

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ НА ОСНОВЕ СИСТЕМЫ КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ

Е.И. Дружинин, к.т.н., доцент, НТУ «ХПИ»

Аннотация. Приведены основные принципы теории и практики построения обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих процессы в электрических и электромеханических системах, на основе использования электромеханических аналогий, векторно-матричной формы записи общего вариационного уравнения динамики и специальной системы компьютерной алгебры.

Ключевые слова: обыкновенные дифференциальные уравнения, электрические и электромеханические системы, векторно-матричная форма записи уравнений, общее вариационное уравнение динамики, специальная система компьютерной алгебры

МОДЕЛЮВАННЯ ЕЛЕКТРИЧНИХ І ЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНИХ ПРОЦЕСІВ НА ОСНОВІ СИСТЕМИ КОМП'ЮТЕРНОЇ АЛГЕБРИ

Е.І. Дружинін, к.т.н., доцент, НТУ «ХПІ»

Анотація. Наведено основні принципи теорії та практики побудови звичайних диференціальних рівнянь, що описують процеси в електричних і електромеханічних системах, на основі використання електромеханічних аналогій, векторно-матричної форми запису загального варіаційного рівняння динаміки та спеціальної системи комп'ютерної алгебри.

Ключові слова: звичайні диференціальні рівняння, електричні та електромеханічні системи, векторно-матрична форма запису рівнянь, загальне варіаційне рівняння динаміки, спеціальна система комп'ютерної алгебри

THE MODELING OF ELECTRICAL AND ELECTROMECHANICAL PROCESSES BASED ON A COMPUTER ALGEBRA SYSTEM

E. Druzhynin, Ph.D., NTU «KhPI»

Annotation. The basic principles of the theory and practice of the construction of ordinary differential equations describing processes in electronic and electromechanical systems, through the use of electro-mechanical analogies, a vector-matrix form of the general variational equations of dynamics and special computer algebra system.

Keywords: ordinary differential equations, electrical and electromechanical systems, vector-matrix form of the equations, the general variational equation of dynamics, a special computer algebra system

Введение

Анализ динамических процессов различной физической природы, имеющих место в технических системах, сводится к составлению

и последующему решению совокупности дифференциальных, интегральных или интегро-дифференциальных уравнений [1-6]. Многие из этих систем адекватно представляются их структурно-сложными дискрет-

ными моделями большой размерности (большое количество параметров и степеней свободы), что затрудняет составление уравнений и получение их решений. Кроме того, исследование взаимовлияния указанных процессов придает задачам анализа дополнительную сложность. В этой связи, актуальным становится создание на базе специальных систем компьютерной алгебры (СКА) программных комплексов (ПК) для автоматизированного построения уравнений и эффективного поиска решений задач анализа динамических процессов в таких системах [3, 5, 6]. Таким образом, разработка ПК для анализа динамических процессов в дискретных электрических и электромеханических системах имеют важное прикладное значение, например, для решения проблем электрического транспорта.

Анализ публикаций

Отдельные публикации, например [1-4], посвящены математическому моделированию динамических процессов разной физической природы в дискретных системах. В основу построения обобщенных моделей положены известные гидромеханические и электромеханические аналогии, использующие универсальность дифференциальных уравнений, описывающих динамические процессы разной физической природы. Так, например, основываясь на электромеханических аналогиях для электрических цепей (ЭЦ) и электромагнитных систем (ЭМС), применяют довольно универсальные приемы построения математических моделей, которые хорошо формализованы благодаря использованию законов Кирхгофа и ориентированных графов [1, 4]. Вместе с тем, на основе электромеханических аналогий, в [2] получены дифференциальные уравнения ЭЦ с использованием уравнений Лагранжа второго рода. К настоящему времени имеются разработки ПК, в основе которых лежат специальные СКА, предназначенные для анализа динамических процессов в дискретных механических системах. Например, в работах [3, 5, 6] дано описание ПК «КИДИМ», который используется для решения задач анализа кинематики, динамики и статики силовых передач транспортных систем, в том числе и с гидрообъемными передачами. Однако в литературе практически отсутствуют теоретические и прикладные разработки ПК, основанные на СКА и предназначенные для ана-

лиза динамических процессов в дискретных электрических и электромеханических системах.

