Львов Геннадий Иванович

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК

Учебник

ВВЕДЕНИЕ

Основные уравнения теории упругости

В теории упругости существуют три группы формул, которые образуют основные уравнения теории упругости.

1. Группа статических уравнений.

В эту группу входят дифференциальные уравнения равновесия:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}+X=0,\\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x}+Y=0,\\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}+Z=0 \end{aligned}\right\} \qquad (0.1.)$$

и условия на поверхности (граничные условия):

$$\left.\begin{aligned} X_\nu=\sigma_x l+\tau_{xy} m+\tau_{xz} n,\\ Y_\nu=\tau_{yx} l+\sigma_y m+\tau_{yz} n,\\ Z_\nu=\tau_{zx} l+\tau_{zy} m+\sigma_z n. \end{aligned}\right\} \qquad (0.1.)$$

2. Группа геометрических уравнений.

В эту группу входят формулы Коши:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \gamma_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x},\\ \varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{yz}=\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y},\\ \varepsilon_z=\frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{zx}=\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned}\right\} \qquad (0.3.)$$

и уравнения сплошности:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y},$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z},$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y}+\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}\right)=2\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}, \qquad (0.4.)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}+\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}-\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y}\right)=2\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x},$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y}-\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)=2\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}.$$

3. Группа физических уравнений.

В эту группу входят формулы закона Гука:

$$\varepsilon_x=\frac{1}{E}\left[\sigma_x-\nu\left(\sigma_y+\sigma_z\right)\right], \quad \gamma_{xy}=\frac{\tau_{xy}}{G},$$

$$\varepsilon_y=\frac{1}{E}\left[\sigma_y-\nu\left(\sigma_z+\sigma_x\right)\right], \quad \gamma_{yz}=\frac{\tau_{yz}}{G}, \qquad (0.5.)$$

$$\varepsilon_z=\frac{1}{E}\left[\sigma_z-\nu\left(\sigma_x+\sigma_y\right)\right], \quad \gamma_{zx}=\frac{\tau_{zx}}{G}.$$

Имея эти зависимости, можно приступить непосредственно к решению задачи теории упругости о напряжениях и деформациях, возникающих в упругом изотропном теле под действием внешних сил.

Перечисленные основные уравнения содержат 15 неизвестных функций:

- шесть составляющих напряжений:
  - $\sigma_x(x,y,z), \quad \sigma_y(x,y,z), \quad \sigma_z(x,y,z),$
  - $\tau_{xy}(x,y,z), \quad \tau_{yz}(x,y,z), \quad \tau_{zx}(x,y,z);$
- шесть составляющих деформаций:
  - $\varepsilon_x(x,y,z), \quad \varepsilon_y(x,y,z), \quad \varepsilon_z(x,y,z),$
  - $\gamma_{xy}(x,y,z), \quad \gamma_{yz}(x,y,z), \quad \gamma_{zx}(x,y,z);$
- и три составляющие перемещения:
  - $u(x,y,z), \quad v(x,y,z), \quad w(x,y,z).$

Для отыскания этих неизвестных функций мы располагаем 15-ю

уравнениями: тремя дифференциальными уравнениями равновесия (0.1), шестью формулами Коши (0.3) и шестью формулами закона Гука (0.5). Таким образом, с математической точки зрения задача может быть решена и сводится к интегрированию этих пятнадцати уравнений при удовлетворении условий на поверхности (0.2).

Решение указанных уравнений можно вести различными способами в зависимости от того, какие величины приняты за основные неизвестные:

1. Решение в п е р е м е щ е н и я х , когда за основные неизвестные приняты три составляющие перемещения:

$$u(x,y,z), \quad v(x,y,z), \quad w(x,y,z).$$

2. Решение в н а п р я ж е н и я х , когда за основные неизвестные приняты шесть составляющих напряжений:

$$\sigma_x(x,y,z), \quad \sigma_y(x,y,z), \quad \sigma_z(x,y,z),$$

$$\tau_{xy}(x,y,z), \quad \tau_{yz}(x,y,z), \quad \tau_{zx}(x,y,z).$$

3. Решение в с м е ш а н н о й ф о р м е , когда за основные неизвестные приняты некоторые из перемещений и некоторые из напряжений.

ГЛАВА I

ИЗГИБ ТОНКИХ ПЛАСТИНОК

§ 1. Основные понятия и гипотезы

П л а с т и н к о й называется призматическое или цилиндрическое тело, высота которого мала по сравнению с размерами в плане. Высота такого тела называется толщиной пластинки и обозначается h.

Плоскость, делящая пластинку пополам по толщине, называется с р е д и н н о й п л о с к о с т ь ю . При изгибе пластинки срединная плоскость превращается в изогнутую срединную поверхность пластинки.

Линия пересечения боковой поверхности пластинки со срединной плоскостью называется к о н т у р о м пластинки.

Для исследования деформаций пластинки прямоугольную систему координат будем располагать так, чтобы координатная плоскость *xOy* совпала со срединной плоскостью пластинки. Ось z будем направлять вниз. При таком выборе системы координат составляющая перемещения *w* в направлении оси z будет представлять собой прогиб пластинки. Положение начала координат в срединной плоскости будем выбирать в каждом рассматриваемом случае в зависимости от очертания контура пластинки и характера закрепления ее краев.

Пластинки находят широкое применение в машиностроении и других отраслях современной техники.

Т о н к и м и называются пластинки, имеющие отношение толщины к наименьшему характерному размеру в плане примерно в следующих пределах:

$$\frac{1}{5} \geq \frac{h}{b} \geq \frac{1}{80}$$

и величину ожидаемых прогибов не более 1/4 h.

Пластинки, у которых $\frac{h}{b} \succ \frac{1}{3}$, рассчитываются по теории толстых плит, а пластинки, имеющие прогибы более $\frac{1}{4}h$ рассчитываются по геометрически нелинейной теории гибких пластинок или мембран.

Теория тонких пластинок основана на следующих гипотезах, предложенных Кирхгофом:

1. Гипотеза прямых нормалей: любой линейный элемент, нормальный к срединной плоскости пластинки, остается прямолинейным и нормальным к срединной поверхности после деформации и длина его не изменяется.

Любой линейный элемент, нормальный к срединной плоскости, направлен вдоль оси z, и, следовательно, первая часть гипотезы предполагает, что прямые

углы между этим элементом и осями *x* и *y* остаются прямыми, т. е. сдвиги в указанных плоскостях отсутствуют:

$$\gamma_{yz} = 0, \quad \gamma_{zx} = 0 \tag{7.1}$$

Допущение о сохранении длины прямолинейного элемента предполагает, что линейная деформация в направлении оси z отсутствует:

$$\varepsilon_z = 0 \tag{1.2}$$

2. Гипотеза о нерастяжимости срединной плоскости: в срединной плоскости отсутствуют линейные относительные деформации и деформации сдвига, т.е. срединная плоскость является нейтральной. Следовательно, в срединной плоскости перемещения отсутствуют

$$u_0 = 0, \quad v_0 = 0 \tag{1.3}$$

3. Гипотеза об отсутствии давления между слоями пластинки. Ввиду малости давления между слоями пластинки, параллельными срединной плоскости, напряжением σ_z по сравнению с напряжениями σ_x и σ_y можно пренебрегать.

§ 2. Перемещения и деформации в пластинке

Изучение изгиба пластинки начнем с определения перемещений и деформаций. Будем исследовать пластинку, несущую поперечную нагрузку, т.е. нагрузку, нормальную к срединной плоскости пластинки. Под действием этой нагрузки пластинка получит перемещения. Для их определения обратимся к принятым гипотезам.

Согласно первой гипотезе линейная деформация в направлении оси z равна нулю (1.2). Подставляя это условие в третью формулу Коши (0.3), получаем:

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

откуда следует, что прогибы пластинки *w* не зависят от координаты z, т. е.

$$w = w(x, y).$$

Это означает, что все точки пластинки, лежащие на одной вертикали, получают одинаковые прогибы. Следовательно, достаточно определить прогибы срединной плоскости пластинки, чтобы знать прогибы всех ее точек.

Рассматривая условия для сдвигов (1.1), из формул Коши (0.3) получаем:

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0,$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

откуда находим производные от составляющих перемещения *u* и *v* по координате z:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial x},$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial y},$$

Интегрируя эти уравнения по z, получаем:

$$\left.\begin{aligned} u &= -z\frac{\partial w}{\partial x} + f_1(x, y), \\ v &= -z\frac{\partial w}{\partial y} + f_2(x, y), \end{aligned}\right\} \qquad \text{(а)}$$

Для вычисления функций $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$, появившихся при интегрировании уравнений в частных производных, воспользуемся гипотезой о нерастяжимости срединной плоскости. Согласно этой гипотезе составляющие перемещения u_0 и v_0 на срединной плоскости при z=0 равны нулю. Подставляя эти условия в формулы (а), получаем:

$$u_0 = f_1(x, y) = 0,$$

$$v_0 = f_2(x, y) = 0$$

Тогда формулы (а) примут следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} u &= -z\frac{\partial w}{\partial x}, \\ v &= -z\frac{\partial w}{\partial y}, \end{aligned}\right\} \qquad (1.4)$$

Таким образом, составляющие перемещения точек пластинки в направлениях осей *x* и *y* выражены через функцию прогибов срединной плоскости пластинки.

Составляющие деформации в пластинке, отличные от нуля, найдем с помощью формул Коши (0.3), подставляя в них значения составляющих перемещения (1.4):

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2},\\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = -2z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\end{aligned}\right\} \qquad (1.5)$$

Здесь составляющие деформации так же, как и составляющие перемещения в соотношениях (1.4), выражены через одну функцию прогибов срединной плоскости пластинки.

§ 3. Напряжения в пластинке

Теперь перейдем к исследованию напряжений в пластинке. Для вычисления нормальных напряжений σ_x и σ_y возьмем две первые формулы закона Гука (0.5) и на основании третьей гипотезы отбросим напряжение σ_z по сравнению с напряжениями σ_x и σ_y. Тогда получим:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu\sigma_y\right),$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \nu\sigma_x\right)$$

откуда с учетом формул (1.5) находим:

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x &= -\frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right),\\ \sigma_y &= -\frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\end{aligned}\right\} \qquad (а)$$

Четвертая формула закона Гука (0.5) после подстановки угловой деформации γ_{xy} из формул (1.5) примет такой вид:

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy} = -\frac{Ez}{(1+\nu)}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \qquad (б)$$

А касательные напряжения в двух других плоскостях после подстановки составляющих деформации из формул (1.1) в формулы закона Гука (0.5) обратятся в нуль:

$$\tau_{yz} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{yz} = 0$$

$$\tau_{zx} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{zz} = 0$$

Однако в действительности эти касательные напряжения не равны нулю, такой результат получен только вследствие принятых ранее гипотез и противоречит условиям равновесия. Для отыскания этих напряжений рассмотрим дифференциальные уравнения равновесия (0.1). Пренебрегая объемными силами, из первого уравнения находим:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = -\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = -\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}$$

Подставим сюда напряжения из формул (а) и (б):

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \frac{Ez}{(1-\nu^2)}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right) + \frac{Ez}{1+\nu}\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2},$$

После упрощения получаем:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \frac{Ez}{(1-\nu^2)}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$

или

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \frac{Ez}{(1-\nu^2)}\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w$$

Интегрируя по z, находим:

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = \frac{Ez^2}{2(1-\nu^2)}\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w + f_1(x,y) \qquad \text{(в)}$$

Для определения произвольной функции $f_1(x, y)$ имеем следующие граничные условия: на верхней и нижней поверхностях пластинки нет касательных нагрузок, т.е при $z = \pm\frac{h}{2}$ должно быть $\tau_{zx} = 0$. Подставляя эти условия в формулу (в), получаем:

$$0 = \frac{Eh^2}{8(1-\nu^2)}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w + f_1(x,y),$$

откуда находим искомую функцию:

$$f_1(x,y) = \frac{Eh^2}{8(1-\nu^2)}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w,$$

и, вводя ее в формулу (в), получаем:

$$\tau_{zx} = -\frac{Eh^2}{2\left(1-\nu^2\right)} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - z^2\right) \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w. \qquad \text{(г)}$$

Решая таким же путем второе уравнение равновесия (0.1) относительно напряжения τ_{yz}, находим:

$$\tau_{yz} = -\frac{Eh^2}{2\left(1-\nu^2\right)} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - z^2\right) \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w. \qquad \text{(д)}$$

Итак, в сечениях пластинки, перпендикулярных к ее срединной плоскости, возникают, согласно формулам (а), (б), (г) и (д), следующие напряжения:

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= -\frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \\
\sigma_y &= -\frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right), \\
\tau_{xy} &= -\frac{Ez}{1+\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \\
\tau_{yz} &= -\frac{E}{2\left(1-\nu^2\right)}\left(\frac{h^2}{4} - z^2\right) \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w, \\
\tau_{zz} &= -\frac{E}{2\left(1-\nu^2\right)}\left(\frac{h^2}{4} - z^2\right) \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w
\end{aligned}\right\} \qquad (1.6)$$

На рис. 1.1 показано распределение этих напряжений по толщине пластинки. Напряжения σ_x, σ_y и $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ распределяются по линейному закону, обращаясь в нуль в точках срединной плоскости, а напряжения τ_{zy} и τ_{zx}

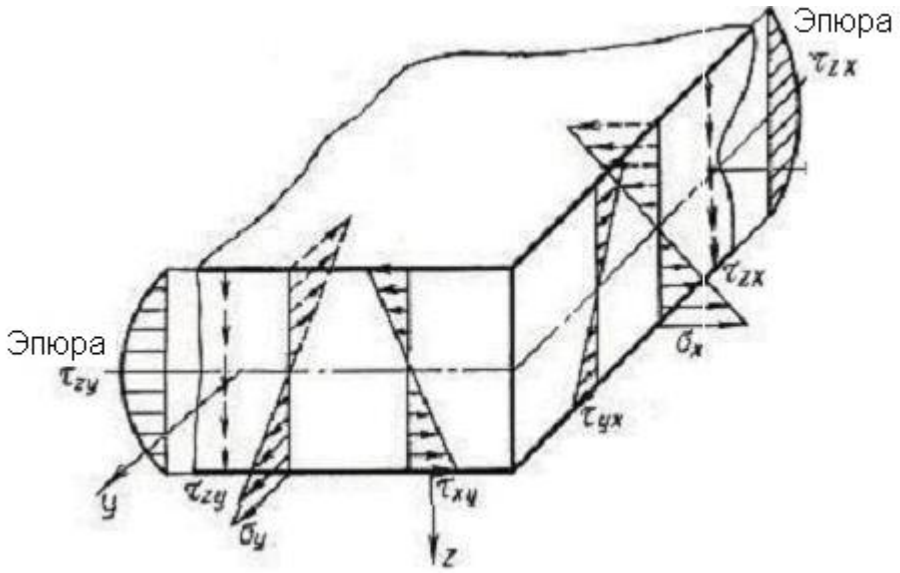


Рис.1.1.

распределяются по параболе, достигая в точках срединной плоскости максимального значения. Так же распределяются касательные напряжения и при поперечном изгибе балок прямоугольного сечения.

Остается исследовать нормальные напряжения σ_z, которыми мы пренебрегли по сравнению с напряжениями σ_x и σ_y. Для их определения возьмем третье уравнение равновесия (0.1) и, считая объемные силы равными нулю, найдем:

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = -\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} = -\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x}.$$

Подставим сюда касательные напряжения τ_{zy} и τ_{zx}, из формул (1.6). После упрощения получаем:

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = -\frac{E}{2\left(1-\nu^2\right)}\left(\frac{h^2}{4} - z^2\right)\nabla^2 w$$

Интегрируя по z, находим:

$$\sigma_x = \frac{E}{2\left(1-\nu^2\right)}\left(\frac{h^2 z}{4} - \frac{z^3}{3}\right)\nabla^4 w + f_2(x,y). \qquad \text{(e)}$$

Для определения произвольной функции $f_2(x, y)$ рассмотрим случай загружения пластинки поперечной нагрузкой на верхней грани интенсивностью $q_1\ (x, y)$, а на нижней—интенсивностью $q_2\ (x, y)$, направленными в сторону положительной оси z. (рис. 41). В этом случае имеем следующие граничные условия:

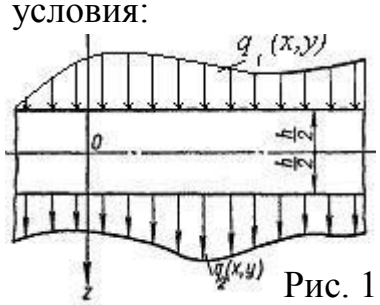


Рис. 1.2.

при $z = -\frac{h}{2}$ - должно быть $\sigma_z = -q_1$,

а при $z = +\frac{h}{2}$ - должно быть $\sigma_z = -q_2$

Подставляя эти условия в формулу (е), получаем:

$$-q_1 = -\frac{Eh^3}{24\left(1-\nu^2\right)}\nabla^4 w + f_2(x,y),$$

$$q_2 = -\frac{Eh^3}{24\left(1-\nu^2\right)}\nabla^4 w + f_2(x,y)$$

Складывая почленно эти соотношения, находим:

$$q_2 - q_1 = 2 f_2(x,y),$$

откуда произвольная функция

$$\mathrm{f}_2(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \frac{q_2 - q_1}{2}.$$

Следовательно, формула (е) примет такой вид:

$$\sigma_z = \frac{q_2 - q_1}{2} + \frac{E}{2\left(1-\nu^2\right)}\left(\frac{h^2 z}{4} - \frac{z^3}{3}\right)\nabla^4 w. \qquad (1.7)$$

Напряжения, подсчитанные по этой формуле, имеют тот же порядок, что и интенсивность поперечной нагрузки *q,* и составляют незначительную часть от напряжений σ_x и σ_y.

В формулах (1.6) и (1.7) все напряжения выражены через одну функцию двух переменных *w(x, y),* следовательно, функция прогибов играет здесь ту же роль, что и функция напряжений в плоской задаче.

§ 4. Усилия в пластинке

Исследуем, какие усилия создаются напряжениями (1.6) в сечениях пластинки, нормальных к ее срединной плоскости. На рис. 1.3 изображен элемент пластинки, вырезанный такими сечениями. Рассмотрим вначале площадку этого элемента с нормалью *x.* На этой площадке действуют составляющие напряжений σ_x, τ_{yx} и τ_{zx}. На рис. 1.3 показаны положительные величины этих напряжений, т. е. нормальное напряжение σ_x направлено по внешней нормали к сечению, а касательные—в направлении соответствующих положительных координатных осей, так как внешняя нормаль к сечению совпадает с положительным направлением оси *x.*

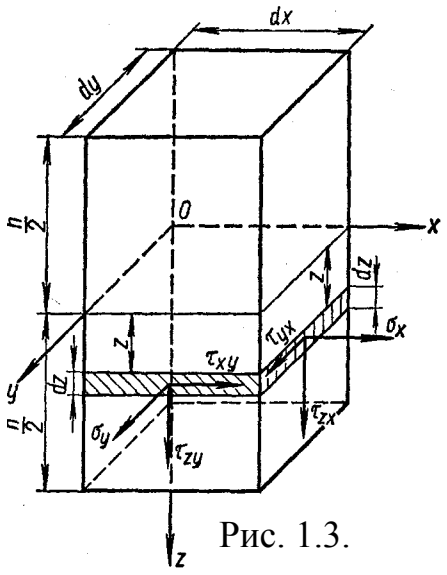


Рис. 1.3.

Обозначаем через N_x погонную, т. е. приходящуюся на единицу ширины

сечения, нормальную силу в сечении с нормалью *x*. Она равна сумме проекций на ось *x* равнодействующих напряжений в сечении с нормалью *x*. На ось *x* проектируется только нормальное напряжение σ_x. Его равнодействующая на бесконечно малой площадке *dydz* равна $\sigma_x \cdot dy \cdot dz$, *a* на единицу ширины сечения приходится сила, равная $\sigma_x \cdot dz$. Суммируя эти бесконечно малые проекции по толщине пластинки, получаем выражение для погонной нормальной силы:

$$N_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_x dz .$$

Подставим сюда нормальное напряжение σ_x из формул (1.6) и вынесем за знак интеграла величины, не зависящие от координаты z:

$$N_x = -\frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z dz .$$

Под знаком входящего сюда интеграла стоит нечетная функция, а пределы интегрирования отличаются только знаком. Следовательно, этот интеграл равен нулю, а значит и усилие

$$N_x = 0,$$

т. е. нормальной силы в этом сечении не возникает.

Далее подсчитаем изгибающий момент. Обозначим, через M_x погонный изгибающий момент в сечении с нормалью *x*. Изгибающий момент в рассматриваемом сечении создается нормальными напряжениями σ_x. Равнодействующая этих напряжений на площадке толщиной *dz* и шириной, равной единице, равна $\sigma_x dz$, *a* изгибающий момент $\sigma_x dz \cdot z$. Суммируя моменты от напряжения σ_x на всех таких площадках по толщине пластинки, получаем выражение для погонного изгибающего момента в сечении с нормалью *x:*

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_x z dz .$$

Подставляя сюда значение нормального напряжения σ_x из формул (1.6) и вынося за знак интеграла величины, не зависящие от координаты z, находим:

$$M_x = -\frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z^2 dz .$$

После интегрирования получаем:

$$M_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right).$$

Входящая сюда величина

$$D = \frac{Eh^3}{12\left(1-\nu^2\right)} \qquad (1.8)$$

называется цилиндрической жесткостью пластинки и является физической и геометрической характеристикой пластинки при ее изгибе.

Погонная поперечная сила в сечении с нормалью *x* равна:

$$Q_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{zx} dz .$$

Подставим в этот интеграл значение касательного напряжения τ_{zx} из формул (1.6):

$$Q_x = -\frac{E}{2\left(1-\nu^2\right)} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \left(\frac{h^2}{4} - z^2\right) dz .$$

После интегрирования находим:

$$Q_x = -D\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w .$$

Погонную сдвигающую силу S_x получаем, проектируя напряжения в этом сечении на ось *y:*

$$S_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{yx} dz$$

Подставляя касательное напряжение τ_{yx} из формул (1.6), находим:

$$S_x=0,$$

т. е. сдвигающая сила в этом сечении равна нулю.

Погонный крутящий момент в сечении с нормалью *x* равен:

$$M_{yx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{yx} z dz .$$

После подстановки касательного напряжения τ_{yx} из формул (1.6) и интегрирования находим:

$$M_{yx} = -D(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \qquad \text{(а)}$$

Аналогично найдем усилия, действующие в сечении с нормалью y (см. рис.1.3):
погонный изгибающий момент

$$M_y = -D(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right),$$

погонная поперечная сила

$$Q_y = -D\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2 w$$

и погонный крутящий момент

$$M_{xy} = -D(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \qquad \text{(б)}$$

Сравнивая формулы (а) и (б), получаем, что

$$M_{yx} = M_{xy} = H.$$

Таким образом, в сечениях пластинки, перпендикулярных к ее срединной плоскости, под действием поперечной нагрузки возникают следующие погонные усилия:
изгибающие моменты:

$$M_x = -D(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$
$$M_y = -D(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \qquad (1.9)$$

поперечные силы:

$$Q_x = -D\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w$$
$$Q_y = -D\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2 w \qquad (1.10)$$

и крутящий момент

$$H = -D(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \qquad (1.11)$$

Все эти усилия выражены через прогибы срединной плоскости пластинки.

На рис. 43 показаны положительные значения найденных усилий, причем положительные направления усилий совпадают с направлением действия соответствующих положительных составляющих напряжений.

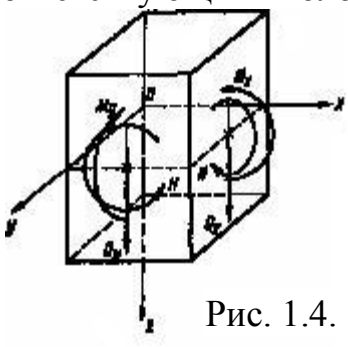


Рис. 1.4.

§ 5. Выражения напряжений через усилия

Формулы, полученные в предыдущем параграфе, позволяют определять моменты и поперечные силы в любой точке срединной плоскости пластинки. По их величине можно найти напряжения в любой точке пластинки. Действительно, сравнивая формулы нормальных напряжений σ_x и σ_y (1.6) с формулами изгибающих моментов M_x и M_y (1.9), получаем:

$$\sigma_x = \frac{12M_x z}{h^3}$$
$$\sigma_y = \frac{12M_y z}{h^3} \qquad (a)$$

Полученные формулы соответствуют формулам для определения нормальных напряжений при изгибе балки прямоугольного сечения- В них входит момент инерции прямоугольного сечения при ширине сечения, равной единице, т. е.

$$J = \frac{bh^3}{12} = \frac{h}{12}.$$

И формулы (а) принимают вид, известный из курса сопротивления материалов:

$$\sigma_x = \frac{M_x z}{J}, \quad \sigma_y = \frac{M_y z}{J}.$$

Максимальные нормальные напряжения возникают при $z = \pm\frac{h}{2}$:

$$\max \sigma_x = \frac{M_x}{W},$$
$$\max \sigma_y = \frac{M_y}{W}. \qquad (1.12)$$

Здесь

$$W = \frac{J}{\frac{h}{2}} = \frac{h^2}{6}$$

—момент сопротивления прямоугольного сечения шириной, равной единице.

Из сравнения формул (1.6) и (1.11) следует:

$$\tau_{xy} = \frac{12Hz}{h^3}$$

Максимальные касательные напряжения возникают при $z = \pm\frac{h}{2}$ и равны:

$$\max \tau_{xy} = \frac{6H}{h^2}.$$

Для определения вертикальных касательных напряжений сравниваем формулы (1.6) и (1.10). В результате получаем:

$$\tau_{zx} = \frac{6Q_x}{h^3}\left(\frac{h^2}{4} - z^2\right),$$

$$\tau_{yx} = \frac{6Q_y}{h^3}\left(\frac{h^2}{4} - z^2\right).$$

Аналогичные результаты получены в сопротивлении материалов по формуле Журавского для балки прямоугольного сечения шириной, равной единице. Максимальные напряжения возникают в точках срединной плоскости при z=0, где они равны:

$$\max \tau_{zx} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q_x}{h},$$

$$\max \tau_{yx} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q_y}{h}.$$

§ 6. Дифференциальное уравнение изогнутой срединной поверхности пластинки

В предыдущих параграфах напряжения и усилия в пластинке выражены через прогибы срединной плоскости пластинки *w(x, y)*. Следовательно, для определения напряжений и усилий необходимо знать функцию прогибов срединной плоскости пластинки.

Вырежем из срединной плоскости пластинки бесконечно малый элемент *dxdy* и покажем действующие на него нагрузки (рис. 1.5).

На грани *Oc* элемента срединной плоскости действует погонная поперечная сила Q_x. При проектировании погонную силу следует умножать на длину *dy* грани, на которой она действует.

На грани *ab*, отстоящей от грани *Oc* на бесконечно малом расстоянии *dx*, поперечная сила получает бесконечно малое приращение и равна $Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx$. Аналогично на гранях *Oa* и *bc*

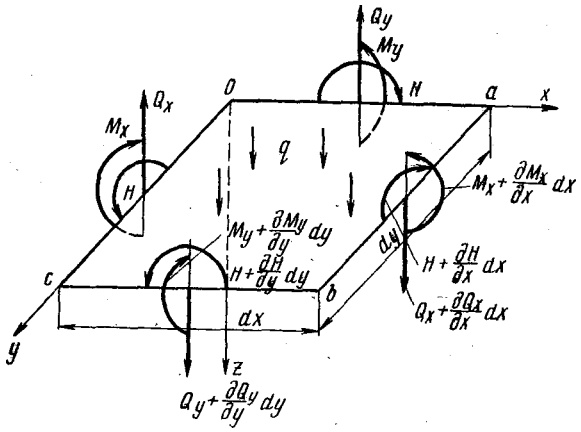


Рис. 1.5.

элемента срединной плоскости действуют соответственно погонные поперечные силы Q_y и $Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy$. Нормально к срединной плоскости пластинки действует поверхностная нагрузка интенсивностью *q*.

Рассматриваемый элемент срединной плоскости находится в равновесии, следовательно, должны выполняться шесть условий равновесия: три уравнения проекций на координатные оси и три уравнения моментов относительно этих осей.

Спроектируем все силы, изображенные на рис. 44, на ось z**:**

$$\left(Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx\right) dy - Q_x dy + \left(Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dx\right) dx - Q_y dx + q dx dy = 0.$$

После упрощения получаем:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = -q. \qquad (1.13)$$

Уравнение моментов всех сил относительно оси *y* дает:

$$\left(M_x + \frac{\partial M_x}{\partial x} dx\right) dy - M_x dy + \left(H + \frac{\partial H}{\partial y} dy\right) dx - H dx -$$

$$- \left(Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx\right) dy \cdot dx + Q_y dx \cdot \frac{dx}{2} -$$

$$- \left(Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy\right) dx \cdot \frac{dx}{2} - q\, dx\, dy \cdot \frac{dx}{2} = 0.$$

После упрощения получаем:

$$\frac{\partial M_x}{\partial x}+\frac{\partial H}{\partial y}=Q_x. \qquad (1.14)$$

Аналогично из уравнения моментов относительно оси *x* получаем:

$$\frac{\partial H}{\partial x}+\frac{\partial M_y}{\partial y}=Q_y. \qquad (1.15)$$

Из уравнений-(1.13) - (1.15) исключим поперечные силы. В результате получим:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 H}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2}=-q.$$

Подставив в полученное уравнение моменты из формул (1.9) и (1.11), найдем:

$$-D\left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\nu\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+2(1-\nu)\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}+\nu\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}\right]=-q,$$

откуда после упрощения получим:

$$D\left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right]=q, \qquad (1.16)$$

или

$$D\nabla^4 w-q=0 \qquad (1.17)$$

Полученное уравнение представляет собой дифференциальное уравнение изогнутой срединной поверхности пластинки, его обычно называют уравнением Софи Жермен.

Уравнение Софи Жермен должно быть дополнено граничными условиями. Условия на контуре пластинки зависят от характера закрепления ее краев.

§ 1. Условия на контуре пластинки

На контуре пластинки в зависимости от характера закрепления краев могут быть заданы прогибы и углы поворота срединной плоскости, изгибающие и крутящие моменты, поперечные силы. Условия, при которых на контуре

задаются прогибы или углы поворота срединной плоскости, называются г е о м е т р и ч е с к и м и . С т а т и ч е с к и м и называются условия, при которых на контуре задаются изгибающие моменты или поперечные силы. Если же на контуре заданы одновременно и перемещения и усилия, условия называются с м е ш а н н ы м и . На каждом крае следует задать два граничных условия.

Сформулируем граничные условия для различных закреплений краев пластинки. Для этого рассмотрим прямоугольную пластинку (рис. 1.6).

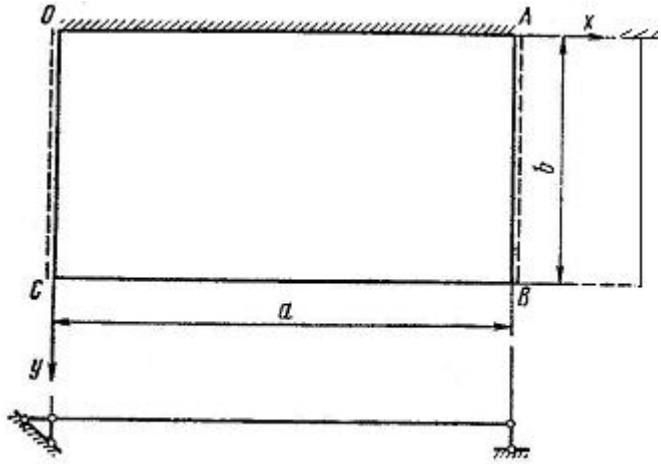


Рис.1.6.

З а щ е м л е н н ы й к р а й *OA*. В защемлении отсутствуют прогибы и невозможен поворот нормального элемента относительно оси *x*. В связи с этим имеем следующие условия:

при *y=0* должно быть $w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Ш а р н и р н о о п е р т ы е к р а я *OC* и *AB*. На шарнирных краях прогибы и изгибающие моменты равны нулю, т. е. $w=0$ и $M_x=0$. Выражая изгибающий момент через прогибы пластинки согласно формулам (1.9), последнее условие можно представить так:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$$

Поэтому граничные условия на шарнирно опертых краях *OC* и *AB* принимают такой вид:

при x=0 и x=a должно $w = 0, \ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$

С в о б о д н ы й к р а й *CB*. На свободном краю должны обращаться в нуль изгибающий момент M_y, поперечная сила Q_y и крутящий момент *H*, т. е.

вместо двух необходимых условий здесь появляются три условия. Такое противоречие связано с тем, что задача решается приближенно и поэтому всем граничным условиям точно удовлетворить нельзя. Однако это противоречие можно устранить, объединив два последних условия.

Покажем, что крутящий момент и поперечную силу на контуре пластинки можно заменить одной силой, статически им эквивалентной. Рассмотрим крутящий момент *H,* распределенный вдоль грани *CB*, параллельной оси x: (рис. 1.7, а). На длине *dx* действует крутящий момент, равный *Hdx.* Этот момент можно представить в виде двух вертикальных противоположно направленных сил *H* с плечом *dx* (рис. 1.7, б). На соседнем элементе *dx* крутящий момент будет больше на бесконечно малую величину и равен $\left(H + \frac{\partial H}{\partial x} dx \right) dx.$

Его также можно представить в виде двух вертикальных противоположно направленных сил $H + \frac{\partial H}{\partial x} dx$ с плечом *dx.* Такую замену крутящих моментов вертикальными силами можно осуществить по всей длине грани *CB.* На границе каждого бесконечно малого участка *dx,* за исключением крайних точек *C* и *B,* будут действовать по две противоположно направленные силы, разность между которыми равна $\frac{\partial H}{\partial x} dx.$

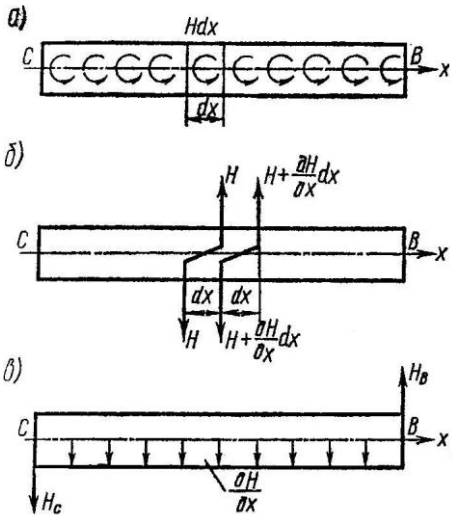


Рис. 1.7.

Следовательно, вдоль грани *CB* будет действовать вертикальная распределенная по длине нагрузка интенсивностью $\frac{\partial H}{\partial x}$ (рис. 1.7, в). В точках же *C* и *B* будут возникать сосредоточенные силы H_c и H_b. Полученную вертикальную нагрузку можно объединить с поперечной силой Q_y и считать, что на грани *CB* действует приведённая поперечная сила интенсивностью

$$Q_y^{прив} = Q_y + \frac{\partial H}{\partial x} \qquad (1.18)$$

Аналогично вдоль граней контура пластинки, параллельных оси *y,* будет действовать приведенная поперечная сила с интенсивностью

$$Q_x^{прив} = Q_x + \frac{\partial H}{\partial y} \qquad (1.19)$$

Производные крутящего момента по *x* и y найдем по формулам (1.11):

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial x} &= -D(1-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y},\\ \frac{\partial H}{\partial y} &= -D(1-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}.\end{aligned}\right\} \qquad \text{(а)}$$

Подставляя в формулы (1.19) и (1.18) значения поперечных сил (1.10) и производных крутящего момента (а), получаем:

$$\left.\begin{aligned}Q_x^{прив} &= -D\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+(2-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y^2}\right],\\ Q_y^{прив} &= -D\left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+(2-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial y}\right].\end{aligned}\right\} \qquad (1.20)$$

Таким образом, на каждой грани пластинки вместо трех усилий: изгибающего момента, крутящего момента и поперечной силы, можно рассматривать только два усилия: изгибающий момент и приведенную поперечную силу. На рис.1.8 показаны положительные направления этих приведенных поперечных сил на всех гранях прямоугольной пластинки, а также сосредоточенных сил, возникающих в углах пластинки.

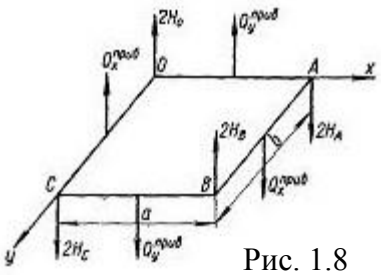


Рис. 1.8

Следовательно, на свободной от закрепления грани вместо трех условий

$$M_y=0,\ Q_y=0,\ H=0$$

можно потребовать удовлетворения лишь двух условий

$$My=0 \text{ и } Q_y^{прив}=0. \qquad \text{(б)}$$

Конечно, при этом граничные условия будут удовлетворяться приближенно. Но на основании принципа Сен-Венана такая замена поперечной силы и крутящего момента статически им эквивалентной приведенной поперечной силой вызовет лишь местные напряжения вблизи рассматриваемого края пластинки.

Внесем в условия (б) выражения изгибающего момента M_y (1.9) и приведенной поперечной силы $Q_y^{прив}$ (1.20). Тогда на свободной грани *CB* при *y=b* должно быть:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0,$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}+(2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}.$$

§ 8. Эллиптическая пластинка

Рассмотрим задачу об изгибе эллиптической в плане пластинки, жестко защемленной по контуру. Пластинка нагружена равномерным давлением q=Const.

Уравнение контура эллиптической пластинки (рис. 48) имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-1=0. \qquad \text{(а)}$$

Зададимся функцией прогибов в форме

$$w=C\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)^2, \qquad \text{(б)}$$

где C—произвольная постоянная.

Решение в виде (б) удовлетворяет граничным условиям защемленного края.

Прогиб на контуре обращается в нуль, так как в скобках стоит выражение, равное нулю для любой точки контура.

Производные функции прогибов равны:

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{4Cx}{a^2}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right),$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{4Cy}{b^2}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right).$$

Эти производные для любой точки контура также обращаются в нуль. Таким образом, и прогибы и углы поворота срединной плоскости на контуре пластинки равны нулю.

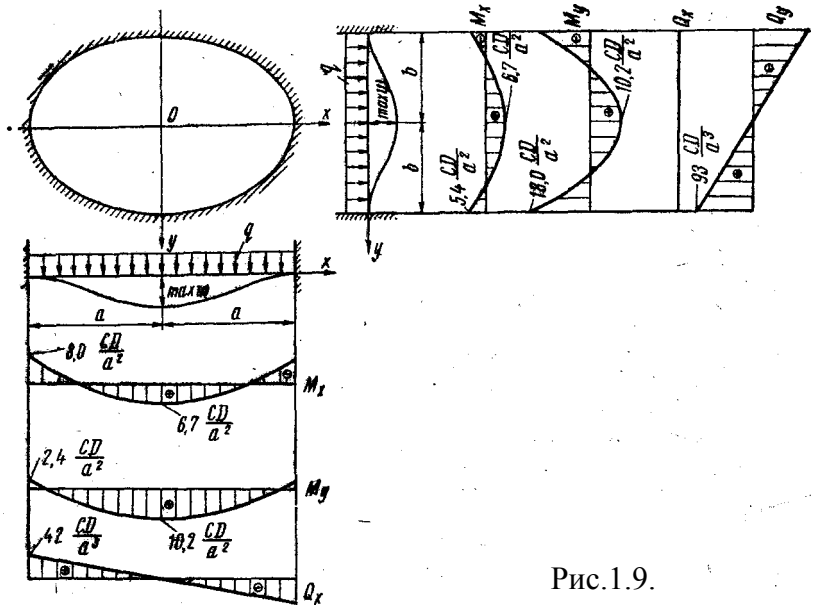


Рис.1.9.

Для определения С подставим функцию *w* в уравнение Софи Жермен (1.16):

$$\frac{24C}{a^4}+2\frac{8C}{a^2b^2}+\frac{24C}{b^4}=\frac{q}{D},$$

откуда

$$C=\frac{q}{D\left(\frac{24}{a^4}+\frac{16}{a^2b^2}+\frac{24}{b^4}\right)}.$$

Так как *C* является постоянной величиной, то и *q* должно быть постоянным. Следовательно, функция (б) является решением дифференциального уравнения (1.16) при поперечной нагрузке *q*, равномерно распределенной по поверхности пластинки.

Подставим постоянную С из формулы (в) в функцию (б):

$$w=\frac{q}{D\left(\frac{24}{a^4}+\frac{16}{a^2b^2}+\frac{24}{b^4}\right)}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)^2. \qquad (1.21)$$

Итак, мы получили функцию прогибов изогнутой срединной поверхности эллиптической в плане пластинки, защемленной по контуру и загруженной сплошной равномерно распределенной поперечной нагрузкой *q*.

Характер изгиба срединной поверхности пластинки показан на рис. 1.9. Максимальный прогиб возникает в центре пластинки при x=y=0:

$$\max w = \frac{q}{D\left(\frac{24}{a^4} + \frac{16}{a^2 b^2} + \frac{24}{b^4}\right)}. \qquad (1.22)$$

Сравнивая формулы (в) и (1.22), заключаем, что постоянная C равна прогибу в центре пластинки.

Подсчитаем усилия, возникающие в пластинке. Подставляя функцию прогибов (б) в формулы (1.9), находим изгибающие моменты в рассматриваемой пластинке:

$$\left.\begin{aligned} M_x &= -4CD\left[\frac{1}{a^2}\left(\frac{3x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) + \frac{\nu}{b^2}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{3y^2}{b^2} - 1\right)\right], \\ M_y &= -4CD\left[\frac{1}{b^2}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{3y^2}{b^2} - 1\right) + \frac{\nu}{b^2}\left(\frac{3x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right)\right] \end{aligned}\right\} \qquad (1.23)$$

Изгибающие моменты в центре пластинки:

$$\left.\begin{aligned} M_x(0,0) &= 4CD\left(\frac{1}{a^2} + \frac{\nu}{b^2}\right), \\ M_y(0,0) &= 4CD\left(\frac{1}{b^2} + \frac{\nu}{a^2}\right) \end{aligned}\right\} \qquad (г)$$

Изгибающие моменты у краев большой полуоси:

$$\left.\begin{aligned} M_x(\pm a,0) &= -\frac{8CD}{a^2}, \\ M_y(\pm a,0) &= -\frac{8\nu CD}{a^2} \end{aligned}\right\} \qquad (д)$$

а у краев малой полуоси:

$$\left.\begin{aligned} M_x(0,\pm b) &= -\frac{8\nu CD}{b^2}, \\ M_y(0,\pm b) &= -\frac{8CD}{b^2} \end{aligned}\right\} \qquad (е)$$

Подставив функцию прогибов (б) в формулу (1.11), получим формулу для

вычисления крутящих моментов в пластинке:

$$H = -\frac{8CD}{a^2 b^2}(1-\nu)xy \tag{1.24}$$

Полагая здесь x=0 или y=0, заключаем, что на осях симметрии рассматриваемой пластинки крутящий момент равен нулю.

Поперечные силы найдем подстановкой в формулы (1.10) функции прогибов (б):

$$\left.\begin{aligned} Q_x &= -\frac{8CD}{a^4 b^2}\left(a^2+3b^2\right)x, \\ Q_y &= -\frac{8CD}{a^4 b^2}\left(3a^2+b^2\right)y \end{aligned}\right\} \tag{1.25}$$

В центре пластинки поперечные силы равны нулю, а по краям полуосей

$$\left.\begin{aligned} Q_x(\pm a,0) &= \mp\frac{8CD}{a^3 b^2}\left(a^2+3b^2\right), \\ Q_y(\pm a,0) &= 0, \\ Q_x(0,\pm b) &= 0, \\ Q_y(0,\pm b) &= -\frac{8CD}{a^2 b^3}\left(3a^2+b^2\right). \end{aligned}\right\}$$

Эпюры изгибающих моментов и поперечных сил для эллиптической пластинки с отношением полуосей $\frac{a}{b}=1{,}5$ и коэффициентом Пуассона v=0,3 показаны на рис. 1.9.

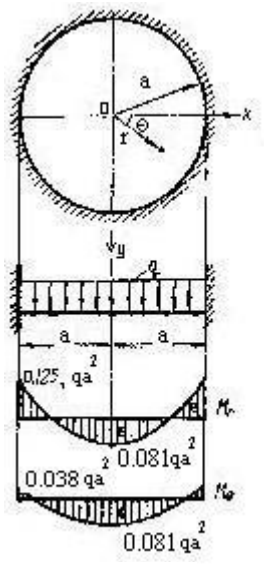


Рис. 1.10.

