Міністерство освіти і науки України

УКРАЇНСЬКА ІНЖЕНЕРНО-ПЕДАГОГІЧНА АКАДЕМІЯ

Кафедра інформаційних комп'ютерних технологій і математики

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ОПИСУ ПРОЦЕСІВ

Методичні вказівки до лабораторних робіт

Для магістрів денної форми навчання інженерних та інженерно-педагогічних спеціальностей

Харків
2019

Міністерство освіти і науки України

УКРАЇНСЬКА ІНЖЕНЕРНО-ПЕДАГОГІЧНА АКАДЕМІЯ

Кафедра інформаційних комп'ютерних технологій і математики

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ОПИСУ ПРОЦЕСІВ

Методичні вказівки
до лабораторних робіт

Для магістрів денної форми навчання
інженерних та інженерно-педагогічних спеціальностей

Затверджено
Науково-методичною радою
Української інженерно-
педагогічної академії
протокол № 9
від 24.04.19р.

Харків
2019

УДК 004.42:51(075.5)

Математичні методи опису процесів: метод. вказівки до лабораторних робіт для магістрів денної форми навч. інж. та інж.-пед. спец. / Укр. інж.-пед. акад. ; упоряд.: О. П. Нечуйвітер, Ю. І. Першина. – Харків : [б. в.], 2019. –37 с.

Дані методичні вказівки містять основні теоретичні та практичні відомості для виконання лабораторного практикуму з дисципліни "Математичні методи опису процесів "; докладне розвязування з його реалізацією в системі MathCad типових прикладів та завдання для лабораторних робіт; може бути використаний аспірантами, магістрами та спеціалістами всіх інженерних та інженерно-педагогічних спеціальностей

Рецензент: О. М. Литвин, д-р фіз.-мат. наук, проф

Відповідальний за випуск: Ю.І. Першина, д-р фіз.-мат. наук, доц.

Зміст

Лабораторна робота №1
«Інтерполяційні методи наближення функцій однієї та двох змінних»

Мета роботи: навчитися отримувати емпіричні формули за експериментальними залежностями у випадку однієї та двох змінних (інтерполяція поліномами Лагранжа, сплайнами першого степеня); ознайомитися із правилом вибору інтерполяційного полінома та програмною реалізацією методу наближення функцій однієї та двох змінних інтерполяційними поліномами; отримати досвід практичної реалізації методу інтерполяційного наближення ПЕОМ.

Для виконання лабораторної роботи № 1 студент повинен знати:
1) мету і зміст запропонованої роботи, порядок її виконання;
2) постановку задачі про наближення функції, заданої експериментально;
3) етапи побудови емпіричної формули;
4) інтерполяційні формули Лагранжа, вигляд інтерполяційних сплайнів першого порядку;
5) формули, за якою обчислюється похибка наближення.

Студент зобов'язаний вміти:
1) проводити ручні розрахунки зі складання інтерполяційних формул наближення функцій однієї та двох змінних;
2) здійснювати програмну реалізацію задачі на основі використання системи комп'ютерної математики Mathcad;
3) аналізувати отримані результати.

ЗАВДАННЯ ДО ЛАБОРАТОРНОЇ РОБОТИ №1

Розрахунково-практична частина

1. Побудувати інтерполюючу функцію (табл. 1.1) за допомогою полінома Лагранжа $y = L_2(x)$ та сплайнів першого степеня $y = S1(x)$

2. Побудувати інтерполюючу функцію (табл. 1.1) за допомогою полінома Лагранжа $z = LL_2(x, y)$ та сплайнів першого степеня $z = SS1(x, y)$

3. Знайти похибки наближення та зробити висновок, яка функція більш точно наближує початкові дані.

Обчислювальна частина за допомогою ПЕОМ

1. Використовуючи програму в системі Mathcad знайти наближене значення функції однієї змінної $y = f(x)$ при заданому значенні аргумента x^* за даними таблиці 1.1 за допомогою:

а) інтерполяційного полінома Лагранжа $L_2(x)$;

б) інтерполяційного сплайна $S_1(f, x)$.

За даними таблиці 1.1 обчислити точне значення функції y в точці x^*. Знайти похибки наближення функції y, що задана таблично своїми значеннями, наведеними вище методами, та зробити висновок, яка функція більш точно наближує початкові дані.

2. Використовуючи програму в системі Mathcad знайти наближене значення функції двох змінних $z = f(x, y)$ при заданому значенні аргументів $\left(x^*, y^*\right)$ за даними таблиці 1.2 за допомогою:

а) інтерполяційного полінома Лагранжа $LL_2(x, y)$;

б) інтерполяційного сплайну двох змінних $SS_1(x, y)$.

За даними таблиці 1.2 обчислити точне значення функції z в точці (x^*, y^*). Знайти похибки наближення функції y, що задана таблично своїми значеннями, наведеними вище методами, та зробити висновок, яка функція більш точно наближує початкові дані.

3.Написати звіт по виконаній роботі.

Таблиця 1.1

N вар.	x_0	x_1	x_2	y_0	y_1	y_2	x^*	Функція $y =$
1.	0,05	0,2	0,5	2,22	2,45	2,71	0,4	$\sqrt{x}+2$
2.	0	0,15	0,4	1,00	1,07	1,18	0,2	$\sqrt{x+1}$
3.	-1	-0,75	-0,6	-1,00	-0,97	-0,87	-0,8	$2(x+1)^3-1$
4.	0	0,15	0,4	2,00	2,17	2,76	0,1	$3\sqrt{x^3}+2$
5.	1	1,3	1,6	-1,00	-1,42	-1,79	1,2	$2-3\sqrt{x}$
6.	-0,5	-0,25	0	0,48	0,68	0,84	-0,3	$\sin(x+1)$
7.	0	0,15	0,4	1,00	1,39	1,63	0,2	$\sqrt{x}+1$
8.	0,1	0,4	0,7	0,36	-0,23	-0,74	0,3	$\cos(2x+1)$
9.	2	2,3	2,55	3,41	3,52	3,60	2,2	$\sqrt{x}+2$
10.	0	0,3	0,6	1,00	1,16	1,46	0,4	$\sqrt{x^3}+1$
11.	-1	-0,7	-0,4	-1,00	-0,96	-0,57	-0,5	$2(x+1)^3-1$
12.	0	0,3	0,6	1,68	1,92	2,00	0,2	$2\sin(x+1)$
13.	1	1,3	1,5	-1,00	-1,42	-1,67	1,2	$2-3\sqrt{x}$
14.	-0,5	-0,2	0	1,00	0,83	0,54	-0,3	$\cos(2x+1)$
15.	-1	-0,75	-0,5	0,69	0,81	0,92	-0,8	$\ln(3+x)$
16.	2	2,3	2,6	4,20	4,45	4,70	2,1	$3\sqrt{x-1}$
17.	0,5	0,8	1,1	2,71	2,89	3,05	0,6	$\sqrt{x}+2$
18.	-0,5	-0,25	0	0,47	0,68	0,84	-0,2	$\sin(x+1)$
19.	-1,0	-0,7	-0,45	0,54	0,92	1,00	-0,8	$\cos(2x+1)$

20.	-2	-1,7	-1,4	-2,00	-0,69	-0,12	-1,9	$2(x+1)^3$
21.	1	1,3	1,6	0,00	0,48	1,02	1,4	$\sqrt{x^3}-1$
22.	0	0,3	0,55	2,10	2,19	2,27	0,2	$\ln(x+3)+1$
23.	0,5	0,8	1,05	0,88	0,32	-0,07	0,6	$3(1-\sqrt{x})$
24.	1	1,3	1,6	0,00	0,14	0,26	1,54	$\sqrt{x}-1$
25.	2	2,3	2,7	1,23	-2,52	-1,59	2,1	$3\sin(x+1)$
26.	0,05	0,2	0,5	3,22	3,45	3,71	0,15	$\sqrt{x}+3$
27.	0	0,20	0,40	2,83	2,86	2,90	0,25	$\sqrt{x+8}$
28.	0	0,15	0,4	1,00	2,16	2,90	0,2	$3\sqrt{x}+1$
29.	2	2,3	2,6	1,58	1,48	1,39	2,5	$3-\sqrt{x}$
30.	0	0,3	0,6	1,00	1,55	1,77	0,1	$\sqrt{x}+1$

Таблиця 1.2

Вариант 1		y_0	y_1	x^*	y^*
		0,1	0,4	0,3	0,2
x_0	0,05	2,54	2,86	$z(x,y)=$	
x_1	0,2	2,76	3,08	$=\sqrt{x}+\sqrt{y}+2$	
x_2	0,5	3,02	3,34		

Вариант 2		y_0	y_1	x^*	y^*
		0,2	0,5	0,3	0,4
x_0	0	2,10	2,22	$z(x,y)=$	
x_1	0,15	2,17	2,30	$=\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}$	
x_2	0,4	2,28	2,41		

Вариант 3		y_0	y_1	x^*	y^*
		0,1	0,5	-0,8	0,3
x_0	-1	-0,99	-0,75	$z(x,y)=$	
x_1	-0,75	-0,87	-0,63	$=2(x+1)^2+y^2-1$	
x_2	-0,6	-0,67	-0,43		

Вариант 4		y_0	y_1	x^*	y^*
		0,1	0,5	0,3	0,2
x_0	0	2,03	2,35	$z(x,y)=$	
x_1	0,15	2,21	2,53	$=3\sqrt{x^3}+\sqrt{y^3}+$	
x_2	0,4	2,79	3,11		

Вариант 5		y_0	y_1	x^*	y^*
		0,2	0,7	1,4	0,6
x_0	1	-1,45	-1,84	$z(x,y)=$	
x_1	1,3	-1,87	-2,26	$=2-3\sqrt{x}-\sqrt{y}$	
x_2	1,6	-2,2	-2,63		

Вариант 6		y_0	y_1	x^*	y^*
		-0,2	0	-0,1	-0,1
x_0	-0,5	-0,15	0,25		
x_1	-0,25	-0,338	0,063	$z(x,y)=x^2+2y$	
x_2	0	-0,4	0		

Вариант 7		y_0	y_1	x^*	y^*
		0,1	0,5	0,1	0,4
x_0	0	1,32	1,71	$z(x,y)=$	
x_1	0,15	1,70	2,09	$=\sqrt{x}+\sqrt{y}+1$	
x_2	0,4	1,95	2,34		

Вариант 8		y_0	y_1	x^*	y^*
		0,1	0,3	0,5	0,2
x_0	0,1	-0,97	-0,81	$z(x,y)=$	
x_1	0,4	-0,82	-0,66	$=x^2+2y^2-1$	
x_2	0,7	-0,49	-0,33		

Вариант 9		y_0	y_1	x^*	y^*
		1	1,5	2,5	1,3
x_0	2	4,41	5,09	$z(x,y)=$	
x_1	2,3	4,52	5,19	$=\sqrt{x}+3\sqrt{y}$	
x_2	2,55	4,60	5,27		