Цель и постановка задачи

Целью данной работы является изложение теоретических основ автоматизированного построения дифференциальных уравнений, описывающих динамические процессы в дискретных электрических и электромеханических системах, на базе общего вариационного уравнения динамики, записанного в векторно-матричной форме, с использованием электромеханических аналогий и аппарата структурных матриц.

Построение обобщенной математической модели

Представим электрическую систему с сосредоточенными параметрами в виде множества \mathbf{L} индуктивных элементов с индуктивностями $\{L_k\}_{k=1}^l$, множества \mathbf{R} омических сопротивлений $\{R_k\}_{k=1}^r$, множества \mathbf{C} конденсаторов с емкостями $\{C_k\}_{k=1}^c$ и множества \mathbf{E} источников ЭДС $\{E_k\}_{k=1}^e$. Воспользуемся электромеханической аналогией и составим вариационное равенство в форме, которая отвечает общему вариационному уравнению динамики:

$$\sum_{k=1}^l L_k \ddot{q}_k^{(L)} \delta q_k^{(L)} + \sum_{k=1}^r R_k \dot{q}_k^{(R)} \delta q_k^{(R)} + \sum_{k=1}^c \frac{1}{C_k} q_k^{(C)} \delta q_k^{(C)} + \sum_{k=1}^e E_k \delta q_k^{(E)} = 0, \quad (1)$$

где $q_k^{(L)}$, $q_k^{(R)}$, $q_k^{(C)}$, $q_k^{(E)}$ - заряды, которые проходят через индуктивный элемент L_k , омическое сопротивление R_k , конденсатор C_k и источник ЭДС E_k . Учитывая равенство зарядов, проходящих через последовательно соединенные элементы электрической системы, а также первый закон Кирхгофа, можно определить n независимых зарядов $\{q_k\}_{k=1}^n$, определяющих все остальные заряды, проходящие через каждый элемент электрической системы:

$$q_k^{(L)} = q_k^{(L)}(q_1, q_1, \dots, q_n); \dot{q}_k^{(L)} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial q_k^{(L)}}{\partial q_i} \dot{q}_i, \quad (2)$$

$$\ddot{q}_k^{(L)} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 q_k^{(L)}}{\partial q_i \partial q_j} \dot{q}_i \dot{q}_j + \sum_{i=1}^n \frac{\partial q_k^{(L)}}{\partial q_i} \ddot{q}_i; \quad (3)$$

$$\delta q_k^{(L)} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial q_k^{(L)}}{\partial q_i} \delta q_i,$$

$$q_k^{(R)} = q_k^{(R)}(q_1, q_1, \dots, q_n); \quad (4)$$

$$\dot{q}_k^{(R)} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial q_k^{(R)}}{\partial q_i} \dot{q}_i; \delta q_k^{(R)} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial q_k^{(R)}}{\partial q_i} \delta q_i,$$

$$q_k^{(C)} = q_k^{(C)}(q_1, q_1, \dots, q_n); \quad (5)$$

$$\delta q_k^{(C)} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial q_k^{(C)}}{\partial q_i} \delta q_i,$$

$$q_k^{(E)} = q_k^{(E)}(q_1, q_1, \dots, q_n); \delta q_k^{(E)} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial q_k^{(E)}}{\partial q_i} \delta q_i. \quad (6)$$

Учитывая независимость вариаций $q_k^{(L)}$, $q_k^{(R)}$, $q_k^{(C)}$, $q_k^{(E)}$ и соотношение (2)-(6), с (1) получим дифференциальные уравнения второго закона Кирхгофа для ЭЦ:

$$\sum_{i=1}^n a_s^i \ddot{q}_i + \sum_{i=1}^n b_s^i \dot{q}_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_s^{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j = Q_s \quad (7)$$

