, то *диаметр пружины будет иметь тот же порядок величины, что и диаметр атома.*

В заключение заметим, что стремление объяснить квантовую природу фотона как закономерное свойство сплошной механической среды не ушло из науки и в наше время. Так, в [13] описана модель фотона, использующая *вихревые дорожки Кармана* и турбулентные пульсации газоподобного эфира.

**Выводы.** Изучены условия, обеспечивающие устойчивость фонона и прочность пружины, а также сформулированы требования, накладываемые на геометрию пружины для соответствия свойств винтовых фононов и фотонов. Показано, что пружина обязана иметь большой индекс  $z \approx 50 \dots 100$ .

Получены формулы для расчёта основных характеристик фононов, в том числе спина, импульса и полной энергии волны. Показано, что в широком диапазоне частот энергия пропорциональна частоте.

Исследована зависимость коэффициента пропорциональности  $\hat{h}$  (аналога постоянной Планка  $h$ ) от свойств материала и геометрии пружины. Показано, что при совпадении этих постоянных диаметр пружины оказывается близок к диаметру атома.

**Список литературы:** 1. Григорьев А.А., Деряженко А.И. Моделирование гармонической волны переноса для связанных колебаний винтового стержня // Вестник НТУ «ХПИ». – 2011. – № 13. – С.39-54. 2. Ванин В.А., Григорьев А.А. Вектор переноса энергии при поперечных смещениях упругой среды // Вестник НТУ «ХПИ». – 2010. – № 37. – С.59-68. 3. Ванин В.А., Григорьев А.А. Волновые поля высокочастотных синфазных колебаний упругой среды // Вестник НТУ «ХПИ». – 2010. – № 69. – С.35-45. 4. Ванин В.А., Григорьев А.А. Моделирование сил взаимодействия частиц при упругопластическом расширении среды // Вестник НТУ «ХПИ». – 2011. – № 13. – С.14-32. 5. Григорьев А.Л., Геворкян Ю.Л. Гносеологические аспекты моделирования обменных колебаний в среде Максвелла и Коссера // Вестник НТУ «ХПИ». – 2011. – № 13. – С.55-68. 6. Ванин В.А., Григорьев А.А. Солитоны Рассела в цилиндрической пружине // Вестник НТУ «ХПИ». – 2009. – № 30. – С. 20-30. 7. Ванин В.А., Григорьев А.А., Деряженко А.И. Внутренние связанные колебания и экспоненциальные волны переноса в цилиндрическом стержне // Вестник НТУ «ХПИ». – 2009. – № 42. – С.29-38. 8. Ванин В.А., Григорьев А.А. Изоморфизм групп продольных и поперечных колебаний винтового стержня // Вестник НТУ «ХПИ». – 2010. – № 68. – С. 23-37. 9. Э. Визман. Квантовая физика. – М.: «Наука», 1974. – 415 с. 10. Куттель Ч., Найт В., Рудерман М. Механика. Берклевский курс физики – М.: Наука, 1983. – 447 с. 11. Писаренко Г.С., Яковлев А.А., Матвеев В.В. Вибропоглощающие свойства конструкционных материалов. – К.: Наукова думка, 1971. – 375 с. 12. Х. Кухлинг. Справочник по физике. – М.: Наука, 1982. – 419с. 13. Ацюковский В.А. Общая эфиродинамика. – М.: Энергоатомиздат, 1990. – 280 с.

*Поступила в редколлегию 07.09.2011*