Вариант 10		y_0	y_1	x^*	y^*
		0,1	0,3	0,2	0,2
x_0	0	1,06	1,33	$z(x,y)=$	
x_1	0,3	1,23	1,49	$=\sqrt{x^3}+2\sqrt{y^3}+$	
x_2	0,5	1,42	1,68		

Вариант 11		y_0	y_1	x^*	y^*
		-0,6	-0,2	-0,5	-0,3
x_0	-1	-0,36	-0,04	$z(x,y)=$ $=2(x+1)^3-y^2$	
x_1	-0,7	-0,31	0,01		
x_2	-0,4	0,07	0,39		

Вариант 12		y_0	y_1	x^*	y^*
		0,2	0,3	0,1	0,25
x_0	0	0,8	0,7	$z(x,y)=$ $=3x^2-y+1$	
x_1	0,3	1,07	0,97		
x_2	0,6	1,88	1,78		

Вариант 13		y_0	y_1	x^*	y^*
		0,9	1,4	1,4	1,0
x_0	1	-0,846	-1,55	$z(x,y)=$ $=2x-3\sqrt{y}$	
x_1	1,3	-0,246	-0,95		
x_2	1,5	0,154	-0,55		

Вариант 14		y_0	y_1	x^*	y^*
		-0,2	0	-0,1	-0,1
x_0	-0,5	2,35	1,75	$z(x,y)=$ $=2-x^2-3y$	
x_1	-0,2	2,56	1,96		
x_2	0	2,6	2		

Вариант 15		y_0	y_1	x^*	y^*
		-0,5	-0,1	-0,7	-0,3
x_0	-1	0,875	0,999	$z(x,y)=x^2+y^3$	
x_1	-0,75	0,438	0,562		
x_2	-0,5	0,125	0,249		

Вариант 16		y_0	y_1	x^*	y^*
		1,8	2,3	2,4	2,0
x_0	2	6	6	$z(x,y)=$ $=3\sqrt{x+2}$	
x_1	2,3	6,221	6,221		
x_2	2,6	6,434	6,434		

Вариант 17		y_0	y_1	x^*	y^*
		0,3	0,9	1,0	0,5
x_0	0,5	0,23	-1,93	$z(x,y)=x-3y^2$	
x_1	0,8	0,53	-1,63		
x_2	1,1	0,3	-1,33		

Вариант 18		y_0	y_1	x^*	y^*
		0	0,5	-0,1	0,3
x_0	-0,5	0,5	1,149	$z(x,y)=$ $=x+e^y$	
x_1	-0,25	0,75	1,399		
x_2	0	1,00	1,649		

Вариант 19		y_0	y_1	x^*	y^*
		0,2	0,8	0,8	0,5
x_0	-1	1,281	1,881	$z(x,y)=$ $=y+2\cos x$	
x_1	-0,7	1,73	2,33		
x_2	-0,45	2,001	2,601		

Вариант 20		y_0	y_1	x^*	y^*
		0,1	0,5	-1,9	0,2
x_0	-2	-15,9	-15,5	$z(x,y)=$ $=2x^3+y$	
x_1	-1,7	-9,726	-9,326		
x_2	-1,4	-5,388	-4,988		

Вариант 21		y_0	y_1	x^*	y^*
		0,2	0,8	1,4	0,7
x_0	1	-0,48	2,52	$z(x,y)=$ $=3y^2+2y-x$	
x_1	1,3	-0,78	2,22		
x_2	1,6	-1,08	1,92		

Вариант 22		y_0	y_1	x^*	y^*
		0,1	0,6	0,5	0,2
x_0	0,1	-0,01	-0,71	$z(x,y)=$ $=x^2-2y^2$	
x_1	0,3	0,07	-0,63		
x_2	0,55	0,283	-0,417		

Вариант 23		y_0	y_1	x^*	y^*
		0,2	0,9	1,0	0,3
x_0	0,5	1,65	-0,45	$z(x,y)=$ $=3(1-x^2-y)$	
x_1	0,8	0,48	-1,62		
x_2	1,05	-0,908	-3,007		

Вариант 24		y_0	y_1	x^*	y^*
		0,2	0,8	1,5	0,3
x_0	1	1,8	1,2	$z(x,y)=$ $=x^2+x-y$	
x_1	1,3	2,79	2,19		
x_2	1,6	3,96	3,36		

Вариант 25		y_0	y_1	x^*	y^*
		1.8	2.4	2.5	2.0
x_0	2	1,76	-0,76	$z(x,y)=$ $=x^2-y^2+1$	
x_1	2.3	3,05	0,53		

Вариант 26		y_0	y_1	x^*	y^*
		0	0.3	0.1	0.2
x_0	0.05	1	0,91	$z(x,y)=$ $=1-y^2$	
x_1	0.2	1	0,91		

x_2	2.7	5,05	2,53			x_2	0.5	1	0,91		
Вариант 27		y_0	y_1	x^*	y^*	Вариант 28		y_0	y_1	x^*	y^*
		0.1	0.5	0.1	0.4			0.1	0.3	0.3	0.2
x_0	0	0,03	0,75	$z(x,y)=$ $=2x^2+3y^2$		x_0	0	-0,02	-0,18	$z(x,y)=$ $=x^2-2y^2+x$	
x_1	0.2	0,11	0,83			x_1	0.15	0,153	-0,008		
x_2	0.4	0,35	1,07			x_2	0.4	0,54	0,38		
Вариант 29		y_0	y_1	x^*	y^*	Вариант 30		y_0	y_1	x^*	y^*
		1.8	2.4	2.1	2.1			0.1	0.5	0.5	0.2
x_0	2	0.24	0.04	$z(x,y)=$ $=3-\sqrt{x}-\sqrt{y}$		x_0	0	1,99	1,75	$z(x,y)=$ $=2-x-y^2$	
x_1	2.3	0.14	-0.07			x_1	0.3	1,69	1,45		
x_2	2.6	0.05	-0.16			x_2	0.6	1,39	1,15		

ЗРАЗОК ОФОРМЛЕННЯ ЗВІТУ З ЛАБОРАТОРНОЇ РОБОТИ

Розрахунково-практична частина

Завдання 1. Побудувати інтерполюючу функцію (табл. 1.3) за допомогого полінома Лагранжа $y=L_2(x)$ та сплайнів першого степеня $y=S1(x)$ за даними

Таблиця 1.3

x_0	x_1	x_2	y_0	y_1	y_2	x^*	Функція $y=$
-0,6	-0,1	0,4	2,18	2,38	2,55	0,1	$\sqrt{x+2}+1$

Знайти похибки наближення.

Розв'язування. Інтерполяційна формула Лагранжа має вигляд

$$L_2(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1+$$

$$+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2=\frac{(x+0,1)(x-0,4)}{(-0,6+0,1)(-0,6-0,4)}\cdot 2,18+$$

$$+\frac{(x+0,6)(x-0,4)}{(-0,1+0,6)(-0,1-0,4)}\cdot 2,38+\frac{(x+0,6)(x+0,1)}{(0,4+0,6)(0,4+0,1)}\cdot 2,55=$$

$$=4,36(x^2-0,3x-0,04)-9,52(x^2+0,2x-0,24)+5,1(x^2+0,7x+0,06)=$$

$$=-0,06x^2+0,358x+2,4164.$$

$$f(0,1)\approx L_2(0,1)=-0,0006+0,0358+2,4164=2,4516\approx 2,45.$$

Порівняємо знайдене наближене значення $f(0,1)$ з точним, знаючи, що таблицею 2.1 задана функція $f(x)=\sqrt{x+2}+1$. Точне значення $f(0,1)$ дорівнює

$$\sqrt{0,1+2}+1=2,4491.$$

Отже, абсолютна похибка наближення дорівнює

$$|R_2(0,1)|=|f(0,1)-L_2(0,1)|=|2,4491-2,4516|=0,0025.$$

Таким чином, знайдено наближене значення функціїї $f(0,1)\approx L_2(0,1)=2,45$ з похибкою $|R_2(0,1)|=0,0025.$

Побудуємо інтерполюючий сплайн першого степеня за даними в табл.1.3. Сплайн першого порядку має вигляд:

$$S_1(f,x)=\begin{cases} y_0\dfrac{x-x_1}{x_0-x_1}+y_1\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0}, & x_0\leqslant x\leqslant x_1\\ y_1\dfrac{x-x_2}{x_1-x_2}+y_2\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}, & x_1\leqslant x\leqslant x_2\end{cases}$$

Користуючись даними табл.1.3 , маємо:

$$S_1(f,x)=\begin{cases} 2.18\dfrac{x+0.1}{-0.6+0.1}+2.38\dfrac{x+0.6}{-0.1+0.6}, & -0.6\le x\le -0.1\\ 2.38\dfrac{x-0.4}{-0.1-0.4}+2.55\dfrac{x+0.1}{0.4+0.1}, & -0.1\le x\le 0.4\end{cases}=\begin{cases}0.4x+2.42, & -0.6\le x\le -0.1\\ 0.34x+2.414, & -0.1\le x\le 0.4\end{cases}$$

$$f(0,1)\approx S_1(0,1)=0.34\cdot 0.1+2.414\approx 2,448.$$

Абсолютна похибка наближення дорівнює

$$|R_1(0,1)|=|f(0,1)-S_1(0,1)|=|2,4491-2,448|=0,0011.$$

Таким чином, знайдено наближене значення функціїї $f(0,1)\approx S_1(0,1)=2,448$ з похибкою $|R_1(0,1)|=0,0011.$

Завдання 2. Побудувати інтерполюючу функцію (табл. 1.2) за допомогою полінома Лагранжа $z=LL_2(x,y)$ та сплайнів першого степеня $z=SS1(x,y)$ за даними

Таблиця 1.4

		y_0	y_1	x^*	y^*
		0,1	0,5	0,1	0,3
x_0	0	0,01	0,25	$z(x,y)=x^2+y^2$	
x_1	0,2	0,05	0,29		
x_2	0,4	0,17	0,41		

Розв'язування.