где $s = \overline{1, n}$, $a_s^i = \sum_{k=1}^l L_k \frac{\partial q_k^{(L)}}{\partial q_i} \frac{\partial q_k^{(L)}}{\partial q_s}$

$$b_s^i = \sum_{k=1}^r R_k \frac{\partial q_k^{(R)}}{\partial q_i} \frac{\partial q_k^{(R)}}{\partial q_s}$$

$$c_s^{ij} = \sum_{k=1}^l L_k \frac{\partial^2 q_k^{(L)}}{\partial q_i \partial q_j} \frac{\partial q_k^{(L)}}{\partial q_s}$$

$$Q_s = - \sum_{k=1}^c \frac{1}{C_k} q_k^{(C)} \frac{\partial q_k^{(C)}}{\partial q_s} - \sum_{k=1}^e E_k \frac{\partial q_k^{(E)}}{\partial q_s}$$

Таким образом, для построения дифференциальных уравнений, описывающих процессы, протекающие в ЭЦ, достаточно определить множество l индуктивных элементов с индуктивностями $\{L_k\}_{k=1}^l$, множество r омических сопротивлений $\{R_k\}_{k=1}^r$, множество c

конденсаторов с емкостями $\{C_k\}_{k=1}^c$ и множество e источников ЭДС $\{E_k\}_{k=1}^e$ и заряды, которые протекают через них, выразить через независимые величины. Данный подход, основанный на традиционном использовании вариационного уравнения динамики, не является единственно возможным и, тем более, оптимальным, с точки зрения реализации на ЭВМ. Более перспективным в этом смысле является использование векторно-матричной формы представления общего вариационного уравнения динамики и использование аппарата структурных матриц. Согласно [3,5,6], модель дискретной механической системы представляется совокупностью ее инерционных, диссипативных, упругих и силовых элементов. Введем в рассмотрение векторы значений этих элементов:

$$\vec{J} = \{J_1, J_2, \dots, J_i\}, \vec{D} = \{D_1, D_2, \dots, D_k\}, \quad (8)$$

$$\vec{C} = \{C_1, C_2, \dots, C_l\}, \vec{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_m\}$$

векторы их координат

$$\vec{\eta} = \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_i\}, \vec{\theta} = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k\}, \quad (9)$$

$$\vec{\xi} = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_l\}, \vec{\psi} = \{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_m\}$$

а также вектор обобщенных координат $\vec{\zeta} = \{\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n\}$. Кроме того, введем векторные функции (структуры):

$$\vec{f}_1 = \{f_{11}, f_{12}, \dots, f_{1i}\}, \vec{f}_2 = \{f_{21}, f_{22}, \dots, f_{2k}\}, \quad (10)$$

$$\vec{f}_3 = \{f_{31}, f_{32}, \dots, f_{3l}\}, \vec{f}_4 = \{f_{41}, f_{42}, \dots, f_{4m}\}$$

которые разрешают однозначно выразить координаты инерционных, упругих, диссипативных и силовых элементов через обобщенные координаты

$$\vec{\eta} = \vec{f}_1(\vec{\zeta}), \vec{\theta} = \vec{f}_2(\vec{\zeta}), \vec{\xi} = \vec{f}_3(\vec{\zeta}), \vec{\psi} = \vec{f}_4(\vec{\zeta}) \quad (11)$$

Используя введенные величины, можно определить векторы различных сил (инерции, диссипации, упругости), необходимые для составления уравнений движения на основе общего вариационного уравнения динамики, которое представим в виде

$$(J\ddot{\vec{\eta}}, \delta\vec{\eta}) + (D\dot{\vec{\theta}}, \delta\vec{\theta}) + (C\vec{\zeta}, \delta\vec{\zeta}) = (\vec{P}, \delta\vec{\psi}), \quad (12)$$