К р у г л у ю пластинку, защемленную по контуру и загруженную равномерно распределенной нагрузкой q, можно рассматривать как частный случай эллиптической пластинки при $b=a$. Тогда по формуле (1.22) получаем максимальный прогиб в центре круглой пластинки:

$$\max w = \frac{qa^4}{64D} \tag{1.26}$$

По формулам (г) находим изгибающие моменты в центре пластинки:

$$M_x(0,0) = M_y(0,0) = \frac{4CD}{a^2}(1+\nu) = \frac{qa^2}{16}(1+\nu).$$

Здесь подставлено значение постоянной C, которое

согласно формуле (в) для круглой пластинки равно:

$$C = \frac{qa^4}{64D}.$$

По формулам (д) определяем изгибающие моменты в точках контура круглой пластинки в сечении, совпадающем с радиусом:

$$M_\theta = M_y(\pm a, 0) = -\nu \frac{qa^2}{8}.$$

и в сечении, перпендикулярном радиусу:

$$M_r = M_x(\pm a, 0) = -\frac{qa^2}{8}.$$

Эпюры изгибающих моментов для круглой пластинки из материала с коэффициентом Пуассона ν =0,3 изображены на рис. 1.10.

§ 9. Прямоугольная пластинка. Решение Навье

Для прямоугольной пластинки решение уравнения Софи Жермен (1.16) в конечном виде получить не удается, приходится его искать в виде бесконечного ряда.

Рассмотрим прямоугольную пластинку (рис. 1.11), шарнирно опертую по контуру и загруженную поперечной нагрузкой интенсивностью *q (x, y),* изменяющейся по любому закону. Начало координат расположим в углу пластинки. Размер пластинки в направлении оси *x* равен *a*, а в направлении оси y – *b*.

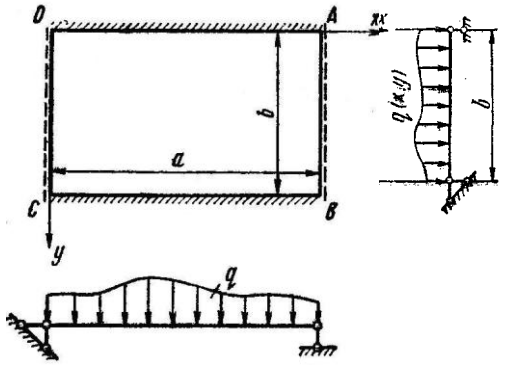


Рис. 1.11.

Решение уравнения Софи Жермен (1.16) будем искать в виде двойного тригонометрического ряда по синусам:

$$w(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \qquad \text{(а)}$$

где A_{mn}—постоянные числа, коэффициенты ряда;

m и *n*—целые положительные числа 1, 2, 3, ...

Ряд (а) можно представить в развернутом виде следующим образом

$$w(x,y) = A_{11}\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b} + A_{12}\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{2\pi y}{b} +$$

$$+ A_{21}\sin\frac{2\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b} + A_{22}\sin\frac{2\pi x}{a}\sin\frac{2\pi y}{b} + \cdots$$

Для шарнирно опертой по контуру пластинки имеем следующие граничные условия:

при *x=0* и *x=a*

должно быть $w = 0 \quad и \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ (б)

при $y=0$ и $y=b$

должно быть $w = 0 \quad и \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ (в)

Убедимся, что ряд (а) удовлетворяет этим условиям. Действительно, на грани пластинки при $x=0$

$$\sin \frac{m\pi x}{a} = \sin 0 = 0$$

и, следовательно, прогиб $w(0, y)=0$. На грани $x=a$

$$\sin \frac{m\pi x}{a} = \sin m\pi x = 0,$$

а значит и прогиб $w(a, y)=0$. Точно так же обращаются в нуль прогибы на гранях $y=0$ и $y=b$. Таким образом, граничные условия (б) и (в) для прогибов выполняются.

Вторые производные функции прогибов

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b},$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}.$$

В эти производные входят синусы тех же аргументов, что и в функцию прогибов (а). Поэтому вторые производные прогибов

$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ обращаются в нуль на всех гранях пластинки при $x = 0$, $x = a$, $y=0$ и $y=b$. Следовательно, граничные условия (б) и (в) для изгибающих моментов также выполняются.

Определим коэффициенты ряда (а). Для этого подставим функцию прогибов (а) в уравнение Софи Жермен (1.16). После упрощения получим:

$$D\pi^4 \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = q(x, y). \qquad (г)$$

Чтобы определить коэффициенты ряда, входящего в левую часть уравнения (г), необходимо и правую часть этого уравнения разложить в тригонометрический ряд. Представляя нагрузку в виде двойного

тригонометрического ряда Фурье по синусам на прямоугольной области $0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b,$ получаем:

$$q(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \qquad (д)$$

Коэффициенты этого ряда определяются по формуле, известной из курса математического анализа:

$$C_{mn} = \frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b q(x,y)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}dxdy \qquad (е)$$

Подставляя ряд (д) в уравнение (г), получаем:

$$D\pi^4 \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2 \sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} C_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$$

Два ряда равны между собой, если равны между собой соответствующие члены обоих рядов. Таким образом,

$$D\pi^4 A_{mn}\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right) = C_{mn}$$

Подставляя сюда C_{mn} из формулы (е), находим коэффициенты ряда (а) в такой форме:

$$A_{mn} = \frac{4}{D\pi^4 ab\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2}\int_0^a\int_0^b q(x,y)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}dxdy \qquad (ж)$$

Итак, функция (а) является решением поставленной задачи, так как она удовлетворяет условиям на контуре пластинки и при выборе коэффициентов ряда в форме (ж) удовлетворяет дифференциальному уравнению изгиба пластинки. Дальнейшая конкретизация задачи зависит от вида функции *q(x, y)*.

Рассмотрим некоторые частные случаи.

1. Нагрузка, равномерно распределенная по всей поверхности пластинки.

В этом случае $q(x, y) = q = \text{const}$. Тогда по формуле (ж) находим:

$$A_{mn} = \frac{4q}{D\pi^4 ab\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2}\int_0^a \sin\frac{m\pi x}{a}dx\int_0^b \sin\frac{n\pi y}{b}dy \qquad (з)$$

После интегрирования получаем следующее значение коэффициентов ряда (а) при загружении пластинки равномерно распределенной нагрузкой:

$$A_{mn} = \frac{16q}{D\pi^6 mn\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2}$$

$$\left(m = 1,3,5,\ldots;\ n = 1,3,5,\ldots\right)$$

После подстановки этих коэффициентов в ряд (а) находим выражение функции прогибов:

$$w(x,y) = \frac{16q}{\pi^6 D}\sum_m\sum_n \frac{\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}}{mn\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2}. \qquad (1.27)$$

(m = 1, 3, 5, ... ; n = 1, 3, 5, ...)

Максимальный прогиб, возникающий в центре пластинки при $x = \frac{a}{2}$ и $y = \frac{b}{2}$, равен:

$$\max w(x,y) = \frac{16q}{\pi^6 D}\left(1-\nu^2\right)\sum_m\sum_n \frac{\sin\frac{m\pi}{2}\sin\frac{n\pi}{2}}{mn\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2}.$$

(m=1, 3, 5, ...; n=1; 3, 5, ...)

Подставляя сюда значение цилиндрической жесткости из формулы (1.8) и вынося за скобку a^4, получаем:

$$\max w(x,y) = \frac{192qa^4}{\pi^6 Eh^3}\left(1-\nu^2\right)\sum_m\sum_n \frac{\sin\frac{m\pi}{2}\sin\frac{n\pi}{2}}{mn\left(m^2 + n^2\frac{a^2}{b^2}\right)^2}.$$

(m=1, 3, 5, ...; n=1; 3, 5, ...)

Для практического использования получаемых результатов составляют таблицы. Большую работу по составлению таблиц для различных случаев загружения и закрепления краев пластинок проделал акад. Б. Г. Галеркин.

Для табулирования последнюю формулу удобно представить в таком виде:

$$\max w = \alpha\frac{qa^4}{Eh^3},$$

где коэффициент

$$\alpha = \frac{192\left(1-\nu^2\right)}{\pi^6}\sum_m\sum_n \frac{\sin\frac{m\pi}{2}\sin\frac{n\pi}{2}}{mn\left(m^2+n^2\frac{a^2}{b^2}\right)^2}.$$

(m=l, 3, 5, ... ; n =1, 3, 5, ...)

зависит только от отношения сторон пластинки $\frac{a}{b}$. Входящий сюда ряд очень быстро сходится. Так, сохраняя четыре члена ряда и принимая v=0,3, находим для квадратной пластинки ($\frac{a}{b}=1$)

$$\alpha(1) = \frac{192\left(1-0{,}3^2\right)}{\pi^6}\left[\frac{1\cdot 1}{1\cdot 1\left(1^2+1^2\right)^2}+\frac{1\cdot(-1)}{1\cdot 3\left(1^2+3^2\right)^2}+\frac{(-1)\cdot 1}{3\cdot 1\left(3^2+1^2\right)^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{(-1)\cdot(-1)}{3\cdot 3\left(3^2+3^2\right)^2}\right]=\frac{192\cdot 0{,}91}{\pi^6}\left(0{,}2500-0{,}0033-0{,}0033+0{,}0003\right)=0{,}0443,$$

что равно точному значению, приводимому в справочной литературе.

Изгибающие моменты получим, подставляя в формулы (1.9) функцию прогибов (1.27):

$$M_x = \frac{16qa^2}{\pi^4}\sum_m\sum_n \frac{m^2+\nu n^2\frac{a^2}{b^2}}{mn\left(m^2+n^2\frac{a^2}{b^2}\right)^2}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b},$$

$$M_y = \frac{16qa^2}{\pi^4}\sum_m\sum_n \frac{n^2\frac{a^2}{b^2}+\nu m^2}{mn\left(m^2+n^2\frac{a^2}{b^2}\right)^2}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}.$$

(m=l, 3, 5, ...; n=l, 3, 5, ...)

Максимальные изгибающие моменты возникают в центре пластинки при $x=\frac{a}{2}$ и $y=\frac{b}{2}$, где они равны:

$$\max M_x = \frac{16qa^2}{\pi^4}\sum_m\sum_n \frac{m^2 + \nu n^2 \frac{a^2}{b^2}}{mn\left(m^2 + n^2\frac{a^2}{b^2}\right)^2}\sin\frac{m\pi}{2}\sin\frac{n\pi}{2},$$

$$\max M_y = \frac{16qa^2}{\pi^4}\sum_m\sum_n \frac{n^2\frac{a^2}{b^2} + \nu m^2}{mn\left(m^2 + n^2\frac{a^2}{b^2}\right)^2}\sin\frac{m\pi}{2}\sin\frac{n\pi}{2}.$$

(m=l, 3, 5, ...; n=l, 3, 5, ...)

Для составления таблиц изгибающие моменты представляют в таком виде:

$$\max M_x = \beta qa^2,$$

$$\max M_y = \beta_1 qa^2$$

где коэффициенты β и β_1 являются функциями отношения сторон пластинки $\frac{a}{b}$.

Ряды в этих функциях сходятся медленнее, чем в функции α. Так, если подсчитать коэффициент β для квадратной пластинки, сохраняя четыре члена ряда, получим:

$$\beta(1) = \frac{16}{\pi^4}\left[\frac{1^2 + 0{,}3\cdot 1^2}{1\cdot 1\left(1^2+1^2\right)^2}\cdot 1\cdot 1 + \frac{1^2 + 0{,}3\cdot 3^2}{1\cdot 3\left(1^2+3^2\right)^2}1\cdot(-1) + \frac{3^2 + 0{,}3\cdot 1^2}{3\cdot 1\left(3^2+1^2\right)^2}(-1)\cdot 1 + \right.$$

$$\left. + \frac{3^2 + 0{,}3\cdot 1^2}{3\cdot 1\left(3^2+1^2\right)^2}(-1)\cdot 1 + \frac{3^2 + 0{,}3\cdot 3^2}{3\cdot 3\left(3^2+3^2\right)^2}(-1)\cdot(-1)\right] = 0{,}0469,$$

в то время как точное значение, приводимое в таблицах,

$$\beta = 0{,}0479.$$

Следовательно, при сохранении четырех членов ряда значение коэффициента β отличается от точного его значения на 2,1%.

Значение поперечных сил найдем, подставив функцию прогибов (1.27) в формулы (1.10):

$$Q_x = \frac{16qa}{\pi^3}\sum_m\sum_n \frac{\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}}{n\left(m^2 + n^2\frac{a^2}{b^2}\right)},$$

$$Q_y = \frac{16qa}{\pi^3}\sum_m\sum_n \frac{\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}}{m\left(m^2 + n^2\frac{a^2}{b^2}\right)}.$$

(m=l, 3, 5, ...; n=l, 3, 5, ...)

Максимальные значения поперечные силы получают посередине сторон контура пластинки. Так, max Q_x возникает в точках с координатами x=0, $y = \frac{b}{2}$, и x=a, $y = \frac{b}{2}$, а max Q_y – в точках с координатами $x = \frac{a}{2}$, y=0 и $x = \frac{a}{2}$, y=b, где имеем:

$$\max Q_x = \frac{16qa}{\pi^3}\sum_m\sum_n \frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n\left(m^2 + n^2\frac{a^2}{b^2}\right)},$$

$$\max Q_y = \frac{16qa}{\pi^3}\sum_m\sum_n \frac{\sin\frac{m\pi}{2}}{m\left(m^2 + n^2\frac{a^2}{b^2}\right)}.$$

(m=1, 3, 5, ...; n=1, 3, 5, ...)

Для табулирования эти функции представляют в таком виде:

$$\max Q_x = \gamma qa,$$
$$\max Q_y = \gamma_1 qa,$$

где коэффициенты γ и γ_1 являются функциями отношения сторон пластинки $\frac{a}{b}$.

Ряды в этих функциях сходятся еще медленнее,

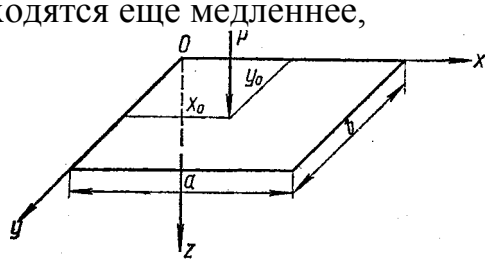


Рис. 1.12.

чем в функциях β и β_1. Так, сохраняя, как и в предыдущих случаях, то же число членов ряда, получаем для квадратной пластинки:

$$\gamma(1)=\frac{16}{\pi^3}\left[\frac{1}{1\left(1^2+1^2\right)}+\frac{-1}{3\left(1^2+3^2\right)}+\frac{1}{1\left(3^2+1^2\right)}+\frac{-1}{3\left(3^2+3^2\right)}\right]=$$

$$=\frac{16}{\pi^3}(0{,}5000-0{,}0333+0{,}1000-0{,}0185)=0{,}283,$$

что отличается от точного значения, равного 0,338, на 16,3%.

2. Сосредоточенная сила в точке с координатами $x = x_0$, и $y=y_0$ (рис.1.12). Представим эту сосредоточенную силу в виде распределенной нагрузки на бесконечно малой площадке $dxdy$ вокруг точки (x_0, y_0):

$$q(x,y)=\frac{P}{dxdy}.$$

При вычислении двойного интеграла в формуле (ж) следует учесть, что он обращается в нуль везде, кроме точки (x_0, y_0), где он равен:

$$\int_0^a\int_0^b q(x,y)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}dxdy=P\sin\frac{m\pi x_0}{a}\sin\frac{n\pi y_0}{b}$$

Подставляя это значение в формулу (ж), получаем следующее выражение для коэффициентов ряда (а):

$$A_{mn}=\frac{4P\sin\dfrac{m\pi x}{a}\sin\dfrac{n\pi y}{b}}{D\pi^4 ab\left(\dfrac{m^2}{a^2}+\dfrac{n^2}{b^2}\right)^2}\int_0^a\int_0^b q(x,y)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}dxdy$$

а подставляя это выражение в ряд (а), находим функцию прогибов пластинки:

$$w(x,y)=\frac{4P}{D\pi^4 ab}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\dfrac{m\pi x_0}{a}\sin\dfrac{n\pi y_0}{b}}{mn\left(\dfrac{m^2}{a^2}+\dfrac{n^2}{b^2}\right)^2}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}. \quad (1.28)$$

Полученный ряд сходится медленнее, чем ряд (1.27).

Зная функцию прогибов, обычным порядком можно найти изгибающие моменты, поперечные силы и крутящие моменты. Ряды, входящие в эти функции, сходятся еще хуже, поэтому полученные результаты могут быть рекомендованы только для нахождения прогибов. Для вычисления же изгибающих моментов, а тем более поперечных сил, применять этот метод не рационально.

§ 10. Прямоугольная пластинка. Решение Леви

Решение Навье, рассмотренное в предыдущем параграфе, пригодно только

для прямоугольных пластинок, шарнирно опертых по контуру. Более общим является решение Мориса Леви. Это решение пригодно для прямоугольной пластинки, два противоположных края которой шарнирно оперты, а два других имеют любое закрепление: защемление, шарнирное опирание, свободный край.

У прямоугольной пластинки, изображенной на рис. 1.13, шарнирно опертыми являются края *OC* и *AB*. Граничные условия на этих краях имеют следующий вид:

при $x=0$ и $x=a$

должно быть w=0 и $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0.$

Чтобы выполнить эти условия, функцию прогибов можно взять в таком виде:

$$w=\sum_{n=1}^{\infty} Y\sin\alpha x \qquad (б)$$

где Y—произвольная функция одного аргумента *y,*

$$\alpha=\frac{n\pi}{a}.$$

Так как при $x=0$ и $x=a$

$$\sin\alpha x=0,$$

то функция (б) удовлетворяет условиям (а) для прогибов.

Чтобы проверить условия (а) для изгибающих моментов, подсчитаем вторые частные производные функции прогибов (б) по *x* и *y:*

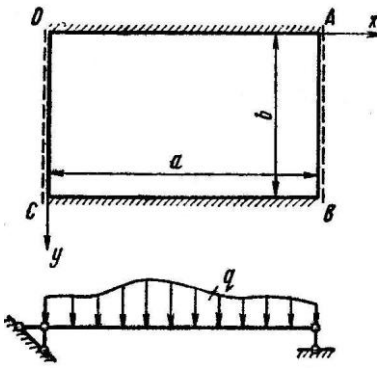


Рис. 1.13.

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}&=-\sum_{n=1}^{\infty} Y\alpha^2\sin\alpha x,\\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}&=-\sum_{n=1}^{\infty} Y''\sin\alpha x\end{aligned}\right\} \qquad (в)$$

Эти производные аналогично функции прогибов (б) при $x = 0$ и $x = a$ обращаются в нуль и, следовательно, условия (а) для изгибающих моментов также выполняются.

Функция (б) должна удовлетворять уравнению Софи Жермен (1.16). Подставляя функцию (б) в уравнение (1.16), получаем:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(Y^{IV}-2\alpha^2 Y''+\alpha^4 Y\right)\sin\alpha x=\frac{q(x,y)}{D}. \qquad (г)$$

Для решения уравнения (г) разложим правую его часть в тригонометрический ряд Фурье по синусам

$$\frac{q(x,y)}{D} = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(y)\sin \alpha x. \qquad (д)$$

Коэффициенты ряда Фурье $F_n(y)$ являются здесь функцией y. Так как разложение производится на отрезке $0 \le x \le a$, то коэффициенты ряда Фурье $F_n(y)$ определяют по известной из курса математического анализа формуле:

$$F_n(y) = \frac{2}{Da}\int_0^a q(x,y)\sin \alpha x dx. \qquad (е)$$

Подставим ряд (д) в уравнение (г):

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(Y^{IV} - 2\alpha^2 Y'' + \alpha^4 Y\right)\sin \alpha x = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(y)\sin \alpha x.$$

Вынося знак суммирования за скобку, получаем:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[Y^{IV} - 2\alpha^2 Y'' + \alpha^4 Y - F_n(y)\right]\sin \alpha x = 0.$$

Это условие выполняется, если каждый член ряда равен нулю:

$$Y^{IV} - 2\alpha^2 Y'' + \alpha^4 Y - F_n(y) = 0,$$

или

$$Y^{IV} - 2\alpha^2 Y'' + \alpha^4 Y = F_n(y). \qquad (ж)$$

Решение неоднородного дифференциального уравнения четвертого порядка (ж) равно сумме общего. решения соответствующего однородного уравнения и какого-нибудь частного решения неоднородного уравнения (ж). Однородное уравнение, соответствующее неоднородному уравнению (ж), имеет такой вид:

$$Y_1^{IV} - 2\alpha^2 Y_1'' + \alpha^4 Y_1 = 0. \qquad (з)$$

Его решение можно представить так:

$$Y_1 = A_n ch\alpha y + B_n y ch\alpha y + C_n sh\alpha y + D_n y sh\alpha y. \qquad (и)$$

Обозначив $\overline{F}_n(y)$ частное решение уравнения (ж), получим его общее решение в таком виде:

$$Y(y) = A_n ch\alpha y + B_n y ch\alpha y + C_n sh\alpha y + D_n y sh\alpha y + \overline{F}_n(y). \qquad (к)$$

Подставляя функцию $Y(y)$ *в* формулу (б), находим:

$$w = \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n ch\alpha y + B_n y ch\alpha y + C_n sh\alpha y + D_n y sh\alpha y + \overline{F}_n(y)\right].\sin \alpha x. \qquad (л)$$

Эта функция является решением уравнения Софи Жермен (1.16) для поперечной нагрузки $q(x, y)$, распределенной по поверхности пластинки по любому закону, и удовлетворяет граничным условиям на шарнирно опертых краях *OC* и *AB*.

Рассмотрим построение частного решения $\overline{F}_n(y)$. Согласно правилу Коши частное решение неоднородного дифференциального уравнения четвертого порядка выражается следующим интегралом:

$$\overline{F}_n(y)=\int_0^y \psi(y-t)F_n(t)dt \qquad (м)$$

где $F_n(y)$—правая часть решаемого уравнения, определяемая соотношением (е), а $\psi(y)$—частное решение соответствующего однородного уравнения, удовлетворяющее условиям

$$\psi(0)=\psi'(0)=\psi''(0)=0,\quad \psi'''(0)=1 \qquad (н)$$

При решении однородного уравнения (з) согласно формуле (и) были получены четыре независимых частных решения:

chay, y chay, shay, y shay.

Из этих решений только следующая комбинация удовлетворяет условиям (н):

$$\psi(y)=\frac{1}{2\alpha^2}\left(y\,ch\alpha y-\frac{1}{\alpha}sh\alpha y\right) \qquad (о)$$

Заменив в функциях (о) и (е) аргументы и подставив эти функции в формулу (м), получим искомое частное решение уравнения (ж):

$$\overline{F}_n(y)=\frac{1}{\alpha^2 Da}\int_0^y\left\{\left[(y-t)ch\alpha(y-t)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{\alpha}sh\alpha(y-t)\right]\int_0^a q(x,t)\sin\alpha x\,dx\right\}dt.$$

Для определения произвольных постоянных A_n, B_n C_n *и* D_n используем граничные условия на краях *OA* и *BC*. Рассмотрим пластинку, у которой края *OA* и *BC* жестко защемлены (см. рис. 1.13). Граничные условия на этих краях при $y=0$ и $y=b$

должно быть: $w=0$ и $\frac{\partial w}{\partial y}=0$.

Подставив в них функцию прогибов (б), получим:

$$\sum_{n=1}^{\infty}Y(0)\sin\alpha x=0,\quad \sum_{n=1}^{\infty}Y'(0)\sin\alpha x=0,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}Y(b)\sin\alpha x=0,\quad \sum_{n=1}^{\infty}Y'(b)\sin\alpha x=0.$$

Так как эти условия должны выполняться при любых значениях аргумента *x,* то должно быть:

$$Y(0)=0,\quad Y'(0)=0,$$
$$Y(b)=0,\quad Y'(b)=0 \qquad (д)$$

Внося в условия (п) функцию (к), получаем систему уравнений для определения постоянных:

$$A_n = 0,$$

$$B_n + C_n\alpha = 0,$$

$$A_n ch\alpha b + B_n bch\alpha y + C_n sh\alpha b + D_n bsh\alpha b + \overline{F}_n(b) = 0,$$

$$A_n\alpha\, sh\alpha b + B_n\left(ch\alpha b + \alpha b\, sh\alpha b\right) + C_n\alpha\, ch\alpha b +$$

$$+ D_n\left(sh\alpha b + \alpha b\, ch\alpha b\right) + \overline{F}_n'(b) = 0,$$

откуда находим следующие значения постоянных:

$$A_n = 0,$$

$$B_n = \frac{\alpha\left(sh\alpha b + \alpha b\, ch\alpha b\right)\overline{F}_n(b) - \alpha b\, sh\alpha b\overline{F}_n'(b)}{sh^2\alpha b - \alpha^2 b^2},$$

$$C_n = \frac{-\left(sh\alpha b + \alpha b\, ch\alpha b\right)\overline{F}_n(b) + b\, sh\alpha b\overline{F}_n'(b)}{sh^2\alpha b - \alpha^2 b^2},$$

$$D_n = \frac{-\alpha^2 b\, sh\alpha b\overline{F}_n(b) - \left(sh\alpha b + \alpha b\, ch\alpha b\right)\overline{F}_n'(b)}{sh^2\alpha b - \alpha^2 b^2},$$

При других закреплениях краев *OA* и *BC* получаются другие значения постоянных.

Ряды в функциях прогибов и в ее производных сходятся значительно быстрее, чем тригонометрические ряды в решении Навье, поэтому решение М. Леви более удобно в практических расчетах даже для прямоугольной пластинки, шарнирно опертой по всему контуру.

§ 11. Понятие о расчете прямоугольной пластинки и бесконечной полосы на упругом основании

Рассмотрим прямоугольную пластинку, лежащую на сплошном упругом основании и нагруженную поперечной нагрузкой интенсивностью *q(x, y)*. Снизу на пластинку будут действовать реактивные давления упругого основания (отпор основания), представляющие собой неизвестную функцию координат *p(x, y)* (рис.1.14).

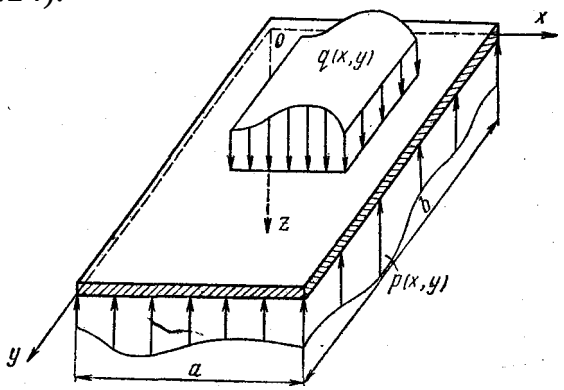


Рис. 1.14.

Для пластинки принимают гипотезы Кирхгофа. Кроме того, предполагают,

что существует непрерывный контакт между пластинкой и основанием, силы трения и сцепления между пластинкой и поверхностью упругого основания отсутствуют.

При этих предположениях уравнение Софи Жермен (1.17) примет следующий вид:

$$D\nabla^4 w = q - p. \tag{1.29}$$

Величина реактивного давления на пластинку зависит от перемещения точек основания. В настоящее время существует целый ряд гипотез о связи между реактивным давлением *p(x,y)* и прогибом пластинки *w(x, y)*. Наиболее простой является гипотеза Винклера о пропорциональности реактивного давления прогибам в соответствующих точках:

$$p(x, y) = k\, w(x, y). \tag{1.30}$$

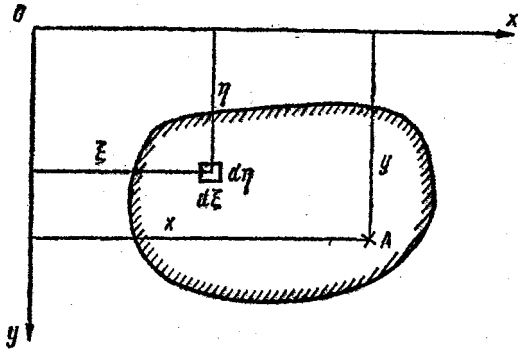


Рис. 1.15.

Эта гипотеза получила большое распространение благодаря своей простоте, но она имеет ряд серьезных недостатков и не всегда приводит к правильным результатам.

Подходя к задаче с позиций теории упругости, можно рассматривать основание как упругое полупространство, а в случае плоской задачи—как упругую полуплоскость.

Для установления зависимости между *p(x, y)* и *w(x, y)* воспользуемся решением задачи о действии давления *p(x, y)* на поверхность упругого полупространства. Давление непрерывно распределено по загруженной площади *F*. В этом случае вертикальные перемещения точек поверхности упругого полупространства определяются следующей зависимостью:

$$w(x, y) = \frac{1 - \nu_0^2}{\pi E_0} \iint_F \frac{p(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}} \tag{1.31}$$

где ξ и η—координаты центра бесконечно малой нагруженной площадки dξ dη (рис.1.15);

x и y—координаты точки *A,* в которой определяется перемещение;

E_0 и ν_0—упругие характеристики основания.

Решение задачи об отыскании функции прогибов пластинки *w(x, y)* сводится к решению системы двух интегро-дифференциальных уравнений (1.29) и (1.31) с удовлетворением условий на контуре пластинки.

Дальнейшие вычисления напряжений и деформаций в пластинке производят по формулам (1.6) и (1.5)., Существенные упрощения могут быть достигнуты, если использовать идеи Б.Н.Жемочкина [1].

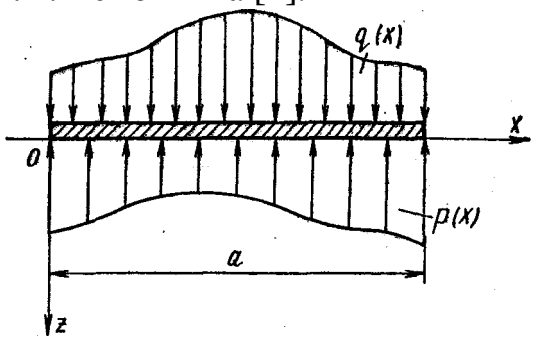


Рис. 1.16.

Ленточный фундамент можно рассматривать как бесконечную полосу на упругом основании. Если нагрузка вдоль полосы постоянна, то полоса находится в условиях плоской деформации. Это означает, что достаточно рассмотреть полоску, выделенную в поперечном направлении длиной a и шириной, равной единице (рис. 1.16).

Для такой полоски дифференциальное уравнение прогибов вместо (1.29) примет такой вид:

$$EI\frac{d^4w}{dx^4}=q(x)-p(x). \tag{1.32}$$

Зависимость между реактивным давлением $p(x)$ и прогибами полоски $w(x)$ из формулы (1.31) преобразуется к следующей:

$$w(x,y)=\frac{1-\nu_0^2}{\pi E_1}\iint_F\frac{p(\varepsilon)d\xi}{x-\xi} \tag{1.33}$$

Здесь упругие постоянные

$$E_1=\frac{E_0}{1-\nu_0^2},\quad \nu_1=\frac{\nu_0}{1-\nu_0},$$

так как рассматривается плоская деформация.

Идея изложенного метода расчета пластинки и бесконечной полосы на упругом полупространстве принадлежит Г. Э. Проктору. Решения систем уравнений (1.29), (1.31) и (1.32), (1.33) получены в трудах ряда советских ученых. На основании этих решений составлены обширные таблицы для расчета пластинок и балок на упругом основании (см., например, [2]).

§ 12. Основные уравнения изгиба круглой пластинки

Для решения задачи об изгибе круглой пластинки все уравнения изгиба пластинки, выведенные в декартовой системе координат, преобразуем к полярной системе координат.

В полярной системе координат прогиб пластинки и нагрузка будут функциями r и θ, т. е. $w(r, \theta)$ и $q(r, \theta)$. Тогда дифференциальное уравнение

изогнутой срединной поверхности пластинки (1.16) получит вид

$$D\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\right)=q. \quad (1.34)$$

Изгибающие моменты в круглой пластинке будем обозначать: M_r— погонный изгибающий момент в сечении, перпендикулярном к радиусу-вектору r в рассматриваемой точке,—радиальный изгибающий момент; M_θ — погонный изгибающий момент в сечении, совпадающем с радиусом-вектором r в рассматриваемой точке,—тангенциальный изгибающий момент.

Заменяя в формулах (1.9) производные функции прогибов по x и y на производные по r и θ, получим формулы для изгибающих моментов в полярной системе координат:

$$\left.\begin{aligned} M_r &= -D\left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\nu\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\right)\right], \\ M_\theta &= -D\left[\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\right] \end{aligned}\right\} \quad (1.35)$$

Таким же образом преобразуем формулу для крутящего момента в декартовой системе координат (1.11) к полярной системе координат

$$H=-D(1-\nu)\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial w}{\partial\theta}\right). \quad (1.36)$$

Поперечные силы в круглой пластинке обозначим следующим образом: Q_r—погонная поперечная сила на площадке с нормалью r—радиальная поперечная сила; Q_θ—погонная поперечная сила на площадке, совпадающей с радиусом-вектором r, — тангенциальная поперечная сила.

Заменяя в формулах (1.10) производные по x и y на производные по r и θ, получаем выражения поперечных сил в полярной системе координат:

$$\left.\begin{aligned} Q_r &= -D\frac{\partial}{\partial r}\nabla^2 w, \\ Q_\theta &= -D\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\nabla^2 w, \end{aligned}\right\} \quad (а)$$

или

$$\left.\begin{aligned} Q_r &= -D\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\right), \\ Q_\theta &= -D\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\right), \end{aligned}\right\} \quad (1.37)$$

Обозначим $Q_r^{прив}$ интенсивность приведенной поперечной силы на гранях

контура, перпендикулярных к радиусу-вектору r , а $\mathrm{Q}_{\mathrm{r}}^{\text{прив}}$ — на гранях, совпадающих с радиусом-вектором r. Тогда из формул (1.18) и (1.19) после замены переменных x и y на переменные r и θ можно получить приведенную поперечную силу на гранях контура, учитывающую наличие крутящего момента:

$$\mathrm{Q}_{\mathrm{r}}^{\text{прив}} = Q_r + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial H}{\partial \theta},$$

$$\mathrm{Q}_{\theta}^{\text{прив}} = Q_\theta + \frac{\partial H}{\partial r}.$$

Подставляя сюда поперечные силы и крутящий момент из формул (а) и (1.36), находим:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Q}_{\mathrm{r}}^{\text{прив}} &= -D\left[\frac{\partial}{\partial r}\nabla^2 w + (1-\nu)\cdot\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial w}{\partial\theta}\right)\right],\\
\mathrm{Q}_{\theta}^{\text{прив}} &= -D\left[\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\nabla^2 w + (1-\nu)\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial w}{\partial\theta}\right)\right].
\end{aligned} \qquad (1.38)$$

Формулы (1.34)—(1.38) представляют собой основные уравнения изгиба пластинок в полярной системе координат. Уравнение (1.34) служит для определения функции прогибов срединной плоскости пластинки, а остальные— для составления граничных условий и определения внутренних усилий.

§ 13. Осесимметричные задачи изгиба круглой пластинки

Задача об изгибе круглой пластинки будет осесимметричной, если нагрузка на пластинку, а также условия закрепления ее краев не зависят от полярного угла θ. В этом случае и прогибы пластинки не будут зависеть от полярного угла θ, а будут функцией лишь одной координаты r, т. е. $w=w(r)$. Тогда дифференциальное уравнение изогнутой срединной поверхности (1.34) значительно упрощается:

$$D\left(\frac{d^4 w}{dr^4} + \frac{2}{r}\cdot\frac{d^3 w}{dr^3} - \frac{1}{r^2}\cdot\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r^3}\cdot\frac{dw}{dr}\right) = q. \qquad (1.39)$$

В задачах, где функция прогибов не зависит от угла θ формулы (1.35) для изгибающих моментов принимают вид

$$\left.\begin{aligned}
M_r &= -D\left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r}\cdot\frac{dw}{dr}\right),\\
M_\theta &= -D\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{dw}{dr} + \nu\frac{d^2 w}{dr^2}\right),
\end{aligned}\right\} \qquad (1.40)$$

а крутящий момент (1.36) обратится в нуль.

Поперечные силы (1.37):

$$\left.\begin{aligned} Q_r &= -D\frac{d}{dr}\left(\frac{d^2w}{dr^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{dw}{dr}\right), \\ Q_\theta &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (1.41)$$

а приведенные поперечные силы на контуре (1.38):

$$Q_r^{прив} = Q_r,$$

$$Q_\theta^{прив} = 0.$$

Уравнение (1.39) можно решить в общем виде. Как известно, общее решение неоднородного дифференциального уравнения состоит из суммы общего решения соответствующего однородного уравнения w_1 и какого-нибудь частного решения неоднородного уравнения $\overline{w}$, т. е.

$$w = w_1 + \overline{w}. \qquad (а)$$

Общее решение однородного уравнения

$$\frac{d^4w_1}{dr^4}+\frac{2}{r}\cdot\frac{d^3w_1}{dr^3}-\frac{1}{r^2}\cdot\frac{d^2w_1}{dr^2}+\frac{1}{r^3}\cdot\frac{dw_1}{dr}=0,$$

соответствующего неоднородному уравнению (1.39), имеет вид

$$w_1 = C_1 + C_2\ln r + C_3r^2 + C_4r^2\ln r.$$

Чтобы получить общий вид частного решения $\overline{w}$, уравнение (1.39) можно представить в виде

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dr}\left\{r\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dr}\left(r\frac{dw}{dr}\right)\right]\right\}=\frac{q(r)}{D}.$$

Интегрируя последовательно четыре раза это уравнение, найдем общий вид частного решения:

$$\overline{w}=\frac{1}{D}\int_0^r\frac{1}{r}\left\{\int_0^r r\left[\int_0^r\frac{1}{r}\left(\int_0^r q(r)rdr\right)dr\right]dr\right\}dr. \qquad (б)$$

Пусть нагрузка равномерно распределена по всей поверхности пластинки, т. е. q(r) = q = const. В этом случае выражение (б) легко интегрируется и принимает следующий вид:

$$\overline{w}=\frac{qr^4}{64D}.$$

И общее решение неоднородного дифференциального уравнения (1.39) для нагрузки, равномерно распределенной по поверхности пластинки, будет:

$$w = \frac{qr^4}{64D} + C_1 + C_2\ln r + C_3r^2 + C_4r^2\ln r. \qquad (1.42)$$

Сплошная шарнирно опертая по контуру пластинка, загруженная равномерно распределенной нагрузкой (рис.1.17).

Для определения постоянных интегрирования в решении (1.42) имеем следующие граничные условия. В центре пластинки при r=0 прогиб должен иметь конечное значение. Так как ln0= - ∞, то в решении (1.42) следует отбросить члены, содержащие множитель ln r, т. е. положить

$$C_2, = C_4 = 0.$$

Тогда решение (1.42) примет такой вид:

$$w = \frac{qr^4}{64D} + C_1 + C_3 r^{2.} \qquad \text{(в)}$$

Два условия получим на контуре пластинки при r=a, где должны обращаться в нуль прогиб w и радиальный изгибающий момент M_r, т.е. при r=a должно быть

$$w = 0 \quad u \quad \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \cdot \frac{dw}{dr} = 0. \qquad \text{(г)}$$

Подставляя в условия (г) функцию прогибов (в), получаем:

$$\frac{qa^4}{64D} + C_1 + C_3 a^2 = 0,$$

$$\frac{3qa^2}{64D} + 2C_2 + \frac{\nu}{a}\left(\frac{qa^3}{16D} + 2C_3 a\right) = 0,$$

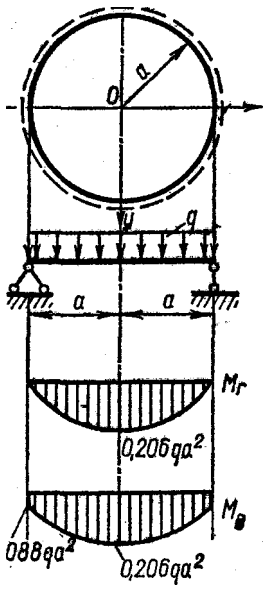


Рис. 1.17.

откуда

$$C_3 = -\frac{3+\nu}{1+\nu} \cdot \frac{qa^2}{32D},$$

$$C_1 = \frac{3+\nu}{1+\nu} \cdot \frac{qa^2}{32D} - \frac{qa^4}{64D}.$$

Подставляя найденные постоянные в решение (в), получаем функцию прогибов для пластинки, шарнирно опертой по контуру и загруженной равномерно распределенной нагрузкой:

$$w = \frac{q\left(a^2 - r^2\right)}{64D}\left(\frac{5+\nu}{1+\nu}a^2 - r^2\right). \qquad (1.43)$$

Максимальный прогиб возникает в центре пластинки при r==0, где он равен:

$$\max w = \frac{5+\nu}{1+\nu} \cdot \frac{qa^4}{64D}. \qquad \text{(д)}$$

Подставляя функцию прогибов (1.43) в формулы (1.40), получаем изгибающие моменты в пластинке:

$$\left.\begin{aligned} M_r &= \frac{q}{16}(3+\nu)\left(a^2 - r^2\right), \\ M_\theta &= \frac{q}{16}\left[(3+\nu)a^2 - (1+3\nu)r^2\right]. \end{aligned}\right\} \qquad (1.44)$$

Максимальные изгибающие моменты возникают в центре пластинки при r=0 и равны

$$\max M_r = \max M_\theta = \frac{qa^2}{16}(3+\nu).$$

Изгибающие моменты в точках контура при r=a равны

$$M_r = 0,$$

$$M_\theta = \frac{qa^2}{8}(1-\nu).$$

Эпюры изгибающих моментов для пластинки, изготовленной из материала с коэффициентом Пуассона v=0,3, показаны на рис.1.11.

Сплошная защемленная по контуру пластинка, загруженная равномерно распределенной нагрузкой (см. рис.1.10).

Для определения постоянных C_1 и C_3 имеем следующие граничные условия: на внешнем контуре пластинки должны отсутствовать прогибы и повороты сечений, т. е.

при r=a

должно быть $w = 0 \quad u \quad \frac{dw}{dr} = 0.$

Подставляя в эти условия функцию прогибов (в), получаем:

$$\frac{qa^4}{64D} + C_1 + C_3 a^2 = 0,$$

$$\frac{qa^3}{16D} + 2C_3 a = 0,$$

откуда находим:

$$C_3 = -\frac{qa^2}{32D},$$

$$C_1 = \frac{qa^4}{64D},$$

и уравнение изогнутой срединной поверхности круглой пластинки (в) для данного случая принимает такой вид:

$$w = \frac{q}{64D}\left(a^2 - r^2\right)^2. \qquad (1.45)$$

Максимальный прогиб в центре пластинки при r = 0 равен:

$$\max w = \frac{qa^4}{64D},$$

что совпадает с результатом (1.26), полученным из решения для эллиптической пластинки. Из сравнения этого значения с максимальным прогибом в шарнирно опертой пластинке (д) следует, что максимальный прогиб защемленной по контуру пластинки в четыре раза меньше максимального прогиба шарнирно опертой пластинки.

Подставляя функцию прогибов (1.45) в формулы (1.40), получаем изгибающие моменты в пластинке:

$$\left.\begin{aligned} M_r &= \frac{q}{16}\left[(1+\nu)a^2 - (3+\nu)r^2\right], \\ M_\theta &= \frac{q}{16}\left[(1+\nu)a^2 - (1+3\nu)r^2\right]. \end{aligned}\right\} \qquad (1.46)$$

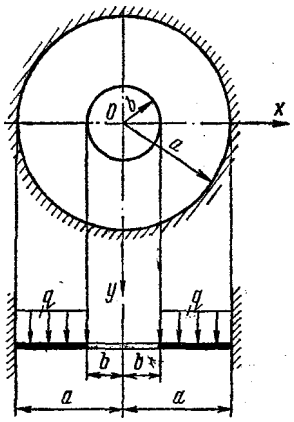


Рис. 1.18.

Изгибающие моменты в центре пластинки при r=0 равны:

$$M_r = M_\theta = \frac{qa^2}{16}(1+\nu),$$

а на контуре пластинки при r = a

$$M_r = -\frac{qa^2}{8},$$

$$M_\theta = -\nu\frac{qa^2}{8}.$$

Эпюры изгибающих моментов для пластинки, изготовленной из материала с коэффициентом Пуассона v=0.3, показаны на рис.1.10. Максимальный изгибающий момент возникает в точках контура на площадках, перпендикулярных к радиусу, и на 40% меньше максимального изгибающего момента в шарнирно опертой пластинке.

