**УДК 519.832.3/833**

***И.В. КОЗИН,*** канд. физ.-мат. наук., ЗНУ (г. Запорожье),
***С.А. ОСИПОВ,*** ЗНУ (г. Запорожье)

# О МЕРЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ВЫБОРА В МОДЕЛЯХ МАТРИЧНЫХ ИГР

Розроблена методика визначення кількісної оцінки ступеню нестійкості вибору в матричній грі двох осіб з нулевою сумою. Запропоновано метод знаходження міри нестійкості на основі відомих методів умовної оптимізації. Запропонована комп'ютерна система, що дозволяє знайти оцінку нестійкості вибору на основі даних про виграші гравців на множені стратегій.

A new method of finding of quantitative estimation of choice instability in two agents matrix game with zero sum is introduced. A method of measure of instability defining on the basics of known conditional optimization methods is suggested. Also a computer system that allows estimating choice instability on basics of data of agents' benefits on the set of strategies.

**Постановка проблемы**. Классические игровые модели, построенные на основе теории матричных игр [1, 2], начиная с простейшей модели матричной игры двух лиц с нулевой суммой, а также бескоалиционные матричные игры, игры с бесконечным числом стратегий и т.д. обладают рядом особенностей, которые можно определить как детерминированную неустойчивость оптимальных решений игроков. Другими словами, в этих моделях поведение игроков в общем случае достаточно трудно прогнозировать однозначно. Как правило, удается определить лишь вероятностное распределение для выбора стратегий игроков. Типичным примером такой неустойчивости является матричная игра двух лиц с нулевой суммой. При отсутствии седловой точки нет детерминированных стратегий игроков, которые являлись бы оптимальными для каждого из них. Оптимальное решение такой игры существует и может быть найдено лишь в смешанных стратегиях [3, 4]. В игровых моделях каждый игрок может выбирать свою стратегию автономно или обладая информацией о выборе стратегии другими игроками. Если выбор игрока не зависит от его знания выбора стратегий другими игроками, то выбор стратегии в игре будем называть устойчивым. Задача: для произвольной матричной игры определить меру устойчивости выбора, то есть насколько эта игра отличается от игры с устойчивым выбором.

В современных исследованиях проблематика в таком свете практически не освещена. Как правило, речь идет лишь о наличии либо отсутствии устойчивости [5, 6]. Рассматриваются некоторые виды устойчивости такие как $\mu$- и $\psi$-устойчивости [2]. Мы же в случае отсутствия устойчивости предпринимаем попытку найти игру, в которой исследуемое решение было бы устойчиво, а также определить в определенном смысле расстояние до нее. Сходная идея [7] предложена для некоторых игр в развернутой форме, где внимание уделяется порядку ходов и той информации, которая при этом открывается игроку. Также рассматривается, так называемая, локальная устойчивость для равновесных по Нэшу решений [8].

**Цель статьи** – во-первых, для игровых моделей на основе матричной игры двух лиц с нулевой суммой получить количественную оценку устойчивости выбора игроков, во-вторых, показать, что задача такого рода сводится к решению задачи оптимизации, в-третьих, предложить алгоритм отыскания числовых оценок степени устойчивости выбора игроков в рассматриваемой игровой модели.

**Неустойчивость выбора в матричной игре двух лиц.** Исследование начнем с классической постановки для матричной игры двух игроков с нулевой суммой [1]. Стратегия игры описывается парой $(i, j)$, где $i$ – номер стратеги первого игрока, $j$ – номер стратеги второго игрока. Выигрыш первого игрока при условии выбора совместной стратегии $(i, j)$ равен числу $a_{ij}$. Соответственно, выигрыш второго игрока на той же паре стратегий равен $-a_{ij}$. Матрица выигрышей $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{i=n,j=m}$ для первого игрока называется матрицей игры и полностью описывает условие игры. Матрицы выигрышей второго игрока отличается от матрицы $A$ знаком. Выбор стратегии первого игрока осуществляется по правилу $\min\limits_{j} a_{ij} \to \max$.

Для второго игрока правило выбора имеет вид: $\max\limits_{j} a_{ij} \to \min$.

Если стратегия $j = j_0$ известна первому игроку, то он будет действовать по правилу $\min\limits_{j=j_0} a_{ij} \to \max$. Аналогично определяется и поведение второго игрока. Таким образом, выбор игроков не будет зависеть от предварительного знания о выборе другого игрока (будет устойчивым) лишь в случае, когда игра имеет седловую точку, то есть $\max\limits_{j} \min\limits_{j} a_{ij} = \min\limits_{j} \max\limits_{j} a_{ij}$.