где J, D, C - симметричные матрицы инерции, диссипации и упругости, размерность которых определяется соответственно размерностью векторов $\vec{J}, \vec{D}, \vec{C}$. При этом:

$$\delta\vec{\eta} = \frac{\partial \vec{f}_1(\vec{\zeta})}{\partial \vec{\zeta}} \delta\vec{\zeta}; \delta\vec{\theta} = \frac{\partial \vec{f}_2(\vec{\zeta})}{\partial \vec{\zeta}} \delta\vec{\zeta}; \delta\vec{\xi} = \frac{\partial \vec{f}_3(\vec{\zeta})}{\partial \vec{\zeta}} \delta\vec{\zeta}; \quad (13)$$

$$\delta\vec{w} = \frac{\partial \vec{f}_4(\vec{\zeta})}{\partial \vec{\zeta}} \delta\vec{\zeta}; \ddot{\vec{\eta}} = \ddot{f}_1(\vec{\zeta}); \ddot{\vec{\theta}} = \ddot{f}_2(\vec{\zeta}).$$

Введя обозначение для структурных матриц: инерции, демпфирования, упругости и силовых воздействий

$$S_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{11}}{\partial \zeta_1} & \dots & \frac{\partial f_{11}}{\partial \zeta_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_{1i}}{\partial \zeta_1} & \dots & \frac{\partial f_{1i}}{\partial \zeta_n} \end{bmatrix}; S_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{21}}{\partial \zeta_1} & \dots & \frac{\partial f_{21}}{\partial \zeta_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_{2k}}{\partial \zeta_1} & \dots & \frac{\partial f_{2k}}{\partial \zeta_n} \end{bmatrix};$$

$$S_3 = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{31}}{\partial \zeta_1} & \dots & \frac{\partial f_{31}}{\partial \zeta_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_{3l}}{\partial \zeta_1} & \dots & \frac{\partial f_{3l}}{\partial \zeta_n} \end{bmatrix}; S_4 = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{41}}{\partial \zeta_1} & \dots & \frac{\partial f_{41}}{\partial \zeta_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_{4m}}{\partial \zeta_1} & \dots & \frac{\partial f_{4m}}{\partial \zeta_n} \end{bmatrix}$$

запишем (12) в виде

$$(J\ddot{\vec{\eta}}, S_1\delta\vec{\zeta}) + (D\dot{\vec{\theta}}, S_2\delta\vec{\zeta}) + (C\vec{\xi}, S_3\delta\vec{\zeta}) = (\vec{P}, S_4\delta\vec{\zeta}) \quad (14)$$

Воспользовавшись свойством скалярного произведения, будем иметь

$$(S_1^T J \ddot{\vec{\eta}}, \delta\vec{\zeta}) + (S_2^T D \dot{\vec{\theta}}, \delta\vec{\zeta}) + (S_3^T C \vec{\xi}, \delta\vec{\zeta}) = (S_4^T \vec{P}, \delta\vec{\zeta}) \quad (15)$$

Для голономных систем вариации обобщенных координат $\delta\vec{\zeta}$ - произвольные, поэтому из (15) получим систему дифференциальных уравнений в векторно-матричной форме

$$S_1^T J \ddot{\vec{\eta}} + S_2^T D \dot{\vec{\theta}} + S_3^T C \vec{\xi} = S_4^T \vec{P}. \quad (16)$$

Заменим векторы координат векторными функциями, которые определяют структуры

$$S_1^T \ddot{f}_1 + S_2^T \dot{f}_2 + S_3^T C f_3 = S_4^T \vec{P}. \quad (17)$$

Уравнение (17) является обобщенной математической моделью динамических процес-

сов, которые имеют место в дискретных голономных системах. Для широкого класса систем структуры $\vec{f}_j(\vec{\zeta}) (j=\overline{1,4})$ являются постоянными и линейными. С учетом этого уравнения (17) приобретет вид:

$$S_1^T J S_1 \ddot{\vec{\zeta}} + S_2^T D S_2 \dot{\vec{\zeta}} + S_3^T C S_3 \vec{\zeta} = S_4^T \vec{P}, \quad (18)$$

где $S_j (j=\overline{1,4})$ - числовые структурные матрицы.

Наличие компьютерных систем аналитических вычислений разрешит автоматизировать процесс построения уравнений, описывающих процессы в электрических и электромеханических системах с сосредоточенными параметрами.