Кольцевая пластинка с защемленным наружным краем, загруженная равномерно распределенной нагрузкой (рис.1.18). Для определения постоянных в функции (1.42) имеем следующие граничные условия:

на внешнем защемленном краю при r=a

должно быть $w = 0 \quad u \quad \frac{dw}{dr} = 0,$

на внутреннем свободном краю при r=b

должно быть $M_r = -D\left(\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{\nu}{r}\cdot\frac{dw}{dr}\right) = 0$

и $Q_r^{прив} = Q_r = -D\dfrac{d}{dr}\left(\dfrac{d^2w}{dr^2} + \dfrac{\nu}{r}\cdot\dfrac{d\,w}{dr}\right) = 0.$

Подставляя в эти граничные условия функцию прогибов (1.42), получаем следующую систему уравнений:

$$\frac{qa^4}{64D} + C_1 + C_2\ln a + C_3a^2 + C_4a^2\ln a = 0,$$

$$\frac{qa^4}{16D} + \frac{C_2}{a} + 2C_3\,a + 2C_4a\ln a + C_4a = 0,$$

$$\frac{qb^2}{16D} - \frac{C_2}{b^2} + 2C_3 + 2C_4\ln b + 3C_4 +$$

$$+\nu\left(\frac{qb^2}{16D} + \frac{C_2}{b^2} + 2C_3 + 2C_4\ln b + C_4\right) = 0,$$

$$\frac{qb}{2D} + \frac{4C_4}{b} = 0.$$

Решая эту систему, находим:

$$\left.\begin{aligned}
C_1 &= \frac{qa^2}{64D\alpha}\left\{(1-\nu)a^4 - \left[(5-3\nu) - 4(1+\nu)\ln a\right]a^2b^2 - \right.\\
&\left. - 2\left[2(1+\nu) + (1-2\ln a)\left((1-\nu) + 4(1+\nu)\ln\frac{b}{a}\right)\right]b^4\right\},\\
C_2 &= -\frac{qa^2b^2}{16D\alpha}\left\{(1+\nu)a^2 + \left[(1-\nu) + 4(1+\nu)\ln\frac{b}{a}\right]b^2\right\},\\
C_3 &= \frac{q}{32D\alpha}\left\{-(1-\nu)a^4 + 2(1-\nu)(1+2\ln a)a^2b^2 + \right.\\
&\qquad \left. + \left[(3+\nu) + 4(1+\nu)\ln b\right]b^4\right\},\\
C_4 &= -\frac{qb^2}{8D},
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(e)}$$

где

$$\alpha = (1-\nu)a^2 + (1+\nu)b^2.$$

Если ввести обозначения:

$$\rho = \frac{r}{a}, \quad \beta = \frac{b}{a},$$

$$k = \frac{(1-\nu)\beta^2 + (1+\nu)\left(1 + 4\beta^2 \ln \beta\right)}{(1-\nu) + (1+\nu)\beta^2}\beta^2,$$

то уравнение изогнутой срединной поверхности пластинки (1.42) после подстановки в него постоянных (е) примет следующий вид:

$$w = \frac{qa^4}{64D}\left[-1 + 2\left(1 - k - 2\beta^2\right)\left(1 - \rho^2\right) + \rho^4 - 4k \ln \rho - 8\beta^2\rho^2 \ln \rho\right]. \quad (1.47)$$

Дальнейшее вычисление усилий и напряжений не представляет затруднений и производится как в предыдущих примерах.

§ 14. Неосесимметричный изгиб круглой пластинки

Для круглой пластины следует использовать разложение искомых функций в тригонометрические ряды по угловой координате φ.

Положим

$$w = \sum_{k=0}^{\infty} w_k(r)\cos k\varphi + \sum_{k=1}^{\infty} w_k^{(s)}(r)\sin k\varphi. \quad (1.48)$$

В аналогичный ряд разложим нагрузку

$$q = \sum_{k=0}^{\infty} q_k(r)\cos k\varphi + \sum_{k=1}^{\infty} q_k^{(s)}(r)\sin k\varphi. \quad (1.49)$$

В рядах (1.48) и (1.49) функции w_k и q_k соответствуют прогибам и нагрузкам, симметричным относительно начального радиуса ($\varphi = 0$), а функции w_k и q_k — кососимметричным. Внутренние силовые факторы также представим в виде тригонометрических рядов, причем для моментов M_1, M_2, поперечной силы Q_1, приведенной поперечной силы Q_1^* используем разложения вида

$$M_1 = \sum_{k=0}^{\infty} M_{1(k)}(r)\cos k\varphi + \sum_{k=1}^{\infty} M_{1(k)}^{(s)}(r)\sin k\varphi, \quad (1.50)$$

а для крутящего момента M_{12}, сил Q_2 и Q_2 — разложения вида

$$M_{12} = \sum_{k=0}^{\infty} M_{12(k)}(r)\sin k\varphi - \sum_{k=1}^{\infty} M_{12(k)}^{(s)}(r)\cos k\varphi, \quad (1.51)$$

Подставляя разложение (1.48) в общие формулы (1.49) (1.44 -?), (1.52), (1.54), находим, что коэффициенты с индексом (s) в выражениях для силовых факторов связаны с $w_k^{(s)}$ точно такими же формулами, как и коэффициенты без индекса — с w_k. Поэтому выпишем только эти последние формулы:

$$M_{1(k)} = -D\left[\frac{d^2 w_k}{dr^2} + \mu\left(\frac{1}{r}\frac{dw_k}{dr} - \frac{k^2}{r^2} w_k\right)\right];$$

$$M_{2(k)} = -D\left[\frac{1}{r}\frac{dw_k}{dr} - \frac{k^2}{r^2} w_k + \mu\frac{d^2 w_k}{dr^2}\right];$$

$$M_{12(k)} = D(1-\mu)k\frac{d}{dr}\left(\frac{w_k}{r}\right); \qquad (1.52)$$

$$Q_{1(k)} = -D\frac{d}{dr}\left(\frac{d^2 w_k}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dw_k}{dr} - \frac{k^2}{r^2} w_k\right);$$

$$Q^*_{1(k)} = Q_{1(k)} + D(1-\mu)\frac{k^2}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{w_k}{r}\right).$$

При подстановке рядов (1.48) и (1.49) в уравнение (1.55) для каждого члена ряда получаем независимое уравнение, причем (при одинаковом k) уравнения для w_k и $w_k^{(s)}$ совершенно одинаковы. Вычислим

$$\nabla^2\left[w_k(r)\cos k\varphi\right] = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{r^2\partial\varphi^2}\right)\left[w_k(r)\cos k\varphi\right] =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 w_k}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w_k}{\partial r} - \frac{k^2}{r^2} w_k\right)\cos k\varphi.$$

Следовательно, после подстановки выражений (1.48) и (1.49) в уравнение (1.55) для каждого члена разложения будет получено обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{k^2}{r^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w_k}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w_k}{\partial r} - \frac{k^2}{r^2} w_k\right) = \frac{q_k}{D} \qquad (1.53)$$

Уравнение (1.53) есть уравнение типа Эйлера. Решение соответствующего однородного дифференциального уравнения следует искать в форме

$$w_k = r^{\sigma_k}. \qquad (1.54)$$

Вычислим

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{k^2}{r^2}\right) r^{\sigma_k} = \left(\alpha_k^2 - k^2\right) r^{\alpha_k - 2}.$$

Повторяя вычисление, получим

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{k^2}{r^2}\right)\left[\left(\alpha_k^2 - k^2\right) r^{\alpha_k - 2}\right] =$$

$$= \left(\alpha_k^2 - k^2\right)\left[\left(\alpha^2 - 2\right) - k^2\right] r^{\alpha_k - 4}.$$

Таким образом, выражение (1.54) удовлетворяет однородному уравнению, соответствующему (1.53), при четырех значениях α_k:

$$\alpha_k = \pm k; \quad \alpha_k = 2 \pm k.$$

Поэтому общим решением уравнения (1.53) является выражение

$$w_k = w_k^0 + C_1 r^k + C_2 r^{-k} + C_3 r^{2+k} + C_4 r^{2-k}. \qquad (1.55.)$$

где w_k^0 — частное решение неоднородного уравнения.

Четыре постоянные, входящие в формулу (1.55), позволяют выполнить граничные условия, наложенные на функцию $w_k\,(r)$. Решение (1.55) непригодно при $k = 0$ и при $k = 1$, так как в этих случаях корни α_k — кратные, и решения однородного уравнения в форме (1.55) становятся линейно зависимыми. Общие решения уравнения (1.53) при $k = 0$ и $k = 1$ можно найти, учитывая, что в этих случаях оператор $\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{k^2}{r^2}$ сводится к ряду последовательно выполняемых дифференцирований:

при $k = 0$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{dw}{dr}\right);$$

при $k = 1$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r^2} = \frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rw)\right].$$

Таким образом, при $k = 0$ дифференциальное уравнение (1.53) принимает вид

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left\{r\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dw_0}{dr}\right)\right]\right\} = \frac{q_0(r)}{D}. \qquad (1.56)$$

ГЛАВА II

НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Теория поверхностей представляет собой раздел дифференциальной геометрии, в котором изучаются общие свойства поверхностей.

В настоящей главе приведены лишь те сведения из теории поверхностей, которые необходимы для понимания изложенной в последующих главах общей теории оболочек.

§ 1. Геометрия пространственной кривой

Уравнение пространственной кривой можно задать в параметрической форме, выразив координаты точки этой линии (например, декартовы) в виде функций параметра α:

$$x = x(\alpha);\ y = y(\alpha);\ z = z(\alpha). \qquad (2.1)$$

Если рассматривать x, y, z как проекции вектора r, проведенного из начала координат в рассматриваемую точку линии, то три уравнения (2.1) можно записать в виде одного векторного

$$r = r(\alpha). \qquad (2.2)$$

При изменении значения параметра α точка, характеризуемая вектором r, скользит по рассматриваемой кривой. В качестве параметра может быть выбрана произвольная величина;
нужно лишь, чтобы зависимость координат точки от α была непрерывной и однозначной. Для этого достаточно, чтобы длина кривой s, отмеренная от некоторой точки, была непрерывной и монотонной функцией α, т. е.

$$s = s(\alpha). \qquad (2.3)$$

Дадим параметру α два значения α_1 и α_2, которым соответствуют векторы

$$r_1 = r(\alpha_1);\ r_2 = r(\alpha_2).$$

Нетрудно видеть (рис. 2.1), что разность $r_2 - r_1 = \Delta r$ изображается вектором, по величине и направлению совпадающим с хордой кривой. При уменьшении разности $\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$

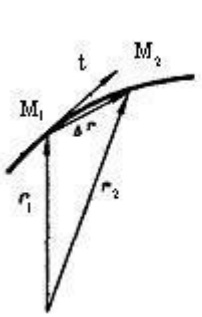


Рис. 2.1

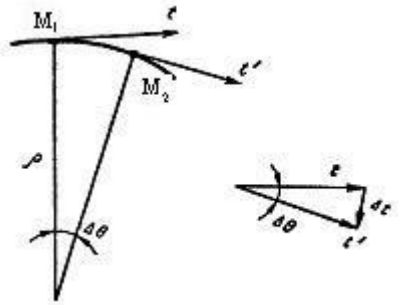


Рис. 2.2

направление вектора Δr приближается к направлению касательной к кривой в

точке M_1 а его длина — к длине дуги между точками M_1 и M_2.

Таким образом, в пределе при $\Delta\alpha \to 0$ получим

$$dr = t\,ds,$$

где t—единичный вектор, направленный по касательной к кривой (см. рис. 2.1).

Следовательно, единичный вектор касательной может быть вычислен по формуле

$$t = \frac{dr}{ds} \tag{2.4}$$

Если учесть зависимость (2.3), то

$$t = \frac{dr}{d\alpha}\frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{A}\frac{dr}{d\alpha}, \tag{2.5}$$

где A — параметр, имеющий смысл местного масштаба длины на линии $r(\alpha)$;

$$A = \frac{ds}{d\alpha}. \tag{2.6}$$

Выражение единичного вектора t в декартовых координатах x, y, z можно получить следующим образом:

$$t = \frac{1}{A}\frac{dr}{d\alpha} = \frac{1}{A}\frac{d}{d\alpha}(xi + yj + zk) = \frac{1}{A}\frac{dx}{d\alpha}i + \\ + \frac{1}{A}\frac{dy}{d\alpha}j + \frac{1}{A}\frac{dz}{d\alpha}k, \tag{2.7}$$

где

$$A = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\alpha}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\alpha}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\alpha}\right)^2}.$$

Рассмотрим разность Δt единичных векторов касательной в соседних точках кривой (рис. 2.2).

Нетрудно убедиться, что при сближении дочек M_1 и M_2 этот вектор оказывается нормальным к кривой и лежащим в плоскости, включающей две соседние касательные к кривой (в так называемой соприкасающейся плоскости).

При этом длина вектора Δt стремится к величине

$$|\Delta t| = \Delta\theta = \frac{\Delta s}{\rho},$$

где ρ — радиус кривизны кривой.

При переходе к пределу при $\Delta s \to 0$ получим

$$\frac{dt}{ds} = \frac{\nu}{\rho} \tag{2.8}$$

или, учитывая (2.4),

$$\frac{d^2r}{ds^2} = \frac{\nu}{\rho}, \tag{2.9}$$

где $\frac{1}{\rho}$ - кривизна кривой; ν - единичный вектор, направленный по нормали к кривой и лежащий в соприкасающейся плоскости.

Вектор ν (вектор главной нормали) направлен в сторону вогнутости кривой.

Выражение (2.8) в декартовой системе координат имеет вид

$$\frac{\nu}{\rho}=\frac{dt}{ds}=\frac{dt}{Ad\alpha}=\frac{d}{Ad\alpha}\left(\frac{dx}{Ad\alpha}\right)i+$$

$$+\frac{d}{Ad\alpha}\left(\frac{dy}{Ad\alpha}\right)j+\frac{d}{Ad\alpha}\left(\frac{dz}{Ad\alpha}\right)k,$$

откуда абсолютное значение кривизны

$$\frac{1}{\rho}=\sqrt{\left[\frac{d}{Ad\alpha}\left(\frac{dx}{Ad\alpha}\right)\right]^2+\left[\frac{d}{Ad\alpha}\left(\frac{dx}{Ad\alpha}\right)\right]^2+}$$

$$\overline{+\left[\frac{d}{Ad\alpha}\left(\frac{dx}{Ad\alpha}\right)\right]^2}.$$

Единичный вектор *b*, являющийся векторным произведением векторов t и ν, направлен по бинормали к кривой.

Тройка единичных взаимноортогональных векторов *t, ν, b* (рис. 2.3) образует так называемый естественный трехгранник (трехгранник Френе).

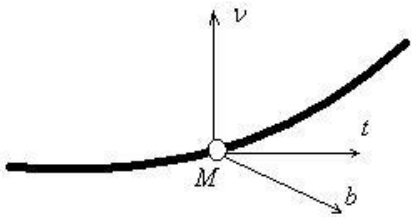


Рис. 2.3

Предположим, что точка *Δt*, в которой связан трехгранник Френе, движется вдоль кривой с единичной скоростью

$$\frac{ds}{d\tau}=\left|\frac{dr}{d\tau}\right|=1,$$

где τ — время.

Поскольку взаимное расположение векторов *t, ν, b* не изменяется, соответствующее движение естественного трехгранника можно рассматривать как движение твердого тела: поступательное перемещение вместе с точкой *M* и вращение относительно этой точки с угловой скоростью Ω. Вектор Ω называется вектором Дарбу.

Поступательное перемещение естественного трехгранника не меняет величин составляющих его векторов. Производная (т.к. движение происходит с единичной скоростью, то производные по времени τ и по дуге *s* совпадают) каждого вектора, жестко связанного с трехгранником, равна линейной скорости движения его конца, обусловленной вращением трехгранника, и определяется векторным произведением Ω на этот вектор. В частности, производные самих единичных векторов выражаются формулами

$$\frac{dt}{ds} = \Omega \times t; \quad \frac{d\nu}{ds} = \Omega \times \nu; \quad \frac{db}{ds} = \Omega \times b.$$

Если проекции вектора Ω на направления *t*, *ν*, *b* составляют ω_1, ω_2, ω_3 и, следовательно,

$$\Omega = \omega_1 t + \omega_2 \nu + \omega_3 b,$$

то

$$\frac{dt}{ds} = \Omega \times t = -\omega_2 b + \omega_3 \nu;$$

$$\frac{d\nu}{ds} = \Omega \times \nu = \omega_2 b - \omega_3 t;$$

$$\frac{db}{ds} = \Omega \times b = -\omega_1 \nu + \omega_2 t;$$

Сопоставляя первую из этих формул с формулой (2.8), устанавливаем, что

$$\omega_2 = 0; \quad \omega_3 = \frac{1}{\rho}. \qquad (2.10)$$

Таким образом, угловая скорость вращения ω_2 трехгранника Френе относительно главной нормали к кривой равна нулю, а угловая скорость ω_3 вращения трехгранника относительно бинормали равна кривизне кривой. Угловая скорость ω_3 относительно касательной к кривой называется кручением кривой.

В дальнейшем нам потребуется правило дифференцирования вектора, заданного своими проекциями на оси подвижного триедра. Выведем его. Пусть вектор ***t,*** зависящий от параметра α (или от длины дуги кривой s), задан в виде

$$f = f_1 t + f_2 \nu + f_3 b ,$$

f_1, f_2, f_3 - известные функции α (или s).

При вычислении производной $\frac{df}{ds}$ следует учесть, что единичные векторы *t*, *ν*, *b* также зависят от *s*. Следовательно,

$$\frac{df}{ds} = \frac{df_1}{ds} t + \frac{df_2}{ds} \nu + \frac{df_3}{ds} b + f_1 \frac{dt}{ds} + f_2 \frac{d\nu}{ds} + f_3 \frac{db}{ds}. \qquad (2.11)$$

Введем обозначение для так называемой л о к а л ь н о й производной вектора f (т. е. для производной, вычисляемой без учета подвижности координатного базиса):

$$\frac{d'f}{ds} = \frac{df_1}{ds} t + \frac{df_2}{ds} \nu + \frac{df_3}{ds} b$$

и учтем, что

$$\frac{dt}{ds} = \Omega \times t; \quad \frac{d\nu}{ds} = \Omega \times \nu; \quad \frac{db}{ds} = \Omega \times b,$$

следовательно,

$$f_1\frac{dt}{ds}+f_2\frac{d\nu}{ds}+f_3\frac{db}{ds}=\Omega\times f.$$

Таким образом, формула (2.11) может быть приведена к виду

$$\frac{df}{ds}=\frac{d'f}{ds}+A\Omega\times t. \qquad (2.12)$$

Итак, производная по дуге от вектора f, заданного своими проекциями на оси подвижного координатного базиса, складывается, из локальной производной и векторного произведения вектора Дарбу на f.

Если дифференцирование проводится не по дуге s, а по параметру α, то, используя соотношение $ds = A\,d\alpha$, найдем

$$\frac{df}{d\alpha}=\frac{d'f}{d\alpha}+A\Omega\times t. \qquad (2.13)$$

§ 2. Геометрия поверхности

Подобно тому как линия в пространстве задается зависимостью (2.2) вектора от одного параметра, поверхность может быть задана зависимостью радиус-вектора от двух параметров, т. е.

$$r=r(\alpha,\beta) \qquad (2.14)$$

или, в координатной форме,

$$x = x(\alpha,\beta);\ y = y(\alpha,\beta);\ z = z(\alpha,\beta). \qquad (2.15)$$

Каждой паре чисел α,β в области определения $r(\alpha,\beta)$ соответствует на поверхности фиксированная точка, координаты которой определяются формулами (2.15).

При непрерывном изменении параметров α,β соответствующая точка движется по некоторой линии на поверхности. В частности, если зафиксировать величину β и менять α, то точка будет двигаться по α-л и н и и. При α = const и изменении β точка движется по β-л и н и и.

Таким образом, параметры α,β можно рассматривать как криволинейные координаты точки на поверхности (г а у с с о в ы к о о р д и н а т ы). Единичные векторы [см. формулу (2.6)]

$$t_1=\frac{1}{A}\cdot\frac{\partial r}{\partial\alpha};\quad t_2=\frac{1}{A}\cdot\frac{\partial r}{\partial\beta}; \qquad (2.16)$$

направлены по касательным к линиям α и β; $A=\left|\frac{\partial r}{\partial\alpha}\right|$, $B=\left|\frac{\partial r}{\partial\beta}\right|$ - местные масштабы длины на соответствующих линиях.

Векторное произведение $t_1\times t_2$ представляет собой вектор, нормальный к поверхности. Модуль которого равен синусу угла χ между линиями α и β. Поэтому единичный вектор n нормали к поверхности может быть найден по формуле

$$n = \frac{1}{\sin \chi} t_1 \times t_2. \qquad (2.17)$$

Тройка единичных векторов t_1, t_2, n, связанная е точкой срединной поверхности оболочки, представляет собой локальный, векторный базис, к которому относят перемещения и внутренние силы в оболочке.

Рассмотрим произвольную линию на поверхности, задав координаты ее точек в зависимости от длины дуги s этой линии.

Уравнение линии представим в виде

$$r = r(\alpha,\beta);\ \alpha = \alpha(s);\ \beta = \beta(\alpha,\beta). \qquad (2.18)$$

В соответствии с формулой (2.4) единичный вектор касательной к данной кривой

$$t = \frac{dr}{ds} = \frac{\partial r}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial s} + \frac{\partial r}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \beta}{\partial s}$$

или, с учетом соотношений (2.16),

$$t = A\frac{\partial \alpha}{\partial s} t_1 + B\frac{\partial \beta}{\partial s} t_2. \qquad (2.19)$$

Косинусы углов, составляемых касательной к кривой и координатными линиями, определяются скалярными произведениями, т.е.

$$\begin{aligned} \cos(s,\alpha) &= t \cdot t_1 = A\frac{\partial \alpha}{\partial s} + B\frac{\partial \beta}{\partial s}\cos\chi; \\ \cos(s,\beta) &= t \cdot t_2 = A\frac{\partial \alpha}{\partial s}\cos\chi; + B\frac{\partial \beta}{\partial s}, \end{aligned} \qquad (2.20)$$

где учтено, что $t_1 \cdot t_2 = t_1 \cdot t_2 = 1$; $t_1 \cdot t_2 = \cos\chi$.

Возведем выражение (2.19) в квадрат:

$$t \cdot t = 1 = A^2\left(\frac{d\alpha}{ds}\right)^2 + 2AB\cos\chi \frac{d\alpha}{ds} \cdot \frac{d\beta}{ds} + B^2\left(\frac{d\beta}{ds}\right)^2$$

откуда

$$ds^2 = A^2 d\alpha^2 + 2AB\cos\chi\, d\alpha\, d\beta + B^2 d\beta^2. \qquad (2.21)$$

Выражение (2.21), определяющее длину элемента произвольной линии на поверхности, называется первой квадратичной формой, а величины A^2, B^2, $AB\cos\chi$ — коэффициентами первой квадратичной формы. Сами величины A, B называются параметрами Ламе. В случае ортогональной координатной сети на поверхности $\left(\chi = \frac{\pi}{2}\right)$ формула (2.21) получает вид

$$ds^2 = A^2 d\alpha^2 + B^2 d\beta^2,$$

а величины

$$A\frac{d\alpha}{ds} = \cos\eta, \quad B\frac{d\beta}{ds} = \sin\eta \qquad (2.22)$$

определяют угол χ между касательной к кривой на поверхности, и

координатной линией α.

Вычислим теперь кривизну линии на поверхности, заданной уравнением (2.18).

Согласно выражению (2.9)

$$\frac{\nu}{\rho}=\frac{\partial^2 r}{\partial s^2}=\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial r}{\partial\alpha}\cdot\frac{\partial\alpha}{\partial s}+\frac{\partial r}{\partial\beta}\cdot\frac{\partial\beta}{\partial s}\right)=\frac{\partial r}{\partial\alpha}\cdot\frac{\partial^2\alpha}{\partial s^2}+$$
$$+\frac{\partial r}{\partial\beta}\cdot\frac{\partial^2\beta}{\partial s^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial\alpha^2}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial s}\right)^2+2\frac{\partial^2 r}{\partial\alpha\partial\beta}\cdot\frac{\partial\alpha}{\partial s}\cdot\frac{\partial\beta}{\partial s}+\frac{\partial^2 r}{\partial\beta^2}\left(\frac{\partial\beta}{\partial s}\right)^2. \qquad (2.23)$$

Напомним, что вектор $\frac{\nu}{\rho}$, равный кривизне рассматриваемой линии, направлен по главной нормали к ней в сторону вогнутости (см. рис. 2.3).

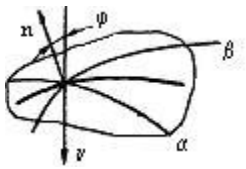


Рис. 2.4

Спроектируем этот вектор на направление нормали к поверхности, для чего умножим скалярно выражение (2.23) на вектор нормали n. При этом учтем, что

$$\frac{\nu\cdot n}{\rho}=-\frac{\cos\varphi}{\rho};\quad \frac{\partial r}{\partial\alpha}n=At_1\cdot n=0;$$
$$\frac{\partial r}{\partial\beta}n=Bt_2\cdot n=0,$$

где φ - острый угол между нормалью n к поверхности и нормалью ν к кривой (рис. 2.4); знак минус объясняется тем, что нормаль n направлена в сторону выпуклости поверхности, а ν - в сторону вогнутости кривой.

В результате получим

$$-\frac{\cos\varphi}{\rho}=\frac{1}{ds^2}\left[L\,d\alpha^2+2M\,d\alpha\,d\beta+N\,d\beta^2\right], \qquad (2.24)$$

где L, M, N – скалярные величины;

$$L=\frac{\partial^2 r}{\partial\alpha^2}n;\quad M=\frac{\partial^2 r}{\partial\alpha\partial\beta}n;\quad N=\frac{\partial^2 r}{\partial\beta^2}n. \qquad (2.25)$$

Выражение в прямых скобках, входящее в (2.24), называется второй квадратичной формой поверхности, L, M и N — коэффициентами второй квадратичной формы.

Нетрудно видеть, что правая часть равенства (2.24) зависит для данной поверхности $r(\alpha,\beta)$ только от направления касательной к кривой на поверхности [см. формулы (2.20)] и для всех кривых, имеющих общую касательную, одинакова.

Поэтому из всех таких кривых наименьшую (по абсолютной величине) кривизну имеет та, главная нормаль к которой (ν) совпадает с нормалью к поверхности (n), так как в этом случае $\cos\varphi = 1$. В частности, такая кривая может быть получена при пересечении поверхности плоскостью, проходящей

через нормаль к ней.

Кривизна такого нормального сечения определяется формулой

$$-\frac{1}{R}=L\left(\frac{d\alpha}{ds}\right)^2+2M\,\frac{d\alpha}{ds}\cdot\frac{d\beta}{ds}+N\left(\frac{d\beta}{ds}\right)^2. \qquad (2.26)$$

В соответствии с формулой (2.24) кривизна любого другого плоского сечения, составляющего двугранный угол φ с нормальным и имеющего с ним общую касательную,

$$\frac{1}{\rho}=\frac{1}{R\cos\varphi}. \qquad (2.27)$$

Формула (2.27), связывающая кривизны наклонного и нормального, сечений, выражает так называемую теорему Менье.

Если нормальное сечение касается α-линии, то $\frac{d\alpha}{ds}=\frac{1}{A},\frac{d\beta}{ds}=0$ и по формуле (2.26)

$$\frac{1}{R_1'}=-\frac{L}{A^2}, \qquad (2.28)$$

где R'_1 — радиус кривизны нормального сечения, касательного к α-линии.

Аналогично, для нормального сечения, касательного к β-линии, имеем

$$\frac{1}{R_2'}=-\frac{N}{B^2}, \qquad (2.29)$$

Обозначим величину, называемую кручением поверхности, через

$$\frac{1}{R_{12}}=\frac{M}{AB}. \qquad (2.30)$$

Тогда формула (2.26) получает вид

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1'}\left(\frac{Ad\alpha}{ds}\right)^2+\frac{1}{R_2'}\left(\frac{Bd\beta}{ds}\right)^2-\frac{2}{R_{12}}\cdot\frac{Ad\alpha}{ds}\cdot\frac{Bd\beta}{ds}. \qquad (2.31)$$

Формулы (2.26)—(2.31) справедливы при произвольных координатных линиях на поверхности.

Если поверхность отнесена к ортогональной системе гауссовых координат $\left(\chi=\frac{\pi}{2}\right)$ то входящие в равенство (2.31) величины $\frac{Ad\alpha}{ds},\frac{Bd\beta}{ds}$ связаны с углом η между касательной к линии сечения и α-линией зависимостями (2.22). В этом случае равенство (2.31) можно записать в виде

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1'}\cos^2\eta+\frac{1}{R_2'}\sin^2\eta-\frac{2}{R_{12}}\cdot\cos\eta\cdot\sin\eta. \qquad (2.32)$$

Формула (2.32), устанавливающая зависимость кривизны линии произвольного нормального сечения от угла η, аналогична известной формуле для момента инерции плоской фигуры относительно наклонной оси.

Нетрудно установить, что для двух взаимно перпендикулярных. направлений, соответствующих углам η_*, таким, что

$$tg2\eta_* = \frac{2}{R_{12}\left(\frac{1}{R_2'} - \frac{1}{R_1'}\right)}, \tag{2.33}$$

кривизна $\frac{1}{R}$ принимает экстремальные значения

$$\left.\begin{matrix}\frac{1}{R_1}\\ \frac{1}{R_2}\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1'} + \frac{1}{R_2'}\right) \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{R_1'} + \frac{1}{R_2'}\right)^2 - 4\left(\frac{1}{R_1'R_2'} - \frac{1}{R_{12}^2}\right)}. \tag{2.34}$$

Направления, определяемые формулой (2.33), называют главными направлениями, а экстремальные значения кривизны нормального сечения в данной точке - главными кривизнами поверхности. Линии на поверхности, касательные к которым везде совпадают с главными направлениями, называют линиями кривизны.

Линии кривизны образуют ортогональную сеть на поверхности.

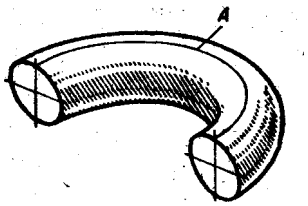


Рис. 2.5

Так как главные кривизны поверхности $\frac{1}{R_1}, \frac{1}{R_2}$ [см. (2.34)] не зависят от того, к какой именно ортогональной. системе гауссовых координат α, β отнесена поверхность, то величины

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1'} + \frac{1}{R_2'}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right);$$
$$\frac{1}{R_1'R_2'} - \frac{1}{R_{12}^2} = \frac{1}{R_1R_2} \tag{2.35}$$

также не зависят от ориентации α - и β -линий и являются инвариантами, определяемыми только формой поверхности. Первый из этих инвариантов называют средней кривизной поверхности, а второй - гауссовой кривизной.

В зависимости от знака гауссовой кривизны все поверхности делятся на поверхности положительной (например, сфера); нулевой (например, цилиндр) и отрицательной (седлообразная поверхность) кривизны. Разные области одной и той же поверхности могут иметь кривизну разного знака. Так, например, внешняя часть поверхности тора (рис. 2.5) имеет положительную, а внутренняя — отрицательную кривизну. На линиях, разграничивающих эти части (линия A на рис. 2.5), гауссова кривизна равна нулю. Такие линии называют асимптотическими.

Если координатные линии не являются ортогональными, формулы для

определения угла наклона линий кривизны к линии α и для главных кривизн несколько усложняются и принимают вид

$$tg2\eta_* = \frac{2\dfrac{\sin\chi}{R_{12}} + \dfrac{\sin 2\chi}{R_1'}}{\dfrac{1}{R_2'} + \dfrac{\cos 2\chi}{R_1'} - \dfrac{2\cos\chi}{R_{12}}}; \tag{2.36}$$

$$\left.\begin{matrix}\dfrac{1}{R_1}\\ \dfrac{1}{R_2}\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2\sin^2\chi}\left[\frac{1}{R_1'} + \frac{1}{R_2'} + \frac{2}{R_{12}}\cos\chi \pm \right.$$

$$\left. \pm \sqrt{\left(\frac{1}{R_1'} + \frac{1}{R_2'} + \frac{2}{R_{12}}\cos\chi\right)^2 - 4\left(\frac{1}{R_1'R_2'} - \frac{1}{R_{12}^2}\right)\sin^2\chi}\right]. \tag{2.37}$$

В этих формулах $\frac{1}{R_1'}$, $\frac{1}{R_2'}$, $\frac{1}{R_{12}}$ по-прежнему связаны с коэффициентами второй квадратичной формы зависимостями (2.28) — (2.30). Нетрудно установить, что при неортогональных координатных линиях средняя кривизна

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \frac{1}{2\sin^2\chi}\left(\frac{1}{R_1'} + \frac{1}{R_2'} + \frac{2}{R_{12}}\cos\chi\right), \tag{2.38}$$

а гауссова кривизна

$$\frac{1}{R_1R_2} = \left(\frac{1}{R_1'R_2'} - \frac{1}{R_{12}^2}\right)\frac{1}{\sin^2\chi}. \tag{2.39}$$

Пример 2.1. Рассмотрим геометрию поверхности вращения. Зададим форму меридиана поверхности в параметрическом виде, выбрав в качестве параметра длину дуги s меридиана, отсчитываемую от некоторой начальной параллели (или от полюса) (рис.2.6,а); r = r (s); Z=Z(s).

В качестве координат точки на поверхности α, β выберем ту же координату s, определяющую положение точки на меридиане, и угол φ, составляемый данной меридиональной плоскостью с начальной, т. е. α = s; β = φ.

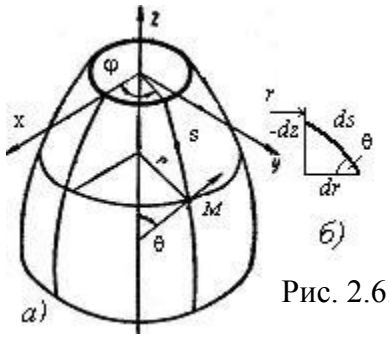


Рис. 2.6.

Введем также неподвижную декартову систему координат x, y, Z (рис.2.6,а). Обозначим угол между нормалью к поверхности и осью ее симметрии буквой θ.

Имеют место очевидные зависимости (рис. 2.6, б)

$$\frac{dr}{ds} = \cos\theta; \frac{dZ}{ds} = -\sin\theta.$$

Декартовы координаты произвольной точки M поверхности $x = r(s)\cos\varphi;\ y = r(s)\sin\varphi;\ Z = Z(s).$

Следовательно, вектор **r,** определяющий положение точки *M,* может быть представлен в

виде

$$r = r\cos\varphi i + r\sin\varphi j + Zk,$$

где i, j, к—орты по осям x, y, Z.

Вычислим частные производные вектора r:

$$\frac{\partial r}{\partial \alpha} = \frac{\partial r}{\partial s} = \frac{dr}{ds}\cos\varphi i + \frac{dr}{ds}\sin\varphi j + \frac{dZ}{ds}k = (\cos\varphi i + \sin\varphi j)\cos\theta - \sin\theta k;$$

$$\frac{\partial r}{\partial \beta} = \frac{\partial r}{\partial \varphi} = -r\sin\varphi i + r\cos\varphi j;$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial \alpha^2} = \frac{\partial^2 r}{\partial s^2} = -(\cos\varphi i + \sin\varphi j)\sin\theta\frac{d\theta}{ds} - \cos\theta\frac{d\theta}{ds}k;$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial \beta^2} = \frac{\partial^2 r}{\partial \varphi^2} = -r\cos\varphi i - r\sin\varphi j;$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial \alpha \partial \beta} = \frac{\partial^2 r}{\partial s \partial \varphi} = (-\sin\varphi i + \cos\varphi j)\cos\theta.$$

Коэффициенты первой квадратичной формы

$$A^2 = \left(\frac{\partial r}{\partial \alpha}\right)^2 = (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1;$$

$$B^2 = \left(\frac{\partial r}{\partial \beta}\right)^2 = r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = r^2.$$

Определим выражения единичных векторов t_1, t_2, n в неподвижной системе координат:

$$t_1 = \frac{1}{A}\cdot\frac{\partial r}{\partial \alpha} = (\cos\varphi i + \sin\varphi j)\cos\theta - \sin\theta k;$$

$$t_2 = \frac{1}{B}\cdot\frac{\partial r}{\partial \beta} = -\sin\varphi i + \cos\varphi j;$$

$$n = t_1 \times t_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos\varphi\cos\theta & \cos\varphi\cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{vmatrix} = \cos\varphi\sin\theta i +$$

$$+ \sin\varphi\sin\theta j + \cos\theta k.$$

Система координат α, β—ортогональная, так как $t_1 t_2 = 0$. По формулам (2.25) коэффициенты второй квадратичной формы

$$L = \frac{\partial^2 r}{\partial \alpha^2}n = -(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)\sin^2\theta\frac{d\theta}{ds} - \cos^2\theta\frac{d\theta}{ds} = -\frac{d\theta}{ds};$$

$$M = \frac{\partial^2 r}{\partial \alpha \partial \beta}n = (-\sin\varphi\cos\varphi + \cos\varphi\sin\varphi)\sin\theta - \cos\theta = 0;$$

$$N = \frac{\partial^2 r}{\partial \beta^2}n = -(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)r\sin\theta = -r\sin\theta.$$

Вычислим кривизны и кручение поверхности по формулам (2.28)—(2.30):

$$\frac{1}{R_1'} = -\frac{L}{A^2} = \frac{d\theta}{ds}; \quad \frac{1}{R_2'} = -\frac{N}{B^2} = \frac{\sin\theta}{r}; \quad \frac{1}{R_{12}} = \frac{M}{AB} = 0.$$

Из последнего соотношения следует, что координатные линии s, φ (меридианы и параллели) — линии кривизны, поэтому главные кривизны

$$\frac{1}{R_1}=\frac{1}{R_1'}=\frac{d\theta}{ds};\quad \frac{1}{R_2}=\frac{1}{R_2'}=\frac{\sin\theta}{r}. \tag{2.40}$$

Проделанные в рассмотренном примере выкладки лишь указывают общий путь расчета. Те же результаты в этом случае проще получить непосредственно. В самом деле, ортогональность меридианов (α) и параллелей (β) на поверхности вращения очевидна. Так как любая меридиональная плоскость есть плоскость симметрии поверхности, то меридианы (а значит и параллели) являются также линиями кривизны.

Линия сечения поверхности меридиональной плоскостью (меридиан) по определению имеет кривизну $\frac{1}{R_1}=\frac{d\theta}{ds}$. Кривизну $\frac{1}{R_2}$ нормального сечения, касательного к параллели, проще всего найти на основе теоремы Менье. Сечение поверхности плоскостью *OM,* нормальной к оси симметрии, есть круг радиуса *r*. Но это сечение наклонено к нормальному (*MK*) под углом $(\pi/2-\theta)$ (рис. 2.7). Поэтому в соответствии с формулой (2.27) получаем результат, совпадающий с (2.40):

$$\frac{\cos(\pi/2-\theta)}{r}=\frac{\sin\theta}{r}=\frac{1}{R_2}.$$

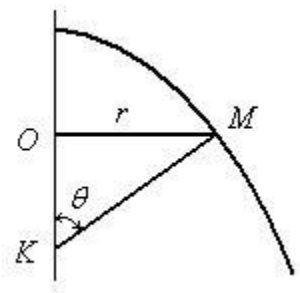


Рис. 2.7

Это означает, что для поверхности вращения радиус кривизны сечения, нормального к меридиану, равен отрезку нормали, соединяющему данную точку с осью симметрии (отрезок *KM* на рис. 2.7).

Оболочки строительных конструкций (перекрытия) часто выполняют в форме поверхностей переноса, уравнение которых в декартовых координатах имеет вид

$$z=\varphi(x)+\psi(y). \tag{2.41}$$

На рис. 2.8 показаны частные виды такого рода поверхностей:
$z=C_1(a^2-x^2)+C_2(b^2-y^2)$ и $z=C_1(a^2+x^2)+C_2(b^2-y^2)$.
Отличительной особенностью поверхностей переноса является то, что все их сечения плоскостями, параллельными *x0z и y0z,* имеют одинаковую форму и лишь смещены относительно друг друга по направлению оси z.

К поверхностям переноса относятся, в частности, все цилиндрические поверхности.

Пример 2.2. Определить геометрические характеристики поверхности переноса, заданной уравнением (2.41).

Положение точки на поверхности переноса зададим декартовыми координатами α = x, β = *y.* Таким образом, координатные линии α, β на поверхности—линии сечения ее плоскостями, параллельными плоскостям x0z и y0z. Радиус-вектор произвольной точки на поверхности в неподвижной системе x, y, z имеет вид

$$r=xi+yj+[\varphi(x)+\psi(y)]k.$$

Его производные определяются формулами

$$\frac{\partial r}{\partial \alpha}=\frac{\partial r}{\partial x}=i+\varphi'(x)k;\quad \frac{\partial r}{\partial \beta}=j+\psi'(x)k;$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial \alpha^2}=\varphi''(x)k;\quad \frac{\partial^2 r}{\partial \alpha\partial \beta}=0;\quad \frac{\partial^2 r}{\partial \beta^2}=\psi''(x)k.$$

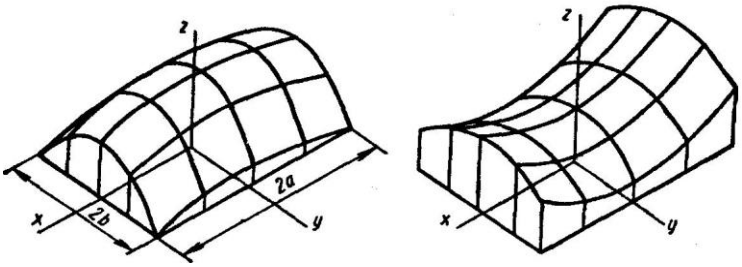


Рис. 2.8.

Коэффициенты первой квадратичной формы

$$A^2=\left(\frac{\partial r}{\partial \alpha}\right)^2=1+[\varphi'(x)]^2;\quad B^2=\left(\frac{\partial r}{\partial \beta}\right)^2=1+[\psi'(y)]^2;$$

Единичные векторы локальной системы координат

$$t_1=\frac{1}{A}\frac{\partial r}{\partial \alpha}=\frac{1}{\sqrt{1+[\varphi'(x)]^2}}[i+\varphi'(x)k];$$

$$t_2=\frac{1}{B}\frac{\partial r}{\partial \beta}=\frac{1}{\sqrt{1+[\psi'(y)]^2}}[j+\psi'(y)k].$$

Угол χ между координатными линиями α, β находится из равенств

$$\cos\chi=t_1\cdot t_2=\frac{\varphi'(x)\psi'(y)}{\sqrt{1+[\varphi'(x)]^2+[\psi'(y)]^2+[\varphi'(x)\psi'(y)]^2}};$$

$$\sin\chi=\sqrt{1-\cos^2\chi}=\left[\frac{1+[\varphi'(x)]^2+[\psi'(y)]^2}{1+[\varphi'(x)]^2+[\psi'(y)]^2+[\varphi'(x)\psi'(y)]^2}\right]^{1/2}.$$

Вектор нормали

$$n=\frac{1}{\sin\chi}t_1\times t_2=\frac{1}{\sqrt{1+[\varphi'(x)]^2+[\psi'(y)]^2}}[-\varphi'(x)i-\psi'(y)j+k\,j].$$

Коэффициенты второй квадратичной формы

$$L=\frac{\partial^2 r}{\partial \alpha^2}n=\frac{\varphi''(x)}{\sqrt{1+[\varphi'(x)]^2+[\psi'(y)]^2}};\quad M=\frac{\partial^2 r}{\partial \alpha\partial \beta}n=0;$$

$$N=\frac{\partial^2 r}{\partial \beta^2}n=\frac{\psi''(y)}{\sqrt{1+[\varphi'(x)]^2+[\psi'(y)]^2}}.$$

Кривизны нормальных сечений, касательных к координатным линиям,

$$\frac{1}{R_1'}=-\frac{L}{A^2}=-\frac{\varphi''(x)}{\{1+[\varphi'(x)]^2\}\sqrt{1+[\varphi'(x)]^2+[\psi'(y)]^2}};$$

$$\frac{1}{R_2'}=-\frac{N}{B^2}=-\frac{\psi'(y)}{\{1+[\psi'(y)]^2\}\sqrt{1+[\varphi'(x)]^2+[\psi'(y)]^2}};$$

$$\frac{1}{R_{12}}=\frac{M}{AB}=0.$$

Хотя коэффициент M второй квадратичной формы равен нулю, в данном случае нельзя сделать вывод, что кривизны и $\frac{1}{R_1'}$ $\frac{1}{R_2'}$ главные, так как линии α, β неортогональны.