Інтерполяційна формула Лагранжа для функцій двох змінних має вигляд

$$LL_2(x,y)=z_{00}\frac{(x-x_1)(x-x_2)(y-y_1)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(y_0-y_1)}+z_{01}\frac{(x-x_1)(x-x_2)(y-y_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(y_1-y_0)}+$$
$$+z_{10}\frac{(x-x_0)(x-x_2)(y-y_1)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(y_0-y_1)}+z_{11}\frac{(x-x_0)(x-x_2)(y-y_0)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(y_1-y_0)}+$$
$$+z_{20}\frac{(x-x_0)(x-x_1)(y-y_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(y_0-y_1)}+z_{21}\frac{(x-x_0)(x-x_1)(y-y_0)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(y_1-y_0)}=$$
$$=0.01\frac{(x-0.2)(x-0.4)(y-0.5)}{(0-0.2)(0-0.4)(0.1-0.5)}+0.25\frac{(x-0.2)(x-0.4)(y-0.1)}{(0-0.2)(0-0.4)(0.5-0.1)}+$$
$$+0.05\frac{(x-0)(x-0.4)(y-0.5)}{(0.2-0)(0.2-0.4)(0.1-0.5)}+0.29\frac{(x-0)(x-0.4)(y-0.1)}{(0.2-0)(0.2-0.4)(0.5-0.1)}+$$
$$+0.17\frac{(x-0)(x-0.2)(y-0.5)}{(0.2-0)(0.4-0.2)(0.1-0.5)}+0.41\frac{(x-0)(x-0.2)(y-0.1)}{(0.4-0)(0.4-0.2)(0.5-0.1)}=$$

$$= x^2 + 0.6y - 0.05$$

$z(0{,}1;0.3) \approx LL_2(0{,}1;0.3) = 0.01 + 0.18 - 0.05 = 0.14$ Порівняємо знайдене наближене значення $f(0{,}1;0{,}3)$ з точним, знаючи, що таблицею 1.4 задана функція $z(x,y) = x^2 + y^2$. Точне значення $z(0{,}1;0.3)$ дорівнює

$$z(0.1, 0.3) = 0.01 + 0.09 = 0.1$$

Отже, абсолютна похибка наближення дорівнює

$$|RR_2(0{,}1;0.3)| = |z(0{,}1;0.3) - LL_2(0{,}1;0.3)| = |0.1 - 0.14| = 0{,}04.$$

Таким чином, знайдено наближене значення функціїї $z\,(0{,}1;0.3) \approx LL_2(0{,}1;0.3) = 0.14$ з похибкою $|RR_2(0{,}1;0.3)| = 0{,}04$

Тепер знайдемо значення інтерполяційної формули сплайнами першого порядку. Інтерполяційний білінійний сплайн має такий вигляд:

$$SS_1(x,y) = (1-u)[(1-t)z_{i,j} + tz_{i+1,j}] + u[(1-t)z_{i,j+1} + tz_{i+1,j+1}],$$

$$u = \frac{y - y_j}{y_{j+1} - y_j}, \quad t = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}, \quad (x,y) \in \Pi_{i,j} \; .$$

Для того, щоб обчислити $SS_1(x,y)$, треба визначити інтервали, в які потрапили x^* і y^*

$$x^* = 0.1 \in [0;0.2], \quad x^* \in [x_0, x_1] \Rightarrow i = 0.$$

$$y^* = 0.3 \in [0.1;0.5], \quad y^* \in [y_0, y_1] \Rightarrow j = 0.$$

Тоді

$$u = \frac{y^* - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{0.3 - 0.1}{0.5 - 0.1} = 0.5;$$

$$t = \frac{x^* - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{0.1 - 0}{0.2 - 0} = 0.5$$

$SS_1(0.1, 0.3) =$

$$= (1-0.5)[(1-0.5)z_{0,0} + 0.5z_{1,0}] + 0.5[(1-0.5)z_{0,1} + 0.5z_{1,1}] = 0.15$$

Порівняємо знайдене наближене значення $z(0{,}1;0.3)$ з точним. Абсолютна похибка наближення дорівнює

$$|RR_1(0{,}1;0.3)| = |z(0{,}1;0.3) - SS_1(0{,}1;0.3)| = |0.1 - 0.15| = 0{,}05.$$

Таким чином, знайдено наближене значення функціїї $z\,(0{,}1;0.3) \approx SS_1(0{,}1;0.3) = 0.15$ з похибкою $|RR_1(0{,}1;0.3)| = 0{,}05.$

Розрахункова частина за допомогою ПЕОМ

Інтерполяція функцій однієї змінної

Інтерполяційна формула Лагранжа

Знайдемо наближене значення функції f(x)=(x+2)^0.5 +1 в точці x=0.1 за допомогою інтерполяційної формули Лагранжа, побудованої за наступними даними:

$x0 := -0.6 \quad x1 := -0.1 \quad x2 := 0.4 \quad y0 := 2.18 \quad y1 := 2.38 \quad y2 := 2.55 \quad xx := 0.1$

$$L2(x) := \frac{(x - x1)\cdot(x - x2)}{(x0 - x1)\cdot(x0 - x2)}\cdot y0 + \frac{(x - x0)\cdot(x - x2)}{(x1 - x0)\cdot(x1 - x2)}\cdot y1 + \frac{(x - x0)\cdot(x - x1)}{(x2 - x0)\cdot(x2 - x1)}\cdot y2$$

$L2(xx) = 2.4516$

Отже наближене значення даної функції в точці xx=0.1 дорівнює 2.4516. Знайдемо її точне значення в цій же точці і обчислимо аюсолютну похибку наближення.

$f(x) := \sqrt{x + 2} + 1 \qquad f(xx) = 2.4491$

$R2(x) := f(x) - L2(x) \qquad R2(xx) = -0.0025 \qquad |R2(xx)| = 0.0025$

Таким чином, наближене значення даної функції в точці 0.1 знайдено з абсолютною похибкою 0.0025.

Інтерполяція сплайнами першого степеня

Знайдемо наближене значення тієї ж функції і в тій же точці xx=0,1 за допомогою сплайна першого степеня. Для його побудови скористаємося наступною програмою.

$$S1(x) := \left| \begin{array}{ll} y0\cdot\frac{x - x1}{x0 - x1} + y1\cdot\frac{x - x0}{x1 - x0} & \text{if } x0 \le x \le x1 \\ y1\cdot\frac{x - x2}{x1 - x2} + y2\cdot\frac{x - x1}{x2 - x1} & \text{if } x1 \le x \le x2 \end{array} \right.$$

$S1(xx) = 2.448$

$E1(x) := |f(x) - S1(x)| \qquad E1(xx) = 0.0011$

Отже за допомогою сплайна першого порядку шукане значення функції знайдено з абсолютною похибкою 0,0011. Порівнюючи з попереднім результатом робимо висновок, що дану фукцію в точці 0,1 краще наближує сплайн першого порядку, ніж поліном Лагранжа.

Інтерполяція функцій двох змінних

Інтерполяційна формула Лагранжа

Знайдемо наближене значення функції f(x,y)=x^2+y^2 в точці (0,1; 0,3) за допомогою інтерполяційної формули Лагранжа, побудованої за наступними даними:

$X_0 := 0 \qquad X_1 := 0.2 \qquad X_2 := 0.4 \qquad Y_0 := 0.1 \qquad Y_1 := 0.5$

$z_{0,0} := 0.01 \qquad z_{0,1} := 0.25$

$z_{1,0} := 0.05 \qquad z_{1,1} := 0.29 \qquad\qquad xx := 0.1 \qquad yy := 0.3$

$z_{2,0} := 0.17 \qquad z_{2,1} := 0.41$

$$
\begin{aligned}
LL2(x,y) := {} & z_{0,0}\cdot\frac{(x-X_1)\cdot(x-X_2)}{(X_0-X_1)\cdot(X_0-X_2)}\cdot\frac{(y-Y_1)}{(Y_0-Y_1)} + z_{0,1}\cdot\frac{(x-X_1)\cdot(x-X_2)}{(X_0-X_1)\cdot(X_0-X_2)}\cdot\frac{(y-Y_0)}{(Y_1-Y_0)} \dots \\
& + z_{1,0}\cdot\frac{(x-X_0)\cdot(x-X_2)}{(X_1-X_0)\cdot(X_1-X_2)}\cdot\frac{(y-Y_1)}{(Y_0-Y_1)} + z_{1,1}\cdot\frac{(x-X_0)\cdot(x-X_2)}{(X_1-X_0)\cdot(X_1-X_2)}\cdot\frac{(y-Y_0)}{(Y_1-Y_0)} \dots \\
& + z_{2,0}\cdot\frac{(x-X_0)\cdot(x-X_1)}{(X_2-X_0)\cdot(X_2-X_1)}\cdot\frac{(y-Y_1)}{(Y_0-Y_1)} + z_{2,1}\cdot\frac{(x-X_0)\cdot(x-X_1)}{(X_2-X_0)\cdot(X_2-X_1)}\cdot\frac{(y-Y_0)}{(Y_1-Y_0)}
\end{aligned}
$$

$LL2(xx, yy) = 0.1400$

Отже, наближене значення даної функції в точці (0,1;0.3) дорівнює 0.1400.
Знайдемо її точне значення в цій же точці і обчислимо абсолютну похибку наближення.

$f(x,y) := x^2 + y^2$

$f(xx, yy) = 0.1000$

$RR2(x,y) := f(x,y) - LL2(x,y) \qquad RR2(xx, yy) = -0.04 \qquad |RR2(xx, yy)| = 0.04$

Таким чином, наближене значення даної функції в точці (0,1;0,3) знайдено з абсолютною похибкою 0,04.

Інтеполяція сплайнами першого степеня

Знайдемо наближене значення тієї ж функції і в тій же точці (0,1;0,3) за допомогою білінійного сплайну першого степеня.

Визначимо інтервал, в який потрапила точка (xx,yy).

xx=0.1 принадлежит интервалу (x0,x1) $i := 0$

yy=0.3 принадлежит интервалу (y0,y1) $j := 0$

$$u(y) := \frac{y - Y_j}{Y_{j+1} - Y_j} \qquad t(x) := \frac{x - X_i}{X_{i+1} - X_i}$$

$$SS2(x,y) := (1 - u(y))\cdot\left[(1 - t(x))\cdot z_{i,j} + t(x)\cdot z_{i+1,j}\right] + u(y)\cdot\left[(1 - t(x))\cdot z_{i,j+1} + t(x)\cdot z_{i+1,j+1}\right]$$

$$SS2(xx, yy) = 0.1500$$

Отже, наближене значення даної функції в точці (0,1;0,3) дорівнює 0.1500.

Знайдемо її точне значення в цій же точці і обчислимо абсолютну похибку наближення.

$$f(x,y) := x^2 + y^2$$

$$f(xx, yy) = 0.1000$$

$$RR2(x,y) := f(x,y) - SS2(x,y) \qquad RR2(xx, yy) = -0.05 \qquad |RR2(xx, yy)| = 0.05$$

Таким чином, наближене значення даної функції в точці (0,1;0,3) знайдено з абсолютною похибкою 0,05.

Порівнюючи з попереднім результатом робимо висновок, що функцію в точці (0,1;0,3) краще наближує поліном Лагранжа, ніж сплайн першого степеня.

Лабораторна робота №2
«Інтерлінаційні методи наближення функцій двох змінних»

Мета роботи: навчитися будувати інтерлінаційні (нові інформаційні оператори) за експериментальними даними у випадку двох змінних, які мають вигляд слідів функції двох змінних на заданій системі прямих; ознайомитися з програмною реалізацією методу наближення функцій двох змінних інтерлінаційними операторами; отримати досвід практичної реалізації методу інтерлінаційноного наближення ПЕОМ.