Предложенный подход к составлению уравнений реализован в ПК «КИДИМ», созданному на основе специальной СКА, для компьютерного моделирования задач динамики, кинематики и статики дискретных механических систем. Он позволяет решать задачи анализа сколь угодно сложных моделей реальных технических устройств. Но в данной работе с целью упрощения выкладок и для наглядности иллюстрации использования аппарата структурных матриц рассматриваются только самые простые модели электрических и электромеханических систем. Использование уравнений вида (7) для электрической цепи, представленной на рис. 1, позволит получить ее дифференциальные уравнения в виде, который отвечает векторно-матричному уравнению (17).

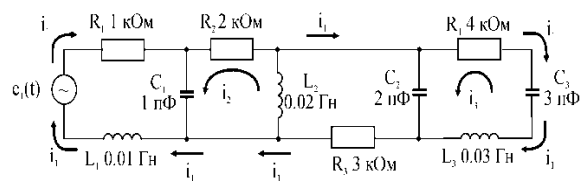


Рис. 1. Схема электрической цепи

Воспользуемся первым вариантом электро-механической аналогии между характеристиками электрической цепи и механической системы. Примем следующие соответствия:

- зарядам в ветвях контура отвечают перемещения точек материальной системы;
- напряжениям - внешние силы;
- силам тока - скорости материальных точек;
- сопротивлениям тока - внутренние (вязкие)

трения;
 - емкостям – податливости связей;
 - индуктивностям – инерционные характеристики точек механической системы.

В качестве обобщенных координат выберем заряды в контурах схемы. Уравнения (16), (17) могут быть применены для составления дифференциальных уравнений электрических цепей. Если цепи линейные, то целесообразно воспользоваться уравнением (18).

Структурные матрицы и матрицы значений «инерционных», «диссипативных», «упругих» элементов и вектор внешних «силовых» элементов запишем так:

$$S_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad S_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}; \quad (19)$$

$$S_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad S_4^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$J = \begin{bmatrix} L_1 & 0 & 0 \\ 0 & L_2 & 0 \\ 0 & 0 & L_3 \end{bmatrix}; \quad D = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_4 \end{bmatrix}; \quad (20)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1/C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/C_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/C_3 \end{bmatrix}; \quad \bar{P} = \{e_1(t)\}.$$

После подстановки (19), (20) в (18) и выполнение операций имеем векторно-матричное уравнение:

$$\begin{bmatrix} L_1+L_3 & 0 & -L_3 \\ 0 & L_2 & 0 \\ -L_3 & 0 & L_3 \end{bmatrix} \cdot \ddot{\vec{q}} + \begin{bmatrix} R_1+R_2+R_3+R_4 & -R_2 & -R_4 \\ -R_2 & R_2 & 0 \\ -R_4 & 0 & R_4 \end{bmatrix} \cdot \dot{\vec{q}} + \begin{bmatrix} 1/C_1+1/C_3 & -1/C_1 & -1/C_3 \\ -1/C_1 & 1/C_1 & 0 \\ -1/C_3 & 0 & 1/C_2+1/C_3 \end{bmatrix} \cdot \vec{q} = \begin{bmatrix} e_1(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

окончательно, система дифференциальных уравнений ЭЦ примет вид:

$$\left\{ \begin{aligned} (L_1+L_3)\ddot{q}_1 - L_3\ddot{q}_3 + (R_1+R_2+R_3+R_4)\dot{q}_1 + \\ + (1/C_1+1/C_3)q_1 - \frac{1}{C_1}q_2 - \frac{1}{C_3}q_3 = e_1(t) \\ L_2\ddot{q}_2 + R_2\dot{q}_2 - R_2\dot{q}_1 + \frac{1}{C_1}q_2 - \frac{1}{C_1}q_1 = 0 \\ L_3\ddot{q}_3 - L_3\ddot{q}_1 + R_4\dot{q}_3 - R_4\dot{q}_1 + \left(\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right)q_3 - \frac{1}{C_3}q_1 = 0 \end{aligned} \right. \quad (22)$$

В табл. 1 представлены значения собственных частот электрической цепи, а на рис. 2, 3 - амплитудно-частотные характеристики зарядов, которые протекают через элементы системы. На вход электрической цепи, представленной на рис. 1, подавался синусоидальный сигнал амплитудой 10 вольт.