Произвольная матричная игра может не иметь седловой точки. В этом случае естественным является вопрос, насколько эта игра далека от игры с устойчивым выбором. Будем рассматривать произвольную игру с матрицей $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{i=n,j=m}$ как точку в линейном пространстве размерности *nm*. Для двух матричных игр с одинаковым набором стратегий игроков и с матрицами $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{i=n,j=m}$ и $B = (b_{ij})_{i,j=1}^{i=n,j=m}$ введем расстояние $\rho(A, B)$ как обычное эвклидово расстояние в линейном пространстве. То есть

$$\rho(A, B) = \left( \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \left(a_{ij} - b_{ij}\right)^2 \right)^{1/2}.$$

Мерой неустойчивости выбора в игре с матрицей $A$ будем считать расстояние от этой игры до ближайшей к ней игре с седловой точкой. Таким образом, мера неустойчивости выбора определяется формулой $\mu(A)=\rho(A,X^0)$, где $X^0=(x_{ij}^0)_{i,j=1}^{i=n,j=m}$ – оптимальное решение следующей задачи:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(a_{ij}-x_{ij})^2 \to \min \tag{1}$$

при ограничениях

$$\max_i \min_j x_{ij} = \min_j \max_i x_{ij} . \tag{2}$$

Учитывая строгую выпуклость целевой функции (1) и замкнутость множества, на котором ищется решение задачи оптимизации, приходим к выводу, что задача (1) – (2) имеет решение для любой матрицы $A$. Следовательно, определение меры неустойчивости выбора корректно для любой матричной игры с нулевой суммой. Следует обратить внимание, что для устойчивых ситуаций, то есть для игр с седловой точкой, мера неустойчивости обращается ноль.

Введем два понятия для произвольной матрицы игры $A=(a_{ij})_{i,j=1}^{i=n,j=m}$. Средним выигрышем будем называть величину $\overline{A}=\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}$, дисперсией игры – величину $D(A)=\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(a_{ij}-\overline{A})^2$.

*Теорема 1.* Для любой матричной игры с матрицей выигрыша $A$ справедлива оценка меры неустойчивости:

$$\mu(A) \le \sqrt{nmD(A)} . \tag{3}$$

*Доказательство.* Выберем произвольные величины $M$ и $\varepsilon>0$ и рассмотрим матричную игру $B=(b_{ij})_{i,j=1}^{i=n,j=m}$, где $b_{11}=M$, $b_{1j}=M+\varepsilon$, $j=2,3,...,m$, $b_{i1}=M-\varepsilon,\ i=2,3,...,n$. В этой игре имеется седловая точка, которая определяется парой (1, 1). Пусть $X^0$ – оптимальное решение задачи (1) – (2). Тогда $\mu(A)=\rho(A,X^0)\le\rho(A,B)$ для любой матрицы $B$ заданного типа. Расстояние между матрицами $A$ и $B$ определяется формулой

$$\rho^2(A,B)=(a_{11}-M)^2+\sum_{j=2}^{m}(a_{1j}-M-\varepsilon)^2+\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{m}(a_{ij}-M+\varepsilon)^2 . \tag{4}$$

Минимум этого расстояния достигается при значении

$$M = \frac{1}{nm}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} + \varepsilon\left(1 - \frac{2m-1}{nm}\right) = \overline{A} + \varepsilon\left(1 - \frac{2m-1}{nm}\right).$$

Подставляя это значение в формулу (4) и переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем неравенство (3). Конечно, оценка (3) для меры неустойчивости является достаточно грубой. Точное значение может быть получено путем решения оптимизационной задачи (1) – (2). Для отыскания приближенной оценки предложен алгоритм решения задачи условной оптимизации, основанный на методе Лагранжа и поиске по образцу [4].

Рассмотрим теперь ситуацию произвольной матричной игры двух игроков с матрицами выигрышей $A_1$ и $A_2$ для этих игроков соответственно. Устойчивыми в этой игре являются равновесия по Нэшу. Каждую такую матричную игру можно описать точкой в пространстве размерности $2nm$, координатами точки служат элементы матриц выигрышей. Мерой неустойчивости игры будем считать расстояние до ближайшей игры, в которой имеет место равновесие по Нэшу. Рассуждения, аналогичные предыдущим, приводят к следующему утверждению.

*Теорема 2*. Для любой биматричной игры с матрицами выигрышей $A_1$ и $A_2$ справедлива оценка меры неустойчивости $\mu(A_1, A_2) \le \sqrt{nmD(A_1) + nmD(A_2)}$.

**Выводы.** В результате проделанной работы была разработана методика определения количественной оценки степени неустойчивости выбора в матричной игре двух лиц с нулевой суммой. Предложен метод отыскания степени неустойчивости на основе известных методов условной оптимизации. Предложена компьютерная система, позволяющая найти оценку неустойчивости выбора на основе данных о выигрышах игроков на множестве стратегий. Дальнейшее развитие работы направлено на исследование устойчивости в играх с непрерывным множеством стратегий, а также в кооперативных играх и играх с числом игроков более чем 2.

**Список литературы:** **1.** *Данилов В.И.* Лекции по теории игр. – М.: Российская экономическая школа, 2002. – 140 с. **2.** *Оуэн Г.* Теория игр, 2004. – 216 с. **3.** *Таха Х.* Введение в исследование операций. – Т. 2. – М.: Мир, 1985. – 496 с. **4.** *Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г.* Численные методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1990. – 232 с. **5.** *Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Семлина Е.А.* Теория игр. – М.: Книжный дом "Университет – Высшая школа", 1998. – 301 с. **6.** *Харшаньи Д, Зельтен Р.* Общая теория выбора равновесия в играх // Под ред. Зенкевича Н.А. – СПб.: Эконом. шк., 2001. – 406 с. **7.** *Петросян Л.А., Кузютин Д.В.* Игры в развёрнутой форме: оптимальность и устойчивость. – СПб: Изд-во СПбГУ, 2001. – 292 с. **8.** *Мулен Э.* Кооперативное принятие решений: Аксиомы и модели. – М.: Мир, 1991. – 464 с.

*Поступила в редакцию 20.04.2007*