Для виконання лабораторної роботи № 2 студент повинен знати:

1) мету і зміст запропонованої роботи, порядок її виконання;
2) постановку задачі про наближення функції, заданої експериментально у вигляді інтегралів вздовж заданої системи прямих;
3) етапи побудови емпіричної формули;
4) інтерлінаційні формули на двох, трьох та чотирьох прямих, вигляд оператору інтерлінації по змінній x та y, вигляд поліноміальної інтерлінації Лагранжа, вигляд оператора сплайн-інтерлінації та оператор сплайн – інтерполяції, побудований за допомогою сплайн-інтерлінанта;
5) формули, за якою обчислюється похибка наближення.

Студент зобов'язаний вміти:

1) проводити ручні розрахунки зі складання інтерлінаційних формул наближення функцій двох змінних;
2) здійснювати програмну реалізацію задачі на основі використання системи комп’ютерної математики Mathcad;
3) аналізувати отримані результати.

ЗАВДАННЯ ДО ЛАБОРАТОРНОЇ РОБОТИ №2

Розрахунково-практична частина

1. Побудувати оператор інтерлінації $O2(x,y)$ функції двох змінних за відомими слідами на двох прямих $x=0, y=0$.
2. Побудувати оператор інтерлінації $O3(x,y)$ функції двох змінних за відомими слідами на трьох прямих $x=x_1, x=x_2, t=0$.
3. Побудувати оператор інтерлінації $O4(x,y)$ функції двох змінних за відомими слідами на чотирьох $x=x_1, x=x_2, y=y_1, y=y_2$.
4. Побудувати оператор інтерлінації $OO(x,y)$ функції двох змінних за відомими слідами на системі взаємно перпендикулярних прямих, розбиваючи область наближення $[a,b]\times[c,d]$ на 100 рівних прямокутників.

5. За результатами лабораторних робіт №1 та №2 зробити висновок, який оператор (інтерлінації чи інтерполяції) краще наближує функцію від двох змінних.

Обчислювальна частина за допомогою ПЕОМ

1. Використовуючи програму в системі Mathcad, знайти наближене значення функції двох змінних $z = f(x,y)$ (табл. 2.1) при заданих слідах цієї функції на:

а) двох прямих $x = 0, y = 0$;

б) трьох прямих $x = x1, x = x2, t = 0$;

в) чотирьох прямих $x = x1, x = x2,\ y = y1, y = y2$;

г) системі взаємно перпендикулярних прямих $x = X_k, k = \overline{1,n}$, $y = Y_l, l = \overline{1,n}$, розбиваючи область наближення $[a,b]\times[c,d]$ на 100 рівних прямокутників та обчислити похибку наближення в точці (x^*, y^*) (табл. 1.2).

2. Побудувати графіки точної функції $f(x,y)$ та наближуваних функцій $O2(x,y), O3(x,y), O4(x,y), OO(x,y)$ та зробити висновок про точність наближення.

3. Порівнюючи результати лабораторних робіт №1 та №2 зробити висновок, який оператор (інтерлінації чи інтерполяції) краще наближує функцію від двох змінних.

4. Написати звіт по виконаній роботі.

Таблиця 2.1

Варіант	x1	x2	y1	y2	a	b	c	d	$z = f(x,y)$
1	0	1	0	1	0	1	0	1	$f(x,y) = \sqrt{x} + \sqrt{y} + 2$
2	0,1	0,5	0	0,1	0	2	0	1	$f(x,y) = \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1}$
3	1	2	0	1	-1	0	0	1	$f(x,y) = 2(x+1)^2 + y^2 - 1$
4	0	0,5	0	0,1	0	1	0	0,5	$f(x,y) = 3\sqrt{x^3} + \sqrt{y^3} + 2$
5	1	1,5	0	1	1	2	0	1	$f(x,y) = 2 - 3\sqrt{x} - \sqrt{y}$
6	-1	-0,5	-1	0	-1	0	-1	0	$f(x,y) = x^2 + 2y$
7	0	0,5	0	0,2	0	1	0	1	$f(x,y) = \sqrt{x} + \sqrt{y} + 1$
8	0,5	1	0	0,5	0,5	1,5	0	1	$f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 1$
9	2	2,5	1	1,5	2	3	1	2	$f(x,y) = \sqrt{x} + 3\sqrt{y}$
10	0	0,2	0	1	0	1	0	1	$f(x,y) = \sqrt{x^3} + 2\sqrt{y^3} + 1$
11	-1	-0,5	-1	0	-1	0	-1	0	$f(x,y) = 2(x+1)^3 - y^2$
12	0	1	0	1	0	1	0	1	$f(x,y) = 3x^2 - y + 1$
13	1	1,5	0	1	1	2	0	2	$f(x,y) = 2x - 3\sqrt{x+y}$
14	-1	-1,5	-1	0	-1	0	-1	0	$f(x,y) = 2 - x^2 - 3y$
15	-1	-0,2	-1	0	-1	0	-1	0	$f(x,y) = x^2 + y^3$

16	1	2	2	3	1	3	1	3	$f(x,y)=3\sqrt{x+2}$
17	0,2	1	0,5	1	0	1	0	1	$f(x,y)=x-3y^2$
18	-1	-0,5	0	0,5	-1	0	0	1	$f(x,y)=x+e^y$
19	0,2	1	0	0,3	0	1	0	1	$f(x,y)=y+2\cos x$
20	-1	0	0	0,5	-2	0	0	1	$f(x,y)=2x^3+y$
21	1	1,5	0	1	1	2	0	1	$f(x,y)=3y^2+2y-x$
22	0	0,2	0	0,5	0	1	0	1	$f(x,y)=x^2-2y^2$
23	0	1,5	0,2	0,5	0	2	0	1	$f(x,y)=3(1-x^2-y)$
24	1,5	2	0,5	1	0	2	0	1	$f(x,y)=x^2+x-y$
25	1	2	1	2	1	3	1	3	$f(x,y)=x^2-y^2+1$
26	0	0,5	0,2	0,6	0	1	0	2	$f(x,y)=1-y^2$
27	0,2	0,6	0	0,5	0	1	0	1	$f(x,y)=2x^2+3y^2$
28	0	1	0,5	0,8	0	1	0	1	$f(x,y)=x^2-2y^2+x$
29	2	2,2	2	2,2	0	3	0	3	$f(x,y)=3-\sqrt{x}-\sqrt{y}$
30	0	0,8	0,2	0,5	0	1	0	1	$f(x,y)=2-x-y^2$

ЗРАЗОК ОФОРМЛЕННЯ ЗВІТУ З ЛАБОРАТОРНОЇ РОБОТИ
Розрахунково-практична частина

Завдання. Побудувати оператори інтерлінації функції двох змінних $z=f(x,y)$ (табл. 2.2) при заданих слідах цієї функції на:

а) двох прямих $x=0, y=0$;

б) трьох прямих $x=x1, x=x2, t=0$;

в) чотирьох прямих $x=x1, x=x2,\ y=y1, y=y2$;

г) системі взаємно перпендикулярних прямих $x=X_k, k=\overline{1,n}$, $y=Y_l, l=\overline{1,n}$, розбиваючи область наближення $[a,b]\times[c,d]$ на 100 рівних прямокутників

Таблиця 2.2

x1	x2	y1	y2	a	b	c	d	$z=f(x,y)$
0	1	0	1	0	1	0	1	$f(x,y)=x^2+y^2$

Розв'язування.

1. Побудуємо оператор інтерлінації $O2(x,y)$ функції двох змінних за відомими слідами на двох прямих $x=0, y=0$.

Експериментальними даними є $f(0,y)=y^2$, $f(x,0)=x^2$. Звідси витікає, що $f(0,0)=0$.

Оператор інтерлінації на двох лініях $x=0,\ y=0$ має вигляд

$$O2(x,y)=f(x,0)+f(0,y)-f(0,0)=x^2+y^2-0=x^2+y^2$$

Побудований оператор наближує функцію точно, тобто похибка дорівнює нулю.

2. Побудуємо оператор інтерлінації $O3(x,y)$ функції двох змінних за відомими слідами на трьох прямих $x=0, x=1, t=0$.

Експериментальними даними є

$$f(x1,t)=f(0,t)=t^2,\ \ f(x2,t)=f(1,t)=t^2+1,\ \ f(x,0)=x^2.$$

Звідси витікає, що $f(x1,0)=f(0,0)=0,\ \ f(x2,0)=f(1,0)=1$.

Оператор інтерлінації $O3(x,y)$ функції двох змінних на трьох прямих має вигляд

$$O3(x,y)=f(x,0)+\frac{x-x2}{x1-x2}(f(x1,t)-f(x1,0))+$$

$$+\frac{x-x1}{x2-x1}(f(x2,t)-f(x2,0))=$$

$$=x^2+\frac{x-1}{0-1}(t^2-0)+\frac{x-0}{1-0}(t^2+1-1)=x^2-t^2(x-1)+xt^2=$$

$$=x^2-t^2x+t^2+xt^2=x^2+t^2.$$

Побудований оператор наближує функцію точно, тобто похибка дорівнює нулю.

3. Побудуємо оператор інтерлінації $O4(x,y)$ функції двох змінних за відомими слідами на чотирьох прямих $x=0, x=1, y=0, y=1$.

Експериментальними даними є

$$f(x1,y)=f(0,y)=y^2,\ \ f(x2,y)=f(1,y)=y^2+1,$$

$$f(x,y1)=f(x,0)=x^2,\ \ f(x,y2)=f(x,1)=x^2+1,$$

$$f(x1,y1)=1.$$

Звідси витікає, що

$$f(x1,y1)=f(0,0)=0,\ \ f(x2,y1)=f(1,0)=1,$$

$$f(x1,y2)=f(0,1)=1,\ \ f(x2,y2)=f(1,1)=2..$$

Оператор інтерлінації на чотирьох прямих має вигляд:

$$O_4f(x,y)=\frac{x-x_2}{x_1-x_2}f(x_1,y)+\frac{x-x_1}{x_2-x_1}f(x_2,y)+\frac{y-y_2}{y_1-y_2}f(x,y_1)+$$

$$+\frac{y-y_1}{y_2-y_1}f(x,y_2)-\frac{x-x_2}{x_1-x_2}\left[\frac{y-y_2}{y_1-y_2}f(x_1,y_1)+\frac{y-y_1}{y_2-y_1}f(x_1,y_2)\right]-$$

$$-\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\left[\frac{y-y_2}{y_1-y_2}f(x_2,y_1)+\frac{y-y_1}{y_2-y_1}f(x_2,y_2)\right]=$$

$$=\frac{x-1}{0-1}y^2+\frac{x-0}{1-0}(y^2+1)+\frac{y-1}{0-1}x^2+$$

$$+\frac{y-0}{1-0}(x^2+1)-\frac{x-1}{0-1}\left[\frac{y-1}{0-1}\cdot 0+\frac{y-0}{1-0}\cdot 1\right]-\frac{x-0}{1-0}\left[\frac{y-1}{0-1}\cdot 1+\frac{y-0}{1-0}\cdot 2\right]=$$

$$=(1-x)y^2+x(y^2+1)+(1-y)x^2+y(x^2+1)+(x-1)\cdot y-x\left[1-y+2y\right]=$$

$$=y^2+x+x^2+y+xy-y-xy-x=x^2+y^2$$

Побудований оператор наближує функцію точно, тобто похибка дорівнює нулю.