Пользуясь формулой (2.36), находим угол η_* составляемый линиями кривизны с направлением α,

$$tg\,2\eta_* = \frac{\sin 2\chi}{\frac{R_1'}{R_2'} + \cos 2\chi},$$

а затем главные кривизны

$$\left.\begin{matrix}\frac{1}{R_1}\\ \frac{1}{R_2}\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2\sin^2\chi}\left[\frac{1}{R_1'} + \frac{1}{R_2'} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{R_1'} + \frac{1}{R_2'}\right)^2 - \frac{4}{R_1'R_2'}\sin^2\chi}\right].$$

где $\frac{1}{R_1'}$, $\frac{1}{R_2'}$ и χ определяют по приведенным выше формулам.

Если поверхность переноса является пологой, так что $\frac{dz}{dx} = \varphi'(x) << 1,$ $\frac{dz}{dy} = \psi'(y) << 1,$ то можно существенно упростить ее рассмотрение, пренебрегая квадратами этих величин по сравнению с единицей.

В этом случае $A \approx B \approx 1$, $\sin\chi \approx 1$, $\cos\chi \approx 0$,

$$\eta_* \approx 0, \frac{1}{R_1} \approx \frac{1}{R_1'} \approx -\varphi''(x), \frac{1}{R_2} \approx \frac{1}{R_2'} \approx -\psi''(y).$$

Таким образом, для пологой поверхности переноса внутренняя ее геометрия (характеризуемая параметрами Ламе) может быть приближенно отождествлена с геометрией координатной плоскости *xy,* а линии α и β приняты за линии кривизны.

Для произвольной пологой поверхности, заданной уравнением

$$z = z(x, y) \quad \left(\frac{dz}{dx} \prec\prec 1, \frac{dz}{dy} \prec\prec 1\right),$$

также приближенно справедливы равенства $A \approx B \approx 1,\ \chi \approx \pi/2$,но координатные линии *x* = const. *y* = const уже не являются линиями кривизны. В этом случае

$$\frac{1}{R_1'} \approx -\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}; \quad \frac{1}{R_2'} \approx -\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}; \quad \frac{1}{R_{12}'} \approx -\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}. \qquad (2.42)$$

§ 3. Дифференцирование единичных векторов и тождественные соотношения Кодацци—Гаусса

Тройка единичных векторов t_1, t_2, n связана с определенной точкой поверхности $r\ (\alpha, \beta)$. При переходе от точки к точке эти векторы меняют свое

направление. Вычислим производные единичных векторов, считая, что система координатных линий α, β на поверхности ортогональная $\chi = \pi/2$.

В этом случае взаимное расположение векторов t_1, t_2, n не изменяется, и образуемый ими триедр поворачивается при переходе от точки к точке как жесткое целое. Если точка, с которой связан триедр t_1, t_2, n, движется с единичной скоростью вдоль α -линии, то триедр вращается с угловой скоростью

$$\Omega_1 = \omega_{11} t_1 + \omega_{12} t_2 + \omega_{13} n.$$

Соответственно, при движении точки с единичной скоростью вдоль β -линии скорость вращения триедра

$$\Omega_2 = \omega_{21} t_1 + \omega_{22} t_2 + \omega_{23} n.$$

Так же, как в случае трехгранника Френе, производная каждого из единичных векторов по дуге кривой равна векторному произведению соответствующей угловой скорости на этот вектор. Таким образом; для частных производных в направлении α получаются следующие формулы:

$$\begin{aligned} \frac{\partial t_1}{A\partial\alpha} &= \Omega_1 \times t_1 = -\omega_{12} n + \omega_{13} t_2; \\ \frac{\partial t_2}{A\partial\alpha} &= \Omega_1 \times t_2 = -\omega_{11} n + \omega_{13} t_1; \\ \frac{\partial n}{A\partial\alpha} &= \Omega_1 \times n = -\omega_{11} t_2 + \omega_{12} t_1 \end{aligned} \qquad (2.43)$$

(заметим, что $A\partial\alpha$ представляет собой длину элемента α-линии).

Аналогичные формулы получаются для частных производных векторов по переменной P.

Умножим первое из равенств (2.43) скалярно на n. Получим

$$\omega_{12} = -\frac{\partial r}{A\partial\alpha} n.$$

Так как $t_i = \dfrac{\partial r}{A\partial\alpha}$, то

$$\omega_{12} = -\frac{\partial}{A\partial\alpha}\left(\frac{\partial r}{A\partial\alpha}\right) n = -\frac{1}{A^2}\left(\frac{\partial^2 r}{\partial\alpha^2} - \frac{\partial A}{\partial\alpha}\cdot\frac{\partial r}{A\partial\alpha}\right) n.$$

Второй вектор в скобках направлен по t_i, и его скалярное произведение на n равно нулю. Поэтому

$$\omega_{12} = \frac{1}{A^2}\cdot\frac{\partial^2 r}{\partial\alpha^2} n = -\frac{L}{A^2} = \frac{1}{R_1'}.$$

Последние равенства вытекают из определения коэффициентов второй квадратичной формы [см. формулы (2.25) и (2.28)],

Для определения остальных компонентов вектора Ω_1 рассмотрим второе из

равенств (2.43). Умножив его скалярно на n и подставив значение $t_2 = \frac{\partial r}{B\partial\beta}$, найдем

$$\omega_{11} = \frac{\partial t_2}{A\partial\alpha} n = \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\partial r}{B\partial\beta}\right) n = \frac{1}{AB} \cdot \frac{\partial^2 r}{\partial\alpha\partial\beta} n - \frac{1}{AB^2} \cdot \frac{\partial B}{\partial\alpha} \cdot \frac{\partial r}{\partial\beta} n.$$

Второе слагаемое в этом выражении равно нулю, так как вектор $\frac{\partial r}{\partial\beta} = Bt_2$ ортогонален к *n*, а первое слагаемое представляет собой кручение поверхности [см. формулы (2.25) и (2.30)]. Таким образом,

$$\omega_{11} = \frac{M}{AB} = \frac{1}{R_{12}}.$$

Умножая теперь то же равенство скалярно на t_1, получаем

$$\omega_{13} = -\frac{\partial t_2}{A\partial\alpha} t_1 = -\frac{\partial}{A\partial\alpha}\left(\frac{\partial r}{B\partial\beta}\right)\frac{\partial r}{A\partial\alpha} = -\frac{1}{A^2 B} \cdot \frac{\partial^2 r}{\partial\alpha\partial\beta} \cdot \frac{\partial r}{\partial\alpha} +$$

$$+ \frac{1}{A^2 B^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial\alpha} \cdot \frac{\partial r}{\partial\beta} \cdot \frac{\partial B}{\partial\alpha}.$$

Второе из слагаемых этого выражения равно нулю вследствие ортогональности векторов $\frac{\partial r}{\partial\alpha} = At_1$ и $\frac{\partial r}{\partial\beta} = Bt_2$, а первое можно представить в виде

$$\omega_{13} = -\frac{1}{A^2 B} \cdot \frac{\partial^2 r}{\partial\alpha\partial\beta} \cdot \frac{\partial r}{\partial\alpha} = -\frac{1}{A^2 B} \cdot \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\partial r}{\partial\alpha}\right)^2 = -\frac{1}{2A^2 B} \cdot \frac{\partial}{\partial\beta}\left(A^2\right).$$

Следовательно,

$$\omega_{13} = -\frac{1}{AB} \cdot \frac{\partial A}{\partial\beta}.$$

Итак, вектор Ω_1 определяется следующим разложением:

$$\Omega_1 = \frac{1}{R_{12}} t_1 + \frac{1}{R_1'} t_2 - \frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta} n. \qquad (2.44)$$

Формулы (2.43) для производных от единичных векторов можно теперь записать в виде

$$\begin{aligned}
\frac{\partial t_1}{A\partial\alpha} &= -\frac{1}{AB}\cdot\frac{\partial A}{\partial\beta}t_2 - \frac{1}{R_1'}n;\\
\frac{\partial t_2}{A\partial\alpha} &= \frac{1}{AB}\cdot\frac{\partial A}{\partial\beta}t_1 - \frac{1}{R_{12}}n;\\
\frac{\partial n}{A\partial\alpha} &= \frac{1}{R_1'}t_1 - \frac{1}{R_{12}}t_2;
\end{aligned} \qquad (2.45)$$

Формулы для частных производных единичных векторов по переменной β можно получить из формул (2.45) заменой индексов $1 \leftrightarrow 2$ и букв $\alpha \leftrightarrow \beta$ и $A \leftrightarrow B$. Таким образом,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial t_1}{B\partial\beta} &= \frac{1}{AB}\cdot\frac{\partial B}{\partial\alpha}t_2 + \frac{1}{R_{12}}n;\\
\frac{\partial t_2}{B\partial\beta} &= -\frac{1}{AB}\cdot\frac{\partial B}{\partial\beta}t_1 - \frac{1}{R_2'}n;\\
\frac{\partial n}{B\partial\beta} &= \frac{1}{R_2'}t_2 - \frac{1}{R_{12}}t_1;
\end{aligned} \qquad (2.46)$$

Из этих формул следует, что вектор Ω_2, представляющий собой угловую скорость координатного базиса t_1, t_2, n, при движении с единичной скоростью вдоль β-линии, равен

$$\Omega_2 = -\frac{1}{R_2}t_1 + \frac{1}{R_{12}}t_2 + \frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}n. \qquad (2.47)$$

Формулы (2.45) и (2.46) называют деривационными формулами Вейнгартена.

Так как At_1 и Bt_2 представляют собой первые производные радиус-вектора r по координатам α, β, то с помощью деривационных формул вторые производные $\frac{\partial^2 r}{\partial\alpha^2}$, $\frac{\partial^2 r}{\partial\beta^2}$, $\frac{\partial^2 r}{\partial\alpha\partial\beta}$ выражаются через первые производные и коэффициенты A, B, $\frac{1}{R_1'}$, $\frac{1}{R_2'}$, $\frac{1}{R_{12}}$.

Последующие дифференцирования выражений (2.45), (2.46) позволяют выразить частные производные всех порядков от r по α и β через те же параметры.

На этом основании можно утверждать, что поверхность задается коэффициентами первой и второй квадратичных форм с точностью до своего положения в пространстве.

В самом деле, представив выражение для радиус-вектора r в форме разложения в степенной ряд по α и β около точки $\alpha = \beta = 0$, получим

$$r = r_0 + \left(\frac{\partial r}{\partial \alpha}\alpha + \frac{\partial r}{\partial \beta}\beta\right) + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 r}{\partial \alpha^2}\alpha^2 + 2\frac{\partial^2 r}{\partial \alpha \partial \beta}\alpha\beta + \frac{\partial^2 r}{\partial \beta^2}\beta^2\right) +$$

$$+ \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial^3 r}{\partial \alpha^3}\alpha^3 + 3\frac{\partial^3 r}{\partial \alpha^2 \partial \beta}\alpha^2\beta + \cdots\right) + \cdots,$$

где все производные вычисляются в точке $\alpha = \beta = 0$. С помощью деривационных формул третий и все последующие члены этого ряда выражаются через $\frac{\partial r}{\partial \alpha}$ и $\frac{\partial r}{\partial \beta}$.

Таким образом, при заданных зависимостях от α и β коэффициентов первой и второй квадратичных форм уравнение поверхности определено с точностью до значений r_0, $\frac{\partial r}{\partial \alpha}$ и $\frac{\partial r}{\partial \beta}$ в точке $\alpha = \beta = 0$. Но r_0 определяет положение начала координат в пространстве, а, $\frac{\partial r}{\partial \alpha}$ и $\frac{\partial r}{\partial \beta}$ (или, что то же, t_1 и t_2)—ориентировку поверхности. Для того чтобы коэффициенты первой и второй квадратичных форм определяли непрерывную поверхность, они должны удовлетворить некоторым условиям.

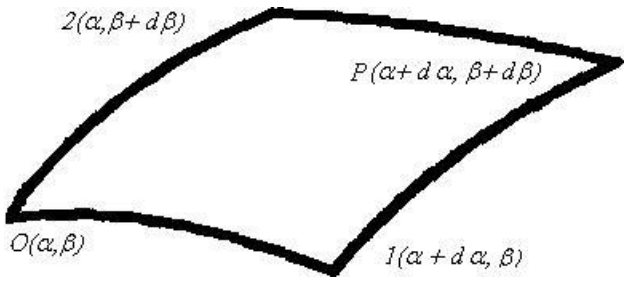


Рис. 2.9

Чтобы вывести эти условия, рассмотрим изменение некоторого вектора при переходе из точки *O* с координатами *α, β* (рис. 2.9) в точку P с координатами *α + dα, β + dβ*. Этот переход может быть выполнен двумя путями — либо через точку *1 (α + dα, β)*, либо через точку *2 (a, β + d β)*.

Пусть вектор постоянной длины *f* жестко связан с локальной координатной системой t_1, t_2, n (в частности, за вектор *f* может быть принят любой из базисных векторов).

При переходе из точки *O* в точку *1* координатный триедр, а с ним и вектор *f* поворачиваются на бесконечно малый угол, величина которого и направление оси поворота характеризуются вектором $d\theta_1 = Ad\alpha\Omega_1$.

При переходе из точки *O* в точку *2* поворот $d\theta_2 = Bd\beta\Omega_2$.

Следовательно, выражение для вектора ***f*,** перенесенного в точку *1*, будет иметь вид

$$f_1 = f + d\theta_1 \times f = f + Ad\alpha\Omega_1 \times f.$$

Поворот триедра при переходе от точки *1* к точке *P*

$$d\theta_{1p} = d\theta_2 + \frac{\partial}{\partial \alpha}(d\theta_2)d\alpha.$$

Таким образом, после перехода из точки *1* в точку *P* получим

$$f_p = f_1 + d\theta_{1P} \times f_1 = f + d\theta_1 \times f + \left[d\theta_2 + \frac{\partial}{\partial \alpha}(d\theta_2) d\alpha \right] \times$$
$$\times (f + d\theta_1 \times f).$$

С другой стороны, переходя из точки *O* сначала в точку *2*, а потом в точку *P*, найдем

$$f_p = f + d\theta_2 \times f + \left[d\theta_1 + \frac{\partial}{\partial \beta}(d\theta_1) d\beta \right] \times (f + d\theta_2 \times f).$$

Приравнивая два выражения для f_p, приводя подобные члена и опуская слагаемые высшего порядка малости, получим

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}(d\theta_2) d\alpha \times f + d\theta_2 \times (d\theta_1 \times f) = \frac{\partial}{\partial \beta}(d\theta_1) d\beta \times f + d\theta_1 \times$$
$$\times (d\theta_2 \times f).$$

Подставив сюда значения векторов $d\theta_1$, $d\theta_2$, придем к равенству

$$\left[\frac{\partial}{\partial \alpha}(B\Omega_2) - \frac{\partial}{\partial \beta}(A\Omega_1) \right] \times f + AB[\Omega_2 \times (\Omega_1 \times f) - \Omega_1 \times (\Omega_2 \times f)] = \quad (2.48)$$
$$= 0.$$

Непосредственным вычислением можно доказать следующее тождество (см. Мышкис А.Д. Лекции по высшей математике. М., «Наука», 1969, с. 201.), справедливое для трех произвольных векторов:

$$\Omega_2 \times (\Omega_1 \times f) - \Omega_1 \times (\Omega_2 \times f) = (\Omega_2 \times \Omega_1) \times f.$$

С другой стороны, используя общее правило дифференцирования векторов, получим

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}(B\Omega_2) = \frac{\partial'}{\partial \alpha}(B\Omega_2) + AB\Omega_1 \times \Omega_2;$$
$$\frac{\partial}{\partial \beta}(B\Omega_1) = \frac{\partial'}{\partial \beta}(B\Omega_1) + AB\Omega_2 \times \Omega_1,$$

где штрихом отмечены локальные производные.

Подставляя полученные выражения в (2.48), придем к соотношению

$$\left[\frac{\partial'}{\partial \alpha}(B\Omega_2) - \frac{\partial'}{\partial \beta}(A\Omega_1) + AB\Omega_1 \times \Omega_2 \right] \times f = 0.$$

Так как это соотношение должно выполняться при произвольном векторе *f*, то выражение в скобках должно тождественно равняться нулю, т. е.

$$\frac{\partial'}{\partial \alpha}(B\Omega_2) - \frac{\partial'}{\partial \beta}(A\Omega_1) + AB\Omega_1 \times \Omega_2 = 0. \quad (2.49)$$

Полученное тождество соответствует трем скалярным. Подставляя в выражение (2.49) значения Ω_1 и Ω_2 по (2.44) и (2.47) и приравнивая нулю коэффициенты при t_1, t_2 и n в отдельности, получим

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{B}{R_2'}\right)+\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{A}{R_{12}}\right)-\frac{1}{R_1'}\cdot\frac{\partial B}{\partial\alpha}+\frac{1}{R_{12}}\cdot\frac{\partial A}{\partial\beta}=0;$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{B}{R_{12}}\right)+\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{A}{R_1'}\right)-\frac{1}{R_2'}\cdot\frac{\partial A}{\partial\beta}+\frac{1}{R_{12}}\cdot\frac{\partial B}{\partial\alpha}=0; \quad (2.50)$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\partial B}{A\partial\alpha}\right)+\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\partial A}{B\partial\beta}\right)+AB\left(\frac{1}{R_1'R_2'}-\frac{1}{R_{12}^2}\right)=0; \quad (2.51)$$

Уравнения (2.50) называют уравнениями Кодацци, а уравнение (2.51) — уравнением Гаусса. Это последнее уравнение, которое можно переписать в виде

$$\frac{1}{AB}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\partial B}{A\partial\alpha}\right)+\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\partial A}{B\partial\beta}\right)\right]=-\left(\frac{1}{R_1'R_2'}-\frac{1}{R_{12}^2}\right),$$

устанавливает непосредственную связь между параметрами Ламе и гауссовой кривизной поверхности.

Так как параметры Ламе определяют длины линий на поверхности, то отсюда следует, что поверхность может быть деформирована (изогнута) без растяжения только при сохранении ее гауссовой кривизны.

В частности, на плоскость могут быть развернуты без растяжений только поверхности нулевой гауссовой кривизны (цилиндр, конус).

В заключение приведем формулы для наиболее важного случая, когда координатные линии α, β совпадают с линиями кривизны $\left(\frac{1}{R_1'}=\frac{1}{R_1};\frac{1}{R_2'}=\frac{1}{R_2};\frac{1}{R_{12}}=0\right)$. В этом случае скорости поворота триедра при движении его с единичной скоростью вдоль α-β-линий соответственно равны (см. (2.44), (2.47):

$$\Omega_1=\frac{1}{R_1}t_2-\frac{1}{AB}\cdot\frac{\partial A}{\partial\beta}n;$$

$$\Omega_2=-\frac{1}{R_2}t_1+\frac{1}{AB}\cdot\frac{\partial B}{\partial\alpha}n. \quad (2.52)$$

Формулы для производных от единичных векторов [см. (2.45), (2.46)]

$$\frac{\partial t_1}{A\partial\alpha}=-\frac{1}{AB}\cdot\frac{\partial A}{\partial\beta}t_2-\frac{1}{R_1}n;\quad \frac{\partial t_1}{B\partial\beta}=\frac{1}{AB}\cdot\frac{\partial B}{\partial\alpha}t_2;$$

$$\frac{\partial t_2}{A\partial\alpha}=\frac{1}{AB}\cdot\frac{\partial A}{\partial\beta}t_1;\quad \frac{\partial t_2}{B\partial\beta}=-\frac{1}{AB}\cdot\frac{\partial B}{\partial\alpha}t_1-\frac{1}{R_2}n; \quad (2.53)$$

$$\frac{\partial n}{A\partial\alpha}=\frac{1}{R_1}t_1;\quad \frac{\partial n}{B\partial\beta}=\frac{1}{R_2}t_2.$$

Уравнения Кодацци—Гаусса [(см. (2.50), (2.51)]

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{B}{R_2}\right)-\frac{1}{R_1}\frac{\partial B}{\partial\alpha}=0;$$

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{A}{R_1}\right)-\frac{1}{R_2}\frac{\partial A}{\partial\beta}=0; \qquad (2.54)$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\partial B}{A\partial\alpha}\right)+\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\partial A}{B\partial\beta}\right)+\frac{AB}{R_1R_2}=0.$$

В частном случае оболочки вращения, отнесенной к системе координат $\alpha = s$, $\beta = \varphi$ (см. с. 221),

$$A=1;\ B=r;\ \frac{1}{R_1}=\frac{d\theta}{ds};\ \frac{1}{R_2}=\frac{\sin\theta}{r};\ \frac{dr}{ds}=\cos\theta.$$

В этом случае

$$\Omega_1=\frac{1}{R_1}t_2;\quad \Omega_2=-\frac{\sin\theta}{r}t_1+\frac{\cos\theta}{r}n; \qquad (2.55)$$

$$\frac{\partial t_1}{\partial s}=-\frac{1}{R_1}n;\quad \frac{\partial t_1}{r\partial\varphi}=\frac{\cos\theta}{r}t_2;$$

$$\frac{\partial t_2}{\partial s}=0;\quad \frac{\partial t_2}{r\partial\varphi}=-\frac{\cos\theta}{r}t_1-\frac{\sin\theta}{r}n; \qquad (2.56)$$

$$\frac{\partial n}{\partial s}=\frac{1}{R_1}t_1;\quad \frac{\partial n}{r\partial\varphi}=\frac{\sin\theta}{r}t_2.$$

Для поверхности вращения первое из уравнений Кодацци — Гаусса приводит к следующей зависимости между кривизнами;

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{f_r}{R_2}\right)-\frac{\cos\theta}{R_1}=0 \text{ или } \left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right)\cos\theta+r\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{R_2}\right)=0, \qquad (2.57)$$

которая тождественно удовлетворяется, если выразить кривизны через θ и r. Из уравнения (2.57) следует, в частности, что в полюсе оболочки ($\theta = 0$, $r = 0$) главные кривизны равны.

Остальные уравнения Кодацци—Гаусса удовлетворяются для поверхности вращения тождественно.

ГЛАВА III

ОСНОВЫ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК

Теория оболочек с произвольной формой срединной поверхности строится на основе тех же гипотез Кирхгоффа—Лява, на которых основаны теория пластин и теория симметрично нагруженных оболочек вращения.

Сформулируем еще раз эти гипотезы.

1. Материальный элемент, нормальный к срединной поверхности оболочки, и после деформации последней остается нормальным к изогнутой срединной поверхности.

2. Изменением длины этого элемента пренебрегают.

3. Нормальные напряжения в площадках, параллельных срединной поверхности, не учитывают.

В соответствии с этими гипотезами деформации во всем объеме материала оболочки полностью определяются деформациями и изменением кривизны ее срединной поверхности, которые, в свою очередь, зависят от перемещений.

В этой главе геометрические зависимости, устанавливающие указанную связь, приведены для случая малых перемещений.

Напряжения в оболочке связаны с деформациями законом Гука, а по напряжениям определяют внутренние силы, приведенные к срединной поверхности.

Система основных уравнений общей теории оболочек, которая замыкается уравнениями равновесия (см. (0.1)), является весьма громоздкой.

§ 1. Деформации и изменения кривизны срединной поверхности

Отнесем срединную поверхность недеформированной оболочки к координатам α, β:

$$r=r(\alpha,\beta) \tag{3.1}$$

причем координатные линии совпадают с линиями кривизны.

Координаты α, β — материальные. Это значит, что точка поверхности, имевшая до деформации координаты α, β, и после деформации характеризуется этими же координатами. При этом сами координатные линии меняют свое положение в пространстве и на деформированной срединной поверхности не являются уже линиями кривизны и не ортогональны.

В результате деформации оболочки точки ее срединной поверхности получают перемещения u(α, β), поэтому уравнение срединной поверхности деформированной оболочки

$$r(\alpha,\beta)+u(\alpha,\beta). \tag{3.2}$$

Деформации элементов поверхности полностью определяются изменением коэффициентов ее первой квадратичной формы.

До деформации

(3.3)

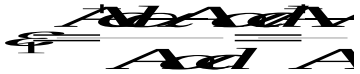
После деформации значения этих коэффициентов (величины, относящиеся к деформированной оболочке, будем отмечать верхним индексом $^{+}$) соответственно равны

(3.4)

Рассмотрим элемент α-линии, концы которого имеют координаты (α, β) и (α+ dα, β).

До деформации длина этого элемента составляет Ada; после деформации — $A^{+}da$.

Таким образом, относительное удлинение в направлении α-линии

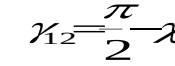


(3.5)

Аналогично, относительное удлинение в направлении β-линии

(3.6)

Деформация сдвига γ_{12} равна изменению первоначально прямого угла между координатными линиями, т. е.



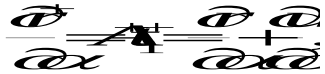
(3.7)

Выведем формулы, связывающие компоненты деформации $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma_{12}$ с перемещениями.

Разложим вектор перемещения u(α, β) по осям координатного базиса t_1, t_2, n,, связанного с точкой недеформированной срединной поверхности:

(3.8)

где компоненты перемещения *u,* u, *w* являются функциями α и β. Вычислим производную



где t_1^{+} — единичный вектор касательной к α -линии деформированной оболочки; $\frac{\partial r}{\partial \alpha} = At_1$.

При вычислении производной $\frac{\partial u}{\partial \alpha}$, воспользуемся правилом дифференцирования векторов (2.13)

Подставив значения Ω_1 по формуле (2.52) и *u* по формуле (3.8), окончательно получим

(3.9)

где

$$e_1 = \frac{\partial u}{A\partial\alpha} + \frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}v + \frac{w}{R_1};$$
$$\omega_1 = \frac{\partial v}{A\partial\alpha} - \frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}u; \qquad (3.10)$$
$$\vartheta_1 = \frac{u}{R_1} - \frac{\partial w}{A\partial\alpha}.$$

Аналогично вычислим производную

(3.11)

где

$$e_2 = \frac{\partial u}{B\partial\beta} + \frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}u + \frac{w}{R_2};$$
$$\omega_2 = \frac{\partial u}{B\partial\beta} - \frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}v; \qquad (3.12)$$
$$\vartheta_2 = \frac{v}{R_2} - \frac{\partial w}{B\partial\beta}.$$

Приведенные выкладки справедливы при произвольной величине перемещений и деформаций. Далее будем считать, что деформации ($\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma_{12}$) пренебрежимо малы по сравнению с единицей. Положим также (и это значительно более сильное ограничение), что углы поворота всех линейных элементов оболочки в процессе ее деформации малы настолько, что их квадратами также можно пренебречь по сравнению с самими углами. В этом случае косинусы углов между соответствующими направлениями до и после деформации можно принять равными единице, т. е.

(3.13)

Сделанное предположение о малости перемещений позволяет сформулировать л и н е й н у ю т е о р и ю о б о л о ч е к .

Умножим обе части равенства (3.9) скалярно на t_1; тогда $A_1^+ t_1^+ = A(1+e)$ или, в соответствии с (3.13), $A^+ = A(1+e)$.

Сопоставляя эту формулу с формулой (3.5), находим, что относительное удлинение в направлении α-линии

(3.14)

Аналогично,

(3.15)

Подставив A^+ в левую часть равенства (3.9), получим вектор касательной к деформированной α-линии

Так как деформации малы, то величиной $e_1 \approx \varepsilon_1$ следует пренебречь по сравнению с единицей. Тогда

(3.16)

и аналогично.

(3.17)

Из формул (3.16) и (3.17) видно, что величины $\omega_1 \vartheta_1 \omega_2 \vartheta_2$ представляют собой проекции на соответствующие оси малых углов поворота векторов t_1 и t_2 при деформации оболочки.

Вычислим

$$\cos\gamma_{12}^{+} = t_1^{+} t_2^{+}$$

В этом выражении вследствие малости перемещений следует опустить нелинейное слагаемое $\vartheta_1 \vartheta_2$.

Так как в соответствии с равенством (3.7) $\chi^{+} = \frac{\pi}{2} - \gamma_{12}$, то $\cos\gamma_{12}^{+} = \sin\gamma_{12}$, поэтому деформация сдвига

$$\gamma_{12} = \left[\quad \right] \tag{3.18}$$

или

$$\gamma_{12} = \left[\quad \right] \tag{3.19}$$

Если отбросить предположение о малости поворотов и сохранить лишь условия малости деформаций, т. е.

$$\varepsilon_1 \ll 1 \quad \varepsilon_2 \ll 1 \quad \chi_{12} \ll 1$$

то можно получить формулы, определяющие компоненты деформаций, возведением в квадрат левой и правой частей равенств (3.9) и (3.11), а также их почленным перемножением. Полагая затем

$$\left(\frac{A^{+}}{A}\right)^2 = (1+\varepsilon_1)^2 \approx 1 + 2\varepsilon_1;$$

$$\left(\frac{B^{+}}{B}\right)^2 = (1+\varepsilon_2)^2 \approx 1 + 2\varepsilon_2;$$

$$t_1^{+} t_2^{+} = \sin\gamma_{12} \approx \gamma_{12},$$

придем к следующим зависимостям:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= e_1 + \frac{1}{2}\left(e_1^2 + \omega_1^2 + \vartheta_1^2\right), \\ \varepsilon_2 &= e_2 + \frac{1}{2}\left(e_2^2 + \omega_2^2 + \vartheta_2^2\right), \\ \gamma_{12} &= (1+e_1)\omega_2 + (1+e_2)\omega_1 + \vartheta_1\vartheta_2. \end{aligned} \tag{3.20}$$

В отличие от формул (3.14), (3.15) и (3.18) формулы (3.20) справедливы при произвольных поворотах, но малых деформациях.

Перейдем теперь к определению изменения кривизны срединной поверхности оболочки.

Вектор нормали к деформированной поверхности

$$n^{+} = \frac{1}{\sin\gamma_{12}^{+}}\left(t_1^{+} \times t_2^{+}\right)$$

Принимая в связи с малостью деформаций $\sin\gamma_{12}^{+} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \chi_{12}\right)$ подставляя выражения (3.16) и (3.17) и выполняя умножение, получаем

$$n^{+} = n + \vartheta_1 + \vartheta_2, \tag{3.21}$$

где нелинейные слагаемые опущены.

Для определения кривизны $\frac{1}{R_1^+} = \frac{1}{(A)^2} L^+$ нужно предварительно вычислить $L^+ = \frac{\partial r^+}{\partial \alpha^2} n^+$.

Удобнее, однако, воспользоваться несколько иной формулой. Так как векторы $\frac{\partial r^+}{\partial \alpha} = A^+ t_1^+$ и n^+ ортогональны, то $\frac{\partial r^+}{\partial \alpha} n^+ = 0$.

Дифференцируя по α это тождество, найдем

$$\frac{\partial r^+}{\partial x} \frac{\partial n^+}{\partial \alpha} = -\frac{\partial^2 r^+}{\partial \alpha \partial x} n^+ = -A_1^+ n^+$$

Тогда

$$\frac{1}{R_1^+} = \frac{1}{A} t_1^+ \frac{\partial n^+}{\partial \alpha}. \qquad (3.22)$$

Дифференцируя выражение (3.21) для n^+ по α, определим

$$\frac{\partial n^+}{\partial x} = \left[\left(\frac{1}{R_1} \right) \right] \qquad (3.23)$$

где

$$\chi_1 = \frac{\partial \vartheta_1}{A \partial \alpha} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \vartheta_2;$$

$$\tau_1 = \frac{\partial \vartheta_2}{A \partial \alpha} - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \vartheta_1.$$

Подставляя в формулу (3.22) полученное значение $\frac{\partial n^+}{\partial \alpha}$ и значение t_1^+ по равенству (3.16), получим, отбрасывая нелинейные слагаемые,

$$\frac{1}{R_1^+} = \frac{A}{A} \left(\frac{1}{R_1} + \chi_1 \right). \qquad (3.24)$$

Так как $\frac{A}{A} = \frac{1}{1+\varepsilon_1} \approx 1 - \varepsilon_1$, то окончательно придем к следующей линейной формуле:

$$\frac{1}{R_1^+} = \frac{1}{R_1} - \frac{\varepsilon_1}{R_1} + \chi_1 \qquad (3.25)$$

Ввиду малости деформаций слагаемое $\frac{\varepsilon_1}{R_1}$, как правило, несущественно по сравнению с χ_1, и можно считать, что кривизна нормального сечения, касательного к α-линии, увеличивается на величину χ_1.

Проводя точно такие же выкладки для определения кривизны сечения, касательного к β-линии, получим

$$\frac{1}{R_2^+}=\frac{1}{R_2}-\frac{\varepsilon_2}{R}+\varkappa_2 \tag{3.26}$$

где

$$\varkappa_2=\frac{\partial\vartheta_2}{B\partial\beta}+\frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\vartheta_1 \tag{3.27}$$

Перейдем к определению величины

$$\frac{1}{R_{12}^+}=\frac{1}{AB}\frac{\partial^2 r^+}{\partial\alpha\partial\beta}\cdot$$

Используя тождества $\frac{\partial^+}{\partial\alpha}n^+=0$ и $\frac{\partial^+}{\partial\beta}n^+=0$, эту величину можно представить в виде

$$\frac{1}{R_{12}^+}=\frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\partial r^+}{\partial\beta}\right)=\frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\partial r}{\partial\beta}+\varepsilon_{12}\frac{\partial n}{\partial\beta}\right) \tag{3.28}$$

или

$$\frac{1}{R_{12}^+}=\frac{1}{B}\frac{\partial t_2^+}{\partial\alpha} \tag{3.29}$$

Подставляя в формулу (3.28) значения t_2^+ и $\frac{\partial n^+}{\partial\alpha}$ и отбрасывая нелинейные слагаемые, получим

$$\frac{1}{R_{12}^+}=\varkappa_{12}, \tag{3.30}$$

где

$$\varkappa_{12}=\tau_1+\frac{\omega}{R_1}\cdot \tag{3.31}$$

Если бы мы исходили из формулы (3.29), а не (3.28), то получили бы

$$\varkappa_{12}=\tau_2+\frac{\omega}{R_2}, \tag{3.32}$$

где $\tau_2=\frac{\partial\vartheta_1}{B\partial\beta}+\frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\vartheta_2\cdot$

Нетрудно показать, используя выражения $\vartheta_1,\vartheta_2,\omega_1,\omega_2$ через компоненты перемещений и учитывая соотношения Кодацци—Гаусса, что значения $\varkappa_{12}$, определенные (3.31) и (3.32), совпадают тождественно [см. ниже последнюю из формул (3.33)].

Введенные выше величины $\varkappa_1,\varkappa_2,\varkappa_{12}$ называются параметрами изменения кривизны срединной поверхности.

Приведем формулы, выражающие зависимость деформаций срединной поверхности и параметров изменения ее кривизны от компонентов перемещения:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{A}\cdot\frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB}\cdot\frac{\partial A}{\partial \beta}v + \frac{w}{R_1};$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{B}\cdot\frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{1}{AB}\cdot\frac{\partial B}{\partial \alpha}u + \frac{w}{R_2};$$

$$\gamma_{12} = \frac{B}{A}\cdot\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{v}{B}\right) + \frac{A}{B}\cdot\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{u}{A}\right);$$

$$\chi_1 = -\frac{\partial}{A\partial \alpha}\left(\frac{\partial w}{A\partial \alpha} - \frac{u}{R_1}\right) - \frac{1}{AB}\cdot\frac{\partial A}{\partial \beta}\left(\frac{\partial w}{B\partial \beta} - \frac{v}{R_2}\right); \qquad (3.33)$$

$$\chi_2 = -\frac{\partial}{B\partial \beta}\left(\frac{\partial w}{B\partial \beta} - \frac{v}{R_2}\right) - \frac{1}{AB}\cdot\frac{\partial B}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial w}{A\partial \alpha} - \frac{u}{R_1}\right);$$

$$\chi_{12} = -\frac{1}{AB}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{1}{A}\cdot\frac{\partial A}{\partial \beta}\cdot\frac{\partial w}{\partial \alpha} - \frac{1}{B}\cdot\frac{\partial B}{\partial \alpha}\cdot\frac{\partial w}{\partial \beta}\right) +$$

$$+ \frac{1}{R_1}\cdot\frac{A}{B}\cdot\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{u}{A}\right) + \frac{1}{R_2}\cdot\frac{B}{A}\cdot\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{v}{B}\right).$$

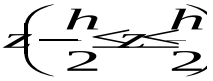
Шесть величин, определяющих деформации срединной поверхности оболочки и изменения ее кривизны ($\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma_{12}, \chi_1, \chi_2, \chi_{12}$). выражаются с помощью уравнений (3.33) через три компонента (u, *v*, w) вектора перемещения. Поэтому между упомянутыми шестью величинами имеются некоторые тождественные соотношения. Смысл этих соотношений — у с л о в и й с о в м е с т н о с т и д е ф о р м а ц и й — состоит в том, что элементы срединной поверхности, получившие деформации $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma_{12}$ и изменения кривизны и кручения $\chi_1, \chi_2, \chi_{12}$ должны составлять единую непрерывную поверхность. Проще всего получить эти соотношения, потребовав, чтобы коэффициенты, характеризующие первую и вторую квадратичные формы деформированной поверхности ($A_1, B_1, \alpha_1, \beta_1, R_{11}, R_{21}, R_{12}$) удовлетворяли уравнениям Кодацци—Гаусса. Именно таким образом условия совместности деформации были получены А. Л. Гольденвейзером [29]. Однако при выводе нельзя использовать условия Кодацци—Гаусса в форме (2.50), (2.51), так как они записаны для частного случая ортогональной координатной сети, линии же α, β на деформированной поверхности не ортогональны.

Приведем условия совместности деформаций без вывода:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}(\chi_2 B)-\frac{1}{A}\cdot\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\chi_{12}A^2\right)-\frac{\partial B}{\partial\alpha}\chi_1+\frac{1}{R_2}\cdot\frac{\partial A}{\partial\beta}\gamma_{12}+$$
$$+\frac{1}{R_1}\left[-\frac{\partial}{\partial\alpha}(\varepsilon_2 B)+\frac{\partial B}{\partial\alpha}\varepsilon_1+\frac{\partial}{\partial\beta}(\gamma_{12}A)\right]=0;$$
$$\frac{\partial}{\partial\alpha}(\chi_1 A)-\frac{1}{B}\cdot\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\chi_{12}B^2\right)-\frac{\partial A}{\partial\beta}\chi_2+\frac{1}{R_1}\cdot\frac{\partial B}{\partial\alpha}\gamma_{12}+$$
$$+\frac{1}{R_2}\left[-\frac{\partial}{\partial\beta}(\varepsilon_1 A)+\frac{\partial A}{\partial\beta}\varepsilon_2+\frac{\partial}{\partial\alpha}(\gamma_{12}B)\right]=0; \qquad (3.34)$$
$$\frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left\{\frac{1}{A}\left[-\frac{\partial}{\partial\alpha}(\varepsilon_2 B)+\frac{\partial B}{\partial\alpha}\varepsilon_1+\frac{1}{2A}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\gamma_{12}A^2\right)\right]\right\}+$$
$$+\frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\beta}\left\{\frac{1}{B}\left[-\frac{\partial}{\partial\beta}(\varepsilon_1 A)+\frac{\partial A}{\partial\beta}\varepsilon_2+\frac{1}{2B}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\gamma_{12}B^2\right)\right]\right\}-$$
$$-\frac{\chi_2}{R_1}-\frac{\chi_1}{R_2}=0.$$

Так же. как и в других задачах теории упругости, условия совместности деформаций (3.34) используют только при решении задач в усилиях-деформациях. При решении задач в перемещениях эти условия выполняются тождественно. В этом можно убедиться, подставив в уравнения (3.34) выражения деформаций и параметров изменения кривизны согласно формулам (3.33). При преобразованиях следует воспользоваться уравнениями Кодацци—Гаусса (2.50), (2.51).

§ 2. Деформации эквидистантного слоя

Рассмотрим в теле оболочки поверхность, отстоящую на постоянном расстоянии  от срединной (эквидистантную поверхность). Положение точки на этой поверхности будем характеризовать координатами α и β, такими же, как для лежащей с ней на одной нормали точки срединной поверхности.

В соответствии с гипотезой Кирхгоффа точки, лежащие на одной нормали к срединной поверхности, остаются после деформации на этой же нормали. Поэтому координаты α, β являются материальными и для эквидистантной поверхности.

Уравнение эквидистантной поверхности в недеформированной оболочке можно записать в виде < Величины, относящиеся к эквидистантной поверхности, имеют индекс z>:

Используя формулы, приведенные в главе 2, можно установить, что если α-, β-линии на срединной поверхности совпадают с линиями кривизны, то на эквидистантной поверхности они ортогональны, а коэффициенты первой квадратичной формы

(3.35)

После деформации оболочки уравнение эквидистантной поверхности принимает вид

$$r_z^+ = r^+ + z n^+, \qquad (3.36)$$

где r^+ и n^+ — радиус-вектор и орт нормали к деформированной срединной поверхности [см. формулы (3.2) и (3.21)].

Определим единичные векторы, касательные к α- и β-линиям эквидистантной поверхности, и коэффициенты ее первой квадратичной формы. В соответствии с формулами (2.16) имеем

$$A_z^+ = \frac{\partial r_z^+}{\partial \alpha} = \frac{\partial r^+}{\partial \alpha} + z\frac{\partial n^+}{\partial \alpha}; \qquad (3.37)$$

где $\frac{\partial r^+}{\partial \alpha} = A^+ t_1^+$.

Умножим обе части равенства (3.37) скалярно на t_1^+ и учтем, что в связи с малостью поворотов углы между векторами t_1^+ и t_{1z}^+ малы, так что косинусы этих углов можно принять равными единице, т. е.

$$t_{1z}^+ t_1^+ \approx 1.$$

В результате

$$A_z = A + z\frac{\partial n^+}{\partial \alpha} t_1^+$$

или, с учетом формулы (3.22),

$$A_z = A\left(1 + \frac{z}{R_1'^+}\right).$$

Подставляя значение $\frac{1}{R_1'^+}$ по формуле (3.24) и учитывая, что $\left(1 + \frac{z}{R_1}\right) = A^+ A (a_1 + \varkappa_1 z)$, получим

$$A_z = A\left[1 + \frac{1}{1 + \frac{z}{R_1}}(\varepsilon_1 + \varkappa_1 z)\right].$$

Отсюда следует, что относительное удлинение эквидистантного слоя в α - направлении

$$\varepsilon_1 = \frac{A_z - A}{A_z} = \frac{1}{1 + \frac{z}{R_1}}(\varepsilon_1 + \varkappa_1 z). \qquad (3.38)$$

Аналогично определяем удлинение эквидистантного слоя в β-направлении:

$$\varepsilon_2 = \frac{B_z - B}{B_z} = \frac{1}{1 + \frac{z}{R_2}}(\varepsilon_2 + \varkappa_2 z). \qquad (3.38)$$

Как видно из формул (3.38) и (3.39), деформации распределены по толщине стенки по гиперболическому закону. Этот результат явился естественным следствием того, что при выводе учитывали различие начальных длин волокон (A и A_z, B и B_z), находящихся на разном расстоянии z от срединной поверхности. Аналогичная ситуация имеет место и при изгибе кривого бруса. Но, как известно, уже при отношении толщины бруса к радиусу его кривизны $h/R \prec \frac{1}{10}$ распределение деформаций по толщине практически не отличается от линейного, и расчет бруса малой кривизны можно вести по формулам изгиба прямого бруса.

Для оболочек обычно отношение толщины к наименьшему радиусу кривизны $h/R_{\min} \prec \frac{1}{50}$ поэтому отношение z/*R* не превышает 1%. Следует также иметь в виду, что основные гипотезы теории оболочек (и, в частности, гипотезы Кирхгоффа) приближенные и заранее обусловливают погрешность теории порядка $h/R_{\min}$. Поэтому сохранение в выражениях (3.38) и (3.39) слагаемых порядка h/R_1, h/R_2 по сравнению с единицей не оправдано, и эти формулы можно записать в виде

$$\varepsilon_{1z} = \varepsilon_1 + \chi_1 z; \quad \varepsilon_{2z} = \varepsilon_2 + \chi_2 z \qquad (3.40)$$

При этом нельзя утверждать, что линейные по z формулы (3.40) менее точны, чем формулы (3.38) и (3.39).

Впрочем, и формулы (3.40) не являются единственно возможными линейными по z зависимостями. Используя разложение

$$\frac{1}{1+\frac{z}{R_1}} = 1 - \frac{z}{R_1} + \frac{z^2}{R_1^2} - \dots,$$

можно зависимости (3.38) и (3.39) после отбрасывания нелинейных по z слагаемых привести к виду

$$\varepsilon_{1z} = \varepsilon_1 + \left(\chi_1 - \frac{\varepsilon_1}{R_1}\right) z; \quad \varepsilon_{2z} = \varepsilon_2 + \left(\chi_2 - \frac{\varepsilon_2}{R_2}\right) z \qquad (3.41)$$

Эти формулы не отличаются практически от всех приведенных выше, так как слагаемые $\frac{\varepsilon_i}{R_i} z$ (i= 1, 2) малы по сравнению с ε_i. Однако они показывают, что в зависимостях (3.33) для χ_1 и χ_2 можно без изменения их точности добавлять слагаемые порядка $\frac{\varepsilon_i}{R_i}$.