Таблица 1 Значения собственных частот электрической цепи

Номер частоты	Значения собственных частот	
	Гц	рад/сек.
1	336178.004	2112268.696
2	909467.889	5714355.282
3	2197619.398	13808049.915

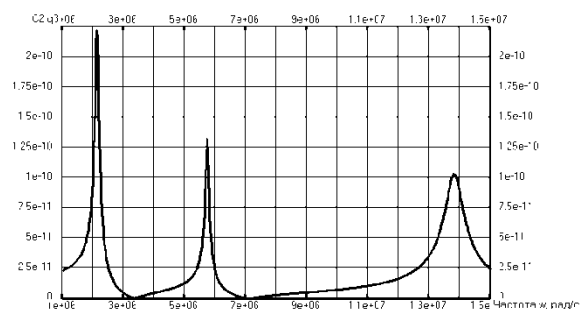


Рис.2 Амплитудно-частотная характеристика заряда на конденсаторе C_2

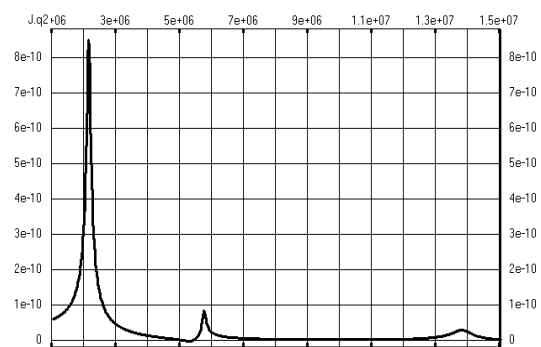


Рис. 3. Амплитудно-частотная характеристика заряда на индуктивности L_3

В качестве простейшей электромеханической

системы рассмотрим конденсаторный микрофон, представленный на рис. 4.

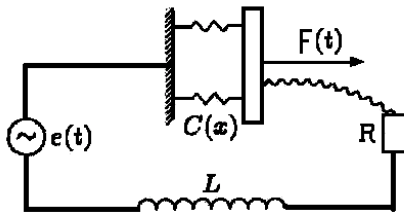


Рис. 4. Конденсаторный микрофон

Правая пластина конденсатора имеет массу m и связана с левой неподвижной пластиной пружинами общей жесткости k . Конденсатор имеет переменную емкость $C(x) = C_0 a / (a - x)$, где x - деформация пружин, a - расстояние между пластинами, когда пружины нейтральны, $x \ll a$. В качестве обобщенных координат выбираем x и q . Применяя приведенный выше алгоритм составления уравнений в векторно-матричной форме с использованием структурных матриц для емкостного микрофона, имеем:

$$\vec{J} = \{m, L\}, \vec{D} = \{0, R\}, \vec{C} = \{k, 1/C(x)\}, \vec{P} = \{F(t), e(t)\};$$

$$J = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & L \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1/C(x) \end{bmatrix}.$$

$$\vec{\eta} = \vec{\xi} = \vec{\psi} = \vec{f}_1 = \vec{f}_3 = \vec{f}_4 = \{x, q\}; \vec{f}_2 = \{0, q\};$$

$$S_1 = \frac{\partial \vec{f}_1(\vec{\xi})}{\partial \vec{\xi}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = S_1^T;$$

$$S_2 = \frac{\partial \vec{f}_2(\vec{\xi})}{\partial \vec{\xi}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = S_2^T;$$

$$S_3 = \frac{\partial \vec{f}_3(\vec{\xi})}{\partial \vec{\xi}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = S_3^T;$$

$$S_4 = \frac{\partial \vec{f}_4(\vec{\xi})}{\partial \vec{\xi}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = S_4^T.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & L \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1/C(x) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F(t) + q^2 / C_0 a \\ e(t) \end{bmatrix}$$

Окончательно имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} m\ddot{x} + kx - q^2 / C_0 a = F(t) \\ L\ddot{q} + R\dot{q} + q(a - x) / C_0 a = e(t) \end{cases} \quad (23)$$