Розрахункова частина за допомогою ПЕОМ

Наближення функцій двох змінних операторами інтерлінації

$ORIGIN := 1$

$f(x,y) := x^2 + y^2$

Оператор інтерлінації функції f(x,y) на двох прямих x=0 та y=0

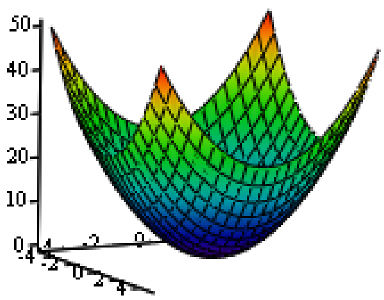
Відомими є наступні експериментальні дані

$f(x,0) \rightarrow x^2$ $\quad f(0,y) \rightarrow y^2$ $\quad f(0,0) \rightarrow 0$

Оператор інтерлінації на двох прямих має вигляд

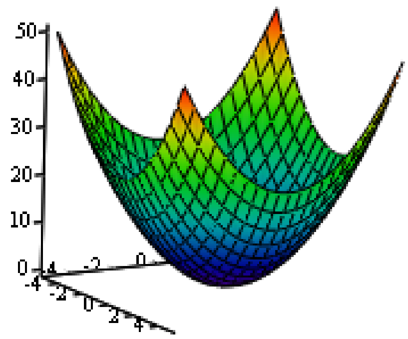
$O2(x,y) := f(x,0) + f(0,y) - f(0,0)$

$O2(x,y) \rightarrow x^2 + y^2$



f

Графік поверхні z=f(x,y)



O2

Графік поверхні z=O2(x,y)

Оператор інтерлінації функції f(x,t) на трьох прямих x=x1, x=x2, t=0

$x1 := 0$ $\quad x2 := 1$

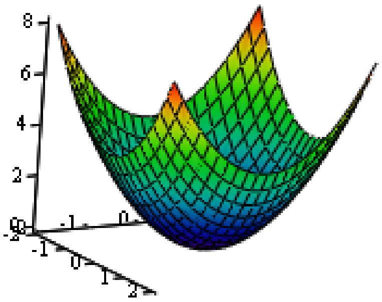
Відомими є наступні експериментальні дані

$f(x1,t) \rightarrow t^2$ $\quad f(x2,t) \rightarrow t^2 + 1$ $\quad f(x,0) \rightarrow x^2$

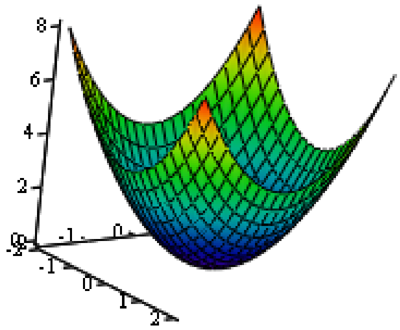
Оператор інтерлінації на трьох прямих має вигляд

$$O3(x,t) := f(x,0) + \frac{x - x2}{x1 - x2}\cdot(f(x1,t) - f(x1,0)) + \frac{x - x1}{x2 - x1}\cdot(f(x2,t) - f(x2,0))$$

$O3(x,y) \rightarrow x\cdot y^2 + x^2 - y^2\cdot(x - 1) \text{ simplify } \rightarrow x^2 + y^2$



f



O3

Графік поверхні z=f(x,y) Графік поверхні z=O3(x,y)

Оператор інтерлінації функції f(x,y) на чотирьох прямих x=x1, x=x2, y=y1, y=y2

$x1 := 0 \qquad x2 := 1 \qquad y1 := 0 \qquad y2 := 1$

Відомими є наступні експериментальні дані

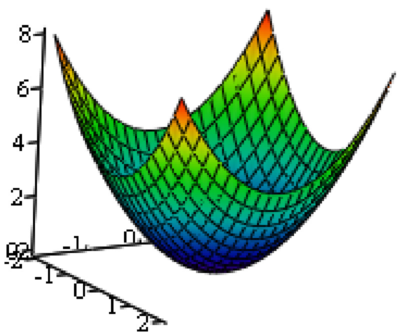
$f(x1, y) \rightarrow y^2 \qquad f(x2, y) \rightarrow y^2 + 1$

$f(x, y1) \rightarrow x^2 \qquad f(x, y2) \rightarrow x^2 + 1$

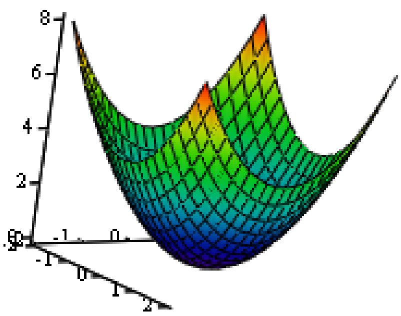
Оператор інтерлінації на трьох прямих має вигляд

$$\begin{aligned} O4(x, y) := {} & \frac{x - x2}{x1 - x2} \cdot f(x1, y) + \frac{x - x1}{x2 - x1} \cdot f(x2, y) + \frac{y - y2}{y1 - y2} \cdot f(x, y1) + \frac{y - y1}{y2 - y1} \cdot f(x, y2) \ \ldots \\ & + (-1) \cdot \frac{x - x2}{x1 - x2} \cdot \left(\frac{y - y2}{y1 - y2} \cdot f(x1, y1) + \frac{y - y1}{y2 - y1} \cdot f(x1, y2) \right) \ \ldots \\ & + (-1) \cdot \frac{x - x1}{x2 - x1} \cdot \left(\frac{y - y2}{y1 - y2} \cdot f(x2, y1) + \frac{y - y1}{y2 - y1} \cdot f(x2, y2) \right) \end{aligned}$$

$O4(x, y) \text{ simplify } \rightarrow x^2 + y^2$



f



O4

Графік поверхні z=f(x,y) Графік поверхні z=O4(x,y)

Оператор поліноміальної інтерлінації функції f(x,y) на лініях x=xk, k=1,2,...,n, y=yL, L=1,2,...,n

Задамо область відновлення [a,b]*[c,d]:

$a := 0 \qquad b := 1 \qquad c := 0 \qquad d := 1$

ўа розіб'ємо задану область на 100 рівних прямокутників

$n := 10$

$xh := \frac{b-a}{n}$ $\qquad$ $yh := \frac{d-c}{n}$

$k := 1..n$ $\qquad$ $l := 1..n$

$X_k := a + k \cdot xh$ $\qquad$ $Y_l := c + l \cdot yh$

$X_k =$

0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1

$Y_l =$

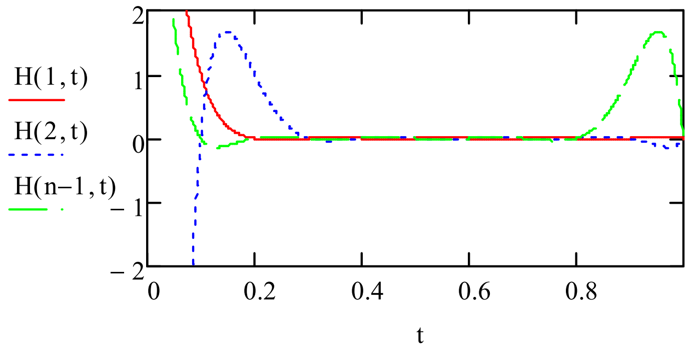
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1

Спочатку побудуємо оператор поліноміальної інтерлінації по змінній x.

$$H(k,t) := \left| \begin{array}{l} s \leftarrow 1 \\ \text{for } j \in 1..n \\ \quad \left| \begin{array}{l} s \leftarrow s \cdot \dfrac{t - X_j}{X_k - X_j} \quad \text{if } j \neq k \\ s \leftarrow s \quad \text{otherwise} \\ s \end{array} \right. \\ s \end{array} \right.$$

$$A(x,y) := \sum_{k=1}^{n} \left(f\left(X_k, y\right) \cdot H(k,x) \right)$$

$A(0,0) = 2.509104 \times 10^{-14}$ $\qquad$ $f(0,0) = 0$



Тепер побудуємо оператор поліноміальної інтерлінації по змінній y.

$$B(x,y) := \sum_{l=1}^{n} \left(f\left(x, Y_l\right) \cdot H(l,y)\right)$$

$$B(0,0) = 2.509 \times 10^{-14}$$

Оператор поліноміальної інтерполяції Лагранжа функції f(x,y) в точках (Xk,Yl) має вигляд

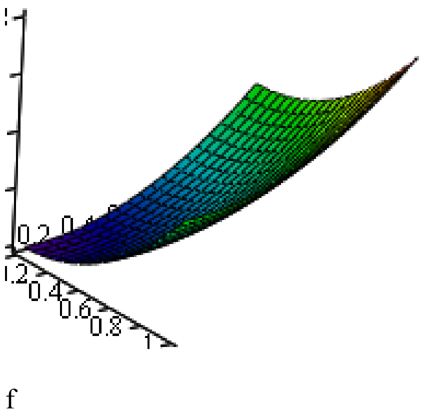
$$C(x,y) := \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \left(f\left(X_k, Y_l\right) \cdot H(k,x) \cdot H(l,y)\right)$$

$$C(0,0) = 1.051 \times 10^{-12}$$

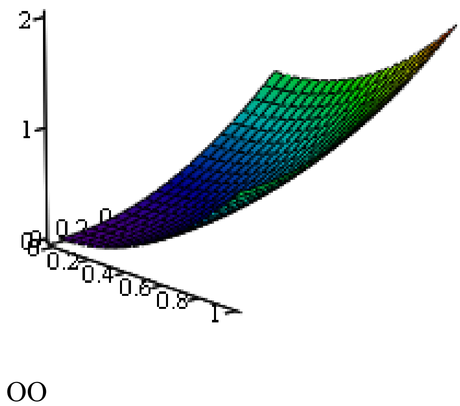
І будуємо шуканий опертор поліноміальної інтерлінації на взаємно перпендикулярних лініях

$$OO(x,y) := A(x,y) + B(x,y) - C(x,y)$$

$$f(0.1, 0.3) - OO(0.1, 0.3) = 0$$



Графік поверхні z=f(x,y)



Графік поверхні z=OO(x,y)

Отже, побудовані оператори інтерлінації точно наближують задану функцію.