В некоторых случаях это позволяет привести окончательные формулы к более простому виду.

Для определения сдвига γ_{12z} на эквидистантной поверхности вычислим косинус угла ($\frac{\pi}{2} - \gamma$) между векторами t_{1z}^+ и t_{2z}^+:

Используя формулу (3.37) и аналогичную формулу для $\frac{\partial r^+}{\partial \beta}$, найдем

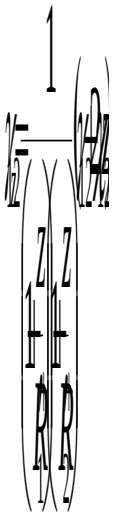
Далее, учитывая соотношения

$$\frac{\partial^2 r^+}{\partial\alpha\partial\beta} = A_1^+ B_2^+ t_{12}^+ = A_1^+ B_2^+ \chi_{12}^+,$$

$$\frac{\partial^2 r^+}{\partial\alpha\partial\beta} = \frac{\partial^2 r^+}{\partial\beta\partial\alpha} = \frac{\partial^2 r^+}{\partial\alpha\partial\beta} n^+ = \frac{A_1^+ B_2^+}{R_2^+} = A_1^+ B_2^+ \chi_{12}^+;$$

$$A_z^+ = A_1^+ \left(1 + \frac{z}{R_1^+}\right); \quad B_z^+ = B_2^+ \left(1 + \frac{z}{R_2^+}\right),$$

получаем



Заметим, что так как $\frac{1}{R_i^+} = \frac{1+\varepsilon_i}{R_i} + \lambda_i$ (i = 1, 2), то, пренебрегая нелинейными в зависимости от компонентов деформации и параметров изменения кривизны членами, полученную формулу можно записать в виде

$$\varkappa_{12} = \frac{1}{\left(1+\frac{z}{R_1}\right)\left(1+\frac{z}{R_2}\right)}\left(\varkappa_{12}+\frac{\tau_{13}}{G_1}\frac{\tau_{23}}{G_2}\right) \qquad (3.42)$$

В связи с малостью $\frac{z}{R_1}$ и $\frac{z}{R_2}$ формулу (3.42) можно упростить; тогда

$$\varkappa_{12} = \varkappa_{12} + 2\varkappa_{12}. \qquad (3.43)$$

Наряду с выражениями (3.42) и (3.43) можно использовать и формулу, полученную разложением $\left(1+\frac{z}{R_i}\right)^{-1}$ в ряды с учетом в окончательном выражении только линейных по z членов.

$$\varkappa_{12} = \varkappa_{12} - 2\varkappa_{12} + \varkappa_{12}^{+} \qquad (3.44)$$

где

$$\varkappa_{12}^{+} = \varkappa_{12}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right).$$

Формулы (3.42)—(3.44) одинаково точны. Они показывают, что величину $\varkappa_{12}$ можно вычислять о точностью до слагаемых порядка $\frac{\gamma_{12}}{R_1}, \frac{\gamma_{12}}{R_2}$. Использование тех или иных формул определяется лишь простотой выкладок.

§3. Напряжения в нормальных сечениях оболочки. Силы и моменты. Энергия деформации

Рассмотрим бесконечно малый элемент, вырезанный из оболочки двумя парами нормальных сечений по α- и β- линиям и двумя близкими эквидистантными поверхностями. Напряженное состояние этого элемента характеризуется шестью компонентами напряжений ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_{12}, \tau_{13}, \tau_{23}$), которые связаны с деформациями элемента известными соотношениями закона Гука.

Однако деформации элемента оболочки, полученные в предыдущем разделе на основе кинематических гипотез Кирхгоффа, не позволяют полностью определить напряженное состояние. Согласно этим гипотезам деформации $\gamma_{13}, \gamma_{23}, \varepsilon_3$ считались равными нулю. Поэтому с помощью закона Гука нельзя связать с перемещениями касательные напряжения τ_{13}, τ_{23} и нормальное напряжение σ_3. Предполагаем, что нормальное напряжение σ_3 мало по сравнению с напряжениями σ_1, σ_2. Эта гипотеза оправдывается тем, что на внешней и внутренней поверхностях оболочки напряжение σ_3 равно интенсивности внешней нормальной нагрузки. В связи с малой толщиной оболочки таков же порядок σ_3 и во внутренних ее точках. В то же время напряжения σ_1 и σ_2 имеют порядок, по крайней мере в R/h раз больший. Поэтому в уравнениях закона Гука

$$\varepsilon_z=\frac{1}{E}(\sigma-\mu_2\sigma-\mu_3\sigma)$$

$$\varepsilon_z=\frac{1}{E}(\sigma_2-\mu_1\sigma-\mu_3\sigma)$$

величиной σ_3 можно пренебречь. Тогда напряжения σ_1 и σ_2 выражаются через деформации по формулам

$$\sigma_1=\frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_z+\mu\varepsilon_z);$$

$$\sigma_2=\frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_z+\mu\varepsilon_z).$$

К этим формулам следует присоединить формулу для касательного напряжения

$$\tau_{12}=\frac{1}{2}\frac{E}{1+\mu}\gamma_{12}.$$

Подставляя в полученные формулы выражения (3.40) и (3.43) для компонентов деформации, получим

$$\sigma_1=\frac{E}{1-\mu^2}[\varepsilon_1+\mu\varepsilon_2+(\chi_1+\mu\chi_2)z];$$

$$\sigma_2=\frac{E}{1-\mu^2}[\varepsilon_2+\mu\varepsilon_1+(\chi_2+\mu\chi_1)z]; \qquad (3.45)$$

$$\tau_{13}=(1-\mu)\frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{1}{2}\gamma_{12}+\chi_{12}z\right)$$

Силы, действующие в нормальных сечениях оболочки, приводят к срединной поверхности. Так, напряжения σ_1 (рис. 3.1, *а)* обусловливают отнесенные к единице длины сечения срединной поверхности усилие T_1(рис. 3.1, *б)* и момент M_1 (рис. 3.1, *в).* Из условия статической эквивалентности системы напряжений σ_1, в сечении, нормальном к α-линии, погонного усилия T_1 и момента M_1 получаем

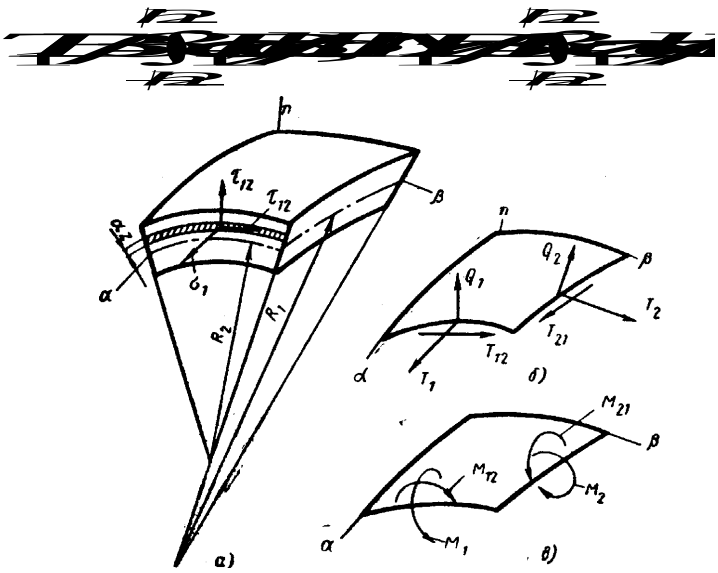


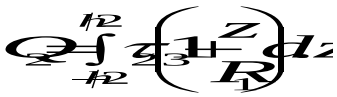
Рис. 3.1

Учитывая, что $B_2=B\left(1+\frac{z}{R_2}\right)$, находим

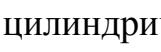
Аналогично, сдвигающее усилие T_{12} и крутящий момент M_{12}, обусловленные напряжениями τ_{12} , в сечении, нормальном к α-линии, определяются формулами

В том же сечении действует и поперечная сила интенсивности

Интенсивности сил и моментов в сечении, нормальном к β-линии,



Так как при определении деформаций (а значит, и напряжений) уже пренебрегали слагаемыми порядка z/R_i по сравнению с единицей, то множитель $(1+z/R_i)$ в формулах для сил и моментов можно опустить. Таким образом получим после подстановки напряжений σ_1 и σ_2 по соотношениям (3.45) следующие выражения для нормальных сил и изгибающих моментов:

где  - цилиндрическая жесткость.

Пренебрежение множителями $(1+z/R_i)$ в формулах для сдвигающих сил $T_{12,}$. T_{21} и крутящих моментов M_{12}, M_{21} может привести к недоразумениям.

Дело в том, что парность касательных напряжений ($\tau_{21}=\tau_{12}$) выражает одно из условий равновесия элемента $A_z\ d\alpha B_z d\beta dz$ слоя, а именно — условие равенства нулю суммы моментов, приложенных к элементу сил относительно нормали к слою. Уравновешенность каждого элементарного слоя автоматически влечет за собой выполнение соответствующего условия равновесия (суммы моментов относительно нормали к срединной поверхности) для элемента оболочки в целом.

Если при определении M_{12}, M_{21}, T_{12}, T_{21} пренебречь множителями $(1+z/R_i)$ под интегралом, то условие равновесия элемента оболочки, выраженное через силы и моменты, нарушается.

В некоторых задачах это может привести к ошибкам. Наиболее простой вариант преодоления этой трудности предложен Л. И. Балабухом и В. В.

Новожиловым. Он состоит в следующем. В выражениях для моментов M_{12}, M_{21} множители $(1+z/R_i)$ не учитывают, а в выражениях для сил T_{12} и T_{21} сохраняют.

В этом случае получают соотношения

$$M_{12}= M_{21}=H;$$

где

Этими формулами мы и будем пользоваться в дальнейшем. Итак, силы и моменты в нормальных сечениях оболочки связаны с компонентами деформации срединной поверхности и параметрами изменения ее кривизны зависимостями

$$\begin{aligned}
T_1 &= \frac{Eh}{1-\mu^2}(\varepsilon_1+\mu\varepsilon_2); \quad M_1 = D(\chi_1+\mu\chi_2);\\
T_2 &= \frac{Eh}{1-\mu^2}(\varepsilon_2+\mu\varepsilon_1); \quad M_2 = D(\chi_2+\mu\chi_1);\\
T_{12} &= S+\frac{H}{R_2}; \quad \mathrm{M_{12}=M_{21}=H};\\
T_{21} &= S+\frac{H}{R_1}; \quad H = D(1-\mu)\chi_{12};\\
S &= \frac{Eh}{2(1+\mu)}\gamma_{12},
\end{aligned} \tag{3.46}$$

где $D=\frac{Eh}{1(1-\mu^2)}$.

Приведем еще формулы для вычисления напряжений в зависимости от сил и моментов. Эти формулы легко получить из уравнений (3.45), если выразить в них деформации и параметры изменения кривизны через силы и моменты, т. е.

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= \frac{T_1}{h}+\frac{12M_1}{h^3}z;\\
\sigma_2 &= \frac{T_2}{h}+\frac{12M_2}{h^3}z;\\
\tau_{12} &= \frac{S}{h}+\frac{12H}{h^3}z.
\end{aligned} \tag{3.47}$$

Энергию деформации оболочки вычислим, используя те же гипотезы, что и при формулировке уравнений упругости (3.45), т. е. не будем учитывать нормальные напряжения σ_3 и касательные напряжения τ_{13}, τ_{23}.

Поэтому плотность энергии деформации (энергию в единице объема) можно подсчитать по формуле для двухосного напряженного состояния

или

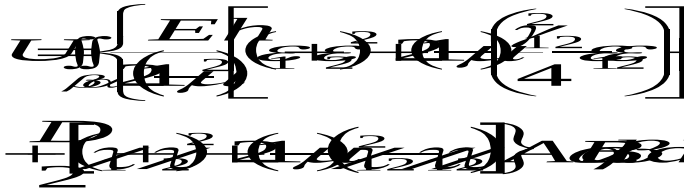
Учитывая, что $G=\frac{E}{2(1+\mu)}$, последнюю формулу удобнее представить в виде

Подставив сюда выражения (3.40), (3.43), получим

Для вычисления полной энергии деформации оболочки плотность энергии надо умножить на элементарный объем слоя

и проинтегрировать по толщине оболочки $\left(-\frac{h}{2}\le z\le\frac{h}{2}\right)$ и по площади ее срединной поверхности.

С той же точностью, которую принимали при выводе значений компонентов деформации, в выражении для элемента объема можно пренебречь малыми величинами $z/R_1, z/R_2$. Тогда, выполняя интегрирование по z от $-\frac{h}{2}$ до $\frac{h}{2}$, получим следующее выражение для энергии деформации оболочки:



(3.48)

Первое слагаемое в фигурных скобках выражает энергию мембранной деформации оболочки, второе — энергию ее изгиба.

Используя уравнения упругости, можно энергию деформации оболочки выразить также через силы и моменты:

(3.49)

Наконец, энергию деформации можно вычислять и по формуле

(3.50)

Формулы (3.48)—(3.50) справедливы для оболочек как с постоянной, так и с переменной толщиной стенки.

§ 4. Равновесие элемента оболочки. Граничные условия. Статико-геометрическая аналогия

Рассмотрим равновесие элемента оболочки, ограниченного двумя парами нормальных сечений, проходящих через α- и β- линии (рис. 3.2, а) (напомним,

что α- и β-линии совпадают в линиями кривизны).

Силы (отнесенные к единице длины сечения срединной поверхности) показаны на рис.3.1, *б*, а моменты — на рис. 3.1, *в*.

В сечении, нормаль к которому совпадает с α-линией, действуют сила и момент (запишем их в векторной форме — см. рис. 3.2, б):

$$T(T_1, T_2, Q), \quad M(M_1, M_2, H) \tag{3.51}$$

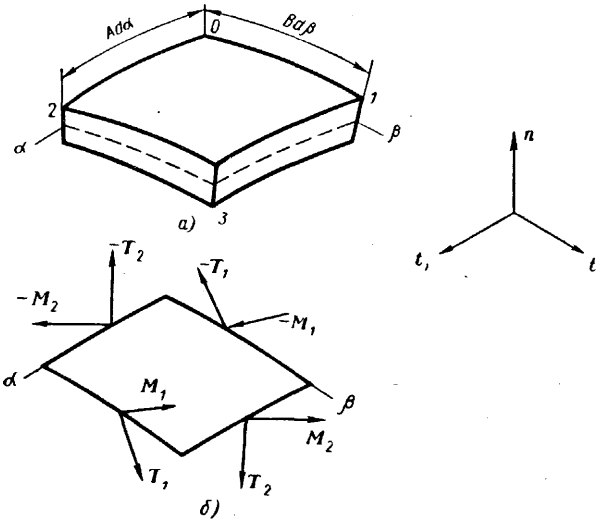


Рис. 3.2.

В сечении, нормаль к которому совпадает в β-линией,

$$T(T_{12}, T_2, Q), \quad M(M_{12}, M_2, H) \tag{3.52}$$

Знаки сил и моментов в приведенных формулах соответствуют площадкам, внешние нормали к которым совпадают с положительными направлениями отсчета α и β.

В площадках обратного направления (невидимых на рис. 3.2, *а*) знаки сил и моментов — противоположные.

При составлении уравнений равновесия элемента следует учесть, что силы и моменты в сечениях α, $\alpha + d\alpha$ и β, $\beta + d\beta$ отличаются приращениями. Таким образом, если элемент срединной поверхности ограничен линиями α, $\alpha + d\alpha$, β, $\beta + d\beta$ рис. 3.2, а), то к границе элемента *0, 1* приложены сила — T_1 и момент — M_1, к границе *2, 3* — сила $T_1 + \frac{\partial T_1}{\partial \alpha} d\alpha$ и момент $M_1 + \frac{\partial M_1}{\partial \alpha} d\alpha$, к границе 0, *2* — сила и момент— T_2, —M_2, а к границе 1, 3 $T_2 + \frac{\partial T_2}{\partial \alpha} d\alpha$ и $M_2 + \frac{\partial M_2}{\partial \alpha} d\alpha$. Кроме того, на элемент действует внешняя нагрузка $qA\, d\alpha\, d\beta$, где q – вектор интенсивности поверхностной нагрузки;

$$q = q_1 + q_2 + q. \tag{3.53}$$

Приравнивая нулю векторную сумму всех приложенных к элементу сил, получим

$$\frac{\partial T}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial T_2}{\partial \beta} d\beta + q = 0 \tag{3.54}$$

Уравнение моментов

(3.55)

Третье и четвертое слагаемые в этом уравнении представляют собой моменты пар сил

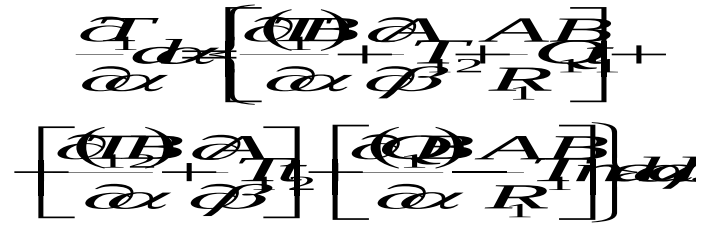
—T_1, T_1 и —T_2, T_2 (силы и $\frac{\partial T_1}{\partial \alpha} d\alpha$ и $\frac{\partial T_2}{\partial \alpha} d\alpha$, а также внешняя нагрузка дают моменты высшего порядка малости).

Каждое из векторных уравнений (3.54) и (3.55) эквивалентно трем скалярным.

Преобразуем уравнение (3.54). Пользуясь правилом дифференцирования векторов, найдем

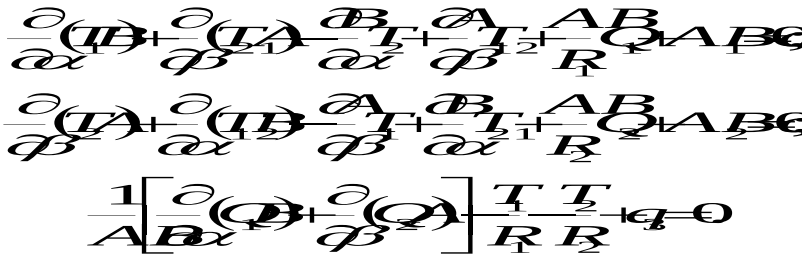
где $\frac{\partial' T_1}{\partial \alpha}$ — локальная производная; Ω_1 — вектор, определяемый по формуле (2.52).

Подставляя в полученное выражение значение вектора T_1 по (3.51) и выполняя векторное умножение, получим



Аналогично,

Подставляя полученные значения в уравнение (3.54) и приравнивая нулю множители при t_1, t_2 и n в отдельности, придем к трем скалярным уравнениям равновесия сил:



(3.56)

Эти уравнения выражают равенство нулю суммы проекций приложенных к элементу сил соответственно на направления t_1, t_2 и n.

Проведем аналогичное преобразование уравнения моментов, для чего вычислим

$$\frac{\partial \vec{M}_1}{\partial \alpha} d\alpha = \left[\frac{\partial \vec{M}_1}{\partial \alpha} + \vec{A}\vec{\Omega}_1 \times \vec{M}_1\right] d\alpha = \left[\frac{\partial (M_1 B)}{\partial \alpha} \vec{t}_2 - \frac{\partial (M_{12} B)}{\partial \alpha} \vec{t}_1 + \right.$$

$$\left. + AB \frac{M_{12}}{R_1} \vec{n} + \frac{\partial A}{\partial \beta} M_1 \vec{t}_1 + \frac{\partial A}{\partial \beta} M_{12} \vec{t}_2 \right] d\alpha d\beta =$$

$$= \left\{ \left[-\frac{\partial (M_{12} B)}{\partial \alpha} + \frac{\partial A}{\partial \beta} M_1 \right] \vec{t}_1 + \left[\frac{\partial (M_1 B)}{\partial \alpha} + \frac{\partial A}{\partial \beta} M_{12} \right] \vec{t}_2 + \frac{AB}{R_1} M_{12} \vec{n} \right\} d\alpha d\beta;$$

$$\frac{\partial \vec{M}_2}{\partial \beta} d\beta = \left[\frac{\partial \vec{M}_2}{\partial \beta} + \vec{B}\vec{\Omega}_2 \times \vec{M}_2\right] d\beta = = \left\{ \left[-\frac{\partial (M_2 A)}{\partial \beta} + \frac{\partial B}{\partial \alpha} M_{21} \right] \vec{t}_1 + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{\partial (M_{21} A)}{\partial \beta} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} M_2 \right] \vec{t}_2 - \frac{AB}{R_2} M_{21} \vec{n} \right\} d\alpha d\beta;$$

$$A d\alpha \vec{t}_1 \times \vec{T}_1 = (T_{12} \vec{n} - Q \vec{t}_2) AB d\alpha d\beta;$$

$$B d\beta \vec{t}_2 \times \vec{T}_2 = (-T_{21} \vec{n} - Q \vec{t}_1) AB d\alpha d\beta.$$

Приравнивая нулю слагаемые уравнения моментов с множителями t_1, t_2 и n в отдельности, получим три скалярные уравнения

$$\frac{1}{AB}\left[\frac{\partial (M_{12} B)}{\partial \alpha} + \frac{\partial (M_2 A)}{\partial \beta} - \frac{\partial A}{\partial \beta} M_1 + \frac{\partial B}{\partial \alpha} M_1\right] - Q = 0;$$

$$\frac{1}{AB}\left[\frac{\partial (M_{21} A)}{\partial \beta} + \frac{\partial (M_1 B)}{\partial \alpha} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} M_2 + \frac{\partial A}{\partial \beta} M_{12}\right] - Q = 0; \qquad (3.57)$$

$$\frac{M_{12}}{R_1} - \frac{M_{21}}{R_2} + T_{12} - T_{21} = 0$$

Уравнения (3.57) выражают условия равенства нулю суммы моментов приложенных к элементу сил относительно осей t_1, t_2 и n.

Нетрудно видеть, что принятые (в соответствии с предложениями Л. И. Балабуха и В. В. Новожилова) соотношения упругости (3.46) для T_{12}, T_{21}, M_{12} и M_{21}, удовлетворяют последнему уравнению равновесия тождественно. Это и было целью учета малых добавок H/R_1 и H/R_2 а в формулах (3.46). С учетом соотношения $M_{12} = M_{21} = H$ уравнения моментов относительно направлений t_1 и t_2 могут быть также записаны в виде

$$\frac{1}{AB}\left[\frac{\partial (M_1 B)}{\partial \alpha} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} M_2 - \frac{1}{A}\frac{\partial (H B)}{\partial \beta} + Q_1\right] = 0;$$

$$\frac{1}{AB}\left[\frac{\partial (M_2 A)}{\partial \beta} - \frac{\partial A}{\partial \beta} M_1 - \frac{1}{B}\frac{\partial (H A)}{\partial \alpha} + Q_2\right] = 0; \qquad (3.58)$$

Уравнения (3.56) и (3.58) представляют собой пять независимых уравнений равновесия элемента оболочки.

Определяя из уравнений (3.58) поперечные силы Q_1 и Q_2, подставляя их значения в уравнения (3.56) и производя в них замену $T_{12} - H/R_2 - T_{21} + H/R_1$ придем к трем уравнениям равновесия в форме

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}(T_1B)+\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\beta}(SA^2)-\frac{\partial B}{\partial\alpha}T_2+\frac{2}{R_2}\frac{\partial A}{\partial\beta}H+$$
$$+\frac{1}{R_1}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}(M_1B)-\frac{\partial B}{\partial\alpha}M_2+2\frac{\partial}{\partial\beta}(HA)\right]+ABq_1=0;$$
$$\frac{\partial}{\partial\beta}(T_2A)+\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\alpha}(SB^2)-\frac{\partial A}{\partial\beta}T_1+\frac{2}{R_1}\frac{\partial B}{\partial\alpha}H+$$
$$+\frac{1}{R_2}\left[\frac{\partial}{\partial\beta}(M_2A)-\frac{\partial A}{\partial\beta}M_1+2\frac{\partial}{\partial\alpha}(HB)\right]+ABq_2=0; \qquad (3.59)$$
$$\frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left\{\frac{1}{A}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}(M_1B)-\frac{\partial B}{\partial\alpha}M_2+\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\beta}(HA^2)\right]\right\}+$$
$$+\frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\beta}\left\{\frac{1}{B}\left[\frac{\partial}{\partial\beta}(M_2A)-\frac{\partial A}{\partial\beta}M_1+\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\alpha}(HB^2)\right]\right\}-$$
$$-\frac{T_1}{R_1}-\frac{T_2}{R_2}+q_3=0.$$

Так как все входящие в уравнения (3.59) усилия и моменты выражены с помощью уравнений упругости (3.46) через деформации и параметры изменения кривизны срединной поверхности, а эти последние с помощью геометрических соотношений (3.33) — через три компонента вектора перемещений, то, в конечном счете, три уравнения равновесия (3.59) определяют три неизвестные функции *u, u* и *w*.

Таким образом, система уравнений теории оболочек, состоящая из геометрических уравнений, уравнений упругости и уравнений равновесия, является замкнутой.

Рассмотрим теперь вопрос о г р а н и ч н ы х у с л о в и я х , которым должно быть подчинено решение задачи о напряженном и деформированном состоянии оболочки.

На контуре оболочки (будем рассматривать, например, границу, совпадающую с β-линией) имеются пять величин, характеризующих внутренние силы (T_1, T_{12}, Q_1, M_1, H), и пять величин, характеризующих перемещения (u, v, w, ϑ_1, ϑ_2)- На первый взгляд, на контуре оболочки должно быть задано и пять граничных условий. Однако это не так. Дело в том, что благодаря кинематической гипотезе Кирхгоффа не все упомянутые перемещения независимы. Угол поворота нормали к оболочке в плоскости границы (ϑ_2) связан условием сохранения нормали с перемещениями *w* и *v* на этой же границе.

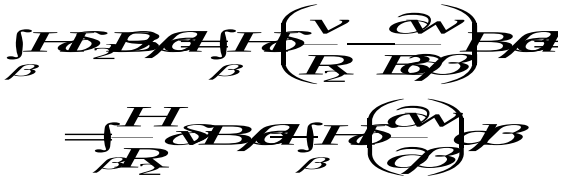
Поэтому число независимых перемещений (а значит и обобщенных сил) равно четырем, и на границе можно сформулировать только четыре граничных условия, что соответствует восьмому порядку уравнений теории оболочек. Ситуация аналогична имеющейся в теории изгиба пластин (см. гл. 2), где нельзя накладывать граничные условия на поперечную силу и крутящий момент в отдельности, а необходимо вводить в рассмотрение приведенную поперечную силу.

Удобнее всего вывести выражения для граничных условий, рассматривая виртуальную работу приложенных к границе α = const сил и моментов на

возможных перемещениях:

(3.60)

где каждая сила множится на вариацию соответствующего ей перемещения, и интегрирование выполняется вдоль границы α = const. Вычислим интеграл от последнего слагаемого в выражении (3.60), заменяя ϑ_2 его значением по (3.12):



Учитывая, что , выполним во втором слагаемом интегрирование по частям. Тогда

Внеинтегральный член представляет собой разность величин *Hδw* в крайних точках границы α = const. Подставляя полученное значение интеграла в формулу (3.60), получим

(3.61)

где S_1^*, Q_1^* — соответственно приведенные сдвигающая и поперечная <Выражение для приведенной поперечной силы совпадает с соответствующим выражением в теории пластин — см. гл. 1> силы:

$$S_1^* = T_{12} + \frac{H}{R_2} = S + \frac{2H}{R_2};$$

$$Q^* = Q + \frac{\partial H}{B\partial\beta} \qquad (3.62)$$

Если край α = const оболочки свободен, то вариации перемещений δu, δv, δw, $\delta\vartheta_1$ произвольны. В этом случае на контуре должны равняться нулю нормальная сила T_1, приведенные сдвигающая S_1^* и поперечная Q_1^* силы и изгибающий момент M_1.

Внеинтегральное слагаемое показывает, что в угловых точках возникают сосредоточенные поперечные силы, численно равные интенсивности крутящего момента, так же как и в угловых точках пластин — см. гл. 2. Если край оболочки закреплен в отношении каких-либо перемещений, то соответствующая вариация обращается в нуль. В этом случае статическое граничное условие заменяется кинематическим.

Итак, выражение (3.61) показывает, что перемещениям на краю α = const соответствуют следующие силовые факторы: $u \to T_1$, $v \to S_1^*$, $w \to Q_1^*$ $\vartheta_1 \to M_1$. Граничные условия накладываются либо на перемещение (при его запрещении), либо на соответствующую ему силу (при свободном перемещении), либо на их линейную комбинацию (при упругом закреплении).

Аналогично, на краю β = const оболочки граничные условия накладываются на перемещения *u, u, w,* ϑ_2 или на силовые факторы S_1^*, T_2, Q_2^*, M_2, где

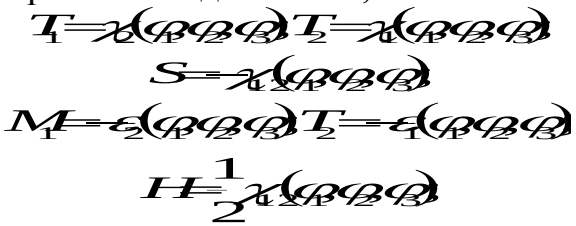
(3.63)

Сопоставляя уравнения равновесия элемента оболочки в форме (3.59) и уравнения совместности деформаций (3.34), можно установить наличие между ними определенной аналогии — так называемой статико-геометрической аналогии теории оболочек. Она состоит в том, что уравнения совместности деформаций можно получить из уравнений равновесия, если в последних положить равными нулю компоненты нагрузки и заменить силы и моменты параметрами изменения кривизны и деформациями: $T_1 \to \varkappa_2$; $T_2 \to \varkappa_1$; $S \to -\varkappa_{12}$; $M_1 \to -\varepsilon_2$; $M_2 \to -\varepsilon_1$; $H \to \frac{1}{2}\gamma_{12}$.

Разумеется, с помощью обратной подстановки можно из уравнений совместности деформаций получить однородные уравнения равновесия.

Статико-геометрическая аналогия, установленная впервые А. Л. Гольденвейзером, широко используется в теории оболочек. В частности, с ее помощью можно выразить общее решение однородных уравнений равновесия через три вспомогательные функции.

В самом деле, уравнения неразрывности (3.34) удовлетворяются тождественно, если в них подставить значения деформаций и параметров изменения кривизны, выраженные через компоненты перемещения *u, v, w* по формулам (3.33). Поэтому и уравнения равновесия (3.59) будут (при $q_1 = q_2 = q_3 = 0$) удовлетворяться тождественно, если в них положить



(3.64)

где под $\varkappa_2(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)$, $\varkappa_1(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)$ и т.д. понимаются соответствующие выражения из (3.33), в которые вместо перемещений *u, v, w* подставлены три произвольные непрерывные функции $(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)$координат. Функции φ_i (*i = 1, 2. 3*) играют здесь такую же роль, как, например, функция напряжений Эри в плоской задаче теории упругости.

Таким образом, силы и моменты, выраженные по формулам (3.64) через три функции усилий, тождественно удовлетворяют однородным уравнениям равновесия.

Статико-геометрическую аналогию используют также при комплексном преобразовании уравнений теории оболочек [40].

§5. Структура уравнений теории оболочек и методы их решения

Как уже указывалось, уравнения равновесия элемента оболочки (3.59) после подстановки сил и моментов, выраженных через деформации и параметры изменения кривизны, и замены последних их значениями по (3.33) представляют собой систему трех уравнений в частных производных

относительно компонентов перемещения *u, v, w.* Выписывать эту громоздкую систему в общем виде нецелесообразно. Представим однако структуру этой системы. В нее входят силы, которые определяются в зависимости от деформаций формулами упругости, содержащими множитель $\frac{Eh}{1-\mu^2}$, и моменты, выражения которых содержат множитель $\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$.

Поэтому, если поделить уравнения равновесия почленно на величину $\frac{Eh}{1-\mu^2}$, то слагаемые от изгибающих и крутящих моментов будут иметь малый множитель λ^2, равный квадрату отношения толщины стенки оболочки к какому-либо характерному ее размеру, например радиусу кривизны в какой-либо точке. Кроме того, порядок производных компонентов перемещения в моментных слагаемых выше, чем в силовых.

Полученную таким .образом систему уравнений можно представить в следующей форме:

$$\begin{aligned} N_{11}^{2}u + N_{12}^{2}v + N_{13}^{3}w + \lambda^2\left[L_{11}^{4}u + L_{12}^{3}v + L_{13}^{3}w\right] + \frac{q(1-\mu^2)}{Eh} &= 0 \\ N_{21}^{2}u + N_{22}^{2}v + N_{23}^{3}w + \lambda^2\left[L_{21}^{3}u + L_{22}^{4}v + L_{23}^{3}w\right] + \frac{q(1-\mu^2)}{Eh} &= 0 \\ N_{31}^{1}u + N_{32}^{1}v + N_{33}^{2}w + \lambda^2\left[L_{31}^{3}u + L_{32}^{3}v + L_{33}^{4}w\right] + \frac{q(1-\mu^2)}{Eh} &= 0 \end{aligned} \qquad (3.65)$$

где N_{ij} и L_{ij} — дифференциальные операторы, причем верхний индекс показывает порядок старшей производной, входящей в данный оператор.

Наличие малого множителя λ^2 при старших производных является характерной особенностью уравнений теории оболочек. Эта особенность определяет возможность применения приближенных методов их решения.

Если конфигурация оболочки, нагрузка на нее и способ ее закрепления таковы, что перемещения медленно меняются вдоль α- и β-линий, то старшие производные от *u, u, w*, входящие в уравнения (3.65), имеют такой же порядок малости, как и младшие (именно это и понимается под медленной изменяемостью перемещений). В этом случае членами уравнений (3.65), содержащими малый множитель λ^2, можно пренебречь, что равносильно пренебрежению изгибающими и крутящими моментами.

Методы расчета безмоментного напряженного состояния и условия его существования рассмотрены в гл. 6. Заметим, что в отличие от осесимметричной деформации оболочек вращения, в общем случае возможен и другой вид медленно меняющихся деформаций оболочки. Этот вид деформации оболочки, при котором срединная поверхность не испытывает растяжений, называется изгибанием, а соответствующее напряженное состояние — чисто моментным. Перемещения при такой деформации определяются интегрированием уравнений

$$\varepsilon_1 = 0,\quad \varepsilon_2 = 0,\quad \gamma_{12} = 0 \qquad (3.66)$$

в которых $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma_{12}$ нужно заменить их выражениями по (3.33) через *u, v, w.*

Из уравнений (3.66) не следует, что силы T_1, T_2, S при изгибании оболочки в точности равны нулю. Эти уравнения свидетельствуют лишь о том, что перемещения, связанные с растяжением срединной поверхности, малёы по сравнению с перемещениями, обусловленными изгибанием.

Самостоятельную задачу о чистом изгибании оболочки приходится решать сравнительно редко — только для нежестких оболочек, закрепление которых допускает такое изгибание.

Для силовых оболочек малые изгибания, сопровождающие их безмоментное состояние, находятся попутно при решении безмоментной задачи (см. гл.4).

Безмоментное и чисто моментное напряженные состояния составляют, по терминологии А. Л. Гольденвейзера, о с н о в н о е напряженное состояние оболочки.

Расчет основного напряженного состояния существенно проще, чем решение общих уравнений (3.65), однако соответствующие дифференциальные уравнения [т. е. уравнения (3.65)] с опущенными моментными членами или уравнения (3.66) имеют более низкий порядок, чем исходные. Поэтому их решения не содержат достаточного числа произвольных функций, позволяющих выполнить все граничные условия на контуре оболочки при реальных видах его закрепления.

В ряде случаев выполнить граничные условия удается путем наложения на о с н о в н о е напряженное состояние к р а е в о г о э ф ф е к т а , т. е. системы напряжений и деформаций быстро затухающих в направлении от контура в глубь оболочки.

Такие быстро затухающие решения уравнений теории оболочек можно (если они для данного контура существуют) легко найти, и они по форме практически не отличаются от решений краевого эффекта для осесимметричных оболочек вращения. Сочетание основного напряженного состояния и краевого эффекта часто позволяет получить сравнительно простые и достаточно точные результаты при решении практически важных задач.

Метод расчленения напряженного состояния оболочки на основное и краевой эффект не является единственным приближенным приемом расчета оболочек. Запросы практики породили появление большого числа приближенных теорий для расчета оболочек, требующих введения дополнительных гипотез, связанных либо с особенностями конфигурации данной оболочки, либо с характером изучаемого напряженного состояния. В создании таких теорий велика роль В. 3. Власова.

Только в случае круговой цилиндрической оболочки постоянной толщины дифференциальные уравнения (3.65) представляют собой уравнения с постоянными коэффициентами. Эти уравнения могут быть выписаны в явной форме, и их решение может быть представлено в виде рядов. В данном случае можно провести анализ, показывающий пределы применимости приближенных теорий. Такой анализ приведен в [29].

Развитие вычислительной техники позволило получать численные решения уравнений теории оболочек. Для оболочек вращения естественным является представление решения в форме тригонометрических рядов по угловой

координате и численное интегрирование уравнений для каждого члена ряда. Для оболочек произвольной конфигурации все большее применение находит в последнее время метод конечных элементов.

ГЛАВА 4

БЕЗМОМЕНТНАЯ ТЕОРИЯ ОБОЛОЧЕК

§ 1. Безмоментное напряженное состояние и условия его существования

В инженерной практике встречается ряд задач, когда изгибающие и крутящие моменты и связанные с ними перерезывающие силы настолько малы, что ими можно пренебречь.

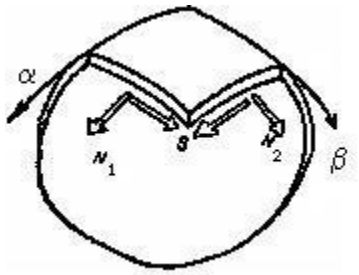


Рис. 4.1.

Напряженное состояние, характеризуемое лишь нормальными и сдвигающими силами, действующими в плоскостях, касательных к срединной поверхности оболочки, называется безмоментным напряженным состоянием.

вопроса, но в то же время позволяющий глубже понять физическую сущность особенностей безмоментного состояния оболочек.

Усилия этого напряженного состояния в произвольной оболочке показаны на рис.4.1.

Естественно стремление инженера спроектировать оболочку так, чтобы в ней отсутствовали напряжения изгиба. Особенно важно спроектировать безызгибную (безмоментную) оболочку, изготовленную из железобетона; в такой оболочке будет значительно уменьшена опасность возникновения трещин.

В связи с этим естественно возникает вопрос, каковы условия существования безмоментного напряженного состояния оболочки?

Прежде, чем сформулировать эти условия рассмотрим один пример внешне далекий от рассматриваемого вопроса, но в то же время позволяющий глубже понять физическую сущность безмоментного состояния оболочек.

Вспомним хорошо известный читателю расчет фермы. По сути дела всякая ферма статически неопределима. Однако мы идеализируем конструкцию, полагая, что стержни фермы связаны в узлах идеальными шарнирами. В стержнях фермы возникают лишь продольные усилия, а изгибающие моменты и поперечные силы отсутствуют. Благодаря такой идеализации схемы расчет фермы значительно упрощается: усилия фермы статически определимы.

Самое важное заключается в том, что при достаточной длине стержней—элементов фермы—и узловом характере приложения нагрузки расчет идеальной, шарнирной схемы, дает усилия, практически не отличающиеся от усилий, вычисленных для реальной статически неопределимой фермы.

Этот результат становится ясным, если мы вспомним один из основных принципов строительной механики — начало наименьшей работы. Этот

принцип гласит: величины внутренних усилий статически неопределимой системы должны удовлетворять тому условию, чтобы упругая энергия как функция их имела наименьшее значение.

Если для фермы выполнены сформулированные выше условия, то безмоментный характер ее напряженного состояния является для нее естественным, так как соответствует минимуму накопленной конструкцией энергии. Действительно, всякому изгибанию соответствует значительное накопление внутренней энергии деформации. Простейший пример: если нагружать консольную балку прямоугольного сечения сосредоточенной силой, приложенной на конце так, чтобы в первый раз направление этой силы совпадало с продольной осью балки, а во второй раз сила действовала перпендикулярно этой оси, то упругая энергия деформаций во втором случае будет значительно больше, чем в первом. В этом можно без подсчетов убедиться при непосредственном наблюдении получающейся картины деформаций.

В соответствии с этим работа деформации фермы будет наименьшей при таком распределении внутренних усилий, когда нагрузка передается с фермы на опоры, не вызывая значительных изгибающих моментов.

Принцип наименьшей работы распространяется на расчет всякой упругой конструкции, в том числе и на оболочку.

Конечно, можно проводить лишь принципиальную аналогию между расчетом фермы и оболочки.

В кратком пособии нет возможности строго доказать необходимость и достаточность сформулированных ниже условий существования безмоментного напряженного состояния, соответствующего минимуму упругой энергии, накапливаемой оболочкой в процессе деформации.

Однако эти условия физически достаточно ясны и кратко могут быть изложены в следующей форме:

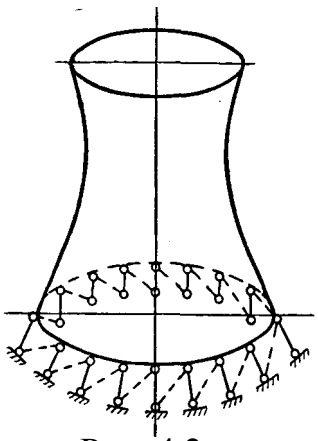


Рис. 4.2

1. Оболочка должна иметь плавно изменяющуюся непрерывную поверхность. Действительно, в местах резкого изменения формы (перелом поверхности, скачкообразное изменение толщины оболочки) невозможно избежать резкой разницы в деформации в месте стыка. А это непосредственно приводит к изгибу.

2. Нагрузка на оболочку должна быть плавной и непрерывной. Формально оболочка может быть рассчитана по безмоментной теории и на действие сосредоточенной силы. Результаты расчета дадут картину напряженного состояния, близкую к действительной лишь в точках, значительно удаленных от места приложения сосредоточенной силы, при соблюдении всех остальных условий существования безмоментного решения задачи.

3. Условия закрепления краев оболочки должны быть таковы, чтобы края имели возможность свободно перемещаться в направлении нормали к

поверхности. Неподвижное закрепление краев неизбежно вызовет изгибание оболочки под нагрузкой, т. е. нарушение безмоментного напряженного состояния.

Граничные закрепления должны обеспечивать жесткость (неизменяемость) формы оболочки.

Как показали исследования В. 3. Власова и др., особое внимание должно быть уделено закреплению краев оболочек вращения отрицательной гауссовой кривизны (например, однополостные гиперболоиды вращения, широко применяемые при строительстве градирен). Гиперболоид, края которого закреплены лишь в одном тангенциальном направлении, при некоторых соотношениях его основных размеров (рис. 4.2) не обладает жесткостью и под действием некоторой нагрузки может разрушиться. Жесткость формы гиперболоида обеспечивается закреплением одного из его краев опорными стержнями в двух тангенциальных направлениях (дополнительные стержни показаны пунктиром на рис. 4.2).

4. Силы, приложенные к краям оболочки, должны лежать в плоскости, касательной к ее поверхности. Это условие практически вытекает из условия 3 и соответствует предпосылке о равенстве нулю изгибающих моментов и поперечных сил . <<В строгой постановке условия существования безмоментного напряженного состояния сформулированы в монографии А. Л. Гольденвейзера [3] и К. Ф. Черныха [4].>>

Расчет оболочек по безмоментной теории, возможный при соблюдении приведенных в этом параграфе условий, значительно проще расчета оболочек по полной моментной теории, в чем мы не раз убедимся в дальнейшем.

§ 2. Основные уравнения безмоментной теории оболочек

Итак, при выполнении сформулированных выше условий расчет оболочек можно вести, полагая, что моменты и поперечные силы равны нулю:

$$M_1 = M_2 = M = Q_1 = Q_2 = 0. \qquad (4.1)$$

Расчетные усилия безмоментного напряженного состояния показаны на рис. 4.1.

Уравнения равновесия (I) принимают вид:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial(BN_1)}{\partial\alpha} + \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(A^2 S\right) - N_2\frac{\partial B}{\partial\alpha} + ABp_1 = 0, \\ &\frac{\partial(AN_2)}{\partial\beta} + \frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(B^2 S\right) - N_1\frac{\partial A}{\partial\beta} + ABp_2 = 0, \\ &k_1 N_1 + k_2 N_2 - p_2 = 0. \end{aligned} \qquad (4.2)$$

Пренебрежение моментными членами в шестом условии равновесия приводит к равенству сдвигающих усилий S_{12} и S_{21}. В приведенных уравнениях сдвигающее усилие обозначено S.