Систему уравнений (23) можно получить, воспользовавшись уравнениями Лагранжа 2-го рода:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) = - \frac{\partial \Pi}{\partial x} + Q_x \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \left(\frac{\partial T}{\partial q} \right) = - \frac{\partial \Pi}{\partial q} - \frac{\partial \Phi}{\partial q} + Q_q, \end{cases} \quad (24)$$

где выражения для кинетической и потенциальной энергии электромеханической системы, а также выражения для функции Рэля и обобщенных сил имеют вид:

$$T = \frac{1}{2} (m\dot{x}^2 + L\dot{q}^2); \quad \Pi = \frac{1}{2} \left(kx^2 + \frac{q^2(a-x)}{C_0 a} \right);$$

$$\Phi = \frac{1}{2} R\dot{q}^2; \quad Q_x = F(t); \quad Q_q = e(t);$$

Результаты расчета с помощью комплекса КИДИМ приведены на рис. 5-8. Иллюстративно параметры электромеханической системы и характер их изменения имели следующие значения и выражения: $m=0,01$; $L=0,1$; $a=1e-3$; $C_0=1e-6$; $k=1e3$; $R=1e6$; $F=0,01\sin(100t)$; $E=0,01\cos(500t)$;



Рис. 5. Перемещение правой пластины конденсатора

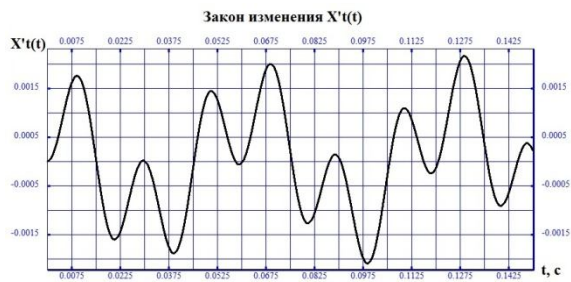


Рис. 6. Скорость правой пластины конденсатора

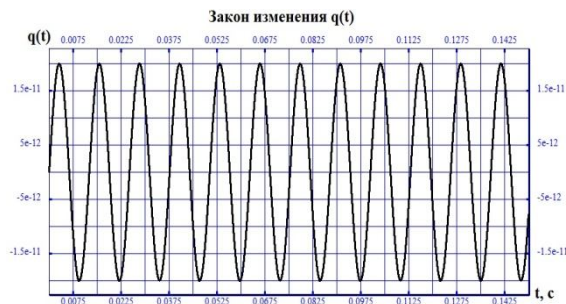


Рис. 7. Изменение заряда цепи



Рис. 8. Изменение силы тока в цепи

Выводы

Используя методику построения уравнений движения дискретных механических систем на основе общего вариационного уравнения динамики, представленного в векторно-матричной форме с использованием аппарата структурных матриц, и электромеханических

аналогий, проиллюстрировано получение обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих процессы в электрических и электромеханических системах.

Рассмотрены вопросы компьютерного составления уравнений электромеханических систем, а также примеры моделирования динамических процессов в таких системах.

На основе свойства инвариантности вида дифференциальных уравнений, описывающих процессы разной физической природы в дискретных системах, имеется возможность автоматизировать построение обобщенных математических моделей электромеханических систем.

Литература

1. Блекборн Дж., Ритхоф Г., Шерер Дж. Л. Гидравлические и пневматические силовые системы управления. - Г.: ИЛ, 1962. - 616 с.
2. Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической механике. - Г.: Наука, 1966. - 300 с.
3. Дружинин Е.И., Штейнвольф Л.И. Динамические модели силовых цепей машин с гидрообъемными передачами. - В сб.: Теория механизмов и машин. - Харьков: Высшая школа, 1984, вып. 36, с. 95-102.
4. Зарубин В.С. Математическое моделирование в технике. - Г.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003. - 496 с.
5. Митин В.Н., Штейнвольф Л.И. Структурные матрицы вибрационных систем. - В кн.: Динамика и прочность машин, Харьков, 1973, вып. 17, с.3-7.
6. Митин В.Н., Штейнвольф Л.И. Структуры дискретных механических моделей конструкций. - В кн.: Динамика и прочность машин, Харьков, 1982, вып. 35, с.3-6.