Порівнюючи отримані результати з результатами, отрманими в лабораторній роботі №1, робимо висновок, що функцію від двох змінних краще наближують оператори интерлінації (за відомими слідами функції на заданій системі прямих), ніж оператори інтерполяції (за відомими значеннями функції на заданій сичтемі точок).

Лабораторна робота №3
«Апроксимація експериментальних залежностей методом найменших квадратів»

Мета роботи: навчитися отримувати емпіричні формули за експериментальними залежностями у випадку однієї змінної (апроксимація поліномом, елементарними функціями, відмінними від полінома); ознайомитися із правилом вибору оптимального степеня апроксимуючого поліному та програмною реалізацією методу найменших квадратів; отримати досвід практичної реалізації методу найменших квадратів на ПЕОМ.

Для виконання лабораторної роботи № 1 студент повинен знати:

6) мету і зміст запропонованої роботи, порядок її виконання;
7) постановку задачі про наближення функції, заданої експериментально отриманою таблицею;
8) етапи побудови емпіричної формули;
9) алгоритм методу найменших квадратів;
10) формулу, за якою обчислюється середньоквадратична похибка наближення;
11) методи розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Студент зобов'язаний вміти:

4) проводити ручні розрахунки зі складання систем лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення параметрів емпіричної формули;
5) вирішувати системи лінійних алгебраїчних рівнянь;
6) здійснювати програмну реалізацію задачі на основі використання системи комп’ютерної математики Mathcad;
7) аналізувати отримані результати.

КОРОТКІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Однією з важливих задач в науковій та інженерній практиці є задача знаходження закономірностей в перебігу різноманітних процесів. Засобом для цього є накопичення експериментальних даних і з їх допомогою отримання деяких відомостей про закони, яким підкоряються ці явища або процеси.

У загальному вигляді цю задачу можна сформулювати так. Відомо, що між x і y існує функціональна залежність і в результаті експериментів отримана таблиця значень

x_i	x_1	x_2	…	x_n
y_i	y_1	y_2	…	y_n

яку можна розглядати як таблично задану функцію.

Необхідно за цими даними побудувати аналітичну функцію, яка хоча б наближено подавала зв'язок між x і y. Цю аналітичну функцію називають емпіричною функцією або емпіричною формулою.

Побудова емпіричної формули відбувається у два етапи:

1) з'ясування загального виду формули;
2) знаходження найкращих її параметрів за певним критерієм.

Вдалий вибір емпіричної формули значною мірою залежить від досвіду дослідника. Велике значення має геометричне зображення експериментальних даних у декартових або спеціальних координатах. При певному досвіді по розташуванню точок на графіку можна вгадати загальний вид залежності. Іноді бувають відомі досить загальні властивості залежностей між величинами. Наприклад, величини приблизно пропорційні, величини приблизно обернено пропорційні, одна з величин є періодичною функцією іншої із приблизно відомим періодом і т.д. Це дозволяє вибрати ту або іншу формулу емпіричної залежності.

Яким би не був вид емпіричної формули, вона завжди має кілька параметрів, які необхідно підібрати так, щоб емпірична формула найкращим чином узгоджувалася з експериментальними даними.

Найчастіше вибираються лінійні щодо параметрів емпіричні формули або такі, які простими підстановками зводяться до лінійних щодо параметрів. У більшості випадків обмежуються алгебраїчними або тригонометричними поліномами.

Найпоширенішим методом знаходження параметрів емпіричної формули є метод найменших квадратів.

Метод найменших квадратів

Припустимо, що з деяких міркувань ми обрали вид емпіричної формули:

$$y = f\left(x, a_0, a_1, ..., a_m\right). \tag{1}$$

Параметри $a_0, a_1, ..., a_m$ підлягають визначенню, причому ці параметри повинні бути підібрані так, щоб емпірична функція (1) якнайкраще наближала експериментальну залежність.

Назвемо відхиленням σ_i різницею між значенням функції (1) у точці x_i та експериментальним значенням у цій же точці y_i:

$$\sigma_i = f\left(x_i, a_0, a_1, ..., a_m\right) - y_i, \quad i = \overline{1,n}. \tag{2}$$

Відповідно до методу найменших квадратів найкращими значеннями параметрів $a_i, \ i = \overline{0,m}$, вважаються ті, для яких сума квадратів відхилень у всіх експериментальних точках буде мінімальною, тобто

$$\begin{aligned} \Phi\left(a_0, a_1, ..., a_m\right) &= \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left[f\left(x_i, a_0, a_1, ..., a_m\right) - y_i \right]^2 \to \min_{a_j}, \quad j = \overline{0,m}. \end{aligned} \tag{3}$$

Умову (3) називають умовою найкращого середньоквадратичного наближення.

Щоб знайти значення параметрів $a_0, a_1, ..., a_m$, скористаємося необхідними умовами мінімуму функції багатьох змінних. Вони полягають у рівності нулю частинних похідних першого порядку по параметрах $a_0, a_1, ..., a_m$ і дають систему $(m+1)$ рівнянь із $(m+1)$ невідомою, яка називається нормальною системою:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_0} = 0, \frac{\partial \Phi}{\partial a_1} = 0, ..., \frac{\partial \Phi}{\partial a_m} = 0. \qquad (4)$$

Якщо система (4) має єдиний розв'язок, то він і дає шукане значення параметрів $a_j,\ j = \overline{0,m}$.

Розглянемо деякі окремі типи емпіричних формул, які використовуються найчастіше.

Апроксимація функцій однієї змінної поліномом

Якщо апроксимуюча функція є поліномом степеня m, тобто емпірична формула має вигляд:

$$y = P_m(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_m x^m, \qquad (5)$$

то $\Phi(a_0, a_1, ..., a_m) = \sum\limits_{i=1}^{n} \left(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + ... + a_m x_i^m - y_i \right)^2$, а система (4) після декількох перетворень набуває вигляду

$$\begin{cases} n a_0 + a_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i + a_2 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + ... + a_m \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^m = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i, \\ a_0 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i + a_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + a_2 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 + ... + a_m \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{m+1} = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i x_i, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_0 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^m + a_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{m+1} + a_2 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{m+2} + ... + a_m \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{2m} = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i x_i^m. \end{cases} \qquad (6)$$

У цьому випадку нормальна система є системою $(m+1)$ лінійних алгебраїчних рівнянь, розв'язок якої дає шукані значення $(m+1)$ коефіцієнтів поліному $a_0, a_1, ..., a_m$. Можна довести, що визначник системи (6) відмінний від нуля, тобто розв'язок системи існує і єдиний.

Експериментальну залежність можна апроксимувати многочленом будь-якого степеня, проте обирати степінь многочлена вище п'ятого не рекомендується, тому що нормальна система погано обумовлена й при більш високих степенях похибки коефіцієнтів дуже великі.

У окремому випадку, коли емпірична формула шукається у вигляді

$$y = P_1(x) = a_0 + a_1 x$$

(у формулі (5) $m = 1$), нормальна система перетвориться на таку:

$$\begin{cases} na_0 + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i, \\ a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \end{cases} \tag{7}$$

а у випадку наближення експериментальної залежності квадратичною функцією $(m = 2)$

$$y = P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

нормальною системою є система

$$\begin{cases} na_0 + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i, \\ a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^3 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \\ a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^3 + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^4 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i. \end{cases} \tag{8}$$

Середньоквадратичну похибку апроксимації функції поліномом можна обчислити за формулою:

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n} \left(P_m(x_i) - y_i\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n} \left[\sum_{k=0}^{m} a_k x_i^k - y_i \right]^2} .$$

Апроксимація функцій однієї змінної елементарними функціями, відмінними від поліному

Якщо емпірична формула нелінійна щодо параметрів, то її намагаються привести до лінійної введенням функцій від параметрів.

Нехай, наприклад, апроксимуюча функція має вигляд

$$y = ax^b . \tag{9}$$

Припускаючи, що у вихідній таблиці даних значення аргументу та значення функції додатні, застосуємо попереднє логарифмування (за умови $a > 0$):

$$\ln y = \ln a + b \ln x . \tag{10}$$

Позначимо

$$u = \ln y; \;\; z = \ln x; \; a_0 = \ln a; \; a_1 = b , \tag{11}$$

тоді рівність (10) набуває вигляду

$$u = a_0 + a_1 z , \tag{12}$$

тобто у системі координат Ozu отримали лінійну залежність.

На практиці, для знаходження апроксимуючої функції у вигляді (9) (в умовах зроблених припущень) необхідно:

1) по заданій таблиці скласти нову таблицю, прологарифмувавши значення x і y у вихідній таблиці;

2) за даними нової таблиці методом найменших квадратів знайти параметри a_0 і a_1 апроксимуючої функції (12);

3) використовуючи формули (11), знайти значення параметрів $a = e^{a_0}$, $b = a_1$ та підставити їх у вираз (9).

Це і буде шукана емпірична формула.

Наведений алгоритм можна застосувати також і в деяких інших випадках, коли емпірична формула не є поліномом, але шляхом відповідної заміни змінних зводиться до нього. Заміни змінних, які зводять степеневу, показникову, гіперболічну, логарифмічну залежності до лінійної, наведені в таблиці 1.

Таблиця 1.

k	Згладжуюча функція	Приведена функція	Заміна змінних
1	$y = ax^b$	$u = a_0 + a_1 z$	$u = \ln y;\ z = \ln x;\ a_0 = \ln a;\ a_1 = b$
2	$y = ab^x$	$u = a_0 + a_1 z$	$u = \ln y;\ z = x;\ a_0 = \ln a;\ a_1 = \ln b$
3	$y = a + \frac{b}{x}$	$u = a_0 + a_1 z$	$u = y;\ z = \frac{1}{x};\ a_0 = a;\ a_1 = b$
4	$y = \frac{1}{ax + b}$	$u = a_0 + a_1 z$	$u = \frac{1}{y};\ z = x;\ a_0 = b;\ a_1 = a$
5	$y = \frac{x}{ax + b}$	$u = a_0 + a_1 z$	$u = \frac{1}{y};\ z = \frac{1}{x};\ a_0 = a;\ a_1 = b$
6	$y = a \ln x + b$	$u = a_0 + a_1 z$	$u = y;\ z = \ln x;\ a_0 = b;\ a_1 = a$
7	$y = ae^{mx}$	$u = a_0 + a_1 z$	$u = \ln y;\ z = x;\ a_0 = \ln a;\ a_1 = m$

Питання для самоперевірки

1. Що називається емпіричною функцією або емпіричною формулою?
2. Назвіть етапи побудови емпіричної формули.
3. Спираючись на що вибирають вид емпіричної формули?
4. Відповідно до якої умови вибираються значення параметрів емпіричної формули методом найменших квадратів?
5. В якому вигляді найчастіше вибирається апроксимуюча функція?
6. В який спосіб перевіряється відповідність побудованої емпіричної формули експериментальним даним?
7. Наведіть формулу, за якою обчислюється середньоквадратична похибка.