Так как для трех неизвестных усилий N_1, N_2 и S имеется 3 уравнения равновесия, то безмоментное напряженное состояние является в бесконечно

малом статически определимым. Если внешняя нагрузка и находящиеся с ней в равновесии реакции опор известны, то напряженное состояние оболочки однозначно определяется системой (4.2).

Задача об определении перемещений точек срединной поверхности оболочки решается после нахождения усилий. При известных усилиях N_1, N_2 и S упругие перемещения определяются из системы уравнений, которая получается при совместном рассмотрении уравнений (II) и (III) группы:

$$\frac{1}{A}\cdot\frac{\partial u}{\partial \alpha}+\frac{v}{AB}\cdot\frac{\partial A}{\partial \beta}+\frac{w}{R_1}=\frac{1}{Eh}\left(N_1-\nu N_2\right) \qquad (4.3)$$

§ 3. Общие уравнения безмоментной теории оболочек вращения

На рис. 4.3 показан элемент произвольной оболочки вращения, заданной в сферической системе координат (φ, θ).

Из рис. 4.3, *а, б* можно установить, что

$$r = R_2 \sin\varphi,$$

$$ab = ds_2 = rd\theta, \qquad (4.4)$$

$$ad = ds_1 = R_1 d\varphi, \text{ т.е.}$$

$$A=R_1, \quad B=r, \qquad (4.5)$$

где R_1—радиус кривизны меридиана; R_2—длина нормали к поверхности оболочки, замеренная от касательной к меридиану до оси вращения,—радиус кривизны широты; r—радиус параллельного круга, в случае произвольной оболочки вращения r=f(φ).

Коэффициенты квадратичной формы A и B являются функциями лишь координаты φ и не зависят от θ ввиду симметрии формы оболочки.

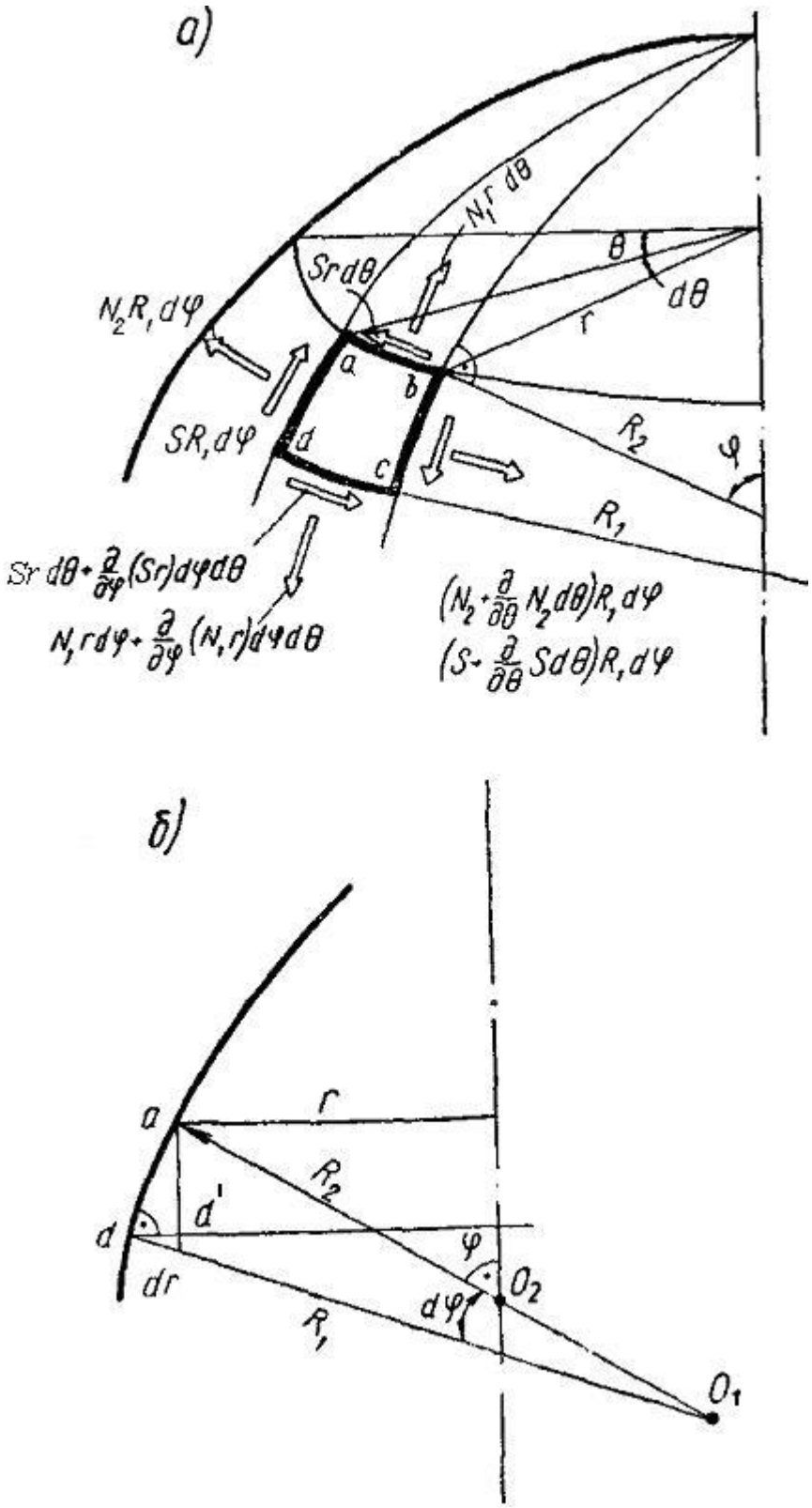


Рис. 4.3

Уравнения равновесия в этом случае принимают вид:

$$\frac{\partial(rN_1)}{\partial\varphi} + R_1\frac{\partial S}{\partial\theta} - N_2\frac{dr}{d\varphi} + rR_1p_1 = 0,$$

$$R_1\frac{\partial N_2}{\partial\theta} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(r^2S\right) + rR_1p_2 = 0, \qquad (4.6)$$

$$\frac{N_1}{R_1} + \frac{N_2}{R_2} - p_3 = 0.$$

Непосредственно из рис. 4.3, б можно определить, что

$$d'd = \frac{dr}{d\varphi}d\varphi \approx ad\cos\varphi = R_1d\varphi\cos\varphi,$$

$$\frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{d}\varphi} = R_1\cos\varphi \qquad (4.7)$$

Подставляя (4.7) в (4.6), запишем уравнения равновесия в следующей форме:

$$а)\ R_1\frac{\partial S}{\partial\theta} + \frac{\partial(rN_1)}{\partial\varphi} - N_2R_1\cos\varphi + rR_1p_1 = 0,$$

$$б)\ R_1\frac{\partial N_2}{\partial\theta} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(r^2S\right) + rR_1p_2 = 0, \qquad (4.8)$$

$$в)\ k_1N_1 + k_2N_2 = p_3.$$

Усилия N_1, N_2 и S в общем случае являются функциями обеих независимых переменных φ и θ.

Соответственно и геометрические уравнения принимают вид:

$$\frac{1}{R_1}\cdot\frac{\partial u}{\partial\varphi} + \frac{w}{R_1} = \frac{1}{Eh}\left(N_1 - \nu N_2\right) = \varepsilon_1,$$

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial v}{\partial\theta} + \frac{u}{r}\cos\varphi + \frac{w}{R_2} = \frac{1}{Eh}\left(N_2 - \nu N_1\right) = \varepsilon_2, \qquad (4.9)$$

$$\frac{r}{R_1}\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{v}{r}\right) + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial\theta} = \frac{1}{Gh}S = \gamma.$$

§ 4. Осесимметричная задача оболочек вращения

Допустим, что на оболочку вращения действует нагрузка, симметричная относительно оси *Oz*. К такому виду нагрузок относятся собственный вес, равномерная снеговая нагрузка и т. п.

В этом случае система уравнений (4.8) значительно упрощается. Все производные по θ обращаются в нуль, так как нагрузка, а следовательно, и компоненты внутренних усилий не изменяются в круговом направлении.

Предполагаем также, что отсутствует составляющая внешней нагрузки p_2. Наличие такой компоненты, не зависящей от θ, означало бы, что оболочка скручивается силами p_2.

В практических случаях это обычно не имеет места. При отсутствии скручивающих сил p_2

S=0.

Таким образом, в случае осесимметричной нагрузки уравнение (4.8, б) тождественно удовлетворяется. Из уравнения (4.8, а) получим:

$$\frac{d(rN_1)}{d\varphi} - N_2 R_1 \cos\varphi + rR_1 p_1 = 0.$$

Подставим в это уравнение выражение N_2, полученное из уравнения (4.8, в):

$$\frac{d(rN_1)}{d\varphi} - R_1 \cos\varphi\left(p_3 R_2 - \frac{R_2}{R_1} N_1\right) + rR_1 p_1 = 0.$$

Умножая полученное уравнение на sin φ и учитывая (4.4), имеем

$$\sin\varphi \frac{d}{d\varphi}(rN_1) + rN_1 \cos\varphi + rR_1(p_1 \sin\varphi - p_3 \cos\varphi) = 0. \qquad \text{(а)}$$

По правилу дифференцирования произведения получим:

$$\frac{d}{d\varphi}(N_1 r \sin\varphi) = \frac{d}{d\varphi}(N_1 r)\sin\varphi + N_1 r \cos\varphi,$$

что позволяет записать уравнение (а) в виде

$$\frac{d}{d\varphi}(N_1 r \sin\varphi) + rR_1(p_1 \sin\varphi - p_3 \cos\varphi) = 0.$$

Интегрируя в пределах от 0 до φ, получим:

$$N_1 r \sin\varphi = -\int_0^{\varphi} rR_1(p_1 \sin\varphi - p_3 \cos\varphi)d\varphi + C. \qquad (4.10)$$

Из этого выражения после интегрирования определяем N_1.

Произвольную постоянную С находим из граничных условий.

После определения N_1 можно найти N_2 из уравнения (4.8, в).

Интеграл (4.10) получает простой физический смысл, если левую и правую части выражения умножить на 2π:

$$N_1 \sin\varphi\, r(2\pi) = -2\pi\int_0^{\varphi} rR_1(p_1 \sin\varphi - p_3 \cos\varphi)d\varphi + 2\pi C. \qquad (4.11)$$

Из рис. 4.4, видно, что N_1 sin φ есть вертикальная составляющая меридианального усилия N_1, действующего на уровне параллельного круга, определяемого углом φ. Поэтому левая часть выражения N_1 sin φ 2π r есть равнодействующая всех нормальных усилий N_1 на круге, соответствующем углу φ, так как 2π r — длина окружности этого круга.

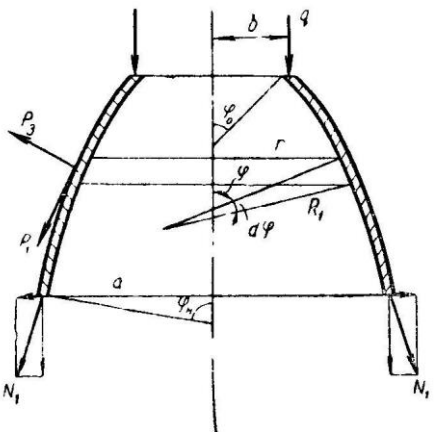


Рис.4.4

Рассмотрим правую часть соотношения (4.11). Как видно из чертежа, 2π r R_1dφ есть площадь элементарного кольца, соответствующего бесконечно малому углу dφ; p_1 sin φ и p_2 cos φ — вертикальные составляющие компонентов нагрузки. Следовательно, подынтегральная функция представляет собой вертикальную составляющую нагрузки, соответствующую некоторому элементарному кольцу. Интегрируя по φ,

получаем полную вертикальную составляющую всей нагрузки, действующей на оболочку выше параллели, для которой мы определяем усилие N_1.

Уравнение (4.11) выражает условие равновесия $\sum Z = 0$ для части оболочки. Такая трактовка уравнения (4.11) позволяет сразу записать значение произвольной постоянной C.

Рассмотрим наиболее общий случай оболочки вращения, имеющей круговой вырез у вершины, определяемый углом φ_0 (см. рис. 11-4). Если край этого выреза загружен равномерно распределенной по параллели нагрузкой с интенсивностью q, то вертикальная результирующая этой нагрузки составит $2\pi bq$ и уравнение (4.11) примет вид:

$$N_1 \sin\varphi \cdot 2\pi r = -2\pi \int_{\varphi_0}^{\varphi} r R_1 \left(p_1 \sin\varphi - p_3 \cos\varphi\right) d\varphi - 2\pi bq. \qquad (4.12)$$

Если оболочка не имеет выреза, интегрирование ведется от 0 до φ и q=0, то C=0.

Определив N_1 из (4.12), вычисляем значение N_2 по формуле, полученной из уравнения (4.8, в):

$$N_2 = p_3 R_2 - N_1 \frac{R_2}{R_1}. \qquad (4.13)$$

В некоторых случаях удобнее задать форму оболочки в цилиндрических координатах (z, θ, r).

Подставив значения A и B, полученные на стр. 13 для оболочки вращения в цилиндрической системе координат, в уравнения (4.8) и проделав выкладки, подобные приведенным в этом параграфе, получим выражения для тех же усилий N_1 и N_2 в форме:

$$\begin{aligned} &а)\ N_1 = -\frac{\left(1+r'^2\right)^{\frac{1}{2}}}{r}\left[\int_{z_0}^{z} r\left(p_1 - r' p_3\right) dz + C\right]. \\ &б)\ N_2 = -\frac{r\,r'}{1+r'^2} N_1 + r\left(1+r'^2\right)^{\frac{1}{2}} p_3, \end{aligned} \qquad (4.14)$$

где $r=r(z)$—уравнение кривой, вращение которой вокруг оси Oz образует поверхность оболочки;

$$r' = \frac{dr}{dz};$$

z_0—координата, соответствующая краю оболочки.

Рассмотрим несколько примеров расчета оболочек вращения на осесимметричную нагрузку.

1. Расчет сферического купола на собственный вес q (рис. 4.5).

Для сферы $R_1=R_2=R$

$$r = R\sin\varphi, \quad p_1 = q\sin\varphi, \quad p_1 = q\cos\varphi,$$

где q-собственный вес, отнесенный к единице площади поверхности оболочки. Подставив эти значения в (4.12, 4.13), получим:

$$N_1 \sin\varphi \cdot R\sin\varphi = -\int_0^{\varphi} R\sin\varphi \cdot R\left(q\sin^2\varphi + q\cos^2\varphi\right) d\varphi,$$

или

$$N_1 = -qR\frac{\int_0^{\varphi}\sin\varphi\, d\varphi}{\sin^2\varphi} = -qR\frac{1-\cos\varphi}{1-\cos^2\varphi} = \frac{qR}{1+\cos\varphi}, \qquad (4.15)$$

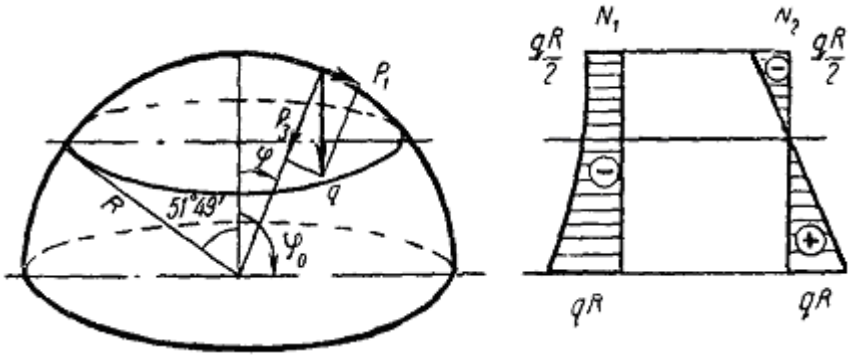


Рис. 4.5

$$N_2 = -q\cos\varphi\cdot R + \frac{qR}{1+\cos\varphi} = -qR\left[\cos\varphi - \frac{1}{1+\cos\varphi}\right]. \qquad (4.16)$$

В вершине купола, где φ=0,

$$N_1 = N_2 = -\frac{qR}{2} \qquad (4.17)$$

Усилие N_1 в оболочке постоянно остается сжимающей силой, возрастающей к нижнему опорному концу. Кольцевое усилие N_2 сжимающее у вершины, постепенно убывает абсолютной величине с увеличением φ и, меняя знак, в нижней части оболочки переходит в растягивающее.

Обозначим через φ_n координату параллельного круга на котором N_2=0 Ниже круга, определяемого этим углом φ_n под действием собственного веса возникают кольцевые растягивающие усилия. Из выражения (4.16) можно определить угол φ_n:

$$\cos\varphi_n - \frac{1}{1+\cos\varphi_n} = 0, \text{откуда } \varphi_n = 51°49'.$$

Сферические купола, имеющие угол раствора меньше, чем $2\varphi_n$ свободны от растягивающих напряжений.

Для полусферы при φ_n =90° N_1= +qR, N_2= - qR.

2. Расчет гиперболоида вращения на собственный вес.

Тонкостенную оболочку в форме однополостного гиперболоида вращения часто применяют при строительстве градирен, а в последнее время и в качестве резервуаров. Уравнение меридиана этой поверхности имеет вид.

$$r = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 + z^2}, \qquad (4.18)$$

где a и b -параметры гиперболы. На рис. 4.6 приведены размеры дальней градирни, срединная поверхность которой однополостный гиперболоид вращения.

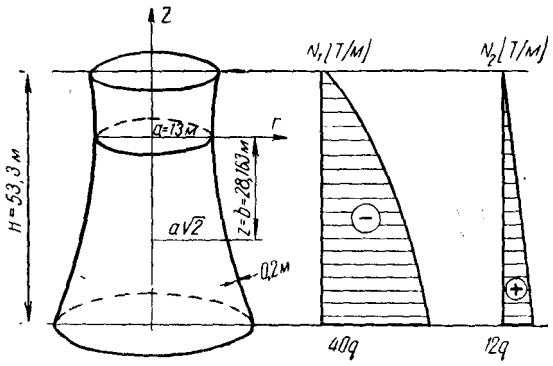


Рис. 4.6

Как было указано на стр. 57, при задании формы меридиана уравнением r=r(z) для расчетов удобнее пользоваться выражениями (4.14).

Подставляя значения компонентов нагрузки (собственного веса) в общем виде

$$p_1 = q\sin\varphi = q\frac{1}{\sqrt{1+r'^2}},$$
$$p_3 = -q\cos\varphi = -q\frac{r'}{\sqrt{1+r'^2}} \qquad (4.19)$$

(значения sin φ и φ в цилиндрической системе координат были выведены на стр. 12) в уравнения (4.14), получим:

$$N_1 = -\frac{\left(1+r'^2\right)^{\frac{1}{2}}}{r}\int_{z_0}^{z} rq\left(\frac{1}{\sqrt{1+r'^2}} + \frac{r'^2}{\sqrt{1+r'^2}}\right)dz + C.$$

Здесь z_0—координата верхнего края оболочки.

После сокращений

$$N_1 = -\frac{\left(1+r'^2\right)^{\frac{1}{2}}}{r}\left[\int_{z_0}^{z} qr\sqrt{1+r'^2}dz + C\right]. \qquad (4.20)$$

Этой формулой можно пользоваться для вычисления усилия N_1 от собственного веса в произвольной оболочке вращения, меридиан которой задан в форме *r=r(z)*.

Подставим в уравнение (4.20) выражение (4.18) и введем обозначение

$$e^2 = \frac{b^4}{a^2+b^2}$$

$$N_1 = \frac{\left(a^2+b^2\right)\sqrt{e^2+z^2}}{b^2\left(b^2+z^2\right)}\left[-q\int_{z_0}^{z}\sqrt{e^2+z^2}dz + C\right]. \qquad (4.21)$$

Проинтегрировав, получим

$$N_1(z) = \frac{\left(a^2+b^2\right)\sqrt{e^2+z^2}}{b^2\left(b^2+z^2\right)}\times$$
$$\times\left\{-\frac{q}{2}\left|z\sqrt{e^2+z^2} + e^2\ln\left(z+\sqrt{e^2+z^2}\right)\right|_{z_0}^{z} + C\right\}. \qquad (4.22)$$

Произвольная постоянная определяется из условия на контуре, которому

соответствует координата z_0. Предположим, что на контуре при $z= z_0$ $N_1=p$. Из (4.22) получаем

$$C = p\frac{b^2\left(b^2 + z_0^2\right)}{\left(a^2 + b^2\right)\sqrt{e^2 + z_0^2}}. \qquad (4.23)$$

Окончательное выражение для $N_1(z)$ получим, подставляя равенство (4.23) в выражение (4.22).

Кольцевое усилие в рассматриваемой задаче определяется формулой

$$N_2 = \frac{a^2b^2}{\left(a^2 + b^2\right)\left(e^2 + z^2\right)} \cdot N_1(z) - q\frac{a^2}{b^2}z, \qquad (4.24)$$

которая получена подстановкой выражения (4.22) в уравнение (4.14, б).

На рис. 4.6 показаны эпюры N_1 и N_2 для железобетонной градирни при действии собственного веса и при ненагруженном верхнем крае.

§ 5. Безмоментная теория цилиндрических оболочек

1. На рис. 4.7 изображена круговая цилиндрическая оболочка в цилиндрической системе координат x, θ.

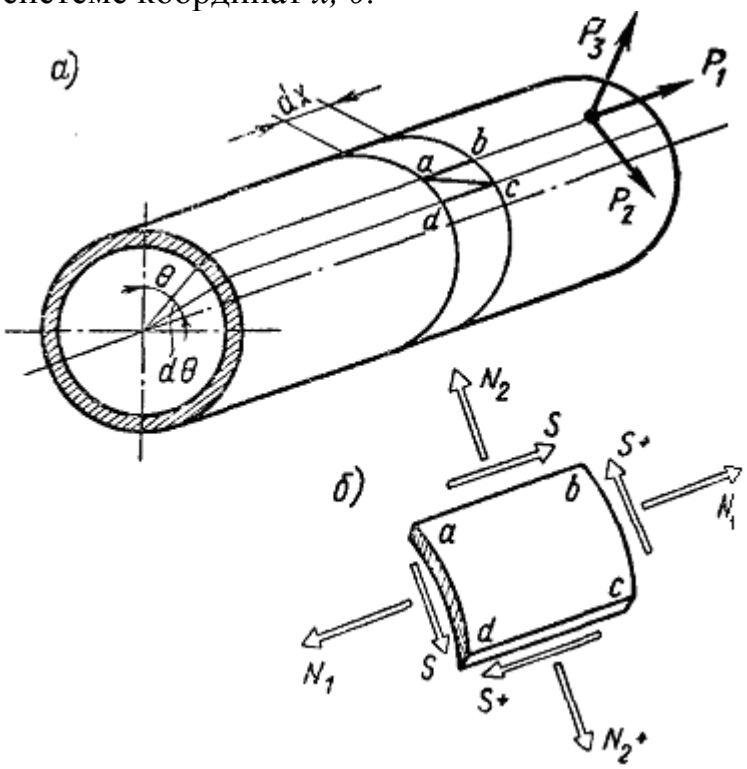


Рис. 4.7

Квадрат линейного элемента поверхности равен

$$ds^2 = dx^2 + Rd\theta^2. \qquad (4.25)$$

Следовательно,

$$A=1,\ B=R=\text{const},\ R_1=\infty,\ R_2=R.$$

Уравнения безмоментной теории (4.2) для цилиндрической оболочки принимают вид:

$$
\begin{aligned}
&а)\ R\frac{\partial N_1}{\partial x}+\frac{\partial S}{\partial \theta}+R\,p_1=0,\\
&б)\ \frac{\partial N_2}{\partial \theta}+R\frac{\partial S}{\partial x}+R\,p_1=0,\\
&в)\ N_2=R\,p_3.
\end{aligned}
\tag{4.26}
$$

Кольцевое усилие, следовательно, зависит лишь от величины нормальной составляющей нагрузки.

Подставляя (4.26, в) в (4.26, б), можем найти сдвигающее усилие интегрированием:

$$
\begin{aligned}
S&=-\int\left(p_2+\frac{1}{R}\frac{\partial N_2}{\partial \theta}\right)dx+C_1(\theta)=\\
&=-\int\left(p_2+\frac{1}{R}\frac{\partial p_3}{\partial \theta}\right)dx+C_1(\theta).
\end{aligned}
\tag{4.27}
$$

Определив S равенством (4.27), из (4.26, а) интегрированием находим

$$
N_1=-\int\left(p_1+\frac{1}{R}\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)dx+C_2(\theta).
\tag{4.28}
$$

Геометрические уравнения для цилиндрической оболочки получаются из уравнений (4.3) путем подстановки A=1 и B=R, $R_1=\infty$ и $R_2=R$ и замены α на *x* и β на θ:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_1&=\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{Eh}\left(N_1-\nu N_2\right),\\
\varepsilon_2&=\frac{1}{R}\cdot\frac{\partial v}{\partial \theta}+\frac{w}{R}=\frac{1}{Eh}\left(N_2-\nu N_1\right),\\
\gamma&=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{R}\cdot\frac{\partial u}{\partial \theta}=\frac{1}{Gh}S.
\end{aligned}
\tag{4.29}
$$

Компоненты произвольной внешней нагрузки могут быть представлены в виде разложений в ряд Фурье:

$$
\begin{aligned}
p_1=\sum_{n=o}^{\infty}p_{1n}\cos n\theta,\quad p_2=\sum_{n=o}^{\infty}p_{2n}\sin n\theta,\\
p_3=\sum_{n=o}^{\infty}p_{3n}\cos n\theta,
\end{aligned}
\tag{4.30}
$$

n принимает значения 0, 1,2, 3.., где p_{1n}. p_{2n} и p_{3n} — известные коэффициенты разложения функции, зависящие только от *x*. При *n=0* нагрузка имеет осесимметричный характер.

В дальнейшем знак суммы записывать не будем, рассматривая лишь один какой-либо член ряда, в который разложена нагрузка. Результаты, полученные при расчете на нагрузки от разных членов ряда, в конце расчета суммируются.

Итак, для *n*-го члена ряда можно записать:

$$
p_1=p_{1n}\cos n\theta,\ p_2=p_{2n}\sin n\theta,\ p_3=p_{3n}\cos n\theta,
\tag{4.31}
$$

Непосредственно из (4.26, в) получаем

$$
N_2=p_{3n}R\cos n\theta
$$

Так как $\frac{\partial N_2}{\partial \theta} = -p_{3n} nR \sin n\theta$, то из (4.27)

$$S = -\sin n\theta \int (p_{2n} - p_{3n} n)dx + C_1(\theta). \tag{4.32}$$

Подставим производную от S по θ

$$\frac{\partial S}{\partial \theta} = -n \cos n\theta \int (p_{2n} - p_{3n} n)dx + \frac{dC_1(\theta)}{d\theta}$$

в уравнение (4.28).

$$N_1 = -\cos n\varphi \int_x \left[p_{1n} - \frac{n}{R} \int_x (p_{1n} - p_{3n} n)dx \right] dx - \\ - \frac{dC_1(\theta)}{d\theta} x + C_2(\theta). \tag{4.33}$$

В частном случае, когда

$$p_{1n}=0,\ p_{2n}=\text{const и } p_{3n}=\text{const}, \tag{4.34}$$

в выражениях (4.32—4.33) можно особенно легко провести интегрирование и, задав $C_1(\theta)$ и $C_2(\theta)$ некоторыми периодическими функциями

$$C_1(\theta) = D_1 \sin n\theta,\ C_2(\theta) = D_2 \cos n\theta \tag{4.35}$$

(где D_1 и D_2—произвольные постоянные), получить выражения для усилий:

$$N_1 = \left\{ \frac{n}{R} \left[(p_{2n} - np_{3n}) \frac{x^2}{2} - D_1 x \right] + D_2 \right\} \cos n\theta, \\ S = -\left[(p_{2n} - np_{3n}) x - D_1 \right] \sin n\theta, \\ N_2 = +Rp_{3n} \cos n\theta \tag{4.36}$$

В общем случае (4.32—4.33) функции $C_1(\theta)$ и $C_2(\theta)$ (а в частном случае (4.36) —D_1 и D_2) определяются из граничных условий.

Определим перемещения оболочки при нагрузке, заданной выражениями (4.34).

Полагая коэффициент Пуассона v равным нулю, что вполне допустимо при расчете железобетонных конструкций, можно записать

$$а)\ \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{N_1}{Eh}, \\ б)\ \frac{\partial v}{\partial \theta} + w = \frac{RN_2}{Eh}, \\ в)\ \frac{\partial u}{\partial \theta} + R \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2R}{Eh} S. \tag{4.37}$$

Подставляя в уравнение (4.37,а) значения N_1 из (4.36) и интегрируя по *x,* получим

$$u = \frac{1}{Eh} \left\{ \frac{n}{R} \left[(p_{2n} - np_{3n}) \frac{x^3}{6} - D_1 \frac{x^2}{2} \right] + D_2 x + D_3 \right\} \cos n\theta. \tag{4.38}$$

Возникающую при интегрировании произвольную функцию $C_3(\theta)$ мы представили в форме $D_3 \frac{\cos n\theta}{Eh}$, где D_3 - произвольная постоянная.

Перемещение v определим из третьего геометрического уравнения, записав его так:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2\frac{S}{Eh} - \frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial \theta}. \tag{4.39}$$

После подстановки (4.36 и 4.38) в (4.39) и интегрирования по x получим

$$v = \left\{ \left(p_{2n} - np_{3n}\right)\left[\frac{n^2x^4}{24R^2Eh} - \frac{x^2}{Eh}\right] - D_1\left[\frac{n^2x^3}{6R^2Eh} - \frac{2x}{Eh}\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{EhR}\left(\frac{nx^2}{2}D_2 + nD_3x + D_4\right)\right\}\sin n\theta, \tag{4.40}$$

где $D_4 \sin n\theta$ — произвольная функция от θ, получающаяся при интегрировании.

Из уравнения (4.37, б) получаем выражение для w

$$w = -\left\{-\frac{R^2p_{3n}}{Eh} + n\left(p_{2n} - np_{3n}\right)\times\left[\frac{n^2x^4}{24R^2Eh} - \frac{x^2}{Eh}\right] - \right.$$
$$\left. -\left[\frac{n^2x^3}{6R^2Eh} - \frac{2x}{Eh}\right] + \frac{n}{REh}\left(\frac{nx^2}{2}D_2 + nD_3x + D_4\right)\right\}\cos n\theta. \tag{4.41}$$

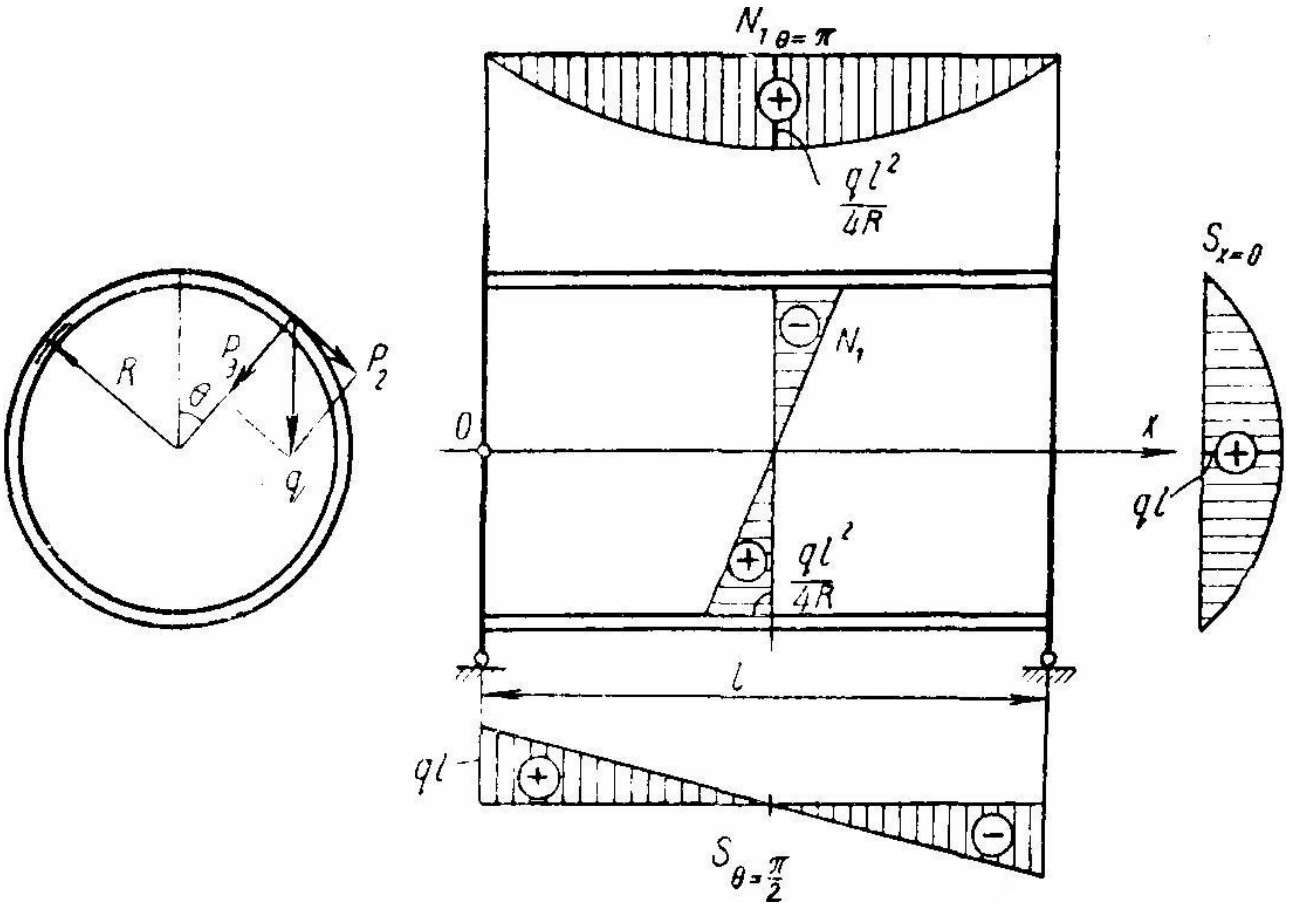


Рис. 4.8

2. Рассмотрим в качестве примера расчет горизонтальной трубы на собственный вес (рис. 4.8). Края трубы предполагаем закрепленными таким образом, чтобы нагрузка воспринималась опорами в форме сдвигающих сил. Такими опорами могут служить абсолютно жесткие в своей плоскости и

подвижные в направлении *Ox* диафрагмы, на которые опирается оболочка. Ввиду подвижности опор в направлении *Ox,* очевидно, силы *Ni* на краях должны быть равны нулю. Перемещения v и w у опор должны быть равны нулю. Принимая, что прогиб *w* на опоре цилиндрической оболочки равен нулю, мы заранее можем утверждать, что у опоры безмоментное напряженное состояние будет нарушено, так как нарушается одно из условий его существования.

Компоненты нагрузки от собственного веса для горизонтально расположенной цилиндрической оболочки имеют вид:

$$p_1 = 0,\ p_2 = q\sin\theta,\ p_3 = q\cos\theta,$$

т.е. n=1, $p_{2n} = -p_{3n} = q = \text{const},$ (4.42)

где *q* — вес элемента оболочки единичной площади *(кг/м²).*

Для решения задачи можно воспользоваться выражениями (4.36):

Произвольные постоянные определяем из статических граничных условий:

а) при *x=0* $N_1 = 0$;

(4.44)

б) при *x=l* $N_2 = 0$.

Условие (а) дает $D_2=0$.

Из условия (б) определяем D_1

$$ql^2 - D_1 l = 0,$$
$$D_1 = ql. \qquad (4.45)$$

Подставляя значение D_1 в уравнения (4.43), получим окончательное решение задачи:

$$N_1 = \frac{qx}{R}(x-l)\cos\theta,$$
$$S = -q(2x-l)\sin\theta, \qquad (4.46)$$
$$N_2 = -qR\cos\theta.$$

Это решение позволит определить и упругие перемещения оболочки, для чего нужно подставить значение компонентов нагрузки в (4.38), (4.40) и (4.41):

$$u = \frac{1}{Eh}\left(\frac{qx^3}{2R} - \frac{qlx^2}{2} + D_3\right)\cos\theta,$$

$$v = \frac{1}{Eh}\left\{2q\left[\frac{x^4}{24R^2} - x^2\right] - ql\left[\frac{x^3}{6R^2} - 2x\right] + \frac{1}{R}(D_3x + D_4)\right\}\sin\theta, \qquad (4.47)$$

$$w = -\frac{1}{Eh}\left\{qR^2 + 2q\left(\frac{x^4}{24R^2} - x^2\right) - ql\left[\frac{x^3}{6R^2} - 2x\right] + \frac{1}{R}(D_3x + D_4)\right\}\cos n\theta.$$

Произвольные постоянные D_3 и D_4 определим из геометрических граничных условий:

а) *x=0,* v=0;

(4.48)

б) *x=l,* $v=0$.

Приравнивая нулю *v* при x=0, получим $D_4=0$. Из условия (б) получаем:

$$D_3 = -\frac{ql^3}{12R}.$$

Определив постоянные D_3 и D_4, вычислим значения упругих смещений на одном из краев, например, при x=0:

$$u_k = -\frac{ql^3}{12EhR}\cos\theta, \quad v_k = 0, \qquad w_k = -\frac{R^2 q}{Eh}\cos\theta. \tag{4.49}$$

Приведенный расчет показал, что граничное условие относительно прогиба w не выполняется: труба стремится сместиться с опор в радиальном направлении. Но так как в действительности опорные диафрагмы не дают возможности оболочке прогибаться на контуре, то происходит изгибание оболочки у опоры.

Этот изгиб носит местный характер и оказывает влияние на напряженное состояние непосредственно у опоры.

Как видно из формул (4.47) и (4.49), N_1 и N_2 так же, как и u, изменяются в круговом направлении по закону R cosφ, что соответствует линейному распределению усилий и перемещению u по высоте сечения (рис. 4.8).

3. Расчет цилиндрического резервуара на ветровую нагрузку.

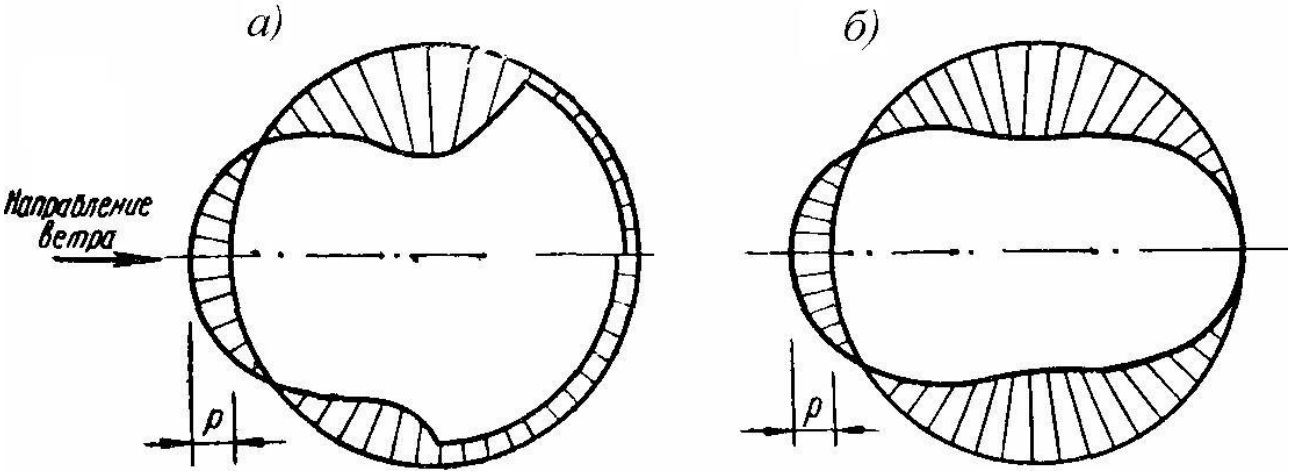


Рис. 4.9

Экспериментальные исследования (обдувка цилиндров) показали, что ветровая нагрузка действует перпендикулярно к поверхности цилиндра и в кольцевом направлении изменяется по закону, изображенному на рис. 4.9, *а.* В зависимости от степени шероховатости обдуваемой поверхности цилиндра картина распределения давления ветра несколько меняется. Для более шероховатой поверхности точка перехода от давления к отсосу немного смещается навстречу ветру. Компоненты p_1 и p_2 равны нулю, а p_3 может быть представлена рядом Фурье:

$$p_3 = \sum_n p_n \cos n\theta, \quad \text{где} \quad \text{n=0,1,2,3,…} \tag{4.50}$$

Как показали эксперименты, при аппроксимации (приближенном задании) функции давления ветра на цилиндрическую поверхность можно ограничиться рядом из трех членов (рис. 4.9, б), т. е. задать p_3 в виде

$$p_3 = \sum_{n=0}^{m=3} p_n \cos n\theta = p\left(-0{,}7 + 0{,}5\cos\theta + 1{,}2\cos 2\theta\right), \qquad (4.51)$$

т. е.

$$p_{30} = 0{,}7p, \quad p_{31} = 0{,}5p, \quad p_{32} = 1{,}2p, \qquad (4.52)$$

где p—максимальная величина ветрового давления. При небольшой высоте резервуара ветровое давление может быть принято постоянным по высоте, не зависящим от x.

Подставляя значение p_3 в (4.36), получаем усилия:

$$N_1 = -\frac{x^2}{2R}\sum_0^2 n^2 p_{3n}\cos n\theta - \frac{x}{R}\sum_0^2 nD_{1n}\cos n\theta + \sum_0^2 nD_{2n}\cos n\theta,$$

$$S = +x\sum_0^2 np_{3n}\sin n\theta + \sum_0^2 D_{1n}\sin n\theta, \qquad (4.53)$$

$$N_2 = +R\sum_0^2 p_{3n}\cos n\theta.$$

Постоянные D_{1n} (n=0, 1, 2) и D_{2n} (n=0, 1, 2) определяются из граничных условий.

Считая, что нижний край оболочки закреплен, а верхний свободен, и принимая начало координат у верхнего края оболочки, можно записать, что

$$\text{при } x=0 \quad N_1=S=0. \qquad (4.54)$$

Из этих условий непосредственно получаем:

$$\begin{aligned} D_{1n} &= 0, \\ D_{2n} &= 0. \end{aligned} \qquad (4.55)$$

Усилия можно записать в виде:

$$N_1 = \frac{x^2 p}{2R}\left(0{,}5\cos\theta + 4{,}8\cos 2\theta\right),$$

$$S = -xp\left(0{,}5\sin\theta + 2{,}4\sin 2\theta\right), \qquad (4.56)$$

$$N_2 = Rp\left(-0{,}7 + 0{,}5\cos\theta + 1{,}2\cos 2\theta\right).$$

Эпюры этих усилий показаны на рис. 4.10.

В этом случае граничные условия относительно w на крае $x=l$ не выполняются и у закрепленного края возникает изгибное-напряженное состояние, имеющее местный характер.

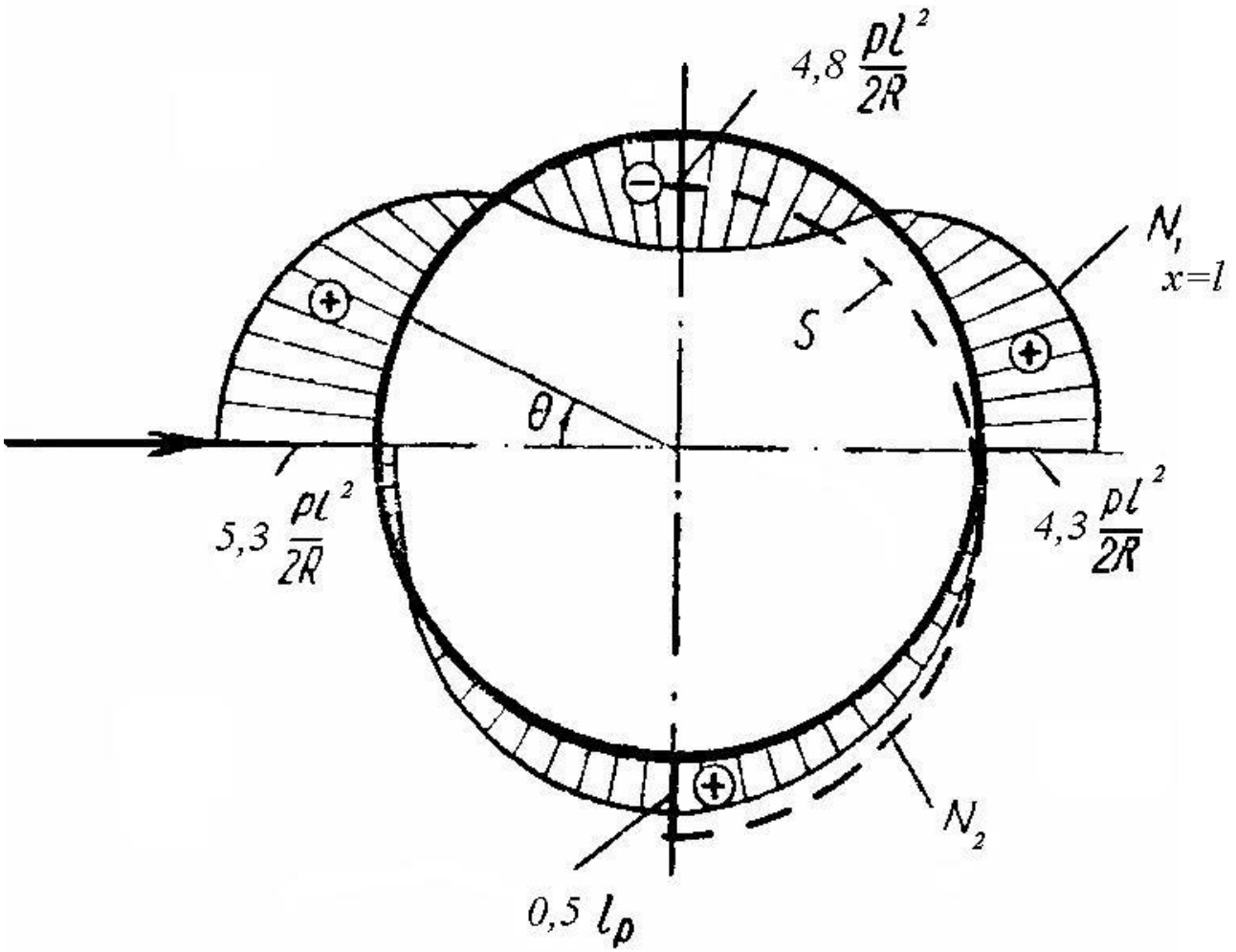


Рис. 4.10

§ 6. Расчет оболочек вращения на статическую нагрузку, периодически изменяющуюся в круговом направлении

При расчете оболочек вращения на несимметричную нагрузку остановимся на случае, когда компоненты нагрузки p_1 и p_2 равны нулю. Характерной в этом отношении является ветровая нагрузка: в каждой точке она перпендикулярна поверхности оболочки.

Нормальную нагрузку мы представим в виде

$$p_3 = p_{3n} \cos n\theta, \qquad (4.57)$$

где n—целое число; p_{3n}—функция распределения нагрузки по φ (или z—в цилиндрической системе координат), не зависящая от θ (размерность $кГ/м^2$).

Любую непрерывную нагрузку, действующую на оболочку вращения, можно представить в форме ряда Фурье. Каждый член этого ряда будет иметь вид выражения (4.57).

В дальнейшем ограничимся расчетом оболочки на нагрузку, определяемую одним членом ряда. Если же нагрузка задана несколькими членами ряда, то применяя принцип суперпозиции, можно сложить решения нескольких задач, соответствующих нагрузке, и получить общее решение.

На рис. 4.11 показаны функции cos nθ и sin nθ для различных значений n.

Нужно заметить, что нагрузка, изменяющаяся по закону cos θ (так называемая «первая гармоника»), отличается от других гармоник тем, что она не представляет самоуравновешенной системы сил, в то время как для всех остальных функций это будет иметь место.

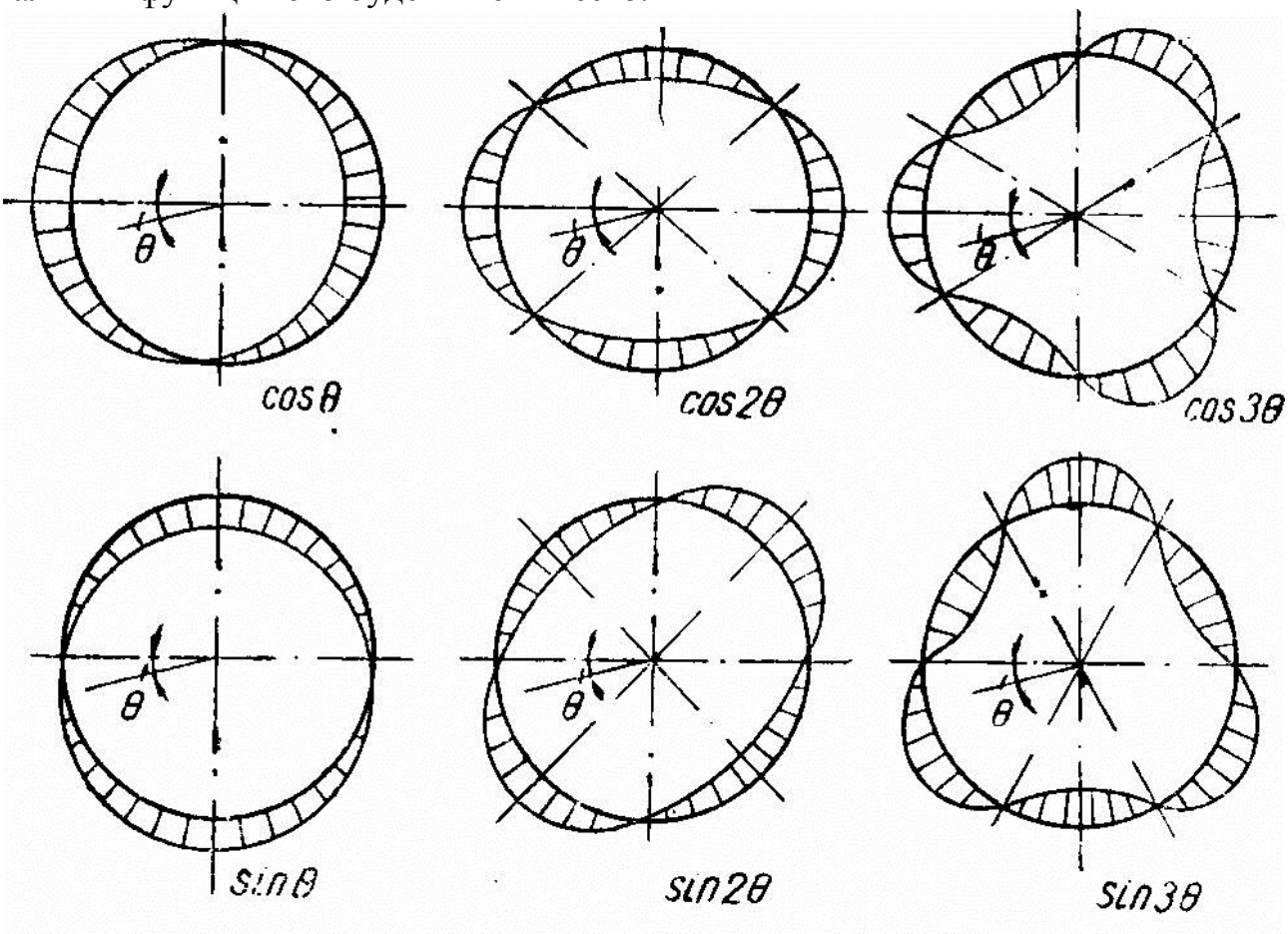


Рис 4. 11

В соответствии с периодическим характером нагрузки примем составляющие напряженного состояния:

$$N_1 = N_{1n}\cos n\theta,$$
$$N_2 = N_{2n}\cos n\theta, \qquad (4.58)$$
$$S = S_n \sin n\theta,$$

где N_{1n}, N_{2n} и S_{3n} — функции одной независимой переменной φ. Положительные направления усилий и нагрузки представлены на рис. 4.3.

Подставим выражения (4.58) в уравнения равновесия (4.8):

$$\frac{\partial(rN_{1n})}{\partial\varphi}\cos n\theta + R_1 n S_n \cos n\theta - R_1 \cos\varphi \cdot N_{2n}\cos n\theta = 0,$$
$$\frac{\partial(rS_n)}{\partial\varphi}\sin n\theta - R_1 n N_{2n}\sin n\theta + R_1 \cos\varphi \cdot S_n \sin n\theta = 0, \qquad (4.59)$$
$$\frac{N_{1n}}{R_1}\cos n\theta + \frac{N_{2n}}{R_2}\cos n\theta = p_{3n}\cos n\theta,$$

где $r=f(\varphi)$ —радиус произвольного параллельного круга.

Все уравнения могут быть сокращены на cos nφ. Но это означает, что при

задании усилий в форме выражений (4.58) уравнения равновесия будут удовлетворены при любом значении θ, если будут удовлетворяться следующие 3 уравнения, не содержащие переменной θ:

$$\frac{d(rN_{1n})}{d\varphi} + R_1 nS_n - R_1 \cos\varphi \cdot N_{2n} = 0,$$

$$\frac{d(rS_n)}{d\varphi} - R_1 nN_{2n} + R_1 \cos\varphi \cdot S_n = 0, \qquad (4.60)$$

$$\frac{N_{1n}}{R_1} + \frac{N_{2n}}{R_2} = + p_{3n}(\varphi).$$

Полученная система обыкновенных дифференциальных уравнений описывает напряженное состояние .произвольной оболочки вращения: геометрические характеристики r, R_1 и R_2, входящие в эти уравнения, являются произвольными функциями независимой переменной φ.

Как будет показано в следующем параграфе, эта система может быть сведена к одному дифференциальному уравнению введением функции напряжений.

Предварительно рассмотрим простой, но в то же время имеющий определенный практический интерес случай действия нормальной нагрузки p_3 на сферическую оболочку.

Для сферической оболочки

$$R_1 = R_2 = R = const \text{ и } r = R\sin\varphi \qquad (4.61)$$

Из последнего уравнения системы (4.60) можно получить значение N_{2n}:

$$N_{2n} = p_{3n}R - N_{1n} \qquad (4.62)$$

Подставляя это выражение в первые два уравнения равновесия и учитывая (4.61), получаем два уравнения:

$$RnS_n + R\frac{dN_{1n}}{d\varphi}\sin\varphi + RN_{1n}\cos\varphi \cdot 2 = R^2\cos\varphi \cdot p_{3n},$$

$$R\frac{dS_n}{d\varphi}\sin\varphi + RS_n\cos\varphi \cdot 2 + RnN_{1n} = R^2 np_{3n} \qquad (4.63)$$

Разделив оба уравнения на R sinφ, можем записать:

$$S_n\frac{n}{\sin\varphi} + \frac{dN_{1n}}{d\varphi} + 2N_{1n}ctg\varphi = Rctg\varphi p_{3n},$$

$$N_{1n}\frac{n}{\sin\varphi} + \frac{dS_n}{d\varphi} + 2S_n ctg\varphi = R\frac{n}{\sin\varphi}p_{3n}. \qquad (4.64)$$

Для получения конечных уравнений в простейшей форме проделаем следующее преобразование системы (4.64): один раз сложим оба уравнения, другой раз вычтем второе уравнение из первого. Полученная таким образом система имеет вид:

$$\begin{aligned}
&\left(N_{1n}+S_n\right)\left(\frac{n}{\sin\varphi}+2ctg\varphi\right)+\left(\frac{dN_{1n}}{d\varphi}+\frac{dS_n}{d\varphi}\right)=Rp_{3n}\left(ctg\varphi+\frac{n}{\sin\varphi}\right),\\
&\left(N_{1n}-S_n\right)\left(-\frac{n}{\sin\varphi}+2ctg\varphi\right)+\left(\frac{dN_{1n}}{d\varphi}-\frac{dS_n}{d\varphi}\right)=Rp_{3n}\left(ctg\varphi-\frac{n}{\sin\varphi}\right)
\end{aligned} \qquad (4.65)$$

Эта система линейных дифференциальных уравнений может быть записана в несколько сокращенной форме, если ввести обозначения:

$$N_{1n}+S_n=\Phi_1,\quad N_{1n}-S_n=\Phi_4. \qquad (4.66)$$

Тогда

$$\begin{aligned}
&а)\quad \Phi_1\left(\frac{n}{\sin\varphi}+2ctg\varphi\right)+\frac{d\Phi_1}{d\varphi}=Rp_{3n}\left(ctg\varphi+\frac{n}{\sin\varphi}\right);\\
&б)\quad \Phi_2\left(-\frac{n}{\sin\varphi}+2ctg\varphi\right)+\frac{d\Phi_2}{d\varphi}=Rp_{3n}\left(ctg\varphi-\frac{n}{\sin\varphi}\right)
\end{aligned} \qquad (4.67)$$

Получены, таким образом, два независимых уравнения относительно новых неизвестных Φ_1 и Φ_2.

Если нам удастся найти эти неизвестные, то из простейшей системы (4.66) будут найдены N_1 и N_2, а из уравнения (4.62) определим последний неизвестный компонент усилия в оболочке — N_{2n}.

Рассмотрим ход решения уравнения (4.67, а). Представляя решение в форме

$$\Phi_1=U(\varphi)\cdot V(\varphi) \qquad (4.68)$$

и подставляя его в уравнение, получим:

$$UV\left(\frac{n}{\sin\varphi}+2ctg\varphi\right)+U\frac{dV}{d\varphi}+V\frac{dU}{d\varphi}=Rp_{3n}\left(ctg\varphi+\frac{n}{\sin\varphi}\right). \qquad (4.69)$$

Нетрудно заметить, что это уравнение тождественно удовлетворяется, если U и V связаны такими зависимостями:

$$\begin{aligned}
&а)\quad \frac{dV}{d\varphi}=-V\left(\frac{n}{\sin\varphi}+2ctg\varphi\right);\\
&б)\quad V\frac{dU}{d\varphi}=Rp_{3n}\left(ctg\varphi+\frac{n}{\sin\varphi}\right)
\end{aligned} \qquad (4.70)$$

Действительно, первые два члена левой части, как и последний член левой части, и правая часть уравнения (4.69) взаимно равны.

Таким образом, вместо решения уравнения (4.69) нужно решить два несравненно более простых уравнения (4.70, а) и (4.70, б), содержащих по одной неизвестной.

Решая первое из них, получим:

$$V=e^{-\int\left(\frac{n}{\sin\varphi}+2ctg\varphi\right)d\varphi}.$$

Из (4.70, б) интегрированием определяем и

$$U=R\int\frac{p_{3n}}{V}\left(ctg\varphi+\frac{n}{\sin\varphi}\right)d\varphi+C_1.$$

Возвращаясь к Φ_1 можно записать:
(4.71)
Проведем элементарные упрощения.

Зная, что $e^{n\,lnx}=x^n$, запишем:

$$e^{n\int \frac{d\varphi}{\sin\varphi}} = e^{n\ln tg\frac{\varphi}{2}} = tg^n\frac{\varphi}{2},$$

$$e^{2\int ctg\varphi d\varphi} = e^{2\ln\sin\varphi} = \sin^2\varphi.$$

Таким образом,

$$e^{-\int\left(\frac{n}{\sin\varphi}+2ctg\varphi\right)d\varphi} = \frac{ctg^n\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\sin^2\varphi},$$

$$e^{\int\left(\frac{n}{\sin\varphi}+2ctg\varphi\right)d\varphi} = \sin^2\varphi\, tg^n\left(\frac{\varphi}{2}\right).$$

Подставляя эти выражения в уравнение (4.71), получаем

$$\Phi_1 = \frac{ctg^n\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\sin^2\varphi}\left[R\int p_{3n}\left(ctg\varphi+\frac{n}{\sin\varphi}\right)\times\sin^2\varphi\, tg^n\left(\frac{\varphi}{2}\right)d\varphi + C_1\right]. \qquad (4.72)$$

Решая таким же путем уравнение (4.67, б), получим:

$$\Phi_2 = \frac{tg^n\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\sin^2\varphi}\left[R\int p_{3n}\left(ctg\varphi-\frac{n}{\sin\varphi}\right)\times\sin^2\varphi\, ctg^n\left(\frac{\varphi}{2}\right)d\varphi + C_2\right]. \qquad (4.73)$$

Определив Φ_1 и Φ_2, вычисляем искомые усилия:

$$N_1 = \frac{\Phi_1+\Phi_2}{2}\cos n\theta,$$

$$S = \frac{\Phi_1-\Phi_2}{2}\sin n\theta, \qquad (4.74)$$

$$N_2 = Rp_3 - N_1.$$

Пример. Рассчитаем сферическую оболочку, представленную на рис. 4.12, *а* на нагрузку:

$$p_3 = -q\sin\varphi\cos\theta,$$

$$p_{3n} = -q\sin\varphi, \qquad (4.75)$$

$$n=1,$$

$$q=const.$$

В такой форме часто задают ветровую нагрузку, хотя действительное ее выражение, полученное .при обдувке таких поверхностей, имеет более сложный вид.

Подставляем значение p_3 в выражение (4.72):

1-
но

$$\Phi_1 = \frac{ctg\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\sin^2\varphi}\left[-Rq\int(\cos\varphi+1)\sin^2\varphi\, tg\left(\frac{\varphi}{2}\right)d\varphi + C_1\right],$$

но

$$tg\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi}},$$

$$\Phi_1 = \frac{\sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi}\left(1-\cos^2\varphi\right)}}{\sin^3\varphi} \times \left[-Rq\int \sin^3\varphi\, d\varphi + C_1\right],$$

или

$$\Phi_1 = \frac{1+\cos\varphi}{\sin^3\varphi}\left[+Rq\left(\cos\varphi - \frac{\cos^3\varphi}{3}\right) + C_1\right]. \qquad (4.76)$$

Подобным же образом можно получить

$$\Phi_2 = \frac{1-\cos\varphi}{\sin^3\varphi}\left[-Rq\left(\cos\varphi - \frac{\cos^3\varphi}{3}\right) + C_2\right]. \qquad (4.77)$$

Усилия N_1 и S определяются выражениями (4.74):

$$\begin{aligned} &а)\ N_1 = \frac{\Phi_1+\Phi_2}{2}\cos\theta = \frac{\cos\theta}{2\sin^3\varphi}\left[(C_1+C_2)+\cos\varphi(C_1-C_2)+\right.\\ &\left.+2Rq\cos\varphi\left(\cos\varphi-\frac{\cos^3\varphi}{3}\right)\right];\\ &б)\ S = \frac{\Phi_1-\Phi_2}{2}\sin\theta = \frac{\sin\theta}{2\sin^3\varphi}\left[(C_1-C_2)+\cos\varphi(C_1+C_2)+\right.\\ &\left.+2Rq\left(\cos\varphi-\frac{\cos^3\varphi}{3}\right)\right]; \end{aligned} \qquad (4.78)$$

Осталось определить произвольные постоянные C_1 и C_2. Попытаемся сделать это путем следующих рассуждений.

Нагрузка, действующая на оболочку, имеет плавный характер и конечную величину. Несомненно, что и внутренние усилия, вызванные этой нагрузкой, не могут иметь бесконечно большого значения ни в одной точке оболочки, в том числе и у вершины, где φ=0.

Для этого необходимо, чтобы выражения в квадратных скобках, входящие в уравнения (4.78), по крайней мере, до третьего порядка, были равны нулю, так как знаменатель ($\sin^3\varphi$), его первая и вторая производные равны нулю при φ =0. Это означает, что выражения в квадратных скобках, а также их первые и вторые производные по φ должны быть равны нулю при φ =0.

Проделаем эти выкладки над выражением в квадратных скобках для N_1

$$[\ ]_{\varphi=0} = (C_1 = C_2) + (C_1 - C_2)\cdot 1 + 2Rq\cdot 1\left(1-\frac{1}{3}\right) = 0$$

откуда

$$C_1 = -\frac{2}{3}Rq,$$

$$\frac{d}{d\varphi}[\ ] = -\sin\varphi(C_1 - C_2) + 2Rq \times \left[-\sin\varphi\left(\cos\varphi - \frac{\cos^3\varphi}{3}\right) - \cos\varphi\sin^3\varphi \right].$$

Последнее выражение обращается в нуль при φ =0:

$$\frac{d^2}{d\varphi^2}[\ ] = -\cos\varphi(C_1 - C_2) + 2Rq \times \left[-\cos\varphi\left(\cos\varphi - \frac{\cos^3\varphi}{3}\right) + \sin^2\varphi - \cos^2\varphi\sin^2\varphi + \right.$$

$$\left. + \sin^4\varphi - 3\cos^2\varphi\sin^2\varphi \right],$$

$$\frac{d^2}{d\varphi^2}[\ ]_{\varphi=0} = -1(C_1 - C_2) + 2Rq\left[-1\left(1 - \frac{1}{3}\right)\right] = 0,$$

откуда

$$C_1 - C_2 = -\frac{4}{3}Rq; \quad C_2 = \frac{2}{3}Rq.$$

Те же самые результаты могут быть получены, если проделать подобные выкладки над выражением (4.78,6).

Подставив значения C_1 и C_2 в (4.78), получим для усилий следующие выражения:

$$N_1 = -\frac{qR}{2}\frac{\cos\theta}{\sin^3\varphi}\left(2\cos\varphi - 3\cos^2\varphi + \cos^4\varphi\right),$$

$$S = -\frac{qR}{2}\frac{\sin\theta}{\sin^3\varphi}\left(2 - 3\cos\varphi + \cos 3^4\varphi\right), \qquad (4.79)$$

$$N_2 = -qR\sin\varphi\cos\theta - N_1.$$

На рис. 4.12 показаны эпюры этих сил в некоторых сечениях. Получающаяся при определении усилий N_1 и S в вершине оболочки неопределенность типа $\frac{0}{0}$ легко может быть

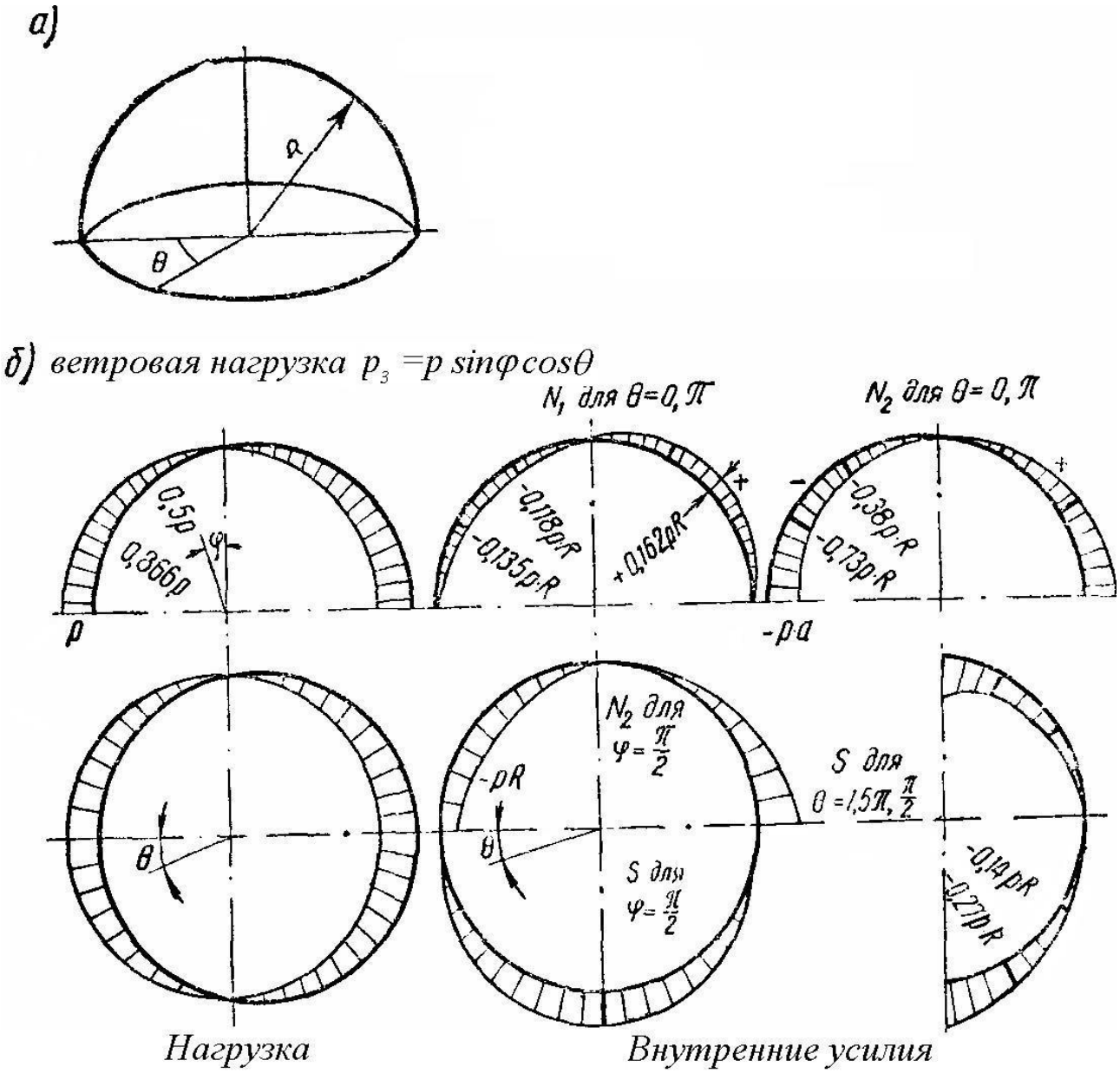


Рис. 4.12

раскрыта по правилу Лопиталя, и все усилия при φ=0 также равны нулю.

В случае расчета полусферы нормальные усилия N_1 у края оболочки равны нулю. Действительно, момент внешних сил относительно любой прямой в плоскости опорного круга, проходящей через его центр, равен нулю, так как линия действия ветровой нормальной нагрузки проходит через центр сферы, лежащий в данном случае в плоскости опорного кольца.

§ 7. Вывод разрешающего уравнения для произвольной оболочки вращения при нагрузке, разложенной в ряд Фурье вдоль параллели

Рассмотренная на стр. 72 система уравнений равновесия относится, вообще говоря, к произвольной оболочке вращения. Будучи записана в сферической системе координат, она была особенно удобна для решения задачи о сферической оболочке.

Для последующего изложения удобно записать исходную систему уравнений в цилиндрической системе координат (r, θ, z). В этом случае напряженное состояние оболочки вращения описывается системой уравнений, имеющих следующий вид:

$$\begin{aligned} &а)\ \left(rN_1\right)' - r'N_2 + A\frac{\partial S}{\partial \theta} = -Ar\,p_1;\\ &б)\ A\frac{\partial N_2}{\partial \theta} + \frac{1}{r}\left(r^2 S\right)' = -Ar\,p_2;\\ &в)\ -\frac{rr''}{A^2}N_1 + N_2 = Ar\,p_3. \end{aligned} \tag{4.80}$$

Эта система получена из исходной системы (4.2) подстановкой для оболочек вращения $\alpha=z$, $\beta=0$, $B=r$, $A=\sqrt{1+r'^2}$, как это было показано в § 1 гл. I. Кривизны оболочек вращения определяются по формулам:

$$k_1 = -\frac{r''}{\left(1+r'^2\right)^{\frac{3}{2}}}, \quad k_2 = -\frac{r''}{r\left(1+r'^2\right)^{\frac{1}{2}}},$$

$r=f(z)$—радиус произвольного параллельного круга. Штрихом обозначены производные по z.

Нетрудно показать, что система уравнений (4.80) может быть приведена к одному уравнению с помощью некоторой функции напряжений.

Проследим последовательно ход преобразований. Исключив N_2 из уравнений (4.80, а) и (4.80, б) с помощью (4.80, в), получим систему двух уравнений:

$$\begin{aligned} &\left(rN_1\right)' - \frac{rr'r''}{A^2}N_1 + A\frac{\partial S}{\partial \theta} = -Ar\left(p_1 - r'p_3\right),\\ &\frac{rr''}{A}\frac{\partial N_1}{\partial \theta} + \frac{1}{r}\left(r^2 S\right) = -Ar\left(p_2 + A\frac{\partial p_3}{\partial \theta}\right). \end{aligned} \tag{4.81}$$

Введем новые функции U и V, связанные с N_1 и S выражениями

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{A}{r}V,\\ S &= \frac{U}{r^2}. \end{aligned} \tag{4.82}$$

После подстановки (4.82) в уравнения (4.81) получим:

$$\frac{\partial V}{\partial z}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial U}{\partial\theta}=-r\left(p_1-r'p_3\right),$$
$$\frac{\partial U}{\partial z}+rr''\frac{\partial V}{\partial\theta}=-Ar^2\left(p_2-A\frac{\partial p_3}{\partial\theta}\right). \tag{4.83}$$

Ничего нового по сравнению с (4.81) мы не получили, но вид системы значительно упростился.

Введем функцию напряжений Ф, связанную с U и V такими зависимостями:

$$U=-r^2\frac{\partial\Phi}{\partial z},$$
$$V=\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}-\int r\left(p_1-r'p_3\right)dz. \tag{4.84}$$

Подставляя U и V в форме (4.84) в 'первое уравнение системы (4.83), видим, что оно тождественно удовлетворяется. Подстановка во второе уравнение этой системы дает р а з р е ш а ю щ е е у р а в н е н и е задачи:

$$r\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}+2r'\frac{\partial\Phi}{\partial z}-r''\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2}=Z, \tag{4.85}$$

где

$$Z=Ar\left(p_2+A\frac{\partial p_3}{\partial\theta}\right)-r''\frac{\partial}{\partial\theta}\int r\left(p_1-r'p_3\right)dz. \tag{4.86}$$

Таким образом, система трех уравнений (4.80), из которых два уравнения дифференциальные первого порядка, сведена к одному неоднородному дифференциальному уравнению второго порядка в частных производных с переменными коэффициентами.

Правая часть уравнения для заданной формы оболочки и нагрузки является некоторой известной функцией z и θ.

Определив из уравнения (4.85) функцию напряжений, мы тем самым определяем с точностью до произвольных функций компоненты усилий через функцию напряжений, подставляя (4.84) в (4.82):

$$N_1=\frac{A}{r}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}-\int r\left(p_1-r'p_3\right)dz\right],$$
$$S=-\frac{\partial\Phi}{\partial z}, \tag{4.87}$$
$$N_2=Arp_3+\frac{rr''}{A^2}N_1.$$

Как решить уравнение (4.85)? Рассмотрим действие произвольной нагрузки, разложенной по θ в ряд Фурье, ограничиваясь лишь нормальным компонентом нагрузки в форме (4.57).

Подставляя выражение (4.57) в уравнение (4.85) и задавая функцию напряжений также в форме ряда Фурье

$$\Phi=\sum\Phi_n\sin n\theta, \tag{4.88}$$

приведем решение пока произвольной задачи к решению обыкновенного

линейного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами

$$r\frac{d^2\Phi_n}{dz^2}+2r'\frac{d\Phi_n}{dz}+r''n^2\Phi_n=Z^*, \tag{4.89}$$

где

$$Z^*=-A^2rnp_{3n}-r''n\int r'p_{3n}dz.$$

Знак плюс перед последним членом в левой части — результат двукратного дифференцирования sin nθ. Для нескольких классов оболочек вращения это уравнение может быть приведено путем замены переменной к уравнению с постоянными коэффициентами.

Решение любого линейного уравнения, как известно, складывается из решения однородного уравнения и некоторого частного решения неоднородного уравнения.

$$\Phi_n=\Phi_n^0+\Phi_n^*, \tag{4.90}$$

где Φ_n^0 — решение однородного уравнения

$$r\frac{d^2\Phi_n^0}{dz^2}+2r'\frac{d\Phi_n^0}{dz}+r''n^2\Phi_n^0=0, \tag{4.91}$$

а Φ_n^* — частное решение уравнения (4.89).

Следовательно, и компоненты напряженного состояния можно представить в виде:

(4.92)

где N_1^0, N_2^0, S^0 — компоненты напряженного состояния, возникающие в оболочке при отсутствии поверхностных сил (компоненты однородного напряженного состояния), соответствующие функции Φ_n^0; N_1^*, N_2^*, S^*, соответствуют частному решению неоднородного уравнения (4.89) и функции Φ_n^*.

В следующем параграфе рассматривается одна задача из ряда всевозможных задач, которые решаются с помощью уравнения (4.89).

§ 8. Расчет однополостного гиперболоида вращения на нормальную нагрузку $p_3=p_{3n}(z)\cos n\theta$. Применение метода начальных условий для нахождения решения неоднородной задачи

Рассматриваемая в этом параграфе форма оболочки характерна для многих современных инженерных конструкций. Гиперболические тонкостенные градирни нашли широкое применение при строительстве тепловых электростанций (рис. 4.6).

Поверхность гиперболоида описывается вращением кривой

$$r=\frac{a}{b}\sqrt{b^2+z^2}, \tag{4.93}$$

где a и b — параметры гиперболы.

Попытаемся найти решение однородного уравнения (4.91) для рассматриваемой оболочки, а затем построить и частное решение

неоднородного уравнения.

Путем замены переменной r приведем уравнение (4.91) к уравнению с постоянными коэффициентами.

Введем новую переменную α, связанную с z зависимостью

$$z = btg\alpha. \tag{4.94}$$

Тогда

$$\sin\alpha = \frac{z}{\sqrt{b^2 + z^2}}, \quad \cos\alpha = \frac{b}{\sqrt{b^2 + z^2}}.$$

В новых координатах (a, b) уравнение, кривой вращения имеет вид

$$r = \frac{a}{\cos\alpha}. \tag{4.95}$$

Необходимые производные от r по z находим по правилу дифференцирования сложной функции, например:

$$\frac{dr}{dz} = \frac{dz}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dz} = \frac{a}{b}\sin\alpha,$$

$$\frac{d^2r}{dz^2} = \frac{d}{dz}\left(\frac{dr}{dz}\right) = \frac{a}{b^2}\cos^3\alpha.$$

Коэффициент первой квадратичной формы в этих координатах будет равен

Л:

$$A = \sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}\sin^2\alpha}. \tag{4.96}$$

Находя подобным же образом соответствующие производные от Φ_n^0 и подставляя их в уравнение (4.91), после очевидных преобразований получим

$$\frac{d^2\Phi_n^0}{d\alpha^2} + n^2\Phi_n^0 = 0. \tag{4.97}$$

Решение этого обыкновенного линейного дифференциального уравнения имеет вид

$$\Phi_n^0 = Ce^{k_1\alpha} + De^{k_2\alpha}, \tag{4.98}$$

где C и D — произвольные постоянные, k_1, k_2 — корни характеристического уравнения, соответствующего уравнению (4.97)

$$k^2 + n^2 = 0. \tag{4.99}$$

Так как оба корня мнимые, то решение уравнения (4.97) имеет вид

$$\Phi_n^0 = C\sin n\alpha + D\cos n\alpha, \tag{4.100}$$

а общее решение однородного уравнения в соответствии с равенством (4.95) должно быть записано так:

$$\Phi_n^0 = \sum\left(C\sin n\alpha + D\cos n\alpha\right)\sin n\theta. \tag{4.101}$$

Решение однородной задачи, т. е. такой задачи, когда нагрузка действует лишь по краям оболочки, а поверхность ее свободна от нагрузки, может быть представлено в виде:

$$N_1^0 = \frac{\cos\alpha}{a}\sqrt{1+\omega^2\sin^2\alpha}\sum n\left(C\sin n\alpha + D\cos n\alpha\right)\cos n\theta,$$

$$S^0 = -\frac{\cos^2\alpha}{b}\sum n\left(C\cos n\alpha - D\sin n\alpha\right)\sin n\theta, \qquad (4.102)$$

$$N_2^0 = \frac{a\cos^3\alpha}{b^2\sqrt{1+\omega^2\sin^2\alpha}}\sum n\left(C\sin n\alpha + D\cos n\alpha\right)\cos n\theta,$$

где

$$\omega^2 = \frac{a^2}{b^2}.$$

Зная решение однородной задачи нетрудно построить и частное решение, т. е. N_1*, N_2* и S*.

Это частное решение можно найти формальными математическими приемами, например методом вариации произвольных постоянных.

Для нахождения частного решения применим метод, принципы которого хорошо известны из курса сопротивления материалов, — метод начальных условий. Метод этот, с успехом примененный к расчету безмоментных оболочек В. 3. Власовым, обладает большой наглядностью и заключается в следующем.

Произвольные постоянные С и D в выражениях компонентов внутренних усилий, полученных для однородной задачи, выражают через компоненты некоторого напряженного состояния при каком-либо значении координаты α=const (т. е. на уровне какого-либо параллельного круга z==const).

Затем компоненты этого напряженного состояния с помощью уравнений (4.80) связывают с компонентами внешней нагрузки, действующей на том же уровне α = const.

Интегрируя полученные выражения по всей зоне действия нагрузки, получают решение неоднородной задачи.

Покажем этот способ на примере рассматриваемого нами гиперболоида.

Рассматривая однородную задачу, полагаем, что по линии $\alpha = \bar{\alpha}$ задано напряженное состояние в форме тригонометрических рядов:

$$\bar{N}_1(\bar{\alpha},\beta) = \sum \bar{N}_{1n}(\bar{\alpha})\cos n\theta,$$
$$\bar{S}(\bar{\alpha},\beta) = \sum \bar{S}(\bar{\alpha})\sin n\theta. \qquad (4.103)$$

Выразим произвольные постоянные C и D в формулах (4.102) через компоненты этого состояния.

Усилие N_2 в дальнейшем определять не будем, так как при известных N_1 и S его проще найти из последнего уравнения равновесия.

Для этого приравняем N_1^0 и $\bar{N}_1$ на линии $\alpha = \bar{\alpha}$. Для одного какого-либо члена n ряда получаем систему двух алгебраических уравнений для определения С и D:

$$\frac{\cos\bar{\alpha}}{a}\sqrt{1+\omega^2\sin^2\bar{\alpha}}\cdot n\left(C\sin n\bar{\alpha}+D\cos n\bar{\alpha}\right)=\bar{N}_{1n}(\bar{\alpha}),$$
$$-\frac{\cos^2\bar{\alpha}}{a}n\left(C\cos n\bar{\alpha}B-B\sin n\bar{\alpha}\right)=\bar{S}_n(\bar{\alpha}). \qquad (4.104)$$

Из этой системы уравнений и определяются C и D как функции $\bar{N}_{1n}(\bar{\alpha})$ и $\bar{S}_n(\bar{\alpha})$.

Решив эту систему и подставив C и D в уравнения (4.102), после преобразований получим:

$$N_1^0(\alpha,\bar{\alpha},\beta)=\frac{\cos\alpha}{\omega}\sqrt{1+\omega^2\sin^2\alpha}\sum\left[\bar{N}_{1n}(\bar{\alpha})\frac{\omega\cos n(\bar{\alpha}-\alpha)}{\cos\bar{\alpha}\sqrt{1+\omega^2\sin^2\bar{\alpha}}}+\right.$$
$$\left.+\bar{S}_n(\bar{\alpha})\frac{\sin n(\bar{\alpha}-\alpha)}{\cos^2\bar{\alpha}}\right]\cos n\theta,$$
$$S_0(\alpha,\bar{\alpha},\beta)=-\cos^2\alpha\sum\left[\bar{N}_{1n}(\bar{\alpha})\frac{\omega\sin n(\bar{\alpha}-\alpha)}{\cos\bar{\alpha}\sqrt{1+\omega^2\sin^2\bar{\alpha}}}-\right. \qquad (4.105)$$
$$\left.-\bar{S}_n(\bar{\alpha})\frac{\cos n(\bar{\alpha}-\alpha)}{\cos^2\bar{\alpha}}\right]\sin n\theta,$$

где $\bar{N}_{1n}(\bar{\alpha})$ и $\bar{S}_n(\bar{\alpha})$ — произвольные функции параметра $\bar{\alpha}$.

Используя решение однородного уравнения (4.105), построим частное решение, соответствующее нагрузке, произвольно распределенной по поверхности гиперболоида.

Предположим, что наряженное состояние (4.103) возникает при действии произвольной нагрузки, приложенной по полоске, определяемой координатами $\bar{\alpha}$ и $\bar{\alpha}+d\bar{\alpha}$. Для наглядности вернемся к прежней системе координат z и θ. Полоска, ограниченная сечениями z и $z+Sz$, показана на рис. 4.13. В безмоментных оболочках вращения, нагруженных по кольцевой линии, напряженное состояние возникает лишь «ниже» линии приложения нагрузки.

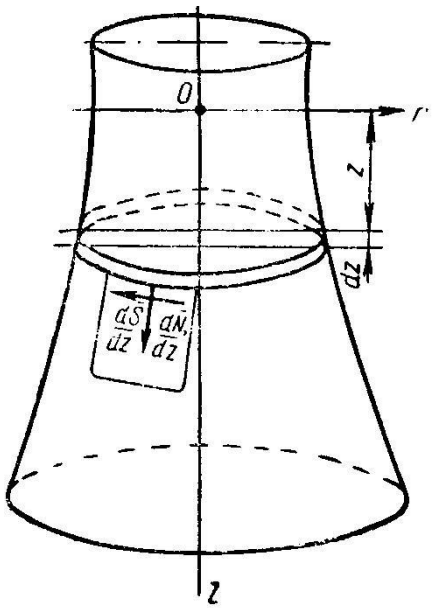


Рис. 4.13

Применяя уравнения (4.80) к рассматриваемой элементарной полоске, можно положить равными нулю внутренние усилия и их производные по θ, после чего получим:

$$\frac{dN_1}{dz}=-r'\left(1+r'^2\right)^{\frac{1}{2}}p_3,$$
$$\frac{dS}{dz}=\left(1+r'^2\right)\frac{dp_3}{d\theta},$$

или в системе координат α,θ:

$$dN_1 = -\frac{b}{a} r' r^2 \left(1 + r'\right)^{\frac{1}{2}} p_3 d\alpha,$$
$$dS = \frac{b}{a^2} r^2 \left(1 + r'^2\right) \frac{dp_3}{d\theta} d\alpha. \tag{4.106}$$

Таким образом, установлена связь между компонентами напряженного состояния и нагрузкой, действующей на элементарной полоске $d\bar{\alpha}$ (соответствующей *dz)*. Пусть при $d\bar{\alpha}$, стремящемся к нулю, величина $p_3 d\bar{\alpha}$ принимает конечное значение, равное интенсивности погонной нагрузки (нагрузка на единицу длины).

Введем обозначение для погонной нагрузки.

$$\bar{p}_3 d\bar{\alpha} = P_3,$$
$$d\bar{\alpha} \to 0. \tag{4.107}$$

Тогда можно записать конечные приращения $\bar{N}_1$ и $\bar{S}$ от погонной нагрузки, сосредоточенной по линии $\alpha = \bar{\alpha}$:

$$\bar{N}_1 = -\frac{b}{a^2} r' r^2 \left(1 + r'^2\right)^{\frac{1}{2}} P_3,$$
$$\bar{S} = +\frac{b}{a^2} r^2 \left(1 + r'^2\right) \frac{\partial P_3}{\partial \theta}, \tag{4.108}$$

где r — заданная функция $d\bar{\alpha}$.

Функция p_3 непрерывно зависит от $d\bar{\alpha}$. Если напряженное состояние выражено рядами (4.103), то коэффициенты этих рядов выражаются через погонные нагрузки так:

$$\bar{N}_{1n}\left(\bar{\alpha}\right) = -\frac{b}{\pi a^2} r' r^2 \left(1 + r'^2\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^{2\pi} P_3\left(\bar{\alpha}, \theta\right) \cos n\theta d\theta,$$
$$\bar{S}_n\left(\bar{\alpha}\right) = \frac{b}{\pi a^3} r^2 \left(1 + r'^2\right) \int_0^{2\pi} \frac{\partial P_3\left(\bar{\alpha}, \theta\right)}{\partial \theta} \sin n\theta d\theta, \tag{4.109}$$

где радиус параллели и его производные следует считать функциями $\bar{\alpha}$.

Подставляя полученные значения коэффициентов Фурье в (4.103), получаем выражения компонентов напряженного состояния, вызванного нагрузкой p_3, приложенной по $\alpha = \bar{\alpha}$. Так как переменная $\bar{\alpha}$ в (4.109) является произвольной величиной, то эти выражения можно рассматривать как линии влияния и, следовательно, получить частные решения для любой распределенной поверхностной нагрузки, для чего необходимо умножить обе части (4.105) на $d\bar{\alpha}$ и проинтегрировать по всей области действия нагрузки:

$$N_1^*(\alpha,\theta)=\frac{\cos\alpha}{\omega}\sqrt{1+\omega^2\sin^2\alpha}\sum\int_{\bar\alpha}^{\alpha}\left[\bar N_{1n}(\alpha)\frac{\omega\cos n(\bar\alpha-\alpha)}{\cos\alpha\sqrt{1+\omega^2\sin^2\alpha}}+\right.$$
$$\left.+\bar S_n(\bar\alpha)\frac{\sin n(\bar\alpha-\alpha)}{\cos^2\alpha}\right]d\bar\alpha\cos n\theta,$$
$$S^*(\alpha,\theta)=-\cos^2\alpha\sum\int_{\bar\alpha}^{\alpha}\left[\bar N_{1n}(\alpha)\frac{\omega\sin n(\bar\alpha-\alpha)}{\cos\bar\alpha\sqrt{1+\omega^2\sin^2\bar\alpha}}-\right. \quad (4.110)$$
$$\left.-\bar S_n(\bar\alpha)\frac{\cos n(\bar\alpha-\alpha)}{\cos^2\bar\alpha}\right]d\bar\alpha\sin n\theta,$$

$N_{1n}(\bar\alpha)$ и $\bar S_n(\bar\alpha)$ определены выражениями (4.109).