ЗАВДАННЯ ДО ЛАБОРАТОРНОЇ РОБОТИ

Розрахунково-практична частина

1. Побудувати апроксимуючу функцію $F(x)$ (табл.2) методом найменших квадратів у вигляді $y = P_1(x) = a_0 + a_1 x$. Знайти середньоквадратичну похибку наближення.

2. Побудувати точковий графік за табличними даними та графік побудованої функції і оцінити якість наближення.

Обчислювальна частина за допомогою ПЕОМ

4. Використовуючи програму в системі Mathcad, побудувати апроксимуючу функцію (табл. 2) методом найменших квадратів у вигляді $y = P_1(x) = a_0 + a_1 x$ та у вигляді $y = P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$. Побудувати в одній системі координат точковий графік за експериментальними даними (табл. 2), графіки функцій $y = P_1(x)$, $y = P_2(x)$, знайти похибку наближення та зробити висновок, яка функція більш точно наближує початкові дані.

5. Написати звіт по виконаній роботі.

Таблиця 2

№ варіанту	Змінні	Експериментальні дані						
1.	x	1,1	2,0	3,2	4,3	5,2	6,5	7,6
	y	3,2	4,1	5,3	6,0	6,3	6,7	7,0
2.	x	0,5	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5
	y	1,6	3,8	4,7	5,6	6,0	6,4	6,8
3.	x	2,3	3,3	4,5	5,7	6,8	7,9	9,0
	y	-1,5	-0,5	0,5	1,2	1,8	2,2	2,7
4.	x	1,2	2,3	3,4	4,5	5,7	6,8	8,0
	y	-0,6	0,7	1,4	2,0	2,5	2,8	3,1
5.	x	0,2	0,9	2,1	3,4	4,7	5,0	6,2
	y	6,9	2,3	-0,2	-1,7	-2,7	-2,8	-3,5
6.	x	1,1	2,0	3,2	4,3	5,2	6,5	7,6
	y	2,1	2,9	3,6	4,0	4,6	5,0	5,5
7.	x	0,5	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5
	y	0,7	3,8	7,9	13,1	19,1	25,8	33,1
8.	x	2,3	3,3	4,5	5,7	6,8	7,9	9,0
	y	-3,0	-3,5	-4,2	-4,8	-5,2	-5,6	-5,9
9.	x	1,2	2,3	3,4	4,5	5,7	6,8	8,0
	y	3,9	1,0	1,9	2,9	4,0	5,3	6,8
10.	x	0,2	0,9	2,1	3,4	4,7	5,0	6,2
	y	2,8	5,1	11,6	21,3	33,1	36,0	48,8

11.	x	-5,1	-4,1	-3,1	-2,1	0	1,2	2,5
	y	18,9	10,7	4,5	0,3	-2,0	0,64	6,8
12.	x	0,0	1,3	2,5	3,7	5,0	6,4	7,8
	y	-2,0	-4,1	-5,1	-5,3	-4,5	-2,5	0,7
13.	x	-0,5	-0,1	0,0	0,7	1,2	1,8	2,4
	y	3,7	3,2	3,0	1,1	-0,8	-3,8	-7,6
14.	x	4,2	5,5	6,7	7,9	9,0	10,1	11,3
	y	7,1	5,9	3,9	10,8	-2,3	-6,4	-11,7
15.	x	0,3	0,7	1,2	1,7	2,3	3,0	3,7
	y	1,6	2,6	3,9	5,5	7,7	10,6	13,9
16.	x	-5,1	-4,1	-3,1	-2,1	0	1,2	2,5
	y	-18,8	-11,6	-6,4	-3,2	-3,0	-6,9	-14,2
17.	x	0,0	1,3	2,5	3,7	5,0	6,4	7,8
	y	-1,0	-0,2	-0,38	-1,4	-3,5	-6,9	-11,4
18.	x	-0,5	-0,1	0,0	0,7	1,2	1,8	2,4
	y	-3,7	-1,4	-1,0	0,3	-0,5	-3,5	-8,7
19.	x	4,2	5,5	6,7	7,9	9,0	10,1	11,3
	y	-15,1	-21,6	-28,1	-35,2	-42,2	-49,7	-58,4
20.	x	0,3	0,7	1,2	1,7	2,3	3,0	3,7
	y	-3,3	-3,9	-4,8	-5,9	-7,4	-9,6	-12,2
21.	x	-5,1	-4,1	-3,1	-2,1	0	1,2	2,5
	y	76,9	50,3	29,7	15,2	4,0	9,5	25,2
22.	x	0	1,3	2,5	3,7	5,0	6,4	7,8
	y	4,0	4,5	3,4	0,8	-3,5	-10,0	-18,6
23.	x	-0,5	-0,1	0	0,7	1,2	1,8	2,4
	y	-1,6	-0,7	-2,0	-4,4	-6,3	-9,0	-12,1
24.	x	4,2	5,5	6,7	7,9	9,0	10,1	11,3
	y	15,3	21,6	28,7	36,8	45,4	54,9	66,4
25.	x	0,3	0,7	1,2	1,7	2,3	3,0	3,7
	y	4,4	3,9	3,5	3,3	3,6	4,4	5,8
26.	x	1,7	2,3	3,0	3,7	4,2	5,0	5,5
	y	-5,9	-7,4	-9,6	-12,2	-14,3	-18,0	-20,6
27.	x	-2,1	0	1,2	2,5	3,6	4,8	6,0
	y	15,2	4,0	9,5	25,2	46,5	77,9	118,0
28.	x	-2,1	0	1,2	2,5	3,6	4,8	6,0
	y	-23,5	5,0	-2,4	-30,0	-69,2	-128,4	-205,0
29.	x	3,7	5,0	6,4	7,8	9,2	10,0	11,1
	y	9,3	18,0	31,2	48,2	69,2	83,0	104,0
30.	x	0,7	1,2	1,8	2,4	3,0	3,7	4,3
	y	3,5	6,0	9,5	13,5	17,8	23,4	28,7
31.	x	0,7	1,2	1,8	2,4	3,0	3,7	4,3
	y	1,1	-0,8	-3,8	-7,6	-12,0	-18,1	-24,1

ЗРАЗОК ОФОРМЛЕННЯ ЗВІТУ З ЛАБОРАТОРНОЇ РОБОТИ

Розрахунково-практична частина

Завдання 1. Побудувати апроксимуючу функцію за даними

x_i	1,0	1,7	2,5	3,4	4,1	5,0	6,0
y_i	3,0	3,6	4,0	4,5	4,8	5,1	5,5

методом найменших квадратів у вигляді $y = P_1(x) = a_0 + a_1 x$. Знайти середньоквадратичну похибку наближення.

Розв'язування. Побудувавши точковий графік даної залежності, бачимо, що він близький до прямої. Тобто, апроксимуючу функцію можна знайти у вигляді $y = a_0 + a_1 x$. Параметри a_0, a_1 знаходяться як розв'язок системи

$$\begin{cases} na_0 + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i, \\ a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i. \end{cases}$$

Для складання цієї системи проведемо деякі розрахунки, які подамо у вигляді таблиці (два останні стовпчики поки не заповнюємо)

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$	$P_{1(x_i)}$	$\left(P_1(x_i) - y_i\right)^2$
1.	1,0	3,0	1,0	3,0	3,2012	0,0405
2.	1,7	3,6	2,89	6,12	3,54035	0,0036
3.	2,5	4,0	6,25	10,0	3,92795	0,0052
4.	3,4	4,5	11,56	15,3	4,3640	0,0185
5.	4,1	4,8	16,81	19,68	4,70315	0,0094
6.	5,0	5,1	25,0	25,5	5,1392	0,0015
7.	6,0	5,5	36,0	33,0	5,6237	0,0153
$\sum$	23,7	30,5	99,51	112,6		0,094

Таким чином, нормальна система для знаходження невідомих $a_0,\ a_1$ має вигляд:

$$\begin{cases} 7a_0 + 23.7a_1 = 30.5, \\ 23.7a_0 + 99.51a_1 = 112.6. \end{cases}$$

Її розв'язком є $a_0 = 2.716748 \approx 2.7167$, $a_1 = 0.4845047 \approx 0.4845$.

Тобто апроксимуюча функція

$$y = P_1(x) = 2.7167 + 0.4845x.$$

Обчислимо середньоквадратичну похибку апроксимації за формулою:

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n} \left(P_1(x_i) - y_i\right)^2}.$$

Для цього заповнимо два останні стовпчики таблиці й одержимо

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{1}{7} \cdot 0.094} \approx 0.1158 \approx 0.1 .$$

За даними другої і шостої колонок таблиці побудуємо графік функції $y = P_1(x)$ в тій же системі координат, що й перший графік, який побудований за експериментальними даними.

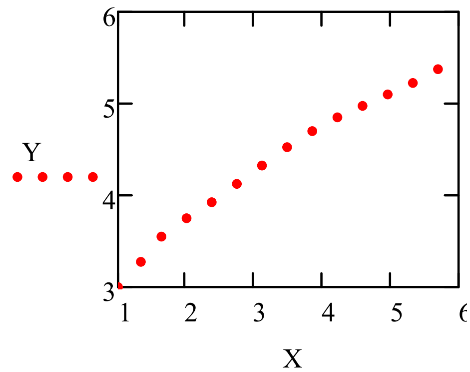
Таким чином, знайдено емпіричну формулу у вигляді поліному першого степеня $y = P_1(x) = 2.7167 + 0.4845x$, середньоквадратична похибка якої $\sigma_1 \approx 0.1$.

Розрахункова частина за допомогою ПЕОМ

Наведемо експериментальні дані у вигляді матриць-стовпців і запишемо матрицю E, усі елементи якої дорівнюють одиниці.

$$X := \begin{pmatrix} 1.0 \\ 1.7 \\ 2.5 \\ 3.4 \\ 4.1 \\ 5.0 \\ 6.0 \end{pmatrix}, \quad Y := \begin{pmatrix} 3.0 \\ 3.6 \\ 4.0 \\ 4.5 \\ 4.8 \\ 5.1 \\ 5.5 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{E} := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Зобразимо ці експериментальні дані на графіку.



Враховуючи розміщення точок на цьому графіку, робимо висновок, що ці експериментальні дані можна апроксимувати прямою (лінійною функцією), або параболою (поліномом другого степеня).