Полученное частное решение удовлетворяет граничному условию при $\alpha=\bar\alpha$.

Общее решение задачи получим, просуммировав ряды (4.102) и (4.110):

$$N_1(\alpha,\theta)=N_1^0(\alpha,\theta)+N_1^*(\alpha,\theta),$$
$$S(\alpha,\theta)=S^0(\alpha,\theta)+S^*(\alpha,\theta). \quad (4.111)$$

Тангенциальное усилие $N_2(\alpha,\ \theta)$ определяется из уравнения (4.80, в). Произвольные постоянные C и D позволяют удовлетворять любым возможным статическим граничным условиям.

Пример. Расчет тонкостенной конструкции гиперболической градирни на ветровую нагрузку. Ветровое давление задано выражением:

$$p_3=q\sin^2\varphi(k_0+k_1\cos\theta+k_1\cos2\theta), \quad (4.112)$$

где k_0, k_1 и k_2—некоторые постоянные числа, определяемые экспериментальным путем при обдувке поверхностей.

Обычно принимают:

k_0= - 0,7;
k_1=0,5;
k_2=1,2.

Размеры конструкции показаны на рис. 4.6, причем геометрические параметры образующей гиперболы имеют значения:

a=13 *м*, b=28,163 *м*,
H=53,3 *м*, $z_{верхн}$ = -7,8 *м*, $\bar\alpha=\bar\alpha_{верхн}$ = -0,27.

Верхний край оболочки предполагается свободным от закреплений и от нагрузки, нижний край закреплен от перемещений в двух тангенциальных направлениях (рис. 11-2).

Закон распределения ветрового давления p вдоль оси Oz выбран не в обычной форме $\sin\varphi$, а в виде $\sin^2\varphi$ (φ— угол между осью вращения и нормалью к поверхности оболочки), что значительно упрощает выкладки и существенно не изменяет принятого характера ветровой нагрузки. Действительно, кривизна меридиональной кривой в применяемых на практике конструкциях градирен невелика, т. е. угол φ изменяется в пределах 70—90°, и значения функций $\sin\varphi$ и $\sin^2\varphi$ почти не отличаются друг от друга.

Решение поставленной задачи следует провести тремя этапами:

1) рассчитать оболочку на осесимметричную нагрузку

$$p_{30} = k_0 q \sin^2 \varphi; \tag{4.114}$$

2) рассчитать оболочку на нагрузку

$$p_{31} = k_1 q \sin^2 \varphi \cos\theta; \tag{4.115}$$

3) рассчитать оболочку на нагрузку

$$p_{31} = k_1 q \sin^2 \varphi \cos\theta; \tag{4.116}$$

Не задерживая внимания читателя на выводе формул расчета оболочки на осесимметричную нагрузку, приведем их в окончательном виде. Вывод их прост и аналогичен рассмотренному в § 4 расчету гиперболоида на собственный вес. При расчете можно упростить выражения для нагрузки и принять

$$p_{30} = -0{,}7q. \tag{4.117}$$

Тогда

$$\begin{aligned} N_1 &= -\frac{k_0 q a}{2} \cos\alpha \sqrt{1+\omega^2 \sin^2 \alpha}\, \frac{1}{\cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha_{верхн}}, \\ N_2 &= \frac{\omega^2 \cos^2 \alpha}{1+\omega^2 \sin^2 \alpha} N_1 - \frac{k_0 q a \sqrt{1+\omega^2 \sin^2 \alpha}}{\cos\alpha}. \end{aligned} \tag{4.118}$$

Для того, чтобы определить N_1^* и S^* для компонентов ветровой нагрузки (4.115), подставим (4.115) в (4.109), получим:

$$\begin{aligned} \overline{N}_{11}(\overline{\alpha}) &= -k_1 q \frac{a \sin\overline{\alpha}}{\cos^2 \overline{\alpha} \sqrt{1+\omega^2 \sin^2 \alpha}}, \\ \overline{S}_1(\overline{\alpha}) &= -k_1 q \frac{b}{\cos^2 \overline{\alpha}}. \end{aligned} \tag{4.119}$$

Вводя выражение (4.116) в (4.109), для n=2 получим:

$$\begin{aligned} \overline{N}_{12}(\overline{\alpha}) &= -k_2 q \frac{a \sin\overline{\alpha}}{\cos^2 \overline{\alpha} \sqrt{1+\omega^2 \sin^2 \overline{\alpha}}}, \\ \overline{S}_2(\overline{\alpha}) &= -2k_2 q \frac{b}{\cos^2 \overline{\alpha}}. \end{aligned} \tag{4.120}$$

Последовательно подставляя выражения (4.119) и (4.120) в решение (4.110), взяв интеграл по $\overline{\alpha}$ и выполнив элементарные преобразования, получим выражения для тангенциальных усилий N_1^* и S^*:

$$\begin{aligned} &а)\quad N_{1n}^* = qK_n \frac{\cos\alpha}{\omega} \sqrt{1+\omega^2 \sin^2 \alpha} \sum \left(K_n \sin n\alpha + L_n \cos n\alpha\right) \cdot \cos n\theta, \\ &б)\quad S_n^* = qK_n \cos^2 \alpha \sum \left(K_n \cos n\alpha - L_n \sin n\alpha\right) \cdot \sin n\theta, \end{aligned} \tag{4.121}$$

где n=1,2…

Для известного N_{1n}^* определяем N_{2n}^*:

$$в)\quad N_{2n}^* = \sum \left[\frac{\omega^2 \cos^2 \alpha}{1+\omega^2 \sin^2 \alpha} N_{1n}^* - \frac{a\sqrt{1+\omega^2 \sin^2 \alpha}}{\cos\alpha} k_n q \right] \cos n\theta;$$

K_n и L_n определяются следующими интегралами:

$$K_n = \int_{\bar{\alpha}}^{\alpha} \left[\frac{a\omega \sin\bar{\alpha} \cdot \sin n\bar{\alpha}}{\cos^3\bar{\alpha}\left(1+\omega^2\sin\bar{\alpha}\right)} - \frac{nb\cos n\bar{\alpha}}{\cos^4\bar{\alpha}} \right] d\alpha,$$

$$L_n = \int_{\bar{\alpha}}^{\alpha} \left[\frac{a\omega \sin\bar{\alpha} \cdot \cos n\bar{\alpha}}{\cos^3\bar{\alpha}\left(1+\omega^2\sin^2\bar{\alpha}\right)} + \frac{nb\sin n\bar{\alpha}}{\cos^4\bar{\alpha}} \right] d\alpha, \qquad (4.122)$$

где α – координата, определяющая параллельный круг, на котором ищутся компоненты внутренних усилий, $\bar{\alpha} = \alpha_{верхн}$ - координата, соответствующая верхнему краю градирни.

Произвольные постоянные в общем решении (4.111) определяются из условия, что на свободном верхнем крае усилия N_1 и S равны нулю при $\alpha = \bar{\alpha}$:

$$N_1^0 + N_1^* = 0,$$
$$S^0 + S^* = 0. \qquad (4.123)$$

Нетрудно видеть, что интегралы (4.122) при $\alpha = \bar{\alpha}$ обращаются в нуль, т.е.

$$N^*_{1\alpha=\bar{\alpha}} = 0,$$
$$S^*_{\alpha=\bar{\alpha}} = 0. \qquad (4.124)$$

Это приводит к необходимости равенства нулю решений N_1^0 и S^0, что возможно только в случае

$$C=D=0.$$

Таким образом, в нашем случае общим решением задачи является решение (4.121):

$$N_1 = N_1^*,$$
$$S = S^*, \qquad (4.126)$$
$$N_2 = N_2^*.$$

Интегралы (4.122) легко берутся для интересующих нас значений n=1и n=2 [5].

На рис. 4.14 показаны эпюры внутренних усилий, рассчитанные по формулам (4.121) на ветровую нагрузку, заданную в форме (4.112) для гиперболоида, изображенного на рис. 4.6.

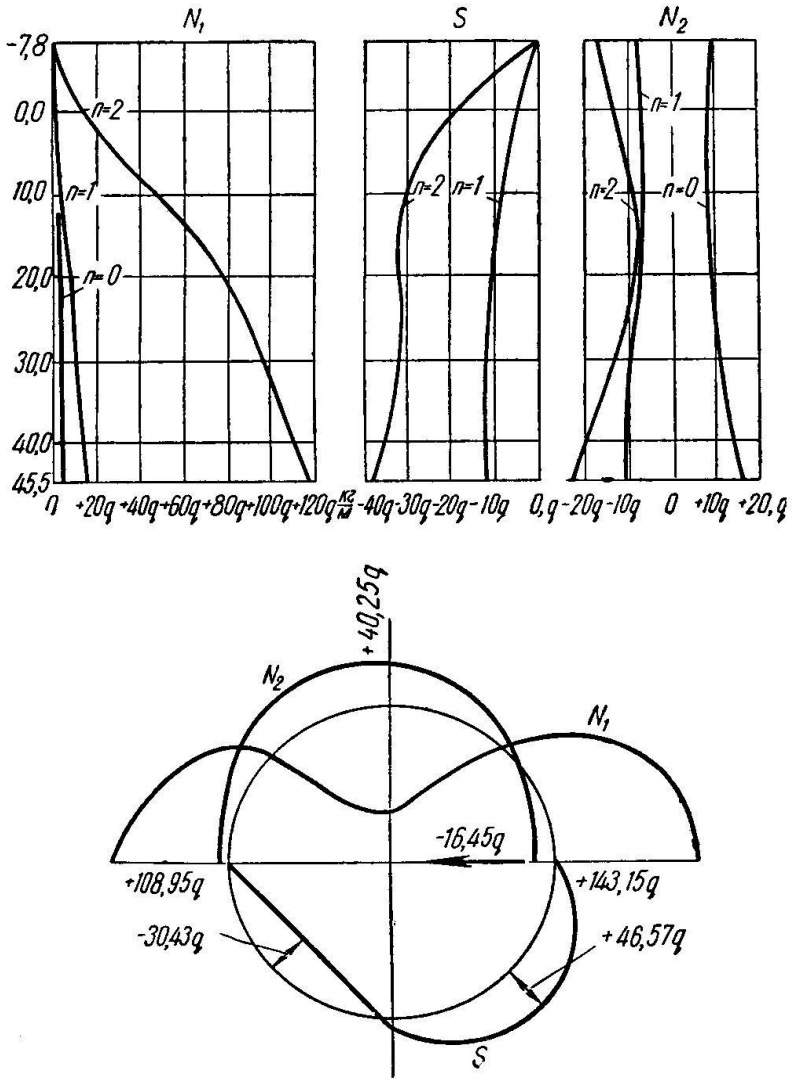


Рис.4.14

§9. Расчет по безмоментной теории оболочки произвольной формы в декартовых координатах

1. Вывод разрешающего уравнения задачи

Представим себе произвольную оболочку, срединная поверхность которой в декартовой системе координат описывается уравнением

$$z = f(x, y).$$

Рассмотрим элемент поверхности оболочки *dF*, у которого горизонтальная проекция является прямоугольником со сторонами *dx* и *dy* (рис. 4.15). Плоскости *x*=const и y=const образуют при пересечении с поверхностью

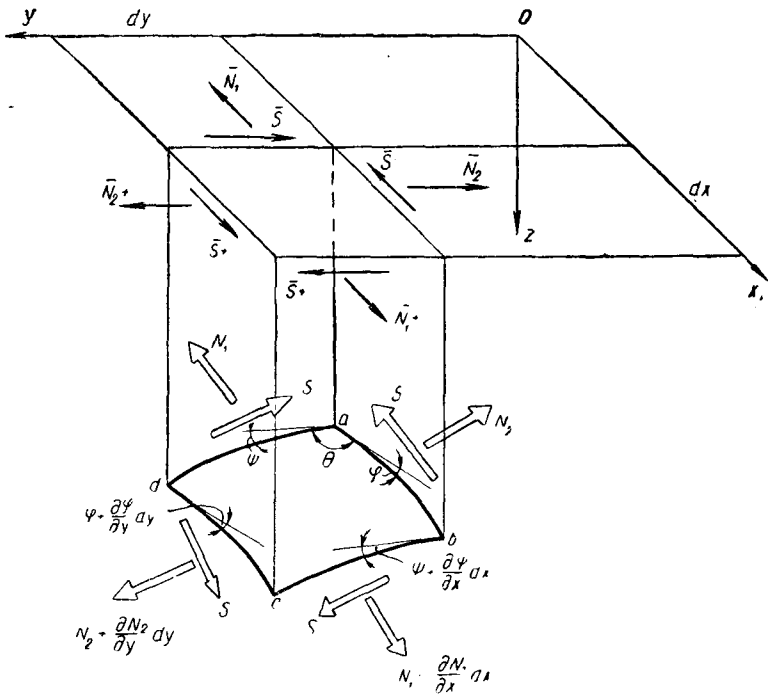


Рис. 4.15

оболочки косоугольную .координатную сетку. Две пары соседних линий ограничивают элемент поверхности *dF*, причем углу θ соответствует прямой угол проекции.

В § 2 были составлены основные уравнения безмоментной теории оболочек произвольной формы в ортогональной криволинейной системе координат.

Для рассматриваемого нами случая произвольной косоугольной системы координатных линий на оболочке удобнее построить систему основных уравнений заново.

Зададимся целью определить компоненты усилий, действующие по сторонам косоугольного элемента, полученного вышеописанным образом.

Нам придется, следовательно, описывать напряженное состояние оболочки посредством нормальных и сдвигающих усилий, действующих на косых площадках. (Направления усилий составят со стороной элемента непрямой угол.) Эти усилия изображены на рис. 4.15. (Как определить усилия, действующие по любому направлению, будет показано в конце этого параграфа.)

Два из разыскиваемых усилий (N_1 и S) параллельны плоскости xOz, и потому не имеют составляющих в направлении Oy, а два других (N_2 и S на гранях ad и bc) не имеют составляющих в направлении Ox.

Это обстоятельство значительно упрощает составление уравнений равновесия.

Составим уравнение равновесия сил в направлении оси Ox.

Рассмотрим сторону элемента, определяемую x=const. Погонное усилие N_1 должно быть умножено на длину стороны элемента $\frac{dy}{\cos\psi}$. Чтобы получить проекцию в направлении оси Ox, следует это усилие умножить на cos φ:

$$N_1 \frac{dy}{\cos\psi}\cos\varphi.$$

Сдвигающее усилие *S* того же направления дает проекцию, равную

$$S \frac{dx}{\cos\varphi}\cos\varphi.$$

Запишем подобным же образом проекция усилий, действующих по стороне элемента *x+dx=const:*

Суммируя эти усилия с соответствующим знаком, получим после сокращения на *dxdy* и естественных упрощений*:

<<* Принимаем для углов первого порядка малости косинус равным единице, а синус и тангенс, равными углу, т. е.

$$\cos\left(\varphi+\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx\right)=\cos\varphi-\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx\sin\varphi=\left(1-\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx\ tg\varphi\right)\cos\varphi;$$

$$\frac{1}{\cos\left(\varphi+\frac{\partial\varphi}{\partial y}dy\right)}=\frac{1}{\cos\left(1-\frac{\partial\varphi}{\partial y}dy\ tg\varphi\right)\cos\varphi}\quad \textit{и т.д.}\quad >>$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(N_1\frac{\cos\varphi}{\cos\psi}\right)+\frac{\partial S}{\partial y}+p_1=0. \qquad (4.128,а)$$

После подобных выкладок получим уравнение равновесия сил в направления оси *Oy:*

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(N_2\frac{\cos\psi}{\cos\varphi}\right)+\frac{\partial S}{\partial x}+p_2=0. \qquad (4.128,б)$$

В этих уравнениях p_1 и p_2— компоненты поверхностной нагрузки, имеющие направления соответственно вдоль осей *Ox* и *Oy.*

Остановимся более подробно на составлении уравнения равновесия сил в направлении оси *Oz.*

Составляющая усилия N_1 в направлении оси *Oz* равна $N_1\frac{dy}{\cos\psi}\sin\varphi$, а составляющая в этом же направлении сдвигающего усилия *S*, отнесенного к той же стороне элемента, равна

$$S\frac{dy}{\cos\psi}\sin\psi.$$

Соответствующие выражения получим и для двух остальных усилий.

Условие равновесия сил в направлении оси *Oz* выглядит следующим образом:

$$- N_1 \sin\varphi \frac{dy}{\cos\psi} + \left(N_1 + \frac{\partial N_1}{\partial x} dx \right) \sin\left(\varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx \right) \frac{dy}{\cos\left(\psi + \frac{\partial \psi}{\partial x} dx \right)} -$$

$$- N_2 \sin\psi \frac{dx}{\cos\varphi} + \left(N_2 + \frac{\partial N_2}{\partial y} dy \right) \sin\left(\psi + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy \right) \frac{dx}{\cos\left(\varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy \right)} -$$

$$- S \sin\varphi \frac{dx}{\cos\varphi} + \left(S + \frac{\partial S}{\partial y} dy \right) \sin\left(\varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy \right) \frac{dx}{\cos\left(\varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy \right)} -$$

$$- S \sin\varphi \frac{dy}{\cos\psi} + \left(S + \frac{\partial S}{\partial x} dx \right) \sin\left(\psi + \frac{\partial \psi}{\partial x} dx \right) \frac{dy}{\cos\left(\psi + \frac{\partial \psi}{\partial x} dx \right)} +$$

$$+ p_3 dx dy = 0.$$

Принимая во внимание упрощения, введенные при рассмотрении уравнений (4.128, а) и (4.128, б), получим:

$$N_1 \left(\frac{\sin\varphi}{\cos\psi} \frac{\partial \psi}{\partial x} tg\psi + \frac{\cos\varphi}{\cos\psi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\sin\varphi}{\cos\psi} +$$

$$+ N_2 \left(\frac{\sin\psi}{\cos\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} tg\varphi + \frac{\cos\varphi}{\cos\psi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial N_2}{\partial y} \frac{\sin\psi}{\cos\varphi} +$$

$$+ S \frac{\partial \varphi}{\partial y} \left(1 + tg^2\varphi \right) + \frac{\partial S}{\partial y} tg\varphi +$$

$$+ S \frac{\partial \psi}{\partial x} \left(1 + tg^2\psi \right) + \frac{\partial S}{\partial x} tg\psi + p_3 = 0.$$

Или в более краткой записи:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(N_1 \frac{\sin\varphi}{\cos\psi} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(N_1 \frac{\sin\psi}{\cos\varphi} \right) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y} \left(S\, tg\varphi \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(S\, tg\psi \right) + p_3 = 0, \qquad (4.128, \text{в})$$

где p_3 - нормальная составляющая нагрузки.

Входящие в уравнения (4.128) значения тригонометрических функций можно представить частными производными от уравнения поверхности, т.е.

$$tg\varphi = \frac{\partial z}{\partial x},$$

$$tg\psi = \frac{\partial z}{\partial y}. \qquad (4.129)$$

Следовательно,

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}} \text{ и т.д.}$$

Нетрудно заметить, что выражения

$$\left(N_1 \frac{dy}{\cos\psi}\right)\cos\varphi, \quad \left(N_2 \frac{dy}{\cos\varphi}\right)\cos\psi,$$

$$\left(S \frac{dy}{\cos\psi}\right)\cos\psi, \quad \left(S \frac{dy}{\cos\varphi}\right)\cos\varphi$$

представляют собой проекции .косых усилий на координатную плоскость *xOy*. Обозначим эти проекции: $\overline{N}_1 dy$, $\overline{N}_2 dx$, $\overline{S} dx$, т. е.

$$\overline{N}_1 = N_1 \frac{\cos\varphi}{\cos\psi}, \quad \overline{N}_2 = N_2 \frac{\cos\psi}{\cos\varphi}, \quad \overline{S} = S. \tag{4.130}$$

Используя эти обозначения, уравнения равновесия (4.128) можно переписать так:

$$\begin{aligned}
&а) \quad \frac{\partial \overline{N}_1}{\partial x} + \frac{\partial \overline{S}}{\partial y} + p_1 = 0; \\
&б) \quad \frac{\partial \overline{S}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{N}_2}{\partial y} + p_2 = 0; \\
&в) \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\overline{N}_1 tg\varphi\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\overline{N}_2 tg\varphi\right) + \\
&\qquad + \frac{\partial}{\partial y}\left(\overline{S}\, tg\varphi\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\overline{S}\, tg\psi\right) + p_3 = 0.
\end{aligned} \tag{4.131}$$

Полученная система уравнений (4.131) равноценна системе уравнений (4.128). Усилия $\overline{N}_1, \overline{N}_2, \overline{S}$ представляют собой горизонтальные проекции усилий N_1, N_2, S.

Третье уравнение системы можно переписать, введя значения тангенсов из равенств (4.129):

$$\overline{N}_1 \frac{d^2 z}{dx^2} + 2\overline{S} \frac{d^2 z}{dxdy} + \overline{N}_2 \frac{d^2 z}{dy^2} = -p_3 - \left(\frac{\partial \overline{N}_1}{\partial x} + \frac{\partial \overline{S}}{\partial y}\right)\frac{\partial z}{\partial x} + p_2 \frac{\partial z}{\partial y}. \tag{4.132}$$

Учитывая (4.131, а) и (4.131, б), это уравнение можно записать в форме:

$$\overline{N}_1 \frac{d^2 z}{dx^2} + 2\overline{S} \frac{d^2 z}{dxdy} + \overline{N}_2 \frac{d^2 z}{dy^2} = -p_3 - p_1 \frac{\partial z}{\partial x} + p_2 \frac{\partial z}{\partial y}. \tag{4.132}$$

Система уравнений (4.131, а), (4.131, б) и (4.133) приводится к одному дифференциальному уравнению второго порядка.

Действительно, уравнения (4.131, а) и (4.131, б) совпадают с уравнениями плоской задачи теории упругости. Известно, что эти уравнения будут тождественно удовлетворены, если ввести функцию напряжений, связанную с и следующими выражениями:

$$\overline{N}_1 = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \int p_1 dx; \quad \overline{N}_2 = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \int p_2 dy;$$
$$\overline{S} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}. \tag{4.134}$$

Подставляя эти соотношения в третье уравнение равновесия, получим основное разрешающее уравнение для произвольной безмоментной оболочки:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} =$$
$$= -p_3 + p_1 \frac{\partial z}{\partial x} + p_2 \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \int p_1 dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \int p_2 dy. \tag{4.135}$$

Решив это уравнение и удовлетворив граничным условиям в соответствии с равенствами (4.134), получим искомые значения усилий из (4.130):

$$N_1 = \overline{N}_1 \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}},$$
$$N_2 = \overline{N}_2 \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}}, \tag{4.136}$$
$$S = +\overline{S}.$$

После того, как определены косые усилия N_1, N_2 и S, желательно определить направления главных напряжений.

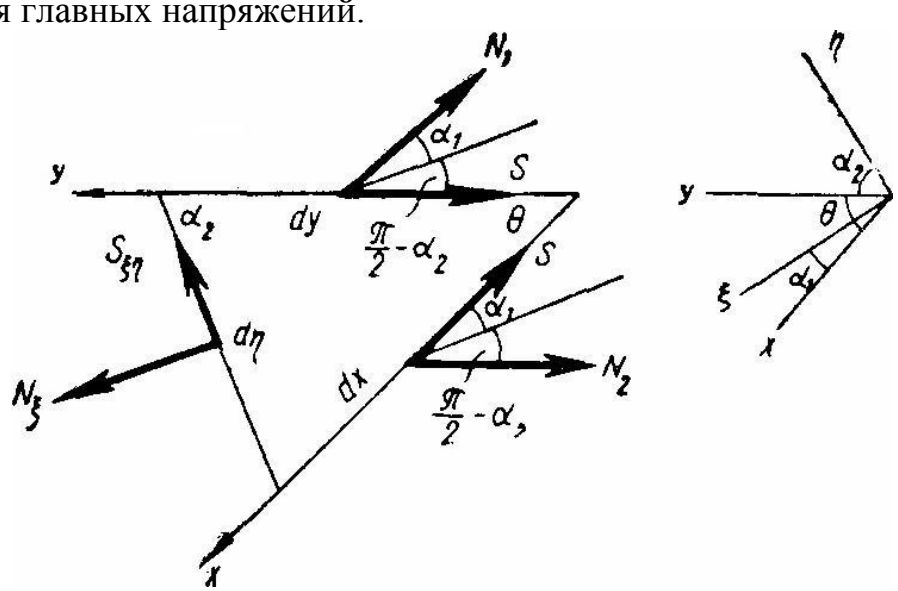


Рис. 4.16

Выделим из оболочки треугольный элемент (рис. 4.16), две стороны которого соответствуют *dx* и *dy*, а одна сторона параллельна одной из осей новой прямоугольной системы координат η. Из условий равновесия показанного

треугольника получим:

$$N_{\xi}\sin\theta = N_1\cos^2\alpha_1 + N_2\sin^2\alpha_2 + 2S\cos\alpha_1\sin\alpha_2,$$

$$S_{\xi\eta}\sin\theta = N_1\cos\alpha_2\sin\alpha_2 - N_1\cos\alpha_1\sin\alpha_1 + S\left(\cos\alpha_1\cos\alpha_2 - \sin\alpha_1\sin\alpha_2\right).$$

Из условия равновесия другого треугольного элемента оболочки, одна из сторон которого параллельна оси ξ новой системы координат, можно определить $N\eta$:

$$N_{\eta}\sin\theta = N_1\sin^2\alpha_1 + N_2\cos^2\alpha_2 - 2S\sin\alpha_1\cos\alpha_2.$$

На главной площадке $S_{\xi}\eta=0$. Это дает нам условие для определения неизвестных углов α_a и a_b, определяющих положение главной площадки:

$$tg2\alpha_a = \frac{N_2\sin 2\theta + 2S\sin\theta}{N_1 + N_2\cos 2\theta + 2S\cos\theta},$$

$$tg2\alpha_b = -\frac{N_1\sin 2\theta + 2S\sin\theta}{N_2 + N_1\cos 2\theta + 2S\cos\theta}. \qquad (4.137)$$

Задача об определении внутренних усилий в произвольной оболочке, связанная с интегрированием уравнения (4.135), решена лишь для некоторых классов оболочек.

Мы рассмотрим здесь одно из решений, представляющее интерес для строителей. Интересующихся решением других задач отсылаем к книге Флюгге «Статика и динамика оболочек», в которой дано обстоятельное исследование некоторых классов оболочек $z=f(x,y)$.

2. Расчет эллиптического параболоида на постоянную вертикальную нагрузку

Рассматриваемый в этом параграфе эллиптический параболоид принадлежит к классу оболочек, обрисованных по поверхности переноса (рис. 4.17, *а).*

Уравнение поверхности переноса в общем виде имеет форму:

(4.138)

Для этих оболочек уравнение (4.135) упрощается, так как смешанная производная от z по x и y обращается в нуль.

Предположим, что некоторый эллиптический параболоид перекрывает прямоугольную в плане поверхность размером $2a\times 2b$. Уравнение поверхности оболочки имеет вид

(4.139)

где f— стрела подъема оболочки.

Расчет ведется на вертикальную нагрузку

(4.140)

отнесенную к единице площади проекции оболочки. Подставляя значения z и p_3 в (4.135), получим основное уравнение задачи

(4.141)

Предположим, далее, что края оболочки прикреплены к опорным аркам так, что усилия N_1 и N_2 равны нулю

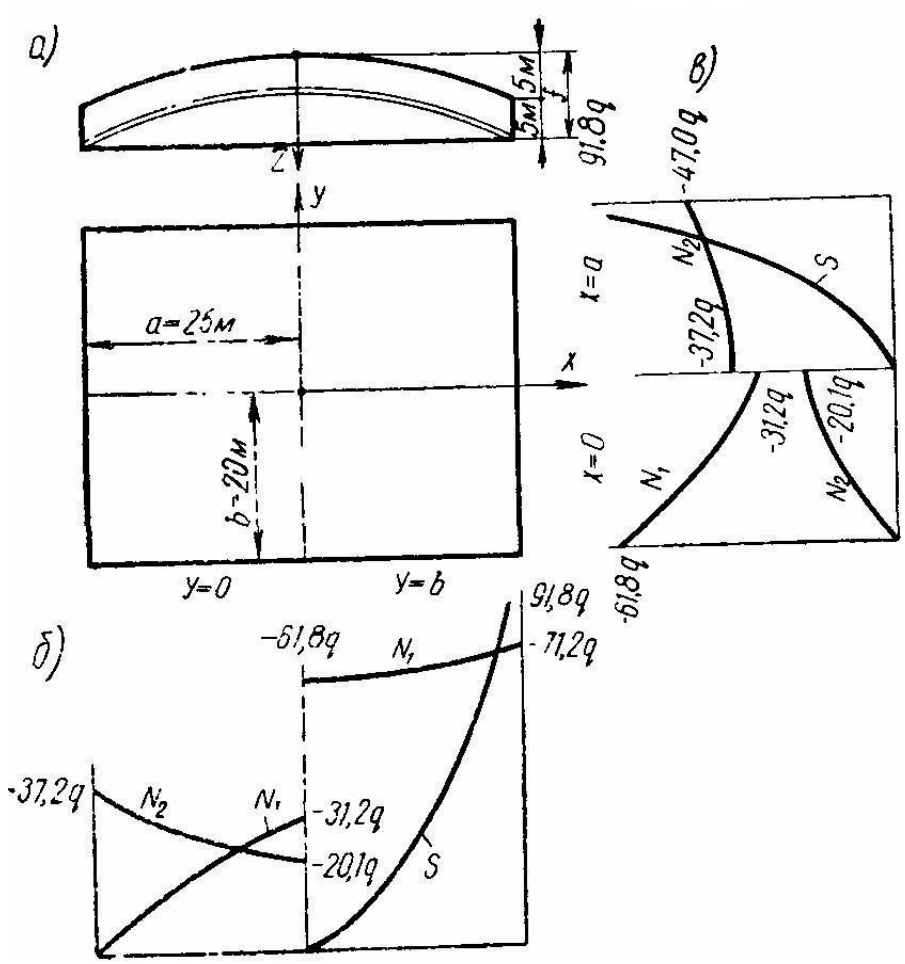


Рис. 4.17

и нагрузка передается на опоры лишь за счет сдвигающих сил. Такое опирание можно сравнить со свободным опиранием плит.

Выразим эти граничные условия через Ф. Учитывая равенства (4.134), запишем:

$$\begin{aligned} &\text{при } x=\pm a \quad N_1=0, \quad \text{т.е.} \quad а)\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=0, \\ &\text{при } x=\pm a \quad N_2=0, \quad \text{т.е.} \quad б)\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}=0. \end{aligned} \tag{4.142}$$

Представим решение уравнения в следующем виде:

$$\begin{aligned} &\Phi=\sum C_n \cos\alpha_n x\, ch\beta_n y-\frac{q}{2f}b^2x^2, \\ &n=1,3,5,\ldots, \quad \alpha_n=\frac{n\pi}{2a}, \quad \beta_n=\frac{n\pi}{2b}, \end{aligned} \tag{4.143}$$

где первый член выражения является решением однородной задачи, удовлетворяющим граничным условиям на краях $x=\pm a$, второй член—частное решение, удовлетворяющее уравнению (4.141), но не удовлетворяющее граничным условиям.

Постоянные C_n определим из условия, чтобы решение Ф удовлетворяло заданным граничным условиям.

По функции Ф можем определять $\overline{N}_1, \overline{N}_2$ и $\overline{S}$:

$$\overline{N}_1 = \frac{\pi^2}{4b^2}\sum_n n^2 C_n \cos\alpha_n x\, ch\beta_n y,$$

$$\overline{N}_2 = -\frac{\pi^2}{4a^2}\sum_n n^2 C_n \cos\alpha_n x\, ch\beta_n y - \frac{qb^2}{f}, \qquad (4.144)$$

$$\overline{S} = -\frac{\pi^2}{4ab}\sum_n n^2 C_n \sin\alpha_n x\, sh\beta_n y.$$

Граничные условия (4.142) относительно N_1 выполняются, так как $(\cos\alpha_n x)_{x=\pm a} = 0$.

Поэтому C_n определяем из условия (4.142, б):

$$\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\right)_{y=b} = -\frac{\pi^2}{4a^2}\sum_n n^2 C_n \cos\alpha_n x\, ch\beta_n y - \frac{qb^2}{f}. \qquad (4.145)$$

Разложим $-\frac{qb^2}{f}$ в ряд Фурье

$$-\frac{qb^2}{f} = \sum a_n \cos\alpha_n x,$$

где

$$a_n = \frac{2}{a}\int_0^a \left(-\frac{qb^2}{f}\right)\cos\frac{n\pi x}{2a} = -\frac{4qb^2}{\pi f}\cdot\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2.} \qquad (4.146)$$

Тогда

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = \sum_n\left(-\frac{\pi^2}{4a^2}n^2\, ch\beta_n b C_n - \frac{4qb^2}{\pi f}\cdot\frac{1}{n}\sin\frac{\pi n}{2}\right)\cos\alpha_n x. \qquad (4.147)$$

Это выражение может быть равно нулю только в случае, если

$$C_n = -\frac{16qa^2b^2\sin\frac{\pi n}{2}}{n^3\pi^3 f\, ch\frac{\pi n}{2}}. \qquad (4.148)$$

Определив C_n, подставим его в выражения (4.144). Зная компоненты горизонтальных проекций усилий, нетрудно определить и сами усилия по формулам (4.136).

На рис. 4.17, *б* и *в* показаны эпюры усилий в оболочке.

§ 10. Расчет мягких пневматических оболочек

Немалый интерес представляет расчет мягких оболочек, которые с каждым годом находят все большее применение в строительной практике.

Мягкой называют оболочку, толщина которой на несколько десятичных порядков меньше других ее размеров. Естественно, что такая оболочка не

может сопротивляться изгибу и является безмоментной. Однако вследствие своей сверхмалой жесткости оболочка не может «без посторонней помощи» иметь или сохранять свою форму, и тем более нести какую-либо нагрузку. Проектная форма и стабилизация оболочки под нагрузкой поддерживаются избыточным давлением внутри оболочки. В дальнейшем будем рассматривать лишь симметричные оболочки вращения, наполненные воздухом под давлением, так называемые воздухоопертые конструкции.

В настоящее время для поддержания пневматических оболочек используется обычно малое избыточное давление 20—80 *мм вод. ст.* Избыточное давление в 80 *мм вод. ст.* соответствует перепаду отметок на земной поверхности около 55 *м.* Такой скачок в давлении неощутим даже для весьма чувствительных людей.

Наряду с системами, стабилизируемыми избыточным давлением, имеются конструкции, в которых пневматическими являются лишь несущие элементы (балки, арки и т. п.). Такие схемы в пособии не рассматриваются.

Основное свойство мягких оболочек состоит в том, что они могут находиться в одном из двух возможных состояний. *Первое состояние* — когда усилия в главных направлениях неотрицательны. В рассматриваемых нами оболочках вращения одновременно должны быть выполнены следующие условия:

$$N_1 \geq 0, \quad N_2 \geq 0. \tag{4.149}$$

Второе состояние — когда одно из главных усилий получается сжимающим. В этом направлении образуются складки и оболочка может работать лишь в одном направлении.

В дальнейшем будем рассматривать оболочки, находящиеся в первом состоянии.

Учитывая малую толщину оболочки можно предположить, что в процессе нагружения могут возникнуть большие деформации, мы же ограничимся случаями малых деформаций. При описании деформаций мягкой оболочки необходимо различить ее начальное состояние до нагружения и конечное состояние, т. е. состояние равновесия оболочки под нагрузкой. Начальное состояние мягкой оболочки определяется лишь линейными размерами выкройки и сама форма может принимать различную конфигурацию.

При расчете мягких оболочек могут возникнуть следующие основные задачи * <<* Эти задачи сформулированы в работах С. А. Алексеева [6].>>:

1. Задана форма оболочки в конечном состоянии и действующие на нее нагрузки. Требуется найти напряжения и начальную форму.

2. По заданной начальной форме, заданным нагрузкам и условиям закрепления найти напряжения и конечную форму.

3. Задано конечное состояние оболочки: известны форма оболочки, нагрузка и напряжения. Определить новую форму и напряжения в оболочке при действии дополнительной системы нагрузок.

Рассмотрим несколько более простых, но практически важных задач.

Определим, для каких по форме оболочек вращения при действии симметрично распределенной нагрузки условия (4.149) будут выполняться.

Усилия N_1 и N_2 определяются выражениями (4.12) и (4.13). Полагаем в (4.12) q=0 и p_1=0 (оставляем лишь внутреннее давление). Тогда усилие N_1

определяется по формуле

$$N_1 = \frac{p_3}{r\sin\varphi}\int rR_1\cos\varphi\, d\varphi = \frac{p_3}{r\sin\varphi}\int r\frac{dr}{d\varphi}d\varphi = \\ = \frac{p_3}{2r\sin\varphi}\int\frac{dr}{d\varphi}\left(r^2\right)d\varphi = \frac{p_3 r}{2\sin\varphi} = \frac{p_3 R_2}{2}. \qquad (4.150)$$

Уравнение (4.13) перепишем в следующем виде:

$$N_2 = p_3 R_2\left[1-\frac{R_2}{2R_1}\right]. \qquad (4.151)$$

Из соотношений (4.150) и (4.151) можно заключить, что даже в случае равномерного внутреннего давления (p_3=const) в оболочке возможно появление меридиональных складок. Возможные формы оболочек, пригодные для пневматических конструкций, определяются соотношением

$$2R_1 > R_2 \qquad (4.152)$$

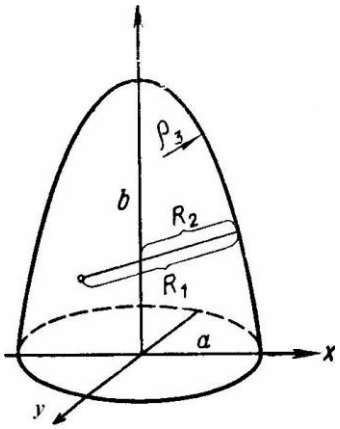


Рис. 4.18

Рассмотрим, например, случай нагружения избыточным давлением p_3 эллипсоида вращения (рис. 4.18):

$$R_1 = \frac{1}{ab^4}\sqrt{\left[b^4+\left(a^2-b^2\right)z^2\right]^3},$$

$$R_2 = \frac{a}{b^4}\sqrt{b^4+\left(a^2-b^2\right)z^2}.$$

По формулам (4.150) и (4.151) определим мембранные усилия:

$$N_1 = \frac{p_3 a}{2b^3}\sqrt{b^4+\left(a^2-b^2\right)z^2}, \\ N_2 = \frac{p_3 a}{b^2}\sqrt{b^4+\left(a^2-b^2\right)z^2}\left[1-\frac{a^2b^2}{2\left[b^4+\left(a^2-b^2\right)z^2\right]}\right]. \qquad (4.153)$$

Усилия N_1 и N_2 будут положительны всегда при выполнении условия (4.152)

$$\frac{2R_1}{R_2} = 2\frac{b^4+\left(a^2-b^2\right)z^2}{a^2b^2} > 1.$$

Это условие выполняется всегда при $b>a$. В этом случае оболочка имеет сигарообразную форму. При $b<a$ (линзообразная форма) усилие N_z становится сжимающим уже при $b<a/\sqrt{2}$. Таким образом линзообразный эллипсоид непригоден для использования в пневматических конструкциях.

Рассмотрим задачу о сферической оболочке, нагруженной собственным весом. При внутреннем избыточном давлении p в ней возникают растягивающие усилия

$$N_1 = N_2 = \frac{pR}{2}.$$

Усилия, возникающие в оболочке от собственного веса, определяются формулами (4.15) и (4.16).

Определим необходимую величину внутреннего давления p таким образом,

чтобы была исключена возможность появления сжимающих усилий:

$$N_1 = N_1^p + N_1^q = \frac{pR}{2} - \frac{qR}{1+\cos\varphi} > 0,$$

$$N_2 = N_2^p + N_2^q = \frac{pR}{2} - qR\left(\cos\varphi - \frac{1}{1+\cos\varphi}\right) > 0.$$

Так как всегда имеет место соотношение

$$-\frac{1}{1+\cos\varphi} < -\cos\varphi + \frac{1}{1+\cos\varphi},$$

то в оболочке главные усилия будут только положительными, если $N_1>0$. Это имеет место, если выполняется условие

$$p > \frac{2q}{1+\cos\varphi_0}. \qquad (4.154)$$

Здесь φ_0—половина угла раствора, сферической оболочки (см. рис. 4.5).

Как видно из формулы (4.154) избыточное давление p не зависит от размеров оболочки, но сильно возрастает с увеличением угла раствора оболочки 2 φ_0. Вычисленное по формуле (4.154) избыточное давление p обеспечивает постоянное превосходство растягивающих усилий над сжимающими от нагрузки собственного веса. Однако в сферической оболочке, начиная с угла φ =51°49' (§ 4, глава II), появляются растягивающие кольцевые усилия N_2^q от нагрузки q. Они складываются с растягивающими усилиями N_2^q и эта сумма может достичь значительной величины. При минимальном избыточном давлении, определяемом по (4.154), суммарные усилия в оболочке определяются по формулам:

$$N_1^{p+q} = \frac{pR}{2} - \frac{qR}{1+\cos\varphi} \geq qR\left(\frac{1}{1+\cos\varphi_0} - \frac{1}{1+\cos\varphi}\right),$$

$$N_2^{p+q} = \frac{pR}{2} - qR\left[\cos\varphi - \frac{1}{1+\cos\varphi}\right] \geq qR\left[\frac{1}{1+\cos\varphi_0} + \frac{1}{1+\cos\varphi} - \cos\varphi\right]. \qquad (4.155)$$

Из формул (4.155) видно, что $N_2^{p+q} > N_1^{p+q}$. Усилие N_2^{p+q} достигает максимального значения по краю оболочки при $\varphi = \varphi_0$

$$N_{2\max}^{p+q} \geq qR\left[\frac{2}{1+\cos\varphi_0} - \cos\varphi_0\right].$$

Определим максимальный радиус сферической пневматической оболочки из условия, что $N_{2max} \leq N_{доп}$, где $N_{доп}$ —допустимое погонное усилие для материала, из которого изготовлена оболочка. Для современных материалов $N_{доп} \approx 30$ *кГ/см* при q = 1 *кГ/м*^{2}. Для случая, когда на нижней грани меридиональные усилия N_1^{p+q} отсутствуют ($\varphi = \varphi_0$), можно записать

$$qR\left[\frac{2}{1+\cos\varphi_0} - \cos\varphi_0\right] = N_{доп}$$

и

$$R_{\max} = \frac{N_{доп}}{q\left[\frac{2}{1+\cos\varphi_0} - \cos\varphi_0\right]} \qquad (4.156)$$

Таким образом для теоретически допустимого наибольшего радиуса сферических оболочек получим формулу

$$R_{\max} = \frac{3000}{\frac{2}{1+\cos\varphi_0} - \cos\varphi_0}.$$

Для $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ (полусфера) получим R*max*=l500 *м*; при меньших угла раствора R*max* имеет большие значения. Теоретический максимальный радиус быстро уменьшается с увеличением угла раствора φ_0, так при $\varphi_0 = \frac{3}{2}\pi$ R*max*=398 *м*.

Необходимое внутреннее давление устанавливается большим, чем по формуле (4.156), а радиус меньшим, так как следует учитывать еще ветровую нагрузку, снег, действие которых значительнее собственного веса. Нужно учитывать и то обстоятельство, что современные материалы на основе полимеров подвергаются старению и допускаемые усилия со временем уменьшаются.

Более подробные сведения по расчету пневматических конструкций и мягких оболочек можно получить в работах [6], [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. Жемочкин Б.Н. Теория упругости. Госстройиздат, 1957.
2. Горбунов-Посадов М.И. Расчет конструкций на упругом основании. Госстройиздат, 1953.
3. Гольденвейзер А.Н. Теория упругих тонких оболочек. Гостехиздат, 1953.
4. Черных К.Ф. Линейная теория оболочек. Издательство ЛГУ, 1 том-1962, 2 том-1964.
5. Колкунов Н.В. К расчету тонкостенной гиперболической градирни. НДВШ «Строительство», №2, 1959.
6. Алексеев С.А. Задачи статики и динамики мягких оболочек. Труды VI Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластинок. «Наука», 1966.
7. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. Физматгиз, 1961.