Будемо шукати апроксимуючу функцію у вигляді поліному першого степеня $(m = 1)$ $y = P_1(x) = a_0 + a_1 x$; його коефіцієнти a_0 та a_1 знайдемо, розв'язуючи нормальну систему рівнянь. Для побудови матриці цієї системи складемо спочатку допоміжну матрицю C, перший стовпець якої складається з одиниць, а елементи другого дорівнюють відповідним елементам матриці X.

$$C^{\langle 0\rangle} := \mathrm{E} \qquad C^{\langle 1\rangle} := X .$$

Тоді матрицю нормальної системи рівнянь можна записати як добуток матриці, транспонованої до матриці C, на матрицю C.

$$A := C^T \cdot C \qquad A = \begin{pmatrix} 7 & 23.7 \\ 23.7 & 99.51 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0.738 & -0.176 \\ -0.176 & 0.052 \end{pmatrix}.$$

Праві частини нормальної системи подамо у вигляді добутку матриці, транспонованої до матриці C, на матрицю Y.

$$B := C^T \cdot Y \qquad B = \begin{pmatrix} 30.5 \\ 112.6 \end{pmatrix}.$$

Тоді нормальну систему рівнянь можна записати у вигляді $Aa = B$, де a матриця-стовпець, елементами якої є шукані коефіцієнти a_0 та a_1. Розв'язок такої системи знаходиться за формулою

$$a := A^{-1} \cdot B \qquad a = \begin{pmatrix} 2.7167 \\ 0.4845 \end{pmatrix}.$$

Апроксимуючу функцію знайдено: $P_1(x) = 2.7167 + 0.4845x$.

$$P1(x) := a_0 + a_1 x .$$

Це дозволяє знайти теоретичні (або розрахункові) значення змінної y і обчислити середньоквадратичну похибку наближення даної експериментальної залежності функцією $P_1(x)$:

$$\sigma_1 := \sqrt{\frac{1}{7} \cdot \sum_{i=0}^{6} \left(P1(X_i) - Y_i \right)^2} \quad \sigma_1 = 0.1158 .$$

Перевіримо результати розрахунків, проведених без допомоги ПЕОМ. Для цього складемо наступну матрицю R: елементи першого та другого стовпців - експериментальні значення змінних x і y, елементи третього стовпця - квадрати експериментальних значень x, елементи четвертого - добутки відповідних значень змінних x і y. У п'ятому стовпці розмістимо розрахункові значення змінної y, обчислені за формулою $y = P_1(x)$, а в останньому - квадрати відхилень розрахункових значень змінної y від експериментальних.

$$R^{\langle 0\rangle} := X \;\; R^{\langle 1\rangle} := Y \;\; R^{\langle 2\rangle} := X^2 \;\; R^{\langle 3\rangle} := \overrightarrow{(X \cdot Y)} \;\; R^{\langle 4\rangle} := P1(x)$$

$$R^{\langle 5\rangle} := \left(P1(X) - Y \right)^2$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 & 3.2013 & 0.0405 \\ 1.7 & 3.6 & 2.89 & 6.12 & 3.5404 & 0.0036 \\ 2.5 & 4 & 6.25 & 10 & 3.928 & 0.0052 \\ 3.4 & 4.5 & 11.56 & 15.3 & 4.3641 & 0.0185 \\ 4.1 & 4.8 & 16.81 & 19.68 & 4.7032 & 0.0094 \\ 5 & 5.1 & 25 & 25.5 & 5.1393 & 0.0015 \\ 6 & 5.5 & 36 & 33 & 5.6238 & 0.0153 \end{pmatrix}.$$

Будемо шукати тепер апроксимуючу функцію у вигляді поліному другого степеня $P2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x \bullet x$. Його коефіцієнти є також розв'язком нормальної системи рівнянь, яка в цьому випадку містить три рівняння із трьома невідомими. Розрахунки проводяться за викладеною методикою, тільки в матрицю C потрібно додати третій стовпець, елементи якого дорівнюють квадратам відповідних елементів матриці - стовпця X.

$$C^{\langle 2\rangle} := X^2.$$

Тоді матриця нормальної системи $A := C^T \cdot C$, а матриця вільних членів $B := C^T \cdot Y$.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 23.7 & 99.51 \\ 23.7 & 99.51 & 470.763 \\ 99.51 & 470.763 & 2.386\times 10^3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 30.5 \\ 112.6 \\ 496.612 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок знову знаходиться за формулою $a := A^{-1} \cdot B$

$$a = \begin{pmatrix} 2.3063 \\ 0.791 \\ -0.0441 \end{pmatrix}.$$

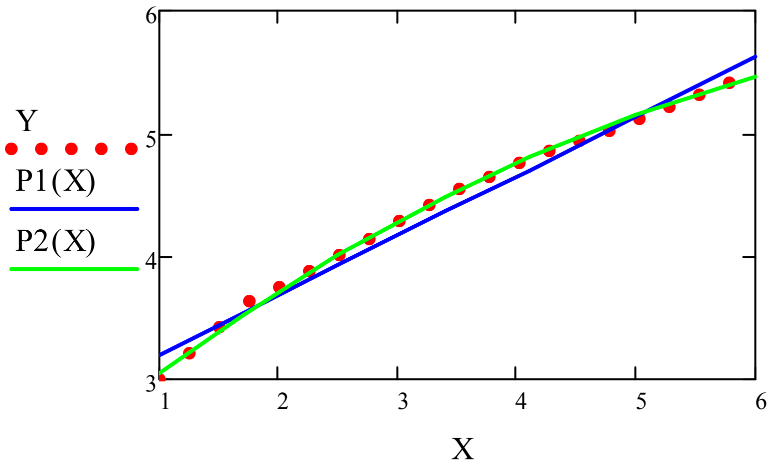
У такий спосіб знайдено: $P2(x) := 2.3063 + 0.7910x - 0.0441x \cdot x$.

$$P2(x) =: a_0 + a_1 x + a_2 x^2.$$

Для порівняння якості наближення знаходимо розрахункові значення змінної Y й обчислюємо середньоквадратичну похибку наближення поліномом другого степеня.

$$\sigma 2 := \sqrt{\frac{1}{7}\sum_{i=0}^{6}\left(P2(X_i) - Y_i\right)^2} \quad \sigma 2 = 0.0443.$$

Зобразимо на рисунку точковий графік і графіки побудованих апроксимуючих функцій.



Порівнюючи якість наближення, бачимо, що дану експериментальну залежність краще апроксимує поліном другого ступеня. Про це свідчить як побудований графік, так і порівняння середньоквадратичних похибок $\sigma 1$ і $\sigma 2$.

СПИСОК
РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Бахвалов Н. С. Численные методы : учебное пособие / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков ; МГУ им. М. В. Ломоносова. – 3-е изд., доп. и перераб. – М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2004. – 636 с. – М. : Наука, 1986. – 744 с.

1. Гаврилюк І. П. Методи обчислень : підруч. у 2-х ч. Ч. І / І. П. Гаврилюк, В. Л. Макаров. – К. : Вища шк., 1995. – 367 с.

2. Гаврилюк І. П. Методи обчислень / . підруч. у 2-х ч. Ч. 2 / І. П. Гаврилюк, В. Л. Макаров. – К. : Вища шк., 1995. – 431 с.

3. Дульнев Г. Н. Применение ЭВМ для решения задач теплообмена / Г. Н. Дульнев, В. Г. Парфенов, А. В. Сигалов. – М. : Высш. шк., 1990. – 208с.

4. Завьялов Ю. С. Методы сплайн-функций / Ю. С. Завьялов, Б. И. Квасов, В. Л. Мирошниченко. – М. : Наука, 1980. – 352 с.

5. Калиткин Н. Н. Численные методы / Н. Н. Калиткин. – М. : Наука, 1978. – 512 с.

6. Корнишин М. С. Вычислительная геометрия в задачах механики оболочек / М. С. Корнишин, В. Н. Наймушин, В. Ф. Снигирев. – М. : Наука, 1989. – 207 с.

7. Литвин О. М. Інтерлінація функцій та деякі її застосування : моногр. / О. М. Литвин. – Харків : Основа, 2002. – 544 с.

8. Литвин О. М. Інтерлінація функцій : моногр. / О. М. Литвин. – Харків : Основа, 1992. – 236 с.

9. Математичні методи та моделі в розрахунках на ПЕОМ : метод. розробки, вказ. та завдання до практичних та лабораторних робіт : в 4-х ч. / Є. І. Дробот, І. В. Крикова, О. М. Литвин, Л. С. Лобанова, Л. М. Ушаковська. – Х., УІПА, 1999. – Ч. 1. – 108 с., Ч. 2. – 81 с., Ч. 3. – 64 с., Ч. 4. – 47 с.

11. Методичні вказівки для роботи з системою Mathcad / упоряд.: О. М. Литвин, Л. С. Лобанова, О. П. Нечуйвітер. – Харків : УІПА, 2002. – 21с.

12. Методичні вказівки до курсової роботи з курсу "Математичні методи та моделі в розрахунках на ПЕОМ" / Є. І. Дробот, І. В. Крикова, О. М. Литвин, Л. С. Лобанова, Л. М. Ушаковська. – Х. : УІПА, 1999. – 26 с.

13. Самарский А. А. Введение в численные методы / А. А. Самарский. – М. : – Наука, 1982. – 272 с.

14. Стародетко Е. А. Элементы вычислительной геометрии / Е. А. Стародетко. – Минск : Наука и техника, 1986. – 210 с.

15. Стечкин С. Б. Сплайны в вычислительной математике / С. Б. Стечкин, Ю. Н. Субботин. – М. : Наука, 1976. – 248 с.

16. Тепловые и атомные электростанции и установки. (Математические модели для проектирования и эксплуатации) / И. Г. Шелепов, С. Ф. Артюх, М. А. Дуэль, В. К. Заруба. – К. : УМК ВО, 1992. – 304 с.
17. Фокс А. Вычислительная геометрия / А. Фокс, М. Пратт ; пер. с англ. – М. : Мир, 1982. – 212 с.
18. Цой П. В. Методы расчета отдельных задач тепломассопереноса / П. В. Цой. – М. : Энергия, 1971. – 383 с.
19. Литвин О. М. Математичне моделювання та обчислювальні методи на ПЕОМ : навч.-метод. посіб. для аспірантів, магістрів, студ. інж., інж.-пед. та мат. спец./ О. М. Литвин, Л. С. Лобанова ; Укр. інж.-пед. акад. – Х. : [б. в.], 2012. – 154 с.

Навчальне видання

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ОПИСУ ПРОЦЕСІВ

Методичні вказівки
до лабораторних робіт

Упорядники:

НЕЧУЙВІТЕР Олеся Петрівна
ПЕРШИНА Юлія Ігорівна

Формат 60х84/16. Гарнітура Times New Romen
Папір для цифрового друку. Друк ризографічний.
Ум. друк. арк. ____.
Тираж 100 пр.
Українська інженерно-педагогічна академія
61003, м. Харків, вул. Університетська